ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Des armes du Moyen Age : mangonneau et trébuchet

Frédéric Élie

août 2007, nouvelle édition juin 2017

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Parmi les armes de jet du Moyen Age, fort nombreuses, servant au siège et à l'attaque des forteresses et des cités, le mangonneau et le trébuchet figuraient comme les plus redoutables. Basés sur le principe du mouvement de rotation d'une poutre de bois, la verge, imprimé par le basculement d'un contrepoids, ces armes ne doivent pas être confondues avec les catapultes ou les balistes, lesquelles utilisaient l'énergie libérée par la tension élastique de ce que l'on pourrait comparer à un arc ou une arbalète géants. La verge entraîne une fronde libérant un projectile, un boulet, qui va parcourir une trajectoire parabolique d'assez grande portée (plusieurs centaines de mètres). Le mangonneau et le trébuchet sont de conception très voisine à ceci près que, pour le mangonneau, le contrepoids est fixe et bascule en même temps que la verge, tandis que dans le trébuchet, il est articulé à la verge de telle sorte que, lorsque celle-ci bascule, il conserve une position verticale ; ce dernier dispositif permet au trébuchet de projeter le boulet en minimisant les à-coups lors du mouvement de rotation de la verge.
Le présent article n'a pas vocation de présenter ces armes dans le détail ni d'un point de vue historique : à ces fins, je renvoie aux sites spécialisés, notamment celui http://medieval.mrugala.net ainsi que les travaux de Renaud Beffeyte. Notre article propose d'essayer de comprendre le fonctionnement de ces machines de guerre du seul point de vue de la Mécanique du Solide, donc en recourant à la modélisation mathématique du problème. A partir d'elle il est possible de prédire la portée de maquettes de ces engins (non reproduites ici) pour les amateurs désireux de joindre les plaisirs du calcul à ceux de l'art technique médiéval. D'ailleurs, on verra très vite que les modélisations mécaniques de ces engins aboutissent à des formules assez rebutantes et font appel à tous les principes fondamentaux de la Dynamique du Solide, ce qui offre déjà en soi une belle révision dans ce domaine. Pourtant les ingénieurs (« ensgeniors ») du Moyen-Age, période pas aussi obscure qu'on voudrait le laisser croire, parvenaient à concevoir ces engins sans pratiquement aucun calcul et à l'aide de la géométrie classique héritée des Grecs (Pythagore, Thalès…), et obtenaient des performances et des précisions qui nécessitent aujourd'hui l'aide de l'ordinateur pour être retrouvées…
NB : Cette nouvelle édition modifie une très grande partie de l'édition 2007, et corrige les nombreuses erreurs de calculs qui m'ont été signalées par Monsieur Aurélien Ferry, que je remercie ici. En effet, il y avait principalement des incohérences sur les orientations des vecteurs, des erreurs de signes, des incohérences sur les dimensions dans les équations (par exemple d'un côté une accélération et de l'autre une vitesse angulaire au carré...), sans compter une méthodologie assez confuse ainsi qu'une inflation d'hypothèses. J'avoue qu'autant de négligences ont fait de la version initiale de 2007 le plus mauvais article de mon site, et je ne m'explique pas encore ce bâclage. Cependant, j'ai toujours eu l'intuition que je devrai le reprendre un jour ou l'autre. Enfin, je sais que de nombreux étudiants se sont appuyés sur la version initiale pour leurs travaux (TIPE...), et j'espère qu'ils sont restés vigilants ; je veux aussi leur exprimer ici mes excuses.

SOMMAIRE :

1 - Présentation succincte du mangonneau et du trébuchet (d'après Renaud Besseyte, « les machines de siège au moyen-âge » et le site http://medieval.mrugala.net)

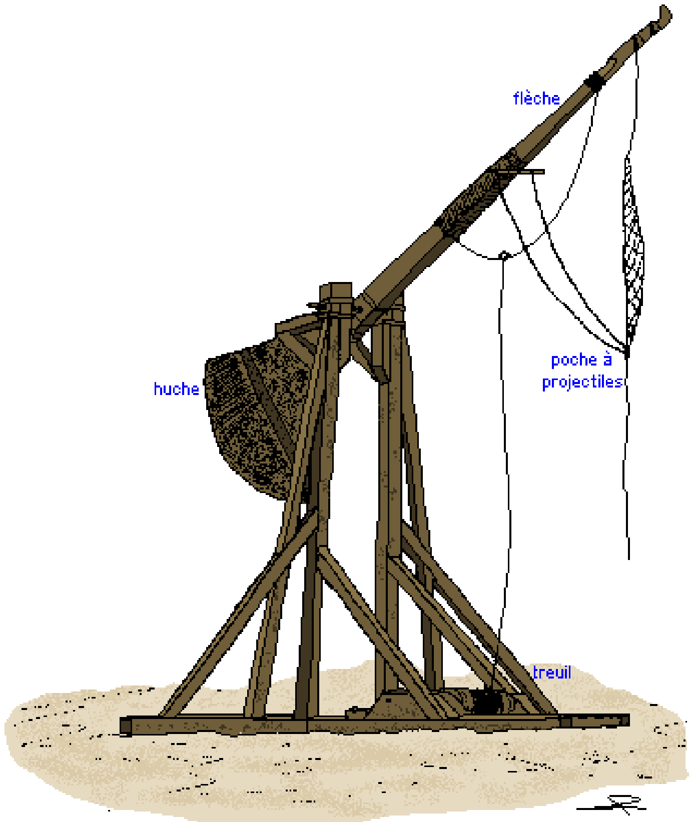
1-1 - Mangonneau

Le mangonneau est une machine de jet à contrepoids fixe formé d'une huche enfermant une masse de terre ou de pierres (voir figure ci-dessous). Il fut utilisé du douzième au quinzième siècles, et pouvait lancer des boulets de 100 kg avec une portée de 150 mètres.

Le contrepoids pouvait peser plusieurs tonnes, et comme il était fixe, cette masse énorme rendait laborieux le réarmement de l'engin : plusieurs hommes (une douzaine) étaient nécessaires pour ramener l'extrémité de la verge (ou flèche) au sol de façon à obtenir le contrepoids en position haute. Très souvent, pour cela, les mangonneaux étaient équipés d'un gigantesque treuil à roue, appelé « roue de carrier », actionné par les hommes. Avec ce système, deux réarmements par heure seulement étaient possibles.
Lorsque le mât est libéré, le contrepoids bascule et trouve sa position d'équilibre au plus près du sol. Sa vitesse de rotation, et donc celle de la verge, est élevée. A l'extrémité du mât, une fronde terminée par une poche à projectiles, est attachée. La fronde est entraînée avec une vitesse relativement élevée par la rotation de la verge, et communique une vitesse initiale au projectile lui permettant des portées de 150 mètres.

Les mangonneaux manquaient de précision à cause du fait que le contrepoids était fixe : en effet, la terre ou les pierres disposées dans la huche se déplacent au cours de la rotation, provoquant un balourd à la fois néfaste pour le tir et pour la tenue mécanique de l'engin.

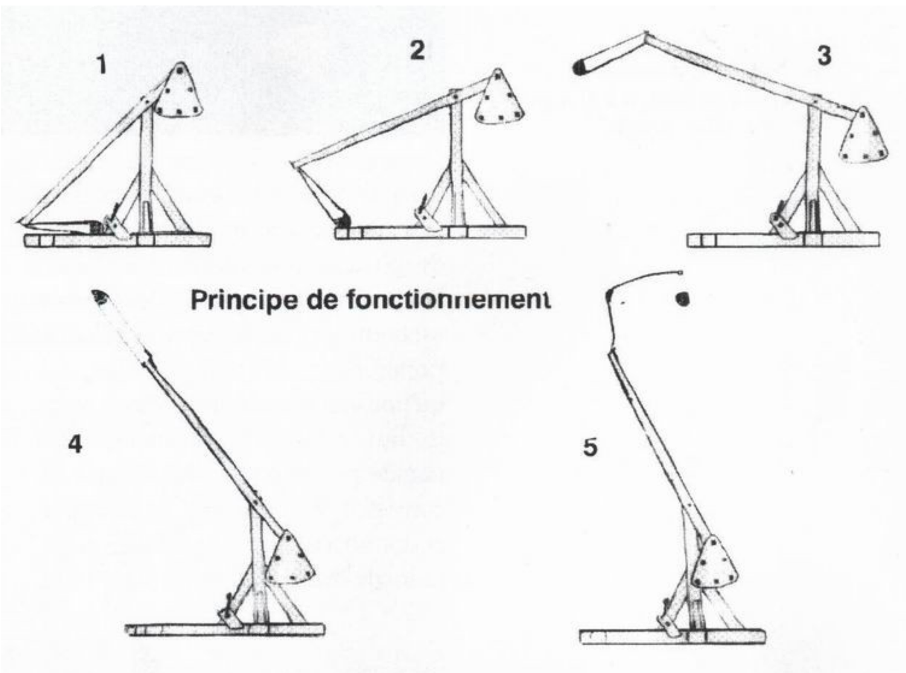
C'est pour remédier à cet inconvénient que l'on eut l'idée d'utiliser un contrepoids articulé, comme c'est le cas du trébuchet : la masse de la huche ne se déplace plus puisque elle conserve une orientation constante. En outre, comme je crois le déceler dans les calculs que je vais présenter plus bas, il semblerait que l'utilisation d'un contrepoids articulé permet d'atteindre une vitesse maximale de jet plus rapidement…



Dessin issu de : http://medieval.mrugala.net

1-2 - Trébuchet

Le trébuchet obéit au même principe que le mangonneau, mais avec un contrepoids articule (voir dessin ci-après), ce qui permet d'éviter les à-coups lors du tir. Il fut utilisé du douzième au seizième siècle.
Sa portée moyenne était de 200 mètres pour des boulets d'une centaine de kilogrammes. La longueur de la verge est de l'ordre de 10 à 12 mètres, et la masse du contrepoids est de 5 à 6 tonnes. La verge était faite en bois de sorbier pour ses propriétés de non déformabilité.



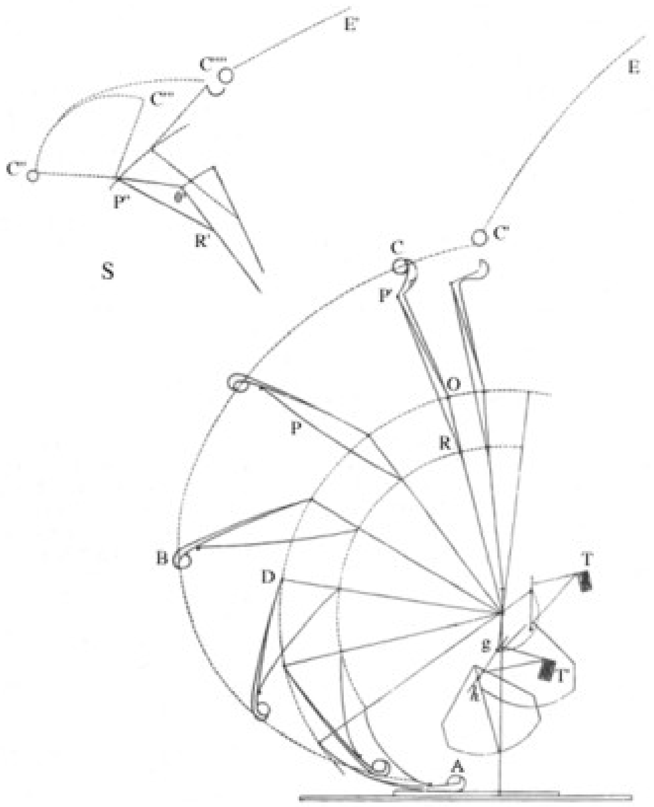
Dessin issu de « les machines de siège au Moyen-Age » de Renaud Beffeyte

Malgré l'apparente simplicité du mouvement de la verge et de la fronde conduisant au tir du projectile, le mangonneau et le trébuchet, dans leur fabrication, étaient des engins élaborés. La fabrication devait tenir compte de certains problèmes pratiques comme, par exemple:

- comment prévenir les vibrations, parfois destructrices, du contrepoids lorsqu'il descend brusquement à son point le plus bas ? Un système de bielles était installé pour cela (voir Wikipedia pour plus de détails).
- Comment faire en sorte que la poche de fronde lâche le projectile dans la bonne direction, c'est-à-dire vers l'ennemi, et non pas au-dessus des servants ou vers l'arrière ? Voici quelques éléments de réponse succincts à ce problème (issus de l'encyclopédie libre en ligne Wikipedia), ayant trait au mouvement de la fronde :

1-3 - Mouvement de la fronde et libération du boulet (cf. Wikipedia)

