



Frédéric Elie on
ResearchGate

Balistique extérieure

Frédéric Élie
02 avril 2004

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : La balistique extérieure traite de la phase de vol d'un projectile. C'est une science et une technique complexes parce que les facteurs qui agissent sur son comportement en vol sont relativement nombreux et leurs effets difficilement modélisables. C'est pourquoi une très grande part d'empirisme et d'expérimentations sont nécessaires et permettent, grâce à un nombre impressionnant de données (tables de tir), d'ajuster le tir du projectile. Dans cet article, pas question d'entrer dans les détails. Je vais me cantonner à des modèles très simples: d'abord dans le cas idéal des tirs dans le vide pour un projectile supposé ponctuel, puis au cas où la résistance de l'air intervient. L'effet du vent sera également esquissé sous une approche plus que naïve! Il existe de nombreux sites et des logiciels clé en main qui traitent de façon plus ou moins exhaustive et professionnelle tous ces aspects. Ici, en application des quelques notions simplement présentées, on pourra s'exercer avec un calcul excel.

SOMMAIRE

1 - Trajet d'un projectile lancé dans le vide

1-1 - *Modèle de base*

1-2 - *Parabole de sécurité*

1-3 - *Digression sur la détermination graphique des angles de tir*

2 - Présentation simplifiée de l'effet du vent sur un projectile

3 - Effet de la résistance de l'air sur la trajectoire du projectile

3-1 - *Considérations générales sur la force de résistance de l'air sur un projectile*

3-2 - *Équations balistiques dans le cas où la résistance est proportionnelle à une puissance de la vitesse*

3-3 - *Cas où la force de résistance est une fonction quelconque de la vitesse*

4 - Faites le calcul vous-même !

Annexe :

A1 - *Effet du vent : réflexion sur le rôle du théorème du viriel*

A2 - *Encore deux mots sur les effets perturbateurs sur la trajectoire*

Références

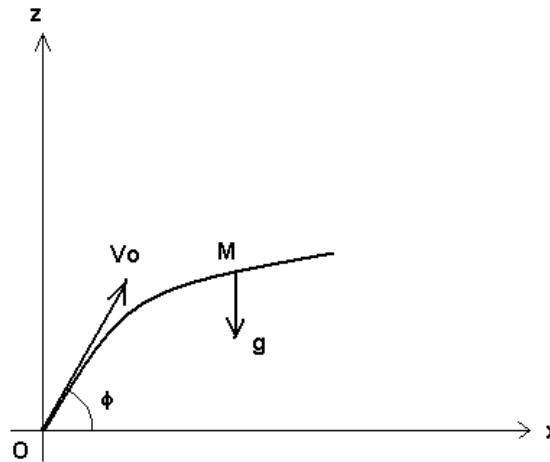
1 - Trajet d'un projectile lancé dans le vide

1-1 - *Modèle de base*

Le problème très classique est traité dans les ouvrages de mathématiques supérieures. Je le rappelle ci-après.

La géométrie du problème est représentée dans la figure suivante qui fait apparaître les axes

Ox et Oz en coordonnées cartésiennes par rapport auxquelles on va décrire le mouvement du projectile.



Le mobile est lancé avec une vitesse initiale V_0 faisant un angle φ avec l'horizontale Ox. On suppose ici qu'il est soumis à la seule force de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$ accélération de la pesanteur), les effets dus à l'air (résistance, vent...) étant supposés nuls (cas du vide). Désignant par $\mathbf{V}(t)$ le vecteur vitesse de composantes V_x et V_z dans le repère Oxz, l'application de la **loi de Newton** donne:

$$m \, d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F} \text{ (total des forces extérieures)}$$

m étant la masse du mobile. Les forces extérieures se réduisent à la composante $-mg$ suivant Oz et 0 suivant Ox, on a donc:

$$dV_x/dt = 0$$

$$dV_z/dt = -g$$

qui s'intègrent immédiatement en:

$$V_x = \text{cste} = V_0 \cos \varphi = dx/dt$$

$$V_z = -gt + V_0 \sin \varphi = dz/dt$$

puisque à l'instant initial $t = 0$, la vitesse du mobile est le vecteur $\mathbf{V}_0$. On remarque alors que la projection de la trajectoire du mobile sur l'horizontale est parcourue avec la vitesse constante $V_0 \cos \varphi$, et que celle sur la verticale est uniformément variée. Intégrant une nouvelle fois on trouve les lois horaires:

$$x = V_0 \cos \varphi \cdot t$$

$$z = -1/2 \, gt^2 + V_0 \sin \varphi \cdot t$$

l'élimination du temps t , considéré comme paramètre, entre x et z fournit l'équation de la trajectoire $z(x)$:

