



Frédéric Elie on
ResearchGate

Balance romaine

Frédéric Élie
août 2010

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Un article court sur le principe d'une balance romaine...



Vous vous souvenez peut-être des théorèmes de la dynamique utilisés dans les articles « [armes du moyen âge](#) » ou « [métronome](#) » par exemple. Ils se simplifient ici, dans une modélisation approchée de la balance romaine, parce que celle-ci est assimilée à une tige infiniment fine pouvant être en rotation autour d'un axe qui lui est perpendiculaire, et cette tige comprend une masse invariable qui peut coulisser sur elle et une masse variable (l'objet à peser) qui occupe une position fixe sur la tige. Ces deux masses sont situées de part et d'autre de l'axe de rotation, et non pas sur une même branche.

Pour se remémorer ou découvrir les théorèmes de la dynamique du solide, il est donc recommandé de lire d'abord l'un des deux articles cités précédemment.

L'équilibre du dispositif que je viens de décrire se traduit par l'égalité des moments par rapport à l'axe de rotation des forces exercées sur chacune des branches de la balance romaine. Avec les notations de la figure 1 cette égalité s'écrit vectoriellement :

$$\vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = 0 \quad (1)$$

où $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$ sont les forces appliquées respectivement en A et en B. Si ces forces sont le poids en A et en B, soit $\mathbf{F}_A = M\mathbf{g}$ et $\mathbf{F}_B = m\mathbf{g}$, où M est la masse (connue) du curseur et m la masse à mesurer avec la balance, avec les orientations choisies pour le repère orthogonal (O*i*, *j*, *k*) (voir figure 1), l'égalité (1) donne :

$$(M a - m b) \vec{k} = 0$$

où $a = \|\mathbf{OA}\|$ et $b = \|\mathbf{OB}\|$ sont les distances entre A, (respectivement B) et l'axe de rotation, en module (valeurs positives). Nous avons donc :

$$M a = m b \quad (2)$$

C'est le principe de la balance romaine : on accroche un objet de masse inconnue m en B, le bras de levier b étant imposé, et pour rétablir l'équilibre on fait glisser la masse connue M le long de la branche OC jusqu'à trouver la distance a (point A) où l'égalité (2) est obtenue.

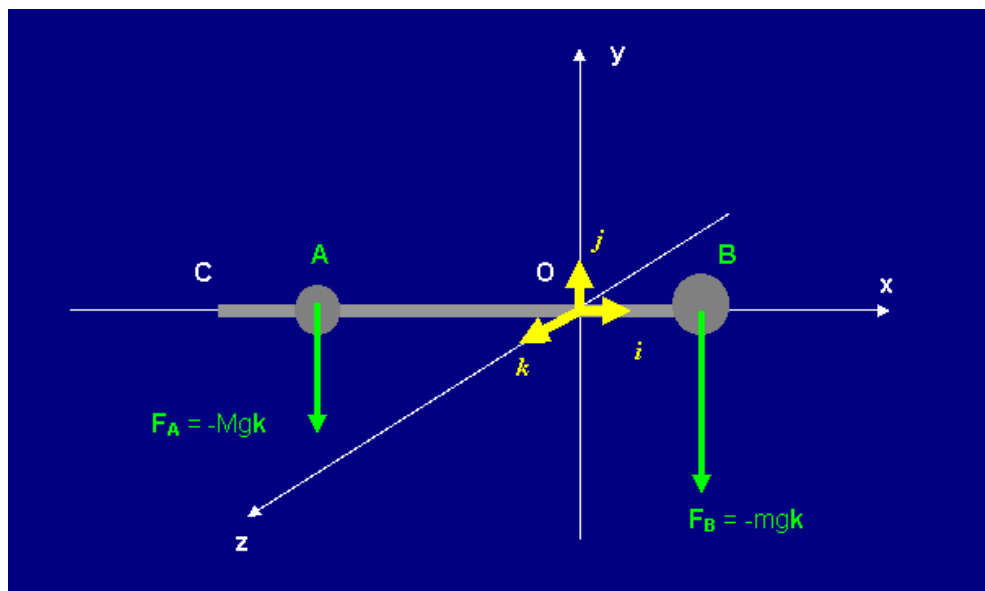


figure 1 – géométrie du modèle simplifié de la balance romaine

Pour arriver aux relations qui précèdent, les simplifications suivantes ont été adoptées :