Se reporter à la figure ci-après.
Après avoir été libérée, la verge, sous l'action du contrepoids, se redresse pour prendre la position verticale, qui est la position d'équilibre mécanique du système. Au cours de ce mouvement de rotation de la verge, le projectile contenu dans la poche de fronde, décrit la courbe ABC. A un moment précis la fronde est parfaitement alignée avec la verge : la fronde est perpendiculaire à l'arc de cercle parcouru par la verge. On démontre (voir mes calculs plus loin), qu'à ce moment précis la vitesse de jet du boulet est maximale. Sous l'effet de la force centrifuge, proportionnelle à la longueur totale de la verge et de la fronde, le projectile s'échappera avec une vitesse élevée.
Le point de l'arc de cercle où l'alignement verge-fronde sera obtenu est d'autant plus bas (atteint plus tôt) que la longueur de la fronde est petite : en effet, dans ce cas, la fronde effectue une rotation autour de son point d'attache plus rapide que celle de la verge, donc elle atteindre le point de prolongement plus tôt que si elle est plus longue. Dans ce cas d'une fronde trop courte, le boulet va donc s'échapper vers l'arrière, ce qui n'est pas vraiment ce qui est recherché !
Le boulet doit partir vers l'avant lorsque l'alignement de la fronde et de la verge est obtenu quand elles sont en position verticale. Pour obtenir ce résultat, il fallait donc calculer une longueur suffisante de la fronde.
Malheureusement, la chose est un peu plus compliquée encore : dans cette position verticale, l'orientation de la poche de fronde est tournée vers le haut, ce qui fait que, dans ce cas, le boulet part non pas à l'horizontale mais à la verticale, montant puis retombant sur la tête des servants ! Il fallait donc trouver un moyen pour imprimer à la poche de fronde un mouvement tel que le projectile parte horizontalement vers l'avant.
Ce changement d'orientation de la poche de fronde était déclenché par une secousse provoquée grâce à un sous-tendeur P (voir figure).
Lorsque le projectile est lâché au moment où le sous-tendeur se tend et arrête brusquement la rotation de la fronde, il prend une trajectoire parabolique C'E. Or cet arc de parabole est moins prononcé, donc proche d'une horizontale, lorsque le sous-tendeur, fixé en R à la verge, est fixé sur la fronde en P' le plus près possible du point d'attache de la fronde sur la verge. Ainsi, pour assurer un tir horizontal vers l'avant, on a intérêt à raidir le sous-tendeur et à l'attacher sur la fronde au plus près de son point d'attache à la verge ; une fixation trop proche de la poche conduirait à obtenir un tir avant que l'on ait atteint la position verticale, et donc dirigé plutôt vers l'arrière.



dessin d'après Wikipedia

2 – Relations fondamentales de dynamique du solide

2-1 – Géométrie du problème

Que ce soit pour le mangonneau ou le trébuchet, la géométrie du problème et l'orientation des vecteurs de base sont celles de la figure 1 ci-après.

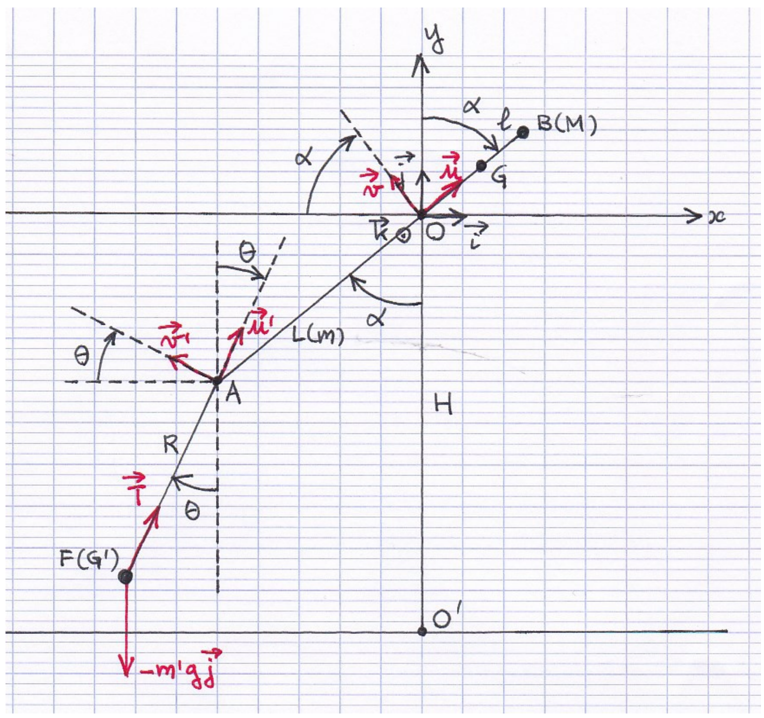


Figure 1 – géométrie et notations du problème (la configuration est celle du mangonneau, mais celle du trébuchet consiste en une modification au niveau du point B comme on le verra au point 5)

La modélisation du mangonneau et du trébuchet est une application assez complète de dynamique du solide. Pour simplifier l'écriture dans le texte, les grandeurs vectorielles seront écrites en gras. Dans les formules, elles seront écrites normalement (avec des flèches).
Nous aurons besoin, tout au long de l'article, des grandeurs vectorielles suivantes :

Base du référentiel galiléen (fixe) orthonormé (O, ***i, j, k***) : le troisième vecteur ***k*** perpendiculaire au plan Oxy est donné par : $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$.

Base du référentiel mobile en O, orthonormé (O, ***u, v, k***) :

$$\vec{u}=\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}$$
$$\vec{v}=-\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{k}$$

Base du référentiel mobile en A, orthonormé (A, ***u', v', k***) :

$$\vec{u}\,'=\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{v}\,'=-\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{u}\,'\wedge\vec{v}\,'=\vec{k}$$

Tension de la fronde : $\vec{T}=T\,\vec{u}\,'$
Position du point d'attache A de la fronde à l'axe de rotation fixe O : $\vec{OA}=-L\vec{u}$
Le centre d'inertie de la fronde G' est supposé confondu avec le boulet F, sa position par rapport à l'axe de rotation mobile A est : $\vec{AG}\,'=\vec{AF}=-R\vec{u}\,'$; la masse du tronçon AF est donc supposée négligeable et la masse du boulet en F est m'.
Le centre d'inertie de la verge BOA est G.
Le tronçon OA est de masse m ; le tronçon OB est de masse négligeable, la masse étant concentrée dans le contrepoids (ou huche) B (masse M).
Position de la huche B par rapport au centre fixe de rotation O : $\vec{OB}=l\vec{u}$

Le mangonneau est l'ensemble du solide BOAF formé de l'union d'un pendule simple AF lié en A (axe mobile) et du pendule composé BOA en rotation autour de l'axe O**k**. Le cas du trébuchet est semblable sauf qu'à la place de la huche B est fixé un contrepoids qui conserve sa position verticale (voir point 5).

Les équations du mouvement seront alors obtenues en appliquant le principe fondamental de le dynamique (PFD) d'une part au pendule simple AF, relativement à A (donc dans le référentiel mobile), et d'autre part à l'ensemble du solide BOAF, relativement à O (donc dans le référentiel galiléen) : ces équations différentielles en α et θ mettront en évidence des termes de couplage entre ces deux systèmes.
Pour ce faire, on rappelle ci-après les principes généraux de la dynamique du solide ([1]).

2-2 - Champ de vitesse d'un solide (équiprojectivité)

Soit un solide (S) et deux points M et M' qui lui sont solidaires (voir figure 2 ci-après).
Connaissant la vitesse de l'un d'entre eux, disons **V**(M) de M, on veut savoir quelle est la

---

1 De manière générale, on s'efforcera toujours d'expliciter dans les calculs le référentiel considéré, la partie du solide concernée, et le point par rapport auquel on exprime les moments cinétique, dynamique et des forces extérieures. Par exemple, l'écriture $[\vec{\sigma}_A(AF)]_R$ signifie moment cinétique du solide AF par rapport au point A calculé dans le référentiel (R).
Par ailleurs, il est conseillé à chaque étape d'écriture des formules de vérifier la cohérence des dimensions, cela évite des erreurs qui risquent de s'accumuler d'autant que l'on a affaire à des calculs assez longs comme c'est le cas ici.

vitesse **V**(M') de M'.

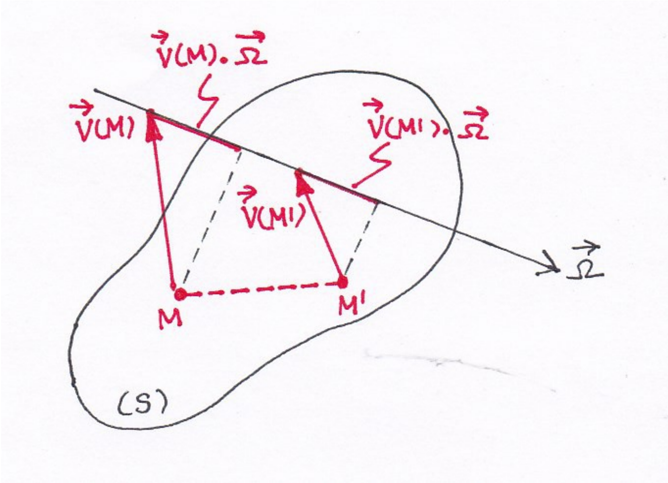


figure 2 : équiprojectivité du champ de vitesse

Par définition d'un solide, la distance de deux points M et M' est constante lors du mouvement du solide puisque un solide est indéformable. On a donc :

$$\|\overrightarrow{MM}'\| = constante \rightarrow \overrightarrow{MM}'^2 = constante \rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{MM}'^2 = 0 \rightarrow \overrightarrow{MM}' \cdot \frac{d\,\overrightarrow{MM}'}{d\,t} = 0$$

Il existe donc un vecteur **Ω** tel que :

$$\frac{d\,\overrightarrow{MM}'}{d\,t} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM}'$$

puisque, en effet, **u.(v ∧ u)** = 0. Or : **MM'** = **OM'** – **OM**, et d/dt (**MM'**) = d/dt **OM'** – d/dt **OM** = **V**(M') – **V**(M), d'où la relation fondamentale :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM}' \quad (1)$$

La relation (1) définit la propriété d'équiprojectivité : la projection des vecteurs vitesse **V**(M') et **V**(M) sur le vecteur **Ω** a même valeur :

$$\vec{V}(M') \cdot \vec{\Omega} = \vec{V}(M) \cdot \vec{\Omega}$$

2-3 - Quantité de mouvement en un point M du solide (S) et moment cinétique par rapport à un point A du point M dans le repère (R)

La quantité de mouvement du point M est la quantité vectorielle :

$$\vec{P}(M) = m\,\vec{V}(M)$$

où m est la masse en M et **V**(M) sa vitesse.

Le moment cinétique en A du point M, dans le repère (R), est la quantité vectorielle :

$$\vec{\sigma}_A(M) = m\,\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P}(M)$$

On définit la quantité d'accélération de M par la grandeur vectorielle :

$$\vec{D}(M) = m\,\vec{\Gamma}(M)$$

où Γ(M) = d**V**(M)/dt est l'accélération en M dans le repère (R).