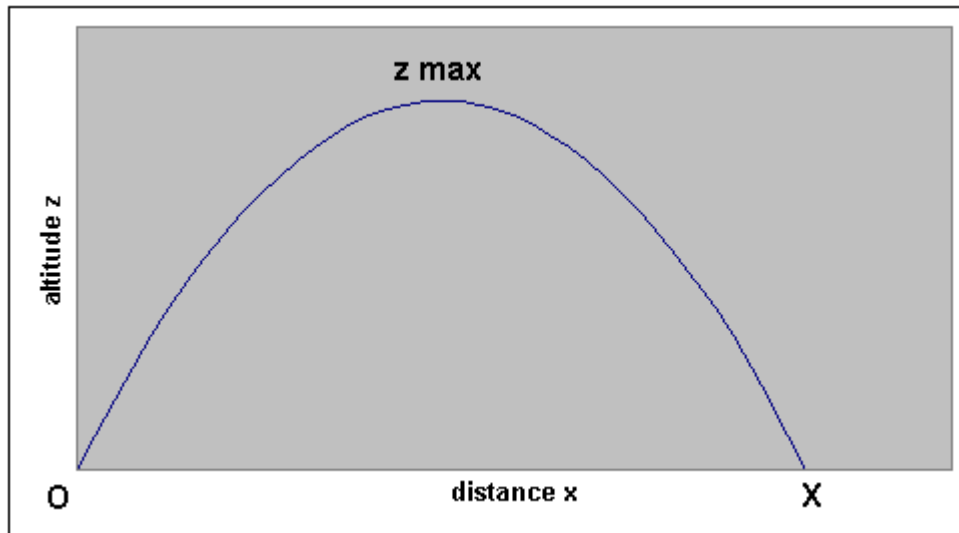
$$z(x) = -1/2 \, g / (V_0 \cos \varphi)^2 \cdot x^2 + x \, \text{tg} \varphi$$

c'est une parabole paramétrée par les variables V_0 et φ . La portée X est la distance à laquelle la trajectoire recoupe l'horizontale, donc telle que $z = 0$, elle vaut:

$$X = (V_0^2/g) \sin 2\varphi$$

elle est atteinte (le mobile touche le sol) au bout du temps (durée du vol): $T = X / V_0 \cos \varphi = (2V_0/g) \sin \varphi$. La portée est maximale pour un angle de tir $\varphi = 45^\circ$, à vitesse initiale fixée. La flèche est la cote $z_{\max}$ à laquelle le mobile atteint le point le plus haut (sommet de la parabole). En ce point la vitesse suivant Oz s'annule, soit au bout du temps $T/2$, on alors

$$z_{\max} = (V_0^2/2g) \sin^2 \varphi, \text{ pour une abscisse } X/2 = (V_0^2/2g) \sin 2\varphi$$



Si, avec une vitesse initiale fixée, on veut atteindre un but distant de X (portée), soit il n'existe aucun angle de tir qui le permet, soit il y en a un seul, soit il y a deux angles de tir possibles. En effet, remarquant que $\sin 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi / (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$, la relation donnant la portée entraîne:

$$\operatorname{tg} \varphi = (V_0^2/gX) \pm ((V_0^2/gX)^2 - 1)^{1/2}$$

il existe au moins une solution si $X \leq V_0^2/g$, elle est unique et vaut $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (V_0^2/gX)$ si on a exactement $X = V_0^2/g$, il en existe deux et valent

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} ((V_0^2/gX) + ((V_0^2/gX)^2 - 1)^{1/2}) \\ \varphi_2 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} ((V_0^2/gX) - ((V_0^2/gX)^2 - 1)^{1/2}) \end{aligned}$$

si X est strictement inférieure à V_0^2/g .