- dimensions suivant Oy et Oz de la tige BC négligées ;
- poids de la tige BC négligé ;
- on admet donc que le centre d'inertie de la branche OC est concentré en la masse coulissante A (elle-même supposée ponctuelle), et que le centre d'inertie de la branche OB est concentré en la masse immobile B (elle-même supposée ponctuelle) ;
- les masses A et B sont supposées situées sur la tige BC et non décalées par rapport à elle (par un crochet de maintien par exemple). En réalité ce n'est pas le cas comme le montrent les photos ci-dessous ; cependant, la projection sur Ox du vecteur position des masses $\mathbf{OA}$ et $\mathbf{OB}$ est la seule composante qui contribue au moment des forces par rapport à l'axe de rotation O (voir relation (1));
- les moments d'inertie des masses A et B sont négligés par suite de leur caractère ponctuel.



photo 1 – balance romaine pesant un sac de 2 kg ; on voit que ni la masse coulissante, ni l'objet à peser, ne sont placés sur la tige

Établissons la géométrie que doit avoir la balance romaine en fonction du poids maximal $m_{MAX}g$ qu'elle peut peser, et déduisons-en l'échelle de graduation. Nous allons voir que si l'on se donne la longueur de la branche $OC = c$ et si l'on fixe la masse m_{MAX} alors le bras de levier $OB = b$ peut être déterminé, autrement dit la position de B sur la tige en découle. La graduation est alors obtenue en faisant le rapport c/m_{MAX} (X cm représentent Y kg).

En effet, de (2) on tire une relation de proportionnalité entre la position de A et la masse de B :

$$M a = m b \rightarrow a = \frac{b}{M} m \quad (3)$$

Dans le cas limite où m est la masse maximale on admet que le curseur A est arrivé en butée à l'extrémité C ($A = C$), la relation (3) donne dans ce cas :

$$c = \frac{b m_{MAX}}{M}$$

ce qui impose l'emplacement du point de fixation de la masse à peser B, puisque c , M (masse du curseur) et m_{MAX} sont données :

$$b = c \frac{M}{m_{MAX}} \quad (4)$$

La relation (4) montre que l'on peut, avec une même balance romaine, obtenir des gammes de poids à mesurer différentes en jouant sur l'emplacement du point d'attache de la masse à peser B. Cette possibilité dépend de la valeur de la masse du curseur M et de la longueur c du bras de levier maximal OC .

Avec le type de balance romaine que j'ai examinée j'ai constaté qu'il existe deux configurations qui correspondent à des valeurs maximales différentes : $m_{MAX} = 7$ kg ou 28 kg. Comme le montrent les photos 2 et 3, ces configurations sont obtenues en changeant l'orientation de la tige par une rotation sur elle-même, et donc par une modification du point O par lequel la balance est suspendue. La première configuration (notée 1) associée à $m_{MAX} = 7$ kg correspond à la géométrie que j'ai mesurée (figure 2) :

$$\begin{aligned} b &= OB = 5,5 \text{ cm} \\ c &= OC = 38 \text{ cm} \end{aligned}$$