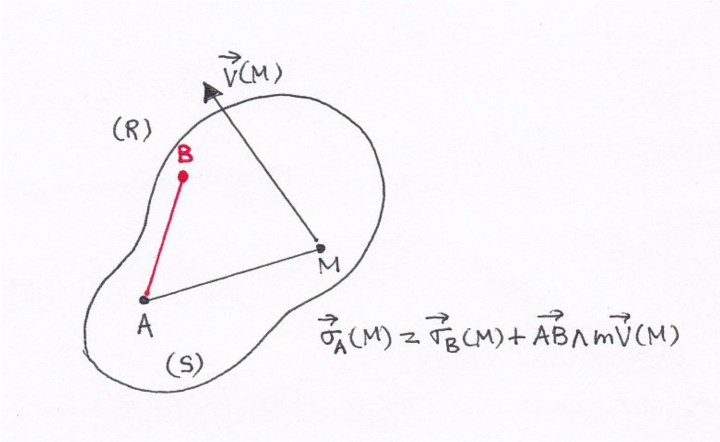


figure 3 : transformation du moment cinétique d'un point M par rapport à deux points A et B

Le moment dynamique par rapport au point A de la quantité d'accélération de M est la quantité vectorielle :

$$\vec{\delta}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{D}(M)$$

Si le solide est un milieu continu de masse volumique ρ(M) variable d'un point à l'autre, les quantités précédentes pour l'ensemble du solide sont données par les intégrales de volume :

Quantité de mouvement : $\vec{P}(S) = \iiint_{(S)} \vec{V}(M)\rho(M)dv(M)$

Quantité d'accélération : $\vec{D}(S) = \iiint_{(S)} \vec{\Gamma}(M)\rho(M)dv(M)$

Moment cinétique du solide en A : $\vec{\sigma}_A(S) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)\rho(M)dv(M)$

Moment dynamique du solide en A : $\vec{\delta}_A(S) = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M)\rho(M)dv(M)$

dv (M) étant le volume élémentaire au point M et vaut dv = dxdydz, les coordonnées x, y, z du point M n'étant pas indépendantes puisque le solide a une forme et un volume finis.
Si les moments cinétique et dynamique sont ramenés à un point B différent de A, on a les relations de passage (figure 3):

$$\vec{\sigma}_A(M) = \vec{\sigma}_B(M) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}(M)$$
$$\vec{\delta}_A(M) = \vec{\delta}_B(M) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}(M)$$

On le démontre aisément en décomposant **AM** = **AB** + **BM**. Ces relations de passage restent valable pour l'ensemble du solide, en remplaçant M par (S).
La donnée des grandeurs vectorielles ci-dessus définit deux torseurs, pour lesquels les réductions sont calculées en un point A :

- le **torseur cinétique**, de résultante la quantité de mouvement **P** et de moment le moment cinétique en A, $\boldsymbol{\sigma_A}$:

$$\{C_A(S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{P}(S) \\ \vec{\sigma}_A(S) \end{Bmatrix}$$

- le **torseur dynamique**, de résultante la quantité d'accélération (ou résultante dynamique) **D** et de moment le moment dynamique en A, $\boldsymbol{\delta_A}$:

$$\{D_A(S)\}=\begin{Bmatrix}\vec{D}(S)\\ \vec{\delta}_A(S)\end{Bmatrix}$$

2-4 - Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

Les éléments de réduction en A du torseur dynamique se déduisent des éléments de réduction du torseur cinétique en A par les relations :

$$\vec{D}(S)=\frac{d\vec{P}}{dt}(S) \qquad \text{(2a)}$$

$$\vec{\delta}_A(S)=\frac{d\vec{\sigma}_A(S)}{dt}+\vec{V}(A)\wedge\vec{P}(S) \qquad \text{(2b)}$$

Remarque importante : dans la relation (2b) l'égalité du moment dynamique et de la dérivée par rapport au temps du moment cinétique n'arrive que pour les cas particuliers suivants !

- si A est un point fixe O, alors : $\boldsymbol{\delta}_O$ (S) = d$\boldsymbol{\sigma}_O$ (S)/dt (évident car **V**(A) = 0)
- si A se confond avec le centre d'inertie G du solide, alors : $\boldsymbol{\delta}_G$ (S) = d$\boldsymbol{\sigma}_G$ (S)/dt. Cette dernière conclusion résulte immédiatement des propriétés du centre d'inertie G :

$$M\,\overrightarrow{OG}=\iiint_{(S)}\overrightarrow{OM}\,\rho(M)\,dv(M)$$

$$M\,\vec{V}(G)=\iiint_{(S)}\vec{V}(M)\rho(M)\,dv(M)=\vec{P}(S)$$

Démontrons l'égalité (2b) :

$$\vec{\delta}_A(S)=\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M)\rho(M)\,dv(M)=\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\rho(M)\,dv(M)$$

or on a : $\overrightarrow{AM}\wedge\frac{d\vec{V}(M)}{dt}=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M))-\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\wedge\vec{V}(M)$

Et d'autre part, on a : $\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}-\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}=\vec{V}(M)-\vec{V}(A)$

Il vient donc :

$$\vec{\delta}_A(S)=\frac{d}{dt}\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M)\rho(M)\,dv(M)-\iiint_{(S)}\vec{V}(M)\wedge\vec{V}(M)\rho(M)\,dv(M)$$
$$+\vec{V}(A)\wedge\iiint_{(S)}\vec{V}(M)\rho(M)\,dv(M)$$

Le premier terme n'est autre que d$\boldsymbol{\sigma}_A$(S)/dt, le deuxième est identiquement nul par propriété du produit vectoriel, le troisième est égal à la quantité **V**(A) $\wedge$ **P**(S). D'où le résultat.

2-5 - Principe fondamental de la dynamique pour un solide

Le solide est supposé soumis à des efforts extérieurs représentés, dans un référentiel donné, par le torseur des efforts extérieurs dont les réductions en un point quelconque A sont :

- la résultante des forces extérieures **F**(S)
- le moment des efforts extérieurs $\mathbf{M}_A$ (S) = **AG** $\wedge$ **F**(G), où G est le centre d'inertie.

Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD) :
Il existe un référentiel galiléen (R) où les réductions en un point quelconque A du torseur des efforts extérieurs à (S), sont égales à celles du torseur dynamique :
Résultante des efforts = $\vec{F}(S)_{(R)}=m\vec{\Gamma}(S)_{(R)}=\vec{D}(S)_{(R)}$ = résultante dynamique (3a)

Moment des efforts = $\vec{M}_A(S)_{(R)} = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M)_{(R)} \rho(M) dv(M) = \vec{\delta}_A(S)_{(R)}$ = moment dynamique (3b)

Conséquence calculatoire : pour déterminer les équations du mouvement d'un solide (S), il faut donc choisir un référentiel galiléen (R) dans lequel on écrit les éléments de réduction du torseur dynamique. Toujours dans (R) on fait, par ailleurs, le bilan des efforts extérieurs pour obtenir les éléments de réduction du torseur des efforts que l'on égalise au torseur dynamique par application du PFD. Le calcul du moment dynamique dans (R) nécessite souvent l'emploi de l'équation (2b) dans laquelle le moment cinétique est exprimé à l'aide des composantes du moment d'inertie et des relations de passage afférentes, comme on va le voir plus loin.
Lorsque l'on veut calculer les quantités vectorielles, quelles qu'elles soient, dans un repère (R') mobile par rapport à un repère galiléen (R), on doit utiliser la formule de la base mobile donnée ci-après (figure 4).

2-6 - Formule de la base mobile

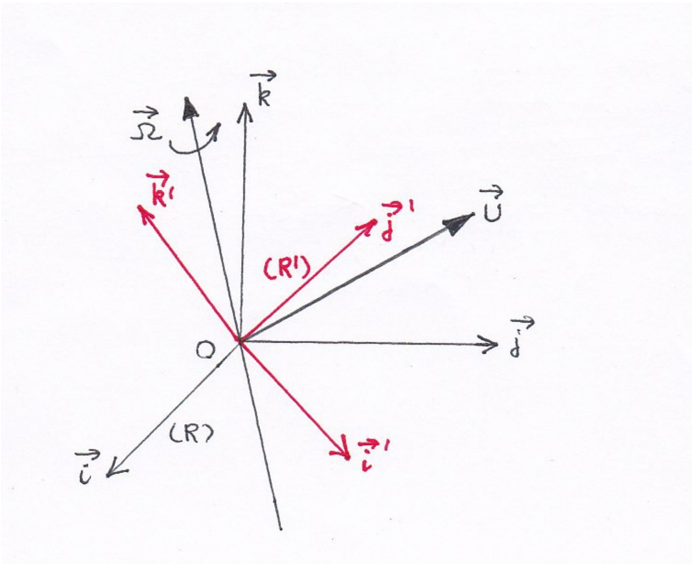


figure 4

La formule de la base mobile résulte du fait que la base (**i**, **j**, **k**) reste orthonormée lorsqu'elle se déplace sous l'effet d'une rotation d'angle instantané **Ω** pour donner la nouvelle base (**i'**, **j'**, **k'**).
En effet :
i² = **j**² = **k**² = 1 → **i**.d**i**/dt = **j**.d**j**/dt = **k**.d**k**/dt = 0
il existe donc des nombres scalaires γ, δ, σ, α, β, ξ tels que :
d**i**/dt = γ**j** + δ**k** ; d**j**/dt = σ**i** + α**k** ; d**k**/dt = β**i** + ξ**j**.
les vecteurs de base étant orthogonaux **i.j** = 0, **i.k** = 0, **j.k** = 0, on en déduit les relations entre composantes : $\xi = -\alpha$, $\beta = -\delta$, $\gamma = -\sigma$.
Introduisant le vecteur rotation instantané de composantes dans (R) : $\vec{\Omega} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$
on obtient les relations de Poisson :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \gamma\vec{j} - \beta\vec{k} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}$$
$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \alpha\vec{k} - \gamma\vec{i} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} \qquad (4)$$
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \beta\vec{i} - \alpha\vec{j} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}$$

On montre alors facilement que si (R') se déduit du repère (R) par une rotation de vitesse angulaire instantanée **Ω** (R/R'), alors pour tout vecteur **U**, son taux de variation dans le repère (R') se déduit du taux de variation dans (R) par :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{(R')} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{(R)} + \vec{\Omega}(R/R') \wedge \vec{U} \quad (5)$$

Preuve :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{(R')} = \frac{d}{dt}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)+\left(x\frac{d\vec{i}}{dt}+y\frac{d\vec{j}}{dt}+z\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$
$$=\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{(R)} + \vec{\Omega}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{(R)} + \vec{\Omega}\wedge\vec{U}$$

La formule (5) s'applique par exemple lorsqu'on veut calculer la vitesse ou l'accélération d'un mobile dans un référentiel tournant (comme un manège) lorsqu'on connaît sa vitesse ou son accélération dans le référentiel qui lui est attaché.

2-7 - Moment d'inertie du solide par rapport à un point, et expression du moment cinétique avec lui

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à un point O quelconque l'application linéaire symétrique, représentée par une matrice 3x3 symétrique, qui à un vecteur **Ω** (le vecteur rotation instantanée) fait correspondre le vecteur $[J_O(S)]\mathbf{\Omega}$ tel que :

$$[J_O(S)]\vec{\Omega} = \iiint_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Omega}(S) \wedge \overrightarrow{OM}\, \rho(M)\, dv(M) \quad (6)$$

On démontre alors facilement que les composantes de la matrice moment d'inertie sont données comme suit :

$$[J_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (6bis)$$

avec:

$$\begin{aligned} A = J_{Ox} &= \iiint_{(S)} (y^2+z^2)\rho(M)\,dv(M) \\ B = J_{Oy} &= \iiint_{(S)} (x^2+z^2)\rho(M)\,dv(M) \\ C = J_{Oz} &= \iiint_{(S)} (x^2+y^2)\rho(M)\,dv(M) \\ D &= \iiint_{(S)} yz\,\rho(M)\,dv(M) \\ E &= \iiint_{(S)} xz\,\rho(M)\,dv(M) \\ F &= \iiint_{(S)} xy\,\rho(M)\,dv(M) \end{aligned} \quad (6ter)$$

On démontre le ***théorème d'Huygens*** :
le moment d'inertie par rapport à un point A quelconque est obtenu à partir du moment d'inertie par rapport au centre d'inertie G du solide par la relation de passage :

$$[J_A(S)]\vec{\Omega} = [J_G(S)]\vec{\Omega} + m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AG} \quad (7)$$

où m est la masse totale du solide.

■ Attention ! on voit trop souvent le moment d'inertie introduit directement par la relation du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_O(S)=[J_O(S)]\vec{\Omega}$$

Cette relation n'est vraie que pour certains cas particuliers (quoique fréquents) car en général le moment cinétique en un point quelconque A est égal à :

$$\vec{\sigma}_A(S)=\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M)\rho(M)dv(M)=\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge(\vec{V}(A)+\vec{\Omega}(S)\wedge\overrightarrow{AM})\rho(M)dv(M)$$

à cause de la relation (1).

Comme on a :

$$\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(A)\rho(M)dv(M)=\left[\iiint_{(S)}\overrightarrow{AM}\rho(M)dv(M)\right]\wedge\vec{V}(A)=m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A)\quad ,$$

par définition du centre d'inertie G, l'expression ci-dessus devient, compte tenu de la définition du moment d'inertie en A :

$$\vec{\sigma}_A(S)=[J_A(S)]\vec{\Omega}(S)+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A)\quad (8)$$

Le second terme de (8) disparaît seulement pour les deux cas suivants :

- A = G (moment cinétique par rapport au centre d'inertie G) : $\boldsymbol{\sigma}_G$ (S) = [J_G (S)] $\boldsymbol{\Omega}$ (S)
- A = O (point fixe) : $\boldsymbol{\sigma}_O$ (S) = [J_O (S)] $\boldsymbol{\Omega}$ (S)

La relation (8) s'écrit aussi :

$$\vec{\sigma}_A(S)=[J_G(S)]\vec{\Omega}(S)+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(G)\quad (8bis)$$

2-8 - Expression du moment dynamique à l'aide du moment d'inertie

Des relations (2b) et (8) on déduit :

$$\vec{\delta}_A(S)=\frac{d\vec{\sigma}_A(S)}{dt}+\vec{V}(A)\wedge m\vec{V}(G)$$

Or :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(S)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A)+[J_A(S)]\vec{\Omega}\right]=m\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\wedge\vec{V}(A)+m\overrightarrow{AG}\wedge\frac{d\vec{V}(A)}{dt}+[J_A(S)]\frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

Mais :

$$m\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\wedge\vec{V}(A)=m\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}-\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)\wedge\vec{V}(A)=m(\vec{V}(G)\wedge\vec{V}(A)-m\vec{V}(A)\wedge\vec{V}(A))=-m\vec{V}(A)\wedge\vec{V}(G)$$

D'où finalement :

$$\vec{\delta}_A(S) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \frac{d\,\vec{V}(A)}{dt} + [J_A(S)]\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (9)$$

3 – Mangonneau : équations générales du mouvement du mangonneau en tant qu'ensemble pendule simple (fronde) lié au pendule composé (verge et huche)

3-0 – Méthode suivie

Le mangonneau est modélisé comme un ensemble constitué de deux parties :

- un pendule simple (AF) (la fronde), entraîné par rotation autour d'un point A lui-même mobile ;
- un pendule composé (BOA) (la verge et sa huche) tournant autour d'un point fixe O, et lié par A au pendule simple.