1-2 - Parabole de sécurité

Dans le cas général où le but n'est pas nécessairement situé sur l'horizontale, et a pour coordonnées (X,Z) , celles-ci doivent vérifier l'équation de la trajectoire $Z = -1/2 \cdot g/(V_0 \cos \varphi)^2 \cdot X^2 + X \operatorname{tg} \varphi$.

La résolution en φ de cette équation donne, en utilisant la relation $\cos^2\varphi = 1/(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$:

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (V_0^2/gX \pm ((V_0^2/gX)^2 - (1 + 2V_0^2Z/gX^2))^{1/2})$$

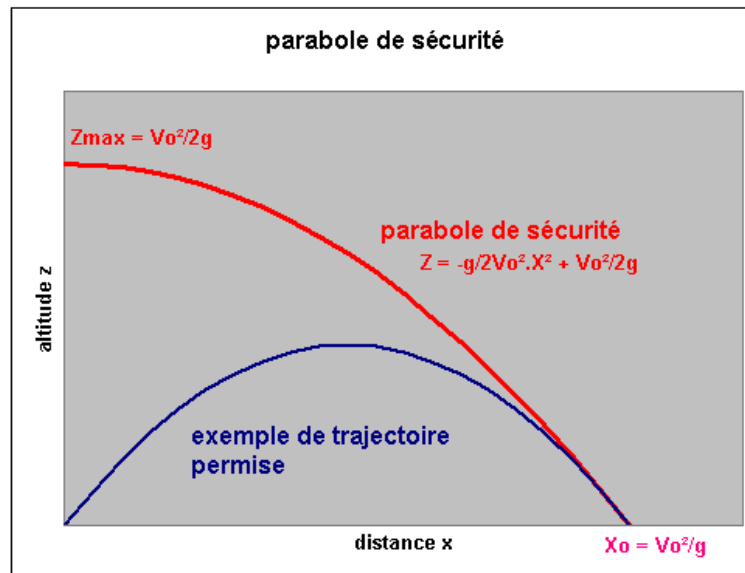
Il y a un seul ou deux angles de tir possibles si les coordonnées de la cible vérifient la condition:

$$Z + (g/2V_0^2) X^2 - V_0^2/2g \leq 0$$

le domaine des points pouvant être atteints par le projectile avec une vitesse initiale fixée V_0 , c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un ou deux angles de tir, est donc délimité par la verticale Oz et la parabole de sécurité d'équation:

$$Z = -(g/2V_0^2) X^2 + V_0^2/2g$$

pour tous les points situés en-dehors de ce domaine, au-delà de la parabole de sécurité, il n'existe pas de solution de tir.



1-3 - Digression sur la détermination graphique des angles de tir

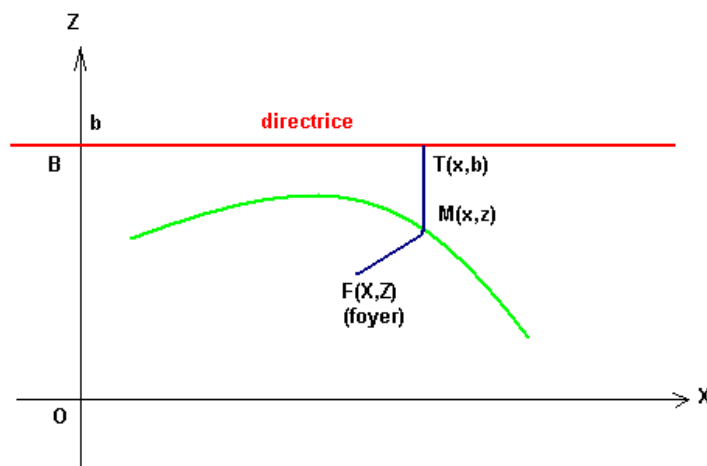
Au lieu d'effectuer les calculs ci-dessus pour déterminer les angles de tir possibles, on peut employer une méthode graphique élégante. Pour cela, il nous faut ce rappel sur les propriétés géométriques des paraboles:

Donnons-nous une droite, appelée "directrice", supposée parallèle à l'axe Ox pour simplifier les choses, d'ordonnée $y = b$. Fixons-nous aussi un point F de coordonnées $F(u,v)$, appelé "foyer". On démontre très facilement que le lieu des points $M(x,y)$ équidistants du foyer F et de la directrice est une parabole d'équation:

$$z(x) = Ax^2 + Bx + C$$

avec: $A = 1/2(v - b)$, $B = u/(b - v)$, $C = (u^2 + v^2 - b^2)/2(v - b)$

(il suffit d'exprimer $FM^2 = MT^2$, voir figure).



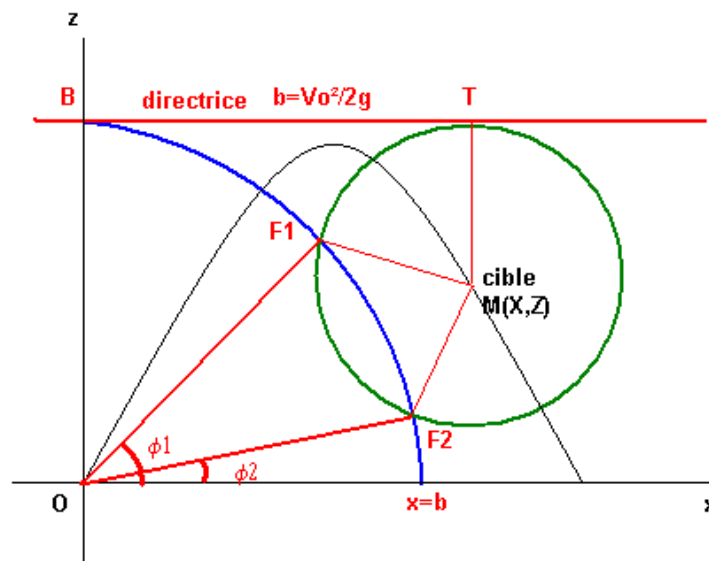
Réciproquement, quand on connaît les coefficients A, B, C d'une parabole, on déduit sa directrice et son foyer en résolvant les relations ci-dessus, ce qui donne:

$$\begin{aligned}\text{foyer: } u &= -B/2A, v = (1 - B^2)/4A + C \\ \text{directrice: } b &= C - (1 + B^2)/4A\end{aligned}$$

A la trajectoire du projectile correspond ainsi un foyer F de coordonnées:

$$u = (V_0^2/2g) \sin 2\varphi, v = - (V_0^2/2g) \cos 2\varphi$$

et une directrice d'ordonnée $b = V_0^2/2g$. Remarquer que la directrice ne dépend que de la vitesse initiale, donc choisir celle-ci, c'est fixer la directrice. Le foyer dépend de l'angle de tir: à deux angles de tir possibles vont donc correspondre deux foyers possibles que la méthode graphique va déterminer. On se donne alors une cible de coordonnées M(X,Z), pourvu qu'elle soit située au-dessous de la directrice. Sa distance à la directrice est le rayon $MT = (b - Z) = V_0^2/2g - Z$. On trace le cercle (C) de centre M et de rayon MT, le ou les foyers sont sur ce cercle (C). Le point de départ O appartient nécessairement à la même parabole passant par M, par conséquent O est à la même distance b de la directrice et du foyer. On trace alors le cercle (C') de centre O et de rayon b: l'intersection de (C) et (C'), si elle existe, donne forcément le ou les foyers cherchés puisqu'ils doivent appartenir à la fois à ces deux cercles. Soit F l'un de ces foyers, l'angle de tir est immédiatement l'angle en O de FOx. Si les deux cercles sont tangents en F(u,v) il n'y a qu'un seul angle de tir donné par $\tan \varphi = v/u$, s'ils sont disjoints il n'y a pas de solution de tir à V_0 fixé et la cible est située au-delà de la parabole de sécurité. S'il y a deux intersections $F_1(u_1, v_1)$ et $F_2(u_2, v_2)$ les angles de tirs sont donnés par $\tan \varphi_i = v_i/u_i$.