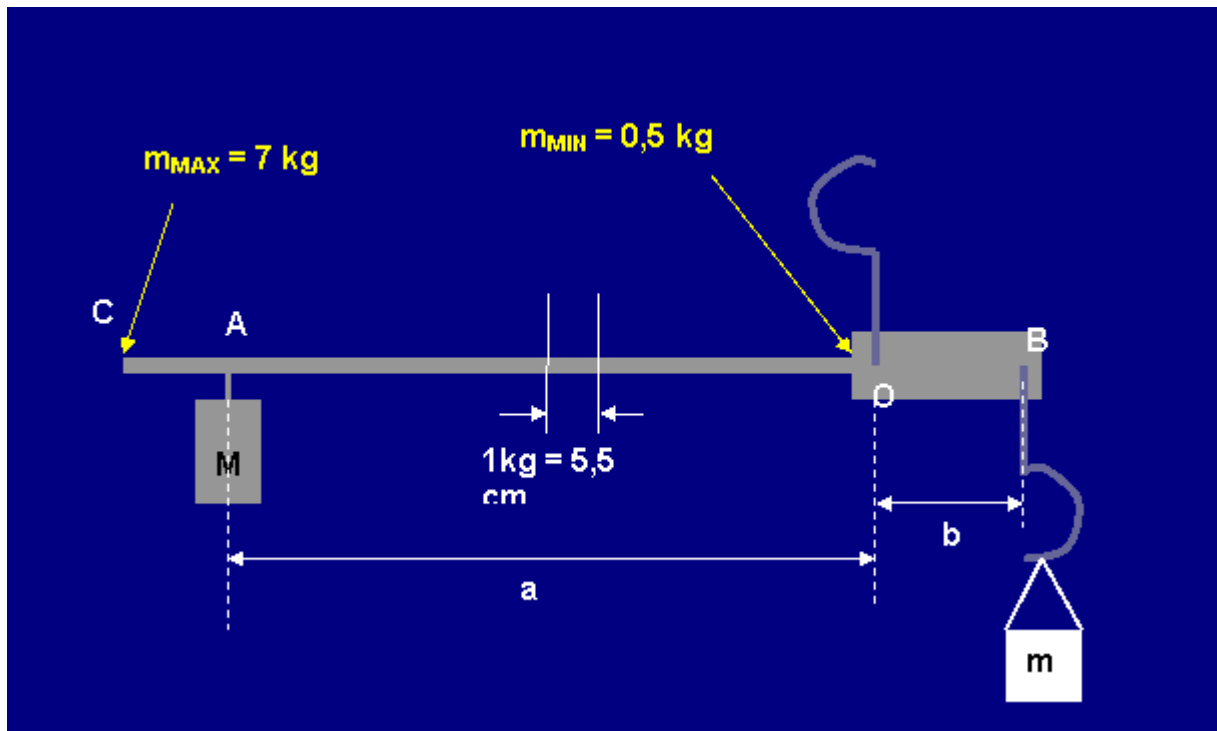


figure 2 – balance romaine dans la configuration 1 :
 $m_{MAX} = 7 \text{ kg}$, $c = OC = 38 \text{ cm}$, $b = OB = 5,5 \text{ cm}$, $M = 1 \text{ kg}$
 graduation: $c/m_{MAX} = 38/7 \approx 5,5 \text{ cm/kg}$

La configuration 2 associée à $m_{MAX} = 28 \text{ kg}$ correspond à la seconde géométrie que j'ai mesurée sur la même balance (figure 3) :