Pour établir les équations du mouvement, on procède alors en deux étapes successives :
1°) - Pour le pendule simple AF :

- on exprime le moment cinétique en A de (AF) dans le repère galiléen (R) : $[\vec{\sigma}_A(AF)]_{(R)}$;
- on exprime le moment des forces en A de (AF) dans (R) : $[\vec{M}_A(AF)]_{(R)}$;
- on exprime le moment dynamique en A de (AF) dans (R) : $[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)}$;
- on applique le PFD : $[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)} = [\vec{M}_A(AF)]_{(R)}$, ce qui fournira une première équation du mouvement $\ddot{\theta} = f_1(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \alpha, \theta)$

2°) - Pour le pendule double (BOAF) = (BOA) U (AF), qui représente le mangonneau :

- on exprime le moment cinétique en O de (BOAF) dans (R) :

$$[\vec{\sigma}_O(BOAF)]_{(R)} = [\vec{\sigma}_O(BOA)]_{(R)} + [\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}$$

- on exprime le moment des forces en O de (BOAF) dans (R) :

$$[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)} = [\vec{M}_O(BOA)]_{(R)} + [\vec{M}_O(AF)]_{(R)}$$

- on exprime le moment dynamique en O de (BOAF) dans (R) : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}$
- on applique le PFD : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)} = [\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)}$, ce qui fournira une deuxième équation du mouvement $\ddot{\alpha} = f_2(\ddot{\theta}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \alpha, \theta)$

3-1 – Pendule simple AF

a) – Détermination de $[\vec{\sigma}_A(AF)]_{(R)}$:

D'après (8) : $[\vec{\sigma}_A(AF)]_{(R)} = [J_A(AF)]\vec{\Omega}_A + m'\,\overrightarrow{AG}' \wedge \vec{V}(A)$ où G' = F et $\overrightarrow{AG}' = \overrightarrow{AF} = -R\vec{u}\,'$

D'après (6) : $[J_A(AF)]\vec{\Omega}_A = \iiint_{(AF)} \overrightarrow{AF} \wedge \vec{\Omega}_A \wedge \overrightarrow{AF}\, dm = m'\,\overrightarrow{AF} \wedge \vec{\Omega}_A \wedge \overrightarrow{AF}$ où $\vec{\Omega}_A = -\dot{\theta}\vec{k}$, donc :

$$\begin{aligned}[J_A(AF)]\vec{\Omega}_A &= -m' R\vec{u}\,' \wedge \dot{\theta}\vec{k} \wedge R\vec{u}\,' = -m' R^2 \dot{\theta}(\vec{u}\,' \wedge \vec{k} \wedge \vec{u}\,') \\ &= -m' R^2 \dot{\theta}((\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \wedge \vec{k} \wedge (\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})) = -m' R^2 \dot{\theta}\vec{k}\end{aligned}$$ soit :

$$[J_A(AF)]\vec{\Omega}_A = -m' R^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad (10)$$

D'autre part : $\vec{V}(A) = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{(R)} = \dfrac{d}{dt}(-L\vec{u}) = -L\dot{\alpha}\dfrac{d\vec{u}}{d\alpha} = -L\dot{\alpha}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$ soit :

$$\vec{V}(A) = L\dot{\alpha}\vec{v} \quad \text{(10bis)}$$

d'où : $\overrightarrow{AG}' \wedge \vec{V}(A) = \overrightarrow{AF} \wedge \vec{V}(A) = -R\vec{u}' \wedge L\dot{\alpha}\vec{v} = -RL\dot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)\vec{k}$

Finalement :

$$[\vec{\sigma}(AF)]_{(R)} = -m' R^2 \left(\dot{\theta} + \frac{L}{R}\dot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)\right)\vec{k} \quad (11)$$

b) – Détermination du moment des forces en A de (AF) dans (R) : $[\vec{M}_A(AF)]_{(R)}$
Seule intervient la force de pesanteur en F :

$$[\vec{M}_A(AF)]_{(R)} = \overrightarrow{AF} \wedge -m' g\vec{j} = -R\vec{u}' \wedge -m' g\vec{j} = -R(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \wedge -m' g\vec{j}$$

soit :

$$[\vec{M}_A(AF)]_{(R)} = m' g R\sin\theta\,\vec{k} \quad (12)$$

c) – Détermination du moment dynamique en A de (AF) dans (R) : $[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)}$

D'après (2b) : $[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)} = \left(\dfrac{d\vec{\sigma}_A(AF)}{dt}\right)_{(R)} + \vec{V}(A) \wedge m'\vec{V}(F)$ avec $\overrightarrow{AG}' = \overrightarrow{AF} = -R\vec{u}'$
Or :

$$\vec{V}(F) = \frac{d\,\overrightarrow{AF}}{dt} = -R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}'}{d\theta} = -R\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,j) \quad \text{soit :}$$

$$\vec{V}(F) = -R\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}) = R\dot{\theta}\vec{v}' \quad (13)$$

tandis que $\vec{V}(A)$ est donnée par (10bis). Il vient donc :

$$\vec{V}(A) \wedge m'\vec{V}(F) = L\dot{\alpha}(-\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) \wedge -m' R\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})$$

soit :

$$\vec{V}(A) \wedge m'\vec{V}(F) = m' RL\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta)\vec{k} \quad (14)$$

La dérivation de (11) par rapport au temps t donne :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_A(AF)}{dt}\right)_{(R)} = -m' R^2 \left(\ddot{\theta} + \frac{L}{R}\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\theta) - \frac{L}{R}\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta)\right)\vec{k}$$

cette relation et (14) fournissent alors :

$$[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)}=\left[-m'R^2\left(\ddot{\theta}+\frac{L}{R}\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)-\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\theta)+\frac{L}{R}\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta)\right)+m'RL\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta)\right]\vec{k}$$

finalement :

$$[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)}=-m'R^2\left[\ddot{\theta}+\frac{L}{R}\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)-\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\theta)\right]\vec{k} \quad (15)$$

d) – Application du PFD : $[\vec{\delta}_A(AF)]_{(R)}=[\vec{M}_A(AF)]_{(R)}$, obtention d'une première équation du mouvement $\ddot{\theta}=f_1(\ddot{\alpha},\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$

D'après (12) et (15) : $-m'R^2\left[\ddot{\theta}+\frac{L}{R}\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)-\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\theta)\right]\vec{k}=m'gR\sin\theta\vec{k}$ (16)

d'où la première équation du mouvement :

$$\ddot{\theta}=f_1(\ddot{\alpha},\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)=-\frac{g}{R}\sin\theta-\frac{L}{R}\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\theta)+\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\theta) \quad (17)$$

Remarques :

- Le mangonneau possède deux degrés de liberté : les angles α et θ. Il faut donc deux équations du mouvement, avec leurs conditions aux limites, pour fermer le problème ; (17) est l'une de ces deux équations, la seconde sera établie au point 3-2.
- Si A est fixe ($d\alpha/dt = 0$, $d^2\alpha/dt^2 = 0$) ou si L = 0 (A confondu avec O), alors (17) se réduit à l'équation du pendule simple AF avec A immobile :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{R}\sin\theta=0$$

3-2 – Pendule double (BOAF)

a) – Détermination du moment cinétique en O de (BOAF) dans (R) :

$$[\vec{\sigma}_O(BOAF)]_{(R)}=[\vec{\sigma}_O(BOA)]_{(R)}+[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}$$

On a :

$$[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}=[\vec{\sigma}_A(AF)]_{(R)}+m'\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}(A)$$

où : $[\vec{\sigma}_A(AF)]_{(R)}$ donné par (11), $\overrightarrow{OA}=-L\vec{u}$, $\vec{V}(A)$ donné par (10bis).
Par ailleurs :

$$m'\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}(A)=-m'L(\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j})\wedge L\dot{\alpha}(-\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})$$

soit :

$$m'\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}(A)=-m'L^2\dot{\alpha}\vec{k} \quad (18)$$

d'où :

$$[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)} = -m' R^2 \left[\dot{\theta} + \frac{L}{R} \dot{\alpha} \cos(\alpha - \theta) + \left(\frac{L}{R}\right)^2 \dot{\alpha} \right] \vec{k} \quad (19)$$

Reste à calculer $[\vec{\sigma}_O(BOA)]_{(R)}$, moment cinétique en O du pendule composé (BOA) dans (R). On a :

$[\vec{\sigma}_O(BOA)]_{(R)} = [J_O(BOA)] \vec{\Omega}(O)$ où $\vec{\Omega}(O) = -\dot{\alpha} \vec{k}$.

Les déplacements restant dans le plan Oxy, (6) se réduit à : $[J_O(BOA)] \vec{\Omega}(O) = C \vec{\Omega}(O)$ soit, en posant s² = x² + y² : $[J_O(BOA)] \vec{\Omega}(O) = \left(\int_{(BO)} s^2 \rho \, ds + \int_{(OA)} s^2 \rho \, ds \right) \vec{\Omega}(O)$.

Or sur (BO) la masse M est supposée concentrée en B (huche) : $\int_{(BO)} s^2 \rho \, ds = \int_0^M l^2 dM = M l^2$

Sur (OA) la masse m = ρ L est supposée linéairement répartie avec une masse linéique r :

$$\int_{OA} s^2 \rho \, ds = \int_{s=0}^{L} \rho s^2 \, ds = \frac{1}{3} \rho L^3 = \frac{1}{3} m L^2$$

d'où :

$$[\vec{\sigma}_O(BOA)]_{(R)} = -\left(M l^2 + \frac{1}{3} m L^2 \right) \dot{\alpha} \vec{k} \quad (20)$$

Finalement (19) et (20) donnent :

$$[\vec{\sigma}_O(BOAF)]_{(R)} = -\left[\left(M l^2 + \frac{1}{3} m L^2 + m' R L \cos(\alpha - \theta) + m' L^2 \right) \dot{\alpha} + m' R^2 \dot{\theta} \right] \vec{k} \quad (21)$$

b) – Détermination du moment des forces en O de (BOAF) dans (R) :

$$[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)} = [\vec{M}_O(BOA)]_{(R)} + [\vec{M}_O(AF)]_{(R)}$$

Seules interviennent les forces de pesanteur :

$[\vec{M}_O(BOA)]_{(R)} = \overrightarrow{OG} \wedge (m + M) \vec{g}$ où G centre d'inertie de BOA (verge et huche)

G est défini par : $(m + M) \overrightarrow{OG} = m \overrightarrow{OA} + M \overrightarrow{OB}$ avec : $\overrightarrow{OA} = -L \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = l \vec{u}$, donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M l - m L}{m + M} (\sin \alpha \, \vec{i} + \cos \alpha \, \vec{j}) \quad (22)$$

Comme $\vec{g} = -g \vec{j}$ il vient : $[\vec{M}_O(BOA)]_{(R)} = -\frac{M l - m L}{m + M} g (m + M)(\sin \alpha \, \vec{i} + \cos \alpha \, \vec{j}) \wedge \vec{j}$ soit :

$$[\vec{M}_O(BOA)]_{(R)} = -(M l - m L) g \sin \alpha \, \vec{k} \quad (23)$$

Par ailleurs : $[\vec{M}_O(AF)]_{(R)} = \overrightarrow{OG}' \wedge m' \vec{g}$ où G' = F centre d'inertie de (AF) :

$$\overrightarrow{OG}' = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = -L \vec{u} - R \vec{u}' = -(L \sin \alpha + R \sin \theta) \vec{i} - (L \cos \alpha + R \cos \theta) \vec{j}$$

d'où :

$$[\vec{M}_O(AF)]_{(R)}=m'g(L\sin\alpha+R\sin\theta)\vec{k} \quad (24)$$

Les relations (23) et (24) donnent finalement :

$$[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)}=[m'g(L\sin\alpha+R\sin\theta)-(Ml-mL)g\sin\alpha]\vec{k}$$

soit encore :

$$[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)}=[((m'+m)L-Ml)\sin\alpha+m'R\sin\theta]g\vec{k} \quad (25)$$

c) – Détermination du moment dynamique en O de (BOAF) dans (R) : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}$