Il est facile de vérifier (exercice!) que la parabole de sécurité possède à son tour une directrice b' et un foyer $F'(u',v')$ donnés par:

$$\begin{aligned}u' &= v' = 0 \text{ (son foyer est à l'emplacement du tireur)} \\ b' &= V_0^2/g = 2b \text{ (sa directrice est située 2 fois plus haut que celle de la trajectoire)}\end{aligned}$$

2 - Présentation simplifiée de l'effet du vent sur un projectile

Lorsque l'on tient compte des effets de l'air sur le projectile il faut ajouter à la force de pesanteur

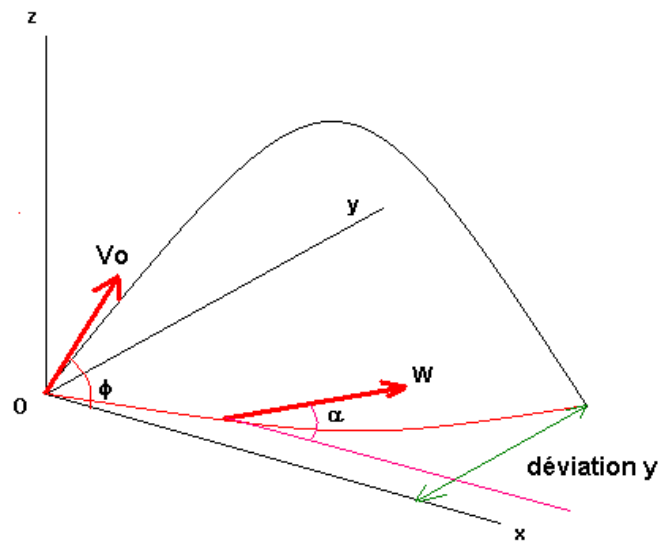
les forces de résistance de l'air et celle due au vent. On verra dans la section suivante comment s'introduit la résistance de l'air dans la modélisation du vol, mais ici, je vais supposer que les forces de résistance sont proportionnelles à la vitesse initiale du mobile, celle-ci étant la composition de la vitesse de tir et de la vitesse du vent. Cette hypothèse est donc très simplificatrice et ne s'applique, en toute rigueur, qu'aux faibles vitesses.

Dans le référentiel Oxyz représenté à la figure suivante, le bilan des forces s'écrit:

$$m \, d\mathbf{V}/dt = m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{V})$$

où les vecteurs $\mathbf{V}$, $\mathbf{g}$ et $\mathbf{R}(\mathbf{V})$ sont respectivement la vitesse du projectile, l'accélération de la pesanteur et la force de résistance de l'air qui dépend de la vitesse. Leurs composantes sur les axes de coordonnées sont:

$$\begin{aligned} &V_x, V_y, V_z \text{ pour la vitesse } \mathbf{V} \\ &0, 0, -g \text{ pour l'accélération de la pesanteur } \mathbf{g} \\ &R_x(V_x), R_y(V_y), R_z(V_z) \text{ pour la résistance de l'air } \mathbf{R}(\mathbf{V}) \end{aligned}$$



D'après les hypothèses on admet d'une part que les forces de résistances sont proportionnelles à la vitesse:

$$R_x = -K_x V_x, R_y = -K_y V_y, R_z = -K_z V_z$$

où les coefficients K dépendent de la densité de l'air et de la forme du projectile, et d'autre part que la vitesse qui intervient dans la résistance de l'air est la somme de la vitesse obtenue dans le vide (cf. section précédente) et de la vitesse du vent (hypothèse valide seulement, rappelons-le, si la vitesse du vent est faible devant celle du projectile et si celle-ci est suffisamment faible à son tour pour admettre une loi linéaire de la résistance de l'air). Désignant par $\mathbf{W}$ la vitesse du vent supposée indépendante de l'altitude et située seulement dans le plan Oxy, faisant un angle α avec l'axe du tir Ox, et par $\mathbf{V}_0$ la vitesse initiale de tir, supposée dans le plan Oxz et faisant un angle φ avec l'horizontale Ox, on obtient alors:

$$\begin{aligned} m \, dV_x/dt &= -K (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha) \\ m \, dV_y/dt &= KW \sin \alpha \\ m \, dV_z/dt &= -mg - KV_0 \sin \varphi \end{aligned}$$