$$b = OB = 1,5 \text{ cm}$$

$$c = OC = 42 \text{ cm}$$

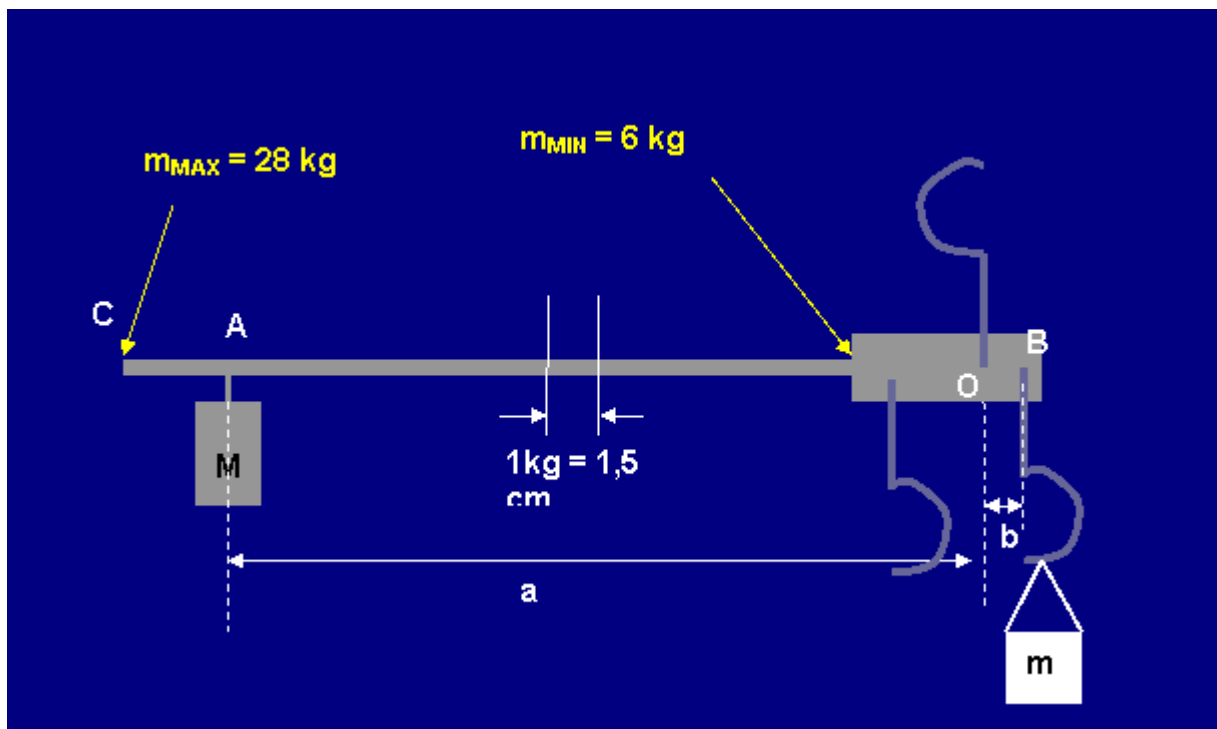


figure 3 – balance romaine dans la configuration 2 : $m_{MAX} = 28 \text{ kg}$, $c = OC = 42 \text{ cm}$,
 $b = OB = 1,5 \text{ cm}$, $M = 1 \text{ kg}$, graduation: $c/m_{MAX} = 42/28 = 1,5 \text{ cm/kg}$

Avec $M = 1 \text{ kg}$, les valeurs de b pour chacune des configurations se retrouvent ainsi à partir de (4):

$$\begin{aligned}\text{configuration 1 : } b &= 38 \text{ cm} \times 1 \text{ kg} / 7 \text{ kg} = 5,5 \text{ cm} \\ \text{configuration 2 : } b &= 42 \text{ cm} \times 1 \text{ kg} / 28 \text{ kg} = 1,5 \text{ cm}\end{aligned}$$

On s'aperçoit que le choix $M = 1 \text{ kg}$, pour la masse coulissante, entraîne que la graduation est directement égale à la longueur du bras de levier côté masse à peser $b = OB$:

$$M = 1 \text{ kg} \rightarrow \text{graduation} = b = OB \text{ (en cm/kg)}$$

Ces deux configurations sont montrées dans les photos 2 et 3 avec leurs graduations.



photo 2 – configuration 1 de la balance romaine : portée maximale 7 kg, graduation : 1 kg pour 5,5 cm ; la masse à peser doit être accrochée au crochet le plus à droite, où $OB = 5,5 \text{ cm}$



photo 3 – configuration 2 de la balance romaine : portée maximale 28 kg, graduation : 1 kg pour 1,5 cm ; la masse à peser doit être accrochée au crochet le plus à droite, où $OB = 1,5 \text{ cm}$

Ainsi, grâce à ces deux configurations, cette balance romaine peut mesurer des masses jusqu'à 28 kg et, avec une précision plus grande, des masses inférieures à 7 kg.