D'après (2b) : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}=\left(\dfrac{d\vec{\sigma}_O(BOAF)}{dt}\right)_{(R)}+\vec{V}(O)\wedge(m+m'+M)\vec{V}(BOAF)$

Or $\vec{V}(O)=0$ (O : point fixe de rotation), donc : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}=\left(\dfrac{d\vec{\sigma}_O(BOAF)}{dt}\right)_{(R)}$

où $[\vec{\sigma}_O(BOAF)]_{(R)}$ est donné par (21) ; sa dérivée temporelle donne alors :

$$[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}=-(Ml^2+\frac{1}{3}mL^2+m'RL\cos(\alpha-\theta)+m'L^2)\ddot{\alpha}\vec{k}$$
$$-(-m'RL\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta))\vec{k}-m'R^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

finalement :

$$[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}=[m'RL\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta)-m'R^2\ddot{\theta}-(Ml^2+\frac{1}{3}mL^2+m'RL\cos(\alpha-\theta)+m'L^2)\ddot{\alpha}]\vec{k}$$

(26)

d) – Application du PFD : $[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}=[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)}$, obtention d'une deuxième équation du mouvement $\ddot{\alpha}=f_2(\ddot{\theta},\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$

$[\vec{\delta}_O(BOAF)]_{(R)}$ est donné par (26), $[\vec{M}_O(BOAF)]_{(R)}$ est donné par (25) ; l'égalité des deux termes conduit immédiatement à la seconde équation du mouvement du type $\ddot{\alpha}=f_2(\ddot{\theta},\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$:

$$\begin{aligned}&(Ml^2+\frac{1}{3}mL^2+m'RL\cos(\alpha-\theta)+m'L^2)\ddot{\alpha}\\ &=-m'R^2\ddot{\theta}+m'RL\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta)-((m'+m)L-Ml)g\sin\alpha-m'gR\sin\theta\end{aligned} \quad (27)$$

3-3 – Remarques

a) – En l'absence de la verge (pendule composé BOA), ou bien si le point A est fixe (dα/dt = 0, d²α/dt² = 0), (27) se réduit à l'équation du pendule simple (AF) comme il se doit :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{R}\sin\theta=0 \quad (28)$$

b) – En l'absence de pendule simple AF (m' = 0) (27) se simplifie en l'équation du pendule composé (BOA) (verge et huche) :

$$\left(M\,l^2+\frac{1}{3}m\,L^2\right)\ddot{\alpha}=-(m\,L-M\,l)\,g\sin\alpha$$

soit :

$$\ddot{\alpha}-\Omega^2\sin\alpha=0$$
$$\text{avec: }\Omega^2=\frac{M\,l-m\,L}{M\,l^2+\frac{1}{3}m\,L^2}g \quad (29)$$

L'intégrale première de (29) donne une relation entre la vitesse angulaire et l'angle α :

$$\dot{\alpha}^2=\frac{2(M\,l-m\,L)\,g\,(\cos\alpha_0-\cos\alpha)}{\frac{1}{3}m\,L^2+M\,l^2} \quad (30)$$

où α_0 est la position initiale de la flèche A de la verge (BOA), que l'on commentera plus loin.
Suivant les valeurs des masses et des longueurs, le centre d'inertie peut se trouver ou non en position instable. Ce qui est recherché est l'obtention d'une position instable au commencement afin que le mouvement spontané du contrepoids B (huche) soit une recherche d'équilibre au plus près du sol (minimisation de l'énergie potentielle). Si l'altitude de G est inférieure à celle de l'axe O, l'ensemble est dans une position proche de la stabilité : G va spontanément se positionner sur l'axe O'Oy et A, au lieu de s'élever, va encore plus s'abaisser. En revanche, si l'altitude de G est plus grande que celle de O, donc si G se trouve dans le quart supérieur droit yOx (ses coordonnées sont toutes deux positives dans le repère O***ij***), alors l'ensemble est instable et pour que G se ramène spontanément sur la verticale O'Oy, le contrepoids B va se diriger vers le sol et A va s'élever. La condition d'instabilité se traduit donc par :

$$M\,l>m\,L \quad (30bis)$$

Puisque la longueur L = OA de la verge doit être suffisamment grande pour imprimer à A une vitesse élevée, la condition (30bis) montre que B doit avoir une masse très grande devant celle m de OA.
L'équation (30) confirme cela.
Si on choisit comme position initiale $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$ (altitude de A inférieure à l'altitude de O), pour que B puisse basculer vers le sol, donc si on a $\alpha > \alpha_0$, la relation (30) est possible seulement si $Ml > mL$, comme déjà dit dans (30bis).
Pour de faibles écarts angulaires par rapport à la verticale, avec B vers le bas, l'équation (29) devient celle du pendule composé linéaire:
En effet, dans ce cas, α est proche de π, $\alpha = \varepsilon + \pi$ avec ε petit, on a $\sin\alpha = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$, donc

$$\ddot{\varepsilon}+\Omega^2\varepsilon=0$$

de solution, compte tenu des conditions initiales : $\varepsilon(t) = \pi + \varepsilon_0 \cos\Omega t$.
Revenons au cas général (30) et cherchons pour quels angles le système trouve une configuration de stabilité.
Il y a équilibre si l'énergie potentielle est un minimum:

$$\frac{d\,E_P(G)}{d\,\alpha}=0 \;\rightarrow\; -(M\,l-m\,L)\,g\sin\alpha=0 \;\rightarrow\; \alpha = 0 \text{ (B en haut) ou } \alpha = \pi \text{ (B en bas)}$$

Cet équilibre est stable si :
$\frac{d^2 E_P(G)}{d\alpha^2} > 0 \rightarrow -(Ml - mL)g\cos\alpha > 0 \rightarrow$ M*l* > mL pour $\alpha = \pi$, ou bien M*l* < mL pour $\alpha = 0$.
Ce qui est recherché ici est que la position d'arrivée de B soit stable pour B en bas c'est-à-dire $\alpha = \pi$, on doit donc avoir la condition (30bis) : contrepoids B très lourd avec petit bras de levier OB = *l*.
Détermination de la vitesse angulaire maximale :
La vitesse angulaire est maximale si sa dérivée par rapport au temps est nulle, donc, d'après (29) si :

$$\ddot{\alpha} = \Omega^2 \sin\alpha = 0$$

ce qui n'arrive que pour $\alpha = 0$ ou bien π. Compte tenu des conditions initiales choisies et de la condition (30bis), seule convient :

$\alpha_m = \pi$ (la vitesse maximale est atteinte lorsque A est à l'apogée : O'OA vertical)

Pour cette position, la relation (30) donne la valeur de la vitesse maximale angulaire :

$$\dot{\alpha}_m = \Omega\sqrt{2(1+\cos\alpha_0)} \quad (31)$$

La vitesse de jet du projectile en A est donc :

$$V_m(A) = L\dot{\alpha}_m = L\Omega\sqrt{2(1+\cos\alpha_0)} \quad (32a)$$

En introduisant les paramètres de forme et de masse : $\lambda = l/M$ et $\mu = m/M$, la vitesse initiale de jet du projectile se réécrit :

$$V_m(A) = \sqrt{2gL(1+\cos\alpha_0)\frac{\lambda-\mu}{\frac{\mu}{3}+\lambda^2}} \quad (32b)$$

La vitesse maximale de A dépend de la position angulaire initiale α_0, ce qui est normal puisque si A n'est pas suffisamment abaissé au départ il prendra une accélération plus faible. La valeur maximale de V_m (A) est obtenue, d'après (32), pour cos α_0 = 1 donc pour $\alpha_0 = 0$, c'est à dire A le plus proche du sol possible, qui est la position initiale la plus instable.

Mais la vitesse de jet en A est aussi maximale, à L fixée, pour : $\frac{\lambda-\mu}{\frac{\mu}{3}+\lambda^2} \gg 1$

Comme μ = m/M <<1 on doit avoir λ <<1 c'est-à-dire : $l \ll L$

Autrement dit le bras de levier OA doit être très grand devant celui OB : c'est pourquoi le contrepoids B devra être placé au plus près de l'axe de rotation O.
Connaissant la vitesse et la position initiales du projectile, il est possible d'en calculer la portée.
Au moment du tir, la position du projectile est donnée par son altitude et son abscisse dans le repère O'xy.
Sachant que l'axe de rotation O est à une distance OO' = H du sol et que, au moment du tir, le projectile en A est sur l'axe vertical O'OA et à une distance L de O, son altitude initiale est H + L.
Le vecteur vitesse initiale est considéré horizontal (angle de tir nul).
L'équation de la trajectoire du boulet est donc un arc de parabole d'équation (voir l'article « balistique extérieure » pour s'en convaincre) :

$$y=-\frac{g}{2V_m(A)^2}x^2+H+L$$

La portée est donnée par y = 0 (le boulet rencontre le sol supposé horizontal), soit avec les paramètres :

$$x_m=\sqrt{4L(H+L)(1+\cos\alpha_0)\frac{\lambda-\mu}{\frac{\mu}{3}+\lambda^2}} \quad (33)$$

Les conditions précédentes étant adoptées (conditions initiales, rapports de forme et de masse), la portée est maximale lorsque H est grande, c'est-à-dire lorsque l'axe de rotation est haut au-dessus du sol, et aussi lorsque l'angle initial α_0 est proche de zéro, soit cos α_0 = 1, c'est-à-dire lorsqu'il correspond à la position où la flèche A est initialement au contact du sol, la huche B étant alors à sa position la plus haute (près de la verticale) (figure 5)

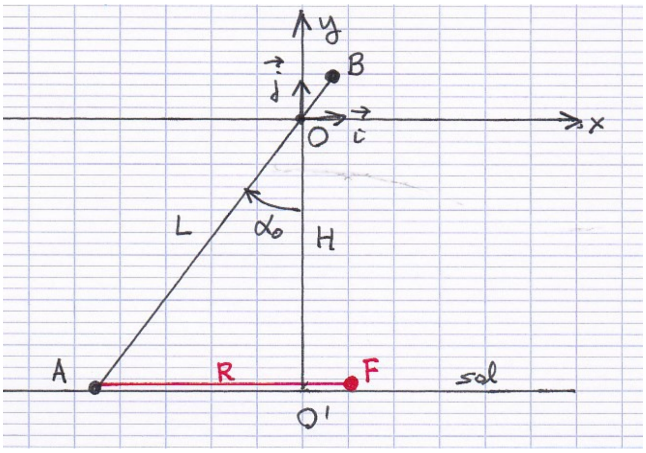


figure 5

On a donc pour l'angle initial de la verge (BOA):

$$\cos\alpha_0=\frac{H}{L} \quad (34)$$

Attention : α_0 ne doit pas être confondu avec $\alpha(0)$ qui est l'angle à partir duquel la fronde F quitte le sol et donc où (AF) devient un pendule simple entraîné par A (figure 6). Avec la figure 6 on voit immédiatement que :

$$\cos\alpha(0)=\frac{H-R}{L} \quad (34\text{bis})$$

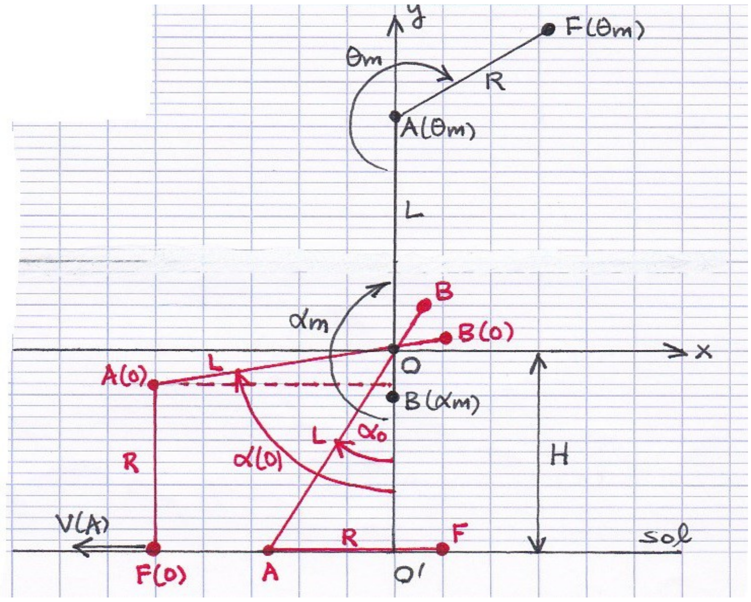


figure 6

Ces données (34) et (34bis) nous seront utiles pour évaluer la portée du tir du boulet par le mangonneau.