(on a supposé aussi que le coefficient K est le même quel que soit le plan de coupe considéré, donc que le mobile est à symétrie sphérique). Au lieu d'intégrer ce système d'équations, on cherche à évaluer la déviation latérale (suivant Oy) de la trajectoire due à l'effet du vent, c'est-à-dire l'ordonnée $y(x)$ en fonction de l'abscisse x . Pour cela exprimons d'abord V_y en fonction de

V_x en faisant le rapport des deux premières équations, on obtient:

$$dV_y/dV_x = -W \sin \alpha / (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha)$$

d'où:

$$V_y = -V_x W \sin \alpha / (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha) + \text{cste}$$

La constante doit être telle que l'on ait $V_y = 0$ et $V_x = V_0 \cos \varphi$ à l'instant initial $t = 0$ puisqu'on suppose qu'au départ la vitesse du vent est faible devant celle du tir. La constante vaut donc $-W \sin \alpha V_0 \cos \varphi / (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha)$. Par conséquent:

$$dy = W \sin \alpha / (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha) \cdot (V_0 \cos \varphi \cdot dt - dx)$$

Puisque par hypothèse $W \ll V_0$, la déviation latérale due au vent vaut approximativement, au bout d'une durée t de vol où le mobile se trouve à l'abscisse x :

$$y \approx W \sin \alpha (t - x/V_0 \cos \varphi)$$

L'intérêt de cette formule, due à Didion (1798-1878), réside dans le fait qu'il n'est point nécessaire de résoudre complètement la trajectoire pour prévoir sa déviation approximative par l'effet du vent. Il suffit pour cela de connaître la vitesse et la direction du vent (données aérologiques) et de compter la durée du vol, pour savoir la déviation au niveau du point d'abscisse x . Si ce point correspond à la portée de tir, donc la cible visée, on saura alors évaluer l'écart dû au vent et ainsi réajuster le tir. Remarquant que le terme $x/V_0 \cos \varphi$ est égal à la durée du vol s'il n'y avait pas de vent, la **formule de Didion** peut s'exprimer ainsi: "la déviation latérale de la trajectoire sous l'effet du vent est égale au produit de la vitesse du vent par la différence des temps de vol avec et sans vent". Je ne sais pas encore si c'est de cette manière que la formule de Didion a été établie, mais malgré les hypothèses très restrictives employées plus haut, elle trouve un champ d'application assez large.

Comme réflexion personnelle, si on admet que la vitesse du vent agit sur le projectile, non pas dès le début, mais à partir du moment où l'énergie cinétique moyenne diminue et devient comparable à l'énergie due au vent, on peut reprendre l'analyse à l'aide d'un raisonnement basé sur le théorème du viriel d'un système mécanique, et essayer d'affiner ainsi la formule ci-dessus. Je propose une tentative de ce type en Annexe, tout commentaire étant le bienvenu...

3 - Effet de la résistance de l'air sur la trajectoire du projectile

3-1 - Considérations générales sur la force de résistance de l'air sur un projectile

La résistance de l'air est une force qui dépend de la vitesse du mobile $\mathbf{V}$, de la masse volumique de l'air ρ (donc de la température, humidité, altitude, etc) et de la forme du projectile par l'intermédiaire du coefficient balistique c :

$$R(\mathbf{V}) = c (\rho / \rho_0) f(\mathbf{V})$$

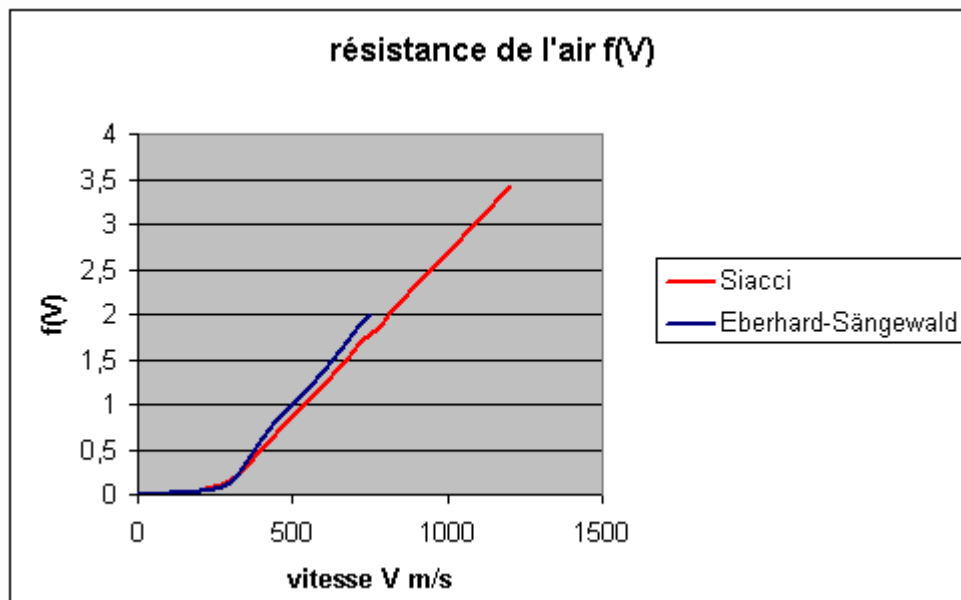
Dans la majorité des cas la fonction f est de la forme: $f(V) = AV^n$, où n est un exposant qui dépend de la plage des vitesses considérées. Dans les **tables de Cranz** on trouve comme valeurs de n :

plages de vitesses	n
$0 < v < 240 \text{ m/s}$	2
$240 < v < 295 \text{ m/s}$	3
$295 < v < 375 \text{ m/s}$	5
$375 < v < 419 \text{ m/s}$	3
$419 < v < 550 \text{ m/s}$	2
$550 < v < 800 \text{ m/s}$	1,7
$800 < v < 1000 \text{ m/s}$	1,55

La fonction $f(V)$ est également donnée par la **formule de Siacci**, valable de 0 à 1200 m/s:

$$100f(V) = 0,222V - 48,05 + ((0,1648V - 47,95)^2 + 9,6)^{1/2} + 0,0442V(V - 300)/(371 + (V/200)^{10})$$

où V est exprimée en m/s. Elle est aussi donnée par les **tables de Eberhard-Sängewald**, que l'on compare ci-après avec les résultats obtenus par la formule de Siacci:



Le coefficient balistique est lié au calibre du projectile " a " (c'est-à-dire pratiquement le diamètre de sa section), à son poids et à son coefficient de forme " i " par la relation de Siacci:

$$c = \rho_0 i a^2 / mg$$

Dans le cas des faibles vitesses ($V < 240 \text{ m/s}$) la fonction $f(V)$ est proportionnelle à V^2 puisque dans ce cas la résistance de l'air s'exprime à l'aide du C_x du projectile:

$$R(V) = - 1/2 \rho C_x (\pi a^2 / 4) V^2$$

Le calcul et l'expérience montrent que, dans ce cas, le C_x peut être déterminé si l'on mesure les vitesses initiale V_0 et finale V_f du projectile, ainsi que la distance parcourue D :

$$C_x = \ln (V_0/V_f) / (1/2 \cdot \rho D \pi a^2 / mg)$$

Pour les très faibles vitesses le C_x est inversement proportionnel au nombre de Reynolds

associé à l'écoulement de l'air autour du projectile Re : $C_x = 24/Re$ relation valable pour $Re < 10$ (rappel: le nombre de Reynolds désigne, en ordre de grandeur, l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de frottement dues à la viscosité: $Re = V_{ap} / \mu$ avec μ viscosité dynamique de l'air = $18,1 \cdot 10^{-6}$ Pa.s). Ceci entraîne que, pour ces faibles vitesses, la force de résistance est proportionnelle à la vitesse V :

$$R(V) = - 1/2 \rho (24/Re)(\pi a^2/4)V^2 = - 3\pi a\mu V$$

A titre indicatif le coefficient balistique d'un obus calibre 520 (mm) est 3/4000, celui d'une balle de revolver est 1/100...