3-4 – Équations du mouvement et conditions initiales

Dans les deux équations du mouvement (17) et (27) les deux accélérations angulaires interviennent ensemble ; il faut pouvoir les exprimer séparément de façon à obtenir :

$$\ddot{\theta}=f_1(\dot{\theta},\dot{\alpha},\theta,\alpha)$$
$$\ddot{\alpha}=f_2(\dot{\theta},\dot{\alpha},\theta,\alpha)$$

Pour cela dans (27) on remplace $\ddot{\theta}$ par (17) ; après quelques calculs sans difficulté, et en posant :

$$A=\frac{(m'+m)L-Ml}{Ml^2+\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{m'RL}{Ml^2+\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2} \quad (35)$$

on obtient :

$$\ddot{\alpha}=B\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)-Ag\sin\alpha \quad (36a)$$

(attention aux dimensions de A et B : A est homogène à l'inverse d'une longueur, B est sans dimension, ce qui fait que dans (27bis), *Ag* a bien la dimension de l'inverse d'un temps au carré, de même pour $B\dot{\alpha}\dot{\theta}$ et $\ddot{\alpha}$) (2).
Puis, on utilise (36a) dans (17), ce qui donne :

$$\ddot{\theta}=-\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\theta-\alpha)+\frac{L}{R}Ag\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)-\frac{L}{R}B\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)-\frac{g}{R}\sin\theta \quad (36b)$$

Vérifications :

- Dans (36a) si m' = 0, B = 0 et Ag = - Ω², on retrouve (29) (pendule composé BOA seul,

2 En toute rigueur il s'agit d'une dimension homogène à des radians/seconde carré (rad/s²), et l'habitude fait que l'on considère le radian comme une quantité sans dimension *physique*, affirmation qui mériterait sans doute quelques remises en cause comme l'a souligné Jean-François Lahaeye dans ses articles reproduits dans notre site.

sans la fronde AF)

– Dans (36b) si L = 0, alors $\ddot{\theta}=-\frac{g}{R}\sin\theta$, on retrouve (28) (pendule simple AF seul).

Les équations (36) sont les équations du mouvement du mangonneau complet : ce sont deux équations différentielles du 2e ordre en α et θ, couplées entre elles, qui nécessitent donc 4 conditions initiales pour être intégrées : $\dot{\alpha}(0), \dot{\theta}(0), \alpha(0), \theta(0)$. Leur résolution complète nécessite des algorithmes de calcul utilisant des schémas de discrétisation et d'avancement temporels, comme par exemple les différences finies.

Dans cet article, on n'utilisera pas ce procédé : on estimera des conditions initiales et une hypothèse sur le maximum de vitesse de la fronde V_m (F) qui exploite les cas limites du pendule composé BOA seul (cf. 3-3 remarques (b)), ce qui suppose que le comportement de celui-ci est faiblement dépendant de celui du pendule simple AF qu'il entraîne. On évaluera alors la portée du tir du boulet F par le mangonneau, que l'on comparera à celle (33) du pendule composé seul.

Les conditions initiales adoptées sont les suivantes :

a) $\alpha=\alpha(0)$ donné par (34bis) : le pendule composé BOA commence à faire décoller le pendule simple AF (fronde) à cet angle ;

b) $\dot{\alpha}(0)$ donnée par (30) puisque à t = 0, donc pour l'angle $\alpha(0)$, le pendule composé BOA cesse d'être seul (puisqu'il commence à soulever AF) et a pour vitesse angulaire $\dot{\alpha}(0)$:

$$\dot{\alpha}^2(0)=2\Omega^2(\cos\alpha_0-\cos\alpha(0))$$

L'angle α_0 correspond à la position initiale de la flèche A au moment du déclenchement de l'instabilité du pendule composé seul BOA (verge et huche), et est donné par (34) ; on a donc : $\dot{\alpha}^2(0)=2\Omega^2(H/L-(H-R)/L)$ soit :

$$\dot{\alpha}^2(0)=2\Omega^2\frac{R}{L} \quad (37)$$

c) $\theta(0)=0$ car pour $\alpha(0)$ le pendule AF est vertical ;

d) $\dot{\theta}(0)=0$ puisque l'on suppose que tant que F est au sol il est entraîné par translation, et non par rotation, avec la même vitesse que la flèche A ; donc pour $\alpha(0)$, A ($\alpha(0)$) commence à imprimer une rotation du pendule AF avec une vitesse angulaire initialement nulle. Il s'ensuit que pour $\alpha(0)$, on a comme vitesse de translation de la fronde : $V(F)(0)=V(A)(0)=-L\dot{\alpha}(0)$

3-5 – Condition de maximum de la vitesse de la fronde V(F)

Vitesse de la fronde F :

$$\vec{V}(F)=\left(\frac{d\,\overrightarrow{OF}}{d\,t}\right)_{(R)}=\frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF})=-\frac{d}{d\,t}(L\vec{u}+R\vec{u}\,')$$
$$=-(L\dot{\alpha}\cos\alpha+R\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i}+(L\dot{\alpha}\sin\alpha+R\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j}$$

d'où le carré de son module :

$$V^2(F)=L^2\dot{\alpha}^2+R^2\dot{\theta}^2+2RL\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha) \quad (38)$$

La vitesse de la fronde est maximale si *dV²(F)/dt* = 0, ce qui donne après dérivation de (38) :

$$(L^2\dot{\alpha}+RL\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha))\ddot{\alpha}+(R^2\dot{\theta}+RL\dot{\alpha}\cos(\theta-\alpha))\ddot{\theta}-RL\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)(\dot{\theta}-\dot{\alpha})=0$$

en remplaçant $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\theta}$ par (36a et b), il vient :

$$(B L \dot{\alpha}^2 \dot{\theta} \sin(\theta-\alpha) - L A g \dot{\alpha} \sin\alpha) \sin^2(\theta-\alpha) - L \dot{\alpha}^3 \sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha) - g \sin\theta (\dot{\alpha} \cos(\theta-\alpha) + \frac{R}{L}\dot{\theta}) = 0$$

(38bis)

Ainsi, (38bis) montre que lorsque le maximum de vitesse est atteint, une relation précise entre les angles et les vitesses angulaires est satisfaite ; c'est une condition nécessaire que l'on peut vérifier à chaque étape du calcul numérique : lorsqu'elle est satisfaite, alors les valeurs calculées correspondent à une situation où V (F) est maximale. L'intérêt réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire, lors de la simulation numérique, de procéder à un balayage des variables sur une gamme très étendue : l'algorithme s'arrête lorsque (38bis) est vérifiée.

Mais, comme déjà mentionné, dans la suite, on va procéder par une condition suffisante qui va s'appuyer sur des comportements du système au voisinage de certaines valeurs d'angles pour lesquelles (38bis) est automatiquement satisfaite. Et, de là, la vitesse de fronde, et donc la portée, seront estimées.

4 – Mangonneau : estimation de la vitesse de la fronde pour des valeurs particulières des angles

Jusqu'à présent les équations ont été écrites sans restriction liée à une quelconque hypothèse. Pour fermer le problème sans employer des modélisations numériques rigoureuses, on introduit ici trois hypothèses liées au déploiement maximum de la fronde et au comportement du pendule composé BOA comme faiblement dépendant de celui de la fronde AF, dans la configuration où BOA est proche de sa position de stabilité.

● Hypothèse 1 - On suppose que le maximum de vitesse est atteint au voisinage de la coïncidence des angles, c'est-à-dire lorsque la fronde AF et la verge BOA sont alignées puisque dans ces conditions l'arc de cercle parcouru par l'extrémité de la fronde F correspond au rayon le plus grand, soit OAF.
On réécrit alors (36a et b) au voisinage de cette coïncidence $\alpha \approx \theta$, ce qui donne :

$$\ddot{\alpha} \approx -A g \sin\alpha$$
$$\ddot{\theta} \approx \frac{L}{R} A g \sin\alpha - \frac{g}{R}\sin\theta = \frac{g}{R}(L A - 1)\sin\theta$$

la première intégration de ces équations donne alors :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 = A g \cos\alpha + C_1$$
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1 - L A)\cos\theta + C_2$$

Pour $\alpha \approx \theta$, (38) devient approximativement :

$$V^2(F) \approx L^2 \dot{\alpha}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + 2 R L \dot{\alpha} \dot{\theta} = (L \dot{\alpha} + R \dot{\theta})^2$$

C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration que l'on va identifier à l'aide des deux autres hypothèses suivantes.

● Hypothèse 2 – On suppose que pour $\alpha = \alpha_m = \pi$, on a comme vitesse angulaire maximale de BOA $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_m$ donnée par (31), comme si BOA était seul ; alors :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2{}_m=\Omega^2(1+\cos\alpha_0)=-A\,g+C_1$$

d'où : $C_1=A\,g+\Omega^2(1+\cos\alpha_0)$

$$\dot{\alpha}^2=2(A\,g(1+\cos\alpha)+\Omega^2(1+\cos\alpha_0)) \quad (39)$$

Hypothèse 3 – Du fait de l'alignement supposé de AF et de BOA, en $\alpha=\alpha_m=\pi$, on suppose en outre que la vitesse angulaire de AF est voisine de la vitesse angulaire de BOA en cette position : $\dot{\theta}=\dot{\theta}_m\approx\dot{\alpha}_m$, donc :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2{}_m=\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2{}_m=\Omega^2(1+\cos\alpha_0)=C_2-\frac{g}{R}(1-L\,A)$$

d'où : $C_2=\frac{g}{R}(1-L\,A)+\Omega^2(1+\cos\alpha_0)$

$$\dot{\theta}^2=2\left(\frac{g}{R}(1-L\,A)(1+\cos\alpha)+\Omega^2(1+\cos\alpha_0)\right) \quad (40)$$

et sous ces trois hypothèses la vitesse de F est approximativement : $V(F)\approx(L+R)\dot{\alpha}_m$, et (39) appliqué à $\alpha_m=\pi$ donne alors :

$$V^2(F)=2\Omega^2(1+\cos\alpha_0)(L+R)^2$$

L'angle de tir du boulet étant nul, le boulet est tiré depuis une altitude H + L + R (déploiement maximum de la fronde), l'équation de sa trajectoire est donc :

$$y=-\frac{g}{2\,V^2(F)}x^2+H+L+R$$

d'où la portée x'_m telle que :

$$x'^2{}_m=\frac{4\Omega^2}{g}(1+\cos\alpha_0)(L+R)^2(H+L+R)$$

où Ω² est donné par (29). En exprimant avec les paramètres de forme et de masse $\lambda=l/M$ et $\mu=m/M$, Ω² est égal à $\Omega^2=\frac{g}{L}\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\mu/3}$, d'où :

$$x'^2{}_m=4\frac{(L+R)^2}{L}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\frac{\mu}{3}}\right)(H+L+R)(1+\cos\alpha_0) \quad (41a)$$

L'ancienne portée x_m, pour le pendule composé seul (verge et huche) est donnée par (33). On obtient alors le « gain » en portée qu'introduit l'utilisation de la fronde :

$$\left(\frac{x'_m}{x_m}\right)^2=\left(\frac{L+R}{L}\right)^2\frac{H+L+R}{H+L}$$

soit :

$$G=\frac{x'_m}{x_m}=\frac{L+R}{L}\sqrt{\frac{H+L+R}{H+L}} \quad (41b)$$

NB : On a $G\geq 1$ et si R = 0 (pas de fronde), G = 1 comme il se doit.

Dans (41a), comme α_0 est donné par (34), on a :

$$x'^2_m=4\frac{(L+R)^2}{L^2}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\frac{\mu}{3}}\right)(H+L+R)(H+L) \quad (41c)$$

par conséquent, la portée avec le mangonneau est d'autant plus élevée que la longueur de la fronde R = AF est grande et que le centre de rotation O est situé à une altitude H élevée. Le gain G est augmenté avec ces mêmes conditions.

Exemple numérique :
Données propres au dispositif BOA sans fronde :

- longueur du tronçon OA (distance entre la flèche A et le centre de rotation O), L = 11 m
- longueur du tronçon OB (distance entre la huche B et le centre de rotation O), *l* = 1 m
- altitude du centre de rotation O : H = 6 m
- masse du contrepoids (huche) M = 4000 kg
- masse du boulet situé en A en l'absence de fronde : m = 100 kg

d'où :

$$\lambda=l/L=1/11=0{,}0909$$
$$\mu=m/M=100/4000=0{,}025$$
$$H/L=6/11=0{,}545$$

portée sans fronde :

$$x_m=\sqrt{4L(H+L)(1+H/L)\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\mu/3}}=2(H+L)\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\mu/3}}=2(6+11)\sqrt{\frac{0{,}0909-0{,}025}{0{,}0909^2+0{,}025/3}}=68\,m$$

Données propres à la fronde AF :

- longueur de la fronde : R = 10 m
- masse du boulet en F : m' = 100 kg

Portée avec la fronde :

$$x'_m=2\frac{L+R}{L}\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda^2+\frac{\mu}{3}}(H+L+R)(H+L)}=2\times\frac{11+10}{11}\sqrt{\frac{0{,}0909-0{,}025}{0{,}0909^2+0{,}025/3}(6+11+10)(6+11)}=163\,m$$

le « gain » en portée est donc : G = x'_m/x_m = 163/68 = 2,4.

5 – Trébuchet : équations générales du mouvement du trébuchet

Le schéma du trébuchet apporte une modification à celui du mangonneau qui était représenté à la figure 1 : la contre-masse est située au bout B du tronçon CB, articulé à la verge COA en C, de sorte que lors de la rotation de celle-ci le tronçon CB reste toujours vertical. La masse de la contre-masse B est notée M'. La longueur du tronçon CB est notée h = CB, et sa masse est négligeable devant M'. Le tronçon OC a une masse linéairement répartie notée m'' (elle n'est plus ponctuelle). Le reste du dispositif n'a pas changé et les notations et orientations sont

conservées (figure 7).
Nous allons voir que, moyennant les mêmes hypothèses que pour le mangonneau, la portée du tir avec le trébuchet est encore supérieure qu'avec le mangonneau, et que l'on doit choisir h = CB le plus court possible (contre-masse au plus près de l'articulation C avec la verge COA).

La démarche suivie est similaire à celle du mangonneau (point 3-0) :

Le mangonneau est modélisé comme un ensemble constitué de deux parties :
- un pendule simple (AF) (la fronde), entraîné par rotation autour d'un point A lui-même mobile ;
- un pendule composé (BCOA) (la verge et sa contre-masse articulée CB) tournant autour d'un point fixe O, et lié par A au pendule simple.

Pour établir les équations du mouvement, on procède alors en deux étapes successives :

1°) - Pour le pendule simple AF : les équations développées en (3-1) (éq. (11), (12), (15), (17)) restent valables.

2°) - Le trébuchet complet, en tant que pendule double formé de l'union du pendule composé (BCOA) et du pendule simple (AF), (BCOAF) = (BCOA) U (AF), est modélisé dans le repère galiléen (R) = (O***ijk***) par les relations suivantes :

- moment cinétique en O de (BCOA)U(AF) dans (R) :

$$[\vec{\sigma}_O(BCOAF)]_{(R)}=[\vec{\sigma}_O(BCOA)]_{(R)}+[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}$$

- moment des forces en O de (BCOAF) dans (R) :

$$[\vec{M}_O(BCOAF)]_{(R)}=[\vec{M}_O(BCOA)]_{(R)}+[\vec{M}_O(AF)]_{(R)}$$

- moment dynamique en O de (BCOAF) dans (R) : $[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)}$
- application du PFD : $[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)}=[\vec{M}_O(BCOAF)]_{(R)}$, ce qui fournira deux équations du mouvement $\ddot{\alpha}=f_3(\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$ et $\ddot{\theta}=f_4(\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$

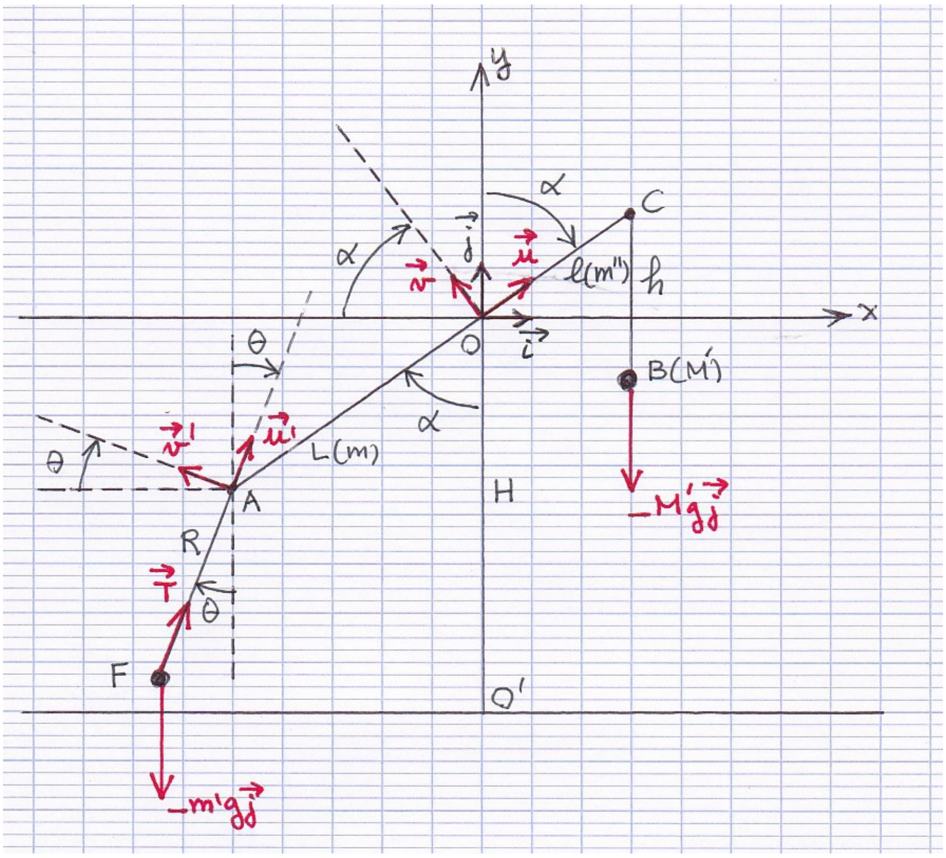


figure 7 : modélisation du trébuchet

a) Moment cinétique en O de (BCOA)U(AF) dans (R) :

$$[\vec{\sigma}_O(BCOAF)]_{(R)}=[\vec{\sigma}_O(BCOA)]_{(R)}+[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}$$

où $[\vec{\sigma}_O(AF)]_{(R)}$ donné par (19).
D'autre part :

$$[\vec{\sigma}_O(BCOA)]_{(R)}=[\vec{\sigma}_O(AOC)]_{(R)}+[\vec{\sigma}_O(CB)]_{(R)}$$

avec :

$[\vec{\sigma}_O(AOC)]_{(R)}=[J_O(AOC)]\vec{\Omega}(O)=C\,\vec{\Omega}(O)$ où $\vec{\Omega}(O)=-\dot{\alpha}\vec{k}$, soit :

$$[\vec{\sigma}_O(AOC)]_{(R)}=-\left(\frac{1}{3}m''l^2+\frac{1}{3}mL^2\right)\dot{\alpha}\vec{k} \quad (42)$$

et :

$[\vec{\sigma}_O(CB)]_{(R)}=[J_O(CB)]\vec{\Omega}(O)$, soit :

$$[\vec{\sigma}_O(CB)]_{(R)}=-M'h^2\dot{\alpha}\vec{k} \quad (43)$$

d'où :

$$[\vec{\sigma}_O(BCOA)]_{(R)}=-(M'h^2+\frac{1}{3}m''l^2+\frac{1}{3}mL^2)\dot{\alpha}\vec{k} \quad (44)$$

Finalement (44) et (19) donnent :

$$[\vec{\sigma}_O(BCOAF)]_{(R)} = -\left[m'R^2\left(\dot{\theta} + \frac{L}{R}\dot{\alpha}\cos(\alpha-\theta) + \frac{L^2}{R^2}\dot{\alpha}\right) + \left(M'h^2 + \frac{1}{3}m''l^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)\dot{\alpha}\right]\vec{k} \quad (45)$$

b) Moment dynamique en O de (BCOAF) dans (R) : $[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)}$
O étant fixe (**V**(O) = 0), on a :

$$[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)} = \frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_O(BCOAF)]_{(R)}$$

ce qui donne immédiatement en dérivant (45) :

$$\begin{aligned}[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)} &= -m'R^2\ddot{\theta}\vec{k} + m'RL\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta)\vec{k} \\ &+ \left[(m' + \frac{m}{3})L^2 + M'h^2 + \frac{1}{3}m''l^2 - m'RL\cos(\alpha-\theta)\right]\ddot{\alpha}\vec{k}\end{aligned} \quad (46)$$

c) Moment des forces en O de (BCOAF) dans (R) :

$$[\vec{M}_O(BCOAF)]_{(R)} = [\vec{M}_O(BCOA)]_{(R)} + [\vec{M}_O(AF)]_{(R)}$$

$[\vec{M}_O(AF)]_{(R)}$ est donné par (24).
D'autre part : $[\vec{M}_O(BCOA)]_{(R)} = [\vec{M}_O(BC)]_{(R)} + [\vec{M}_O(COA)]_{(R)}$ avec :

$$[\vec{M}_O(BC)]_{(R)} = -M'g\vec{j} \wedge \overrightarrow{OG''}$$

où G'' centre d'inertie de BC confondu avec la contre-masse B : G'' = B, d'où :

$$[\vec{M}_O(BC)]_{(R)} = -M'g\vec{j} \wedge \overrightarrow{OB}$$

avec $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$ où $\overrightarrow{CB} = -h\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = l\vec{u} = l(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$ donc :

$$[\vec{M}_O(BC)]_{(R)} = M'gl\sin\alpha\,\vec{k}$$

ainsi que : $[\vec{M}_O(COA)]_{(R)} = -\overrightarrow{OG} \wedge (m''+m)g\vec{j}$ où G centre d'inertie de la poutre (COA) = CO(m'') U OA (m), défini par $(m''+m)\overrightarrow{OG} = m''\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OA}$, où $\overrightarrow{OA} = -L\vec{u}$. Ce qui donne :

$$[\vec{M}_O(COA)]_{(R)} = -(m''\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OA}) \wedge g\vec{j} = -g(m''l - mL)\vec{u} \wedge \vec{j}$$ avec $\vec{u} \wedge \vec{j} = \sin\alpha\,\vec{k}$, soit :

$$[\vec{M}_O(COA)]_{(R)} = (mL - m''l)g\sin\alpha\,\vec{k}$$

il vient alors :

$$[\vec{M}_O(BCOA)]_{(R)} = ((M'-m'')l + mL)g\sin\alpha\,\vec{k} \quad (47)$$

On obtient finalement de (24) et (47) :

$$[\vec{M}_O(BCOAF)]_{(R)} = [((m'+m)L + (M'-m'')l)g\sin\alpha + m'gR\sin\theta]\vec{k} \quad (48)$$

d) Application du PFD : $[\vec{\delta}_O(BCOAF)]_{(R)}=[\vec{M}_O(BCOAF)]_{(R)}$

L'égalisation de (46) et (48) donne :

$$-m'R^2\ddot{\theta}+m'RL\dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\theta})\sin(\alpha-\theta)+\left[\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2+M'h^2+\frac{m''}{3}l^2-m'RL\cos(\alpha-\theta)\right]\ddot{\alpha}$$
$$=((m'+m)L+(M'-m'')l)g\sin\alpha+m'Rg\sin\theta \quad (49)$$

On remplace dans (49) $\ddot{\theta}$ par son expression (17), ce qui donne après quelques calculs la première équation du type $\ddot{\alpha}=f_3(\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$:

$$\left[\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2+M'h^2+\frac{m''}{3}l^2\right]\ddot{\alpha}=m'RL\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta)+((m'+m)L+(M'-m'')l)g\sin\alpha \quad (50)$$

Puis dans (17) on remplace $\ddot{\alpha}$ par son expression (50), ce qui donne la deuxième équation du type $\ddot{\theta}=f_4(\dot{\alpha},\dot{\theta},\alpha,\theta)$:

$$\ddot{\theta}=\frac{L}{R}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\theta)-B'\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)-A'g\sin\alpha\cos(\alpha-\theta)-\frac{g}{R}\sin\theta \quad (51)$$

où l'on a posé :

$$B'=\frac{m'L^2}{\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2+M'h^2+\frac{m''}{3}l^2}$$
$$A'=\frac{L}{R}\frac{(m'+m)L+(M'-m'')l}{\left(m'+\frac{m}{3}\right)L^2+M'h^2+\frac{m''}{3}l^2} \quad (51bis)$$

NB : B' est sans dimension, A' a la dimension de l'inverse d'une longueur.

Les expressions (50) et (51) sont les équations du mouvement du trébuchet (BCOAF).

Remarques :

A) – En l'absence du pendule simple AF (m' = 0), (50) devient l'équation du pendule composé BCOA avec son contrepoids B articulé en C :

$$\ddot{\alpha}-\Omega'^2\sin\alpha=0$$
$$\Omega'^2=\frac{mL+(M'-m'')l}{\frac{1}{3}(mL^2+m''l^2)+M'h^2}g \quad (52)$$

Une condition d'instabilité comme celle de (30bis) n'est plus nécessaire ici dès lors que M' > m'', ce qui est le cas puisque le contrepoids B est très lourd devant le poids du tronçon OC : l'instabilité est toujours assurée.

B) – En l'absence du pendule composé (BCOA), donc pour L = 0, α = 0, (51) devient l'équation du pendule simple AF (29).

C) – On applique le même raisonnement à (BOAC) que pour (BOA) du mangonneau sans fronde : son comportement dynamique est supposé approximativement indépendant de la

présence de la fronde (AF), de sorte que son comportement asymptotique vers l'angle d'équilibre α_m sera adopté pour déterminer les constantes d'intégration qui interviendront dans les solutions intégrales $\dot{\alpha}^2$ et $\dot{\theta}^2$ du trébuchet complet, au voisinage de α_m ; ceci permettra d'évaluer la vitesse de la fronde V(F) comme pour le point 4.
L'intégration de (52), pour le dispositif BCOA supposé sans fronde, donne une relation similaire à (30) :

$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 = -\Omega'^2 \cos\alpha + constante$ où la constante d'intégration est encore fixée par la condition initiale : $\dot{\alpha}=0$ pour $\alpha=\alpha_0$ position initiale de la flèche A, avec encore (34) : $\cos\alpha_0 = \frac{H}{L}$, donc :

$$\dot{\alpha}^2 = 2\Omega'^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) \quad (53)$$

Comme pour le pendule composé (BOA) du cas mangonneau, le pendule composé (BOAC) est en équilibre stable lorsque son centre d'inertie est au plus bas, ce qui arrive encore pour $\alpha=\alpha_m=\pi$ où la vitesse angulaire est maximale :

$$\dot{\alpha}_m = \Omega' \sqrt{2(1+\cos\alpha_0)} \quad (54)$$

En cette position extrême, le bras de levier est donc OA = L, d'où la vitesse maximale de la flèche A : $V_m(A) = L\dot{\alpha}_m$, soit, compte tenu de (54) et de (34) :

$$V_m(A) = \Omega' \sqrt{2L(H+L)} \quad (55)$$

6 – Trébuchet : estimation de la vitesse de la fronde pour des valeurs particulières des angles

Hypothèse 1 - Comme pour le mangonneau, on considère le comportement dynamique du trébuchet au voisinage de $\alpha \approx \theta$ où l'on admet que la vitesse de la fronde F est proche du maximum. En ce voisinage (50) et (51) deviennent approximativement, puisque $\alpha \approx \theta$:

$$\ddot{\alpha} \approx \frac{R}{L} A' g \sin\alpha \quad (57a)$$

$$\ddot{\theta} = -g\left(A' + \frac{1}{R}\right)\sin\alpha \quad (57b)$$

dont une première intégration donne :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 = -\frac{R}{L} A' g \cos\alpha + C_3$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = g\left(A' + \frac{1}{R}\right)\cos\alpha + C_4$$

Les constantes d'intégration C_3 et C_4 sont déterminées de la même façon que pour le mangonneau (hypothèses 2 et 3 du point 4) :

Hypothèse 2 – Pour $\alpha=\alpha_m=\pi$ on pose $\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_m$ donné par (54) comme si (BCOA) était seul :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2{}_m=\frac{R}{L}A'g+C_3=\Omega'^2(1+\cos\alpha_0) \quad \text{d'où} \quad C_3=\Omega'^2(1+\cos\alpha_0)-\frac{R}{L}A'g \quad \text{donc :}$$

$$\dot{\alpha}^2=2(\Omega'^2(1+\cos\alpha_0)-\frac{R}{L}A'g(1+\cos\alpha)) \quad (58)$$

Hypothèse 3 – Pour $\alpha=\alpha_m=\pi$ on pose $\dot{\theta}=\dot{\theta}\approx\dot{\alpha}_m$ donné par (54) :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2{}_m\approx\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2{}_m=\Omega'^2(1+\cos\alpha_0)=-g(A'+\frac{1}{R})+C_4 \quad \text{d'où :} \quad C_4=\Omega'^2(1+\cos\alpha_0)+g(A'+\frac{1}{R})$$

donc :

$$\dot{\theta}^2=2g(A'+\frac{1}{R})(1+\cos\alpha)+2\Omega'^2(1+\cos\alpha_0) \quad (59)$$

NB : rappel : les relations (58) et (59), sous les trois hypothèses adoptées, sont valables uniquement au voisinage du déploiement maximal de la fronde, où la corde de fronde AF, la poutre AOC et le bras du contrepoids CB sont quasiment alignés suivant la verticale, B étant à son altitude la plus faible. Leur seule utilité est dans la possibilité de vérifier, par simulation numérique rigoureuse, si les hypothèses adoptées sont physiquement raisonnables, en comparant (58) et (59) avec les valeurs effectivement calculées des vitesses angulaires et des angles par simulation numérique complète des équations différentielles de base (50) et (51). Cette remarque vaut aussi, bien entendu, pour le mangonneau, en ce qui concerne les relations (39) et (40) et la résolution numérique précise des équations différentielles de base (36a) et (36b).

Estimation de la portée pour le trébuchet :

Avec les 3 hypothèses, au voisinage de $\alpha=\alpha_m=\pi$, on a $\dot{\alpha}^2{}_m\approx\dot{\theta}^2{}_m=2\Omega'^2(1+\cos\alpha_0)$, et le bras de levier à la verticale est : OF = OA + AF = L + R, donc :

$$V^2{}_m(F)=(L+R)^2\dot{\alpha}^2{}_m=2(L+R)^2\Omega'^2(1+\cos\alpha_0) \quad (60)$$

Portée : l'altitude de tir est O'OAF à la verticale, soit y_0 = H + L + R, d'où la portée x''_m telle que :

$$x''^2{}_m=\frac{2V^2{}_m(F)}{g}(H+L+R)=4(L+R)^2\frac{\Omega'^2}{g}(1+\cos\alpha_0)(H+L+R) \quad (61a)$$

en comparant avec l'ancienne portée x_m donnée par (33), $x_m=\frac{4L^2}{g}(H+L)\Omega^2(1+\cos\alpha_0)$ on évalue le « gain » en portée qu'apporte le trébuchet par rapport au seul dispositif du mangonneau sans fronde :

$$G'^2=\left(\frac{x''_m}{x_m}\right)^2=\left(\frac{L+R}{L}\right)^2\frac{H+L+R}{H+L}\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 \quad (61b)$$

avec :

$$\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2=\frac{mL+(M'-m'')l}{\frac{1}{3}(mL^2+m''l^2)+M'h^2}\frac{Ml^2+\frac{m}{3}L^2}{Ml-mL} \quad (62)$$

On peut aussi comparer les portées obtenues avec le mangonneau complet et le trébuchet, d'après (41b) :

$$G''^2 = \left(\frac{x''_m}{x'_m}\right)^2 = \left(\frac{G'}{G}\right)^2 = \left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 \quad (63)$$

d'ailleurs pour R = 0 (pas de fronde), (61b) se réduit à G'' et on a G = 1.

A configuration géométrique et de masses identiques (M' et M du même ordre et très grandes devant les m, m''), et L = OA, *l* = OC ou OB fixées, les gains en portée G' et G'' augmentent quand h = CB est le plus petit possible (contrepoids articulé au plus près de C).

Exemple numérique :

On reprend les mêmes données qu'au point 4, pour faire une comparaison avec le cas du trébuchet.
Données propres au mangonneau sans fronde : L = 11 m, H = 6 m, M = 4000 kg, *l* = 1 m, m = 100 kg ; rappel de la portée sous ces conditions : x_m = 68 m.
Données propres au mangonneau avec fronde : les précédentes plus : R = 10 m, m' = 100 kg ; rappel de la portée sous ces conditions : x'_m = 163 m.
Données propres au trébuchet : les mêmes que précédemment sauf qu'à la place de M on a M' = 4000 kg avec en plus : m'' = 100 kg, h = 1 m. Calcul de la portée (éq. 61a) :

$$\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 = \frac{mL + (M' - m'')l}{\frac{1}{3}(mL^2 + m''l^2) + M'h^2} \frac{Ml^2 + \frac{m}{3}L^2}{Ml - mL}$$

$$= \frac{100\times 11 + (4000-100)\times 1}{(100\times 11^2 + 100\times 1^2)/3 + 4000\times 1^2} \times \frac{4000\times 1^2 + 100\times 11^2/3}{4000\times 1 - 100\times 11} = 1{,}717$$

donc : $G'^2 = \left(\frac{L+R}{L}\right)^2 \frac{H+L+R}{H+L} \left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 = (11+10)^2/11^2 \times (6+11+10)/(6+11) \times 1{,}717 = 9{,}94$

soit un gain du trébuchet par rapport au mangonneau sans fronde: G' = 3,15, d'où une portée égale à x''_m = G' x_m = 3,15 x 68 = 214,2 m.

Le gain du trébuchet par rapport au mangonneau complet est, quant à lui :
G'' = x''_m/x'_m = 214,2/163 = 1,314 = Ω'/Ω .

Dans cet exemple on a donc G' > G'' > G.

Toutes choses fixées par ailleurs, on peut examiner l'évolution de G' en fonction des différentes valeurs de l'altitude de tir relatives à la longueur de la poutre OA, H/L, paramétrée par la longueur du contrepoids relative à la longueur de la poutre OA, h/L, donc en faisant varier G'', en fonction de X = H/L pour différentes valeurs de Y = h/L.
Pour cela on réécrit (61b) et (62) au moyen des variables sans dimensions :

$$\lambda = l/L, \mu = m/M, r = R/L, \mu' = m/M', \mu'' = m''/M'$$

ce qui donne :

$$G'^2 = (1+r)^2 \frac{X+1+r}{X+1} G''^2$$
$$\text{avec: } G''^2 = \frac{\lambda^2 + \mu/3}{\lambda - \mu} \frac{\mu' + (1-\mu'')\lambda}{(\mu' + \mu''\lambda^2)/3 + Y^2} \quad (64)$$

Avec les valeurs fixées λ, μ, r, μ', μ'' à partir des données précédentes, (64) devient la fonction G' = G' (X ; Y) où Y est le paramètre et X la variable :

$$G'(X;Y) = \sqrt{\frac{0{,}104}{0{,}0084 + Y^2} \times \frac{X+1+0{,}909}{X+1}} \quad (65)$$

représentée à la figure 8.

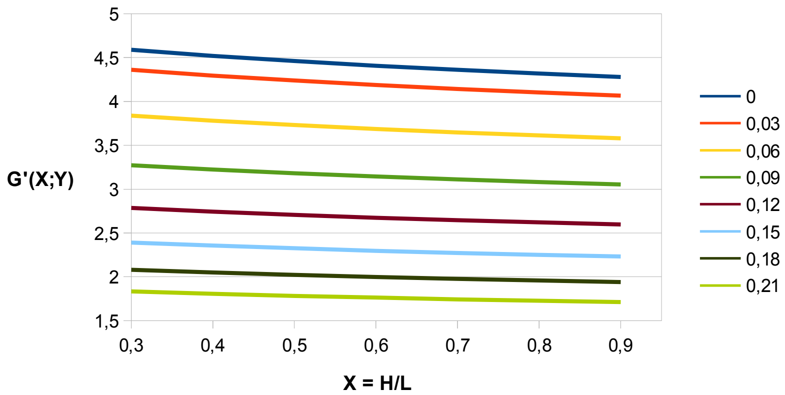


figure 8 : gain en portée entre la configuration trébuchet et la configuration mangonneau sans fronde, en fonction de l'altitude relative X = H/L et pour différentes valeurs de la longueur du contrepoids Y = h/L

Commentaires : lorsque l'altitude relative H/L est faible, le gain entre le trébuchet et le mangonneau sans fronde est significatif, donc dans ce cas il est préférable d'utiliser le trébuchet. Pour des valeurs plus importantes la situation reste assez étale. En revanche, on notera l'assez grande sensibilité du gain pour les valeurs de longueur du contrepoids h/L. Lorsque celle-ci est courte le trébuchet entre en instabilité plus rapidement et la vitesse de la fronde est accrue : on a donc intérêt à placer le contrepoids au plus près de son articulation C. Tous ces éléments nécessitent une simulation numérique de haute précision pour être étayés, et le recours à des maquettes fournit des appréciations expérimentales.

Références bibliographiques

- Renaud Besseyte: *Les machines de siège au moyen-âge*, site http://medieval.mrugala.net
- Max Bausset: *Mécanique des systèmes de solides*, Masson, 1990
- Alphonse Charlier, Alain Bérard, Marie-France Charlier: *Mécanique analytique*, éd. Marketing, 1989
- Luc Chevalier: *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*, Ellipses, Paris, 2004
- José-Philippe Pérez: *Mécanique* – Dunod 2001
- J. Salençon: *Mécanique des milieux continus*, Ellipses, Paris, 1988
- D. Spenlé, R. Gourhant: *Guide du calcul en mécanique* – Hachette Technique, 1995