D'autres sources de perturbation de la trajectoire d'un projectile sont succinctement abordées en annexe.

De façon générale, vue la diversité des lois de comportement (par exemple $f(V)$ est différent selon qu'on a affaire à une ogive pointue ou à une ogive à méplat et à culot), l'intégration des équations du mouvement est peu aisée en coordonnées cartésiennes Oxyz: on a intérêt à utiliser un référentiel lié au mobile (**trièdre de Frénet**). Cependant, lorsque $f(V)$ est de la forme V^n , on peut encore trouver des résultats généraux en coordonnées cartésiennes. C'est ce qui est proposé dans la suite: résolution des équations de balistique extérieure lorsque $f(V) \sim V^n$, puis dans le cas quelconque.

3-2 - Équations balistiques dans le cas où la résistance est proportionnelle à une puissance de la vitesse

Cherchons à exprimer les résultats généraux, en coordonnées cartésiennes (voir figure) avec comme force résistante:

$$R_x = - A_x V_x^n$$

$$R_y = - A_y V_y^n$$

Les équations de la dynamique sont alors:

$$m dV_x/dt = - A_x V_x^n$$

$$m dV_y/dt = - mg - A_y V_y^n$$

qui s'intègrent, compte tenu des conditions initiales, en:

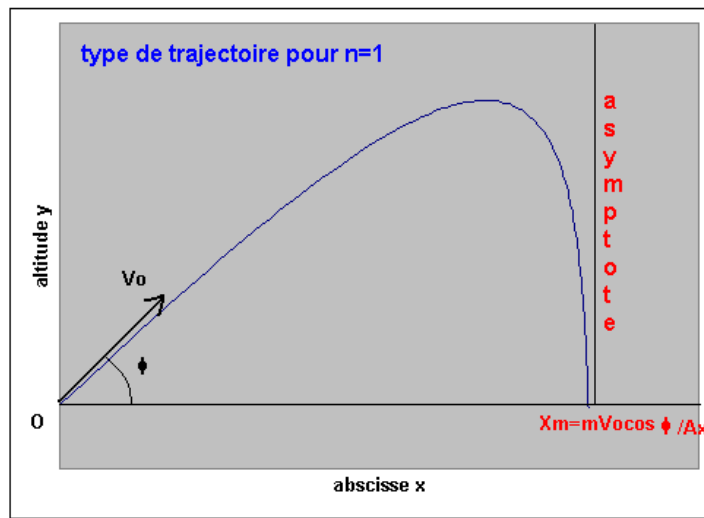
$$V_x^{1-n} = (V_0 \cos \varphi)^{1-n} - (n-1)A_x/m \cdot t$$

$$t = - 1/g \cdot \int_{V_0 \sin \varphi \leq u \leq V_y} du / (1 + A_y/mg \cdot u^n)$$

l'élimination de t entre les composantes des vitesses donne l'équation de la courbe hodographe $f(V_x, V_y) = 0$, qui admet une asymptote pour $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire une vitesse limite et constante du mobile:

$$V_{ylim}^n = - mg/A_y$$

physiquement, cette vitesse limite est atteinte lorsque la pesanteur finit par contrebalancer les forces de frottement, elle n'apparaît donc que suivant la verticale. Elle est indépendante de la vitesse initiale et de l'angle de tir. Dans le sens horizontal, aucune force ne vient contrarier la force de résistance et donc la vitesse finit par tendre vers zéro au bout d'une durée relativement longue.



Voyons un exemple pour $n = 1$ (vitesses faibles): les équations ci-dessus s'intègrent aisément en :

$$x(t) = (mV_0/A_x)(1 - e^{-A_x t/m}) \cos \varphi$$

$$y(t) = (m/A_y)(mg/A_y + V_0 \sin \varphi)(1 - e^{-A_y t/m}) - mgt/A_y$$

L'asymptote apparaît pour $t \rightarrow \infty$ et impose l'abscisse maximale que le projectile ne pourra pas dépasser:

$$x_{\text{lim}} = mV_0 \cos \varphi / A_x$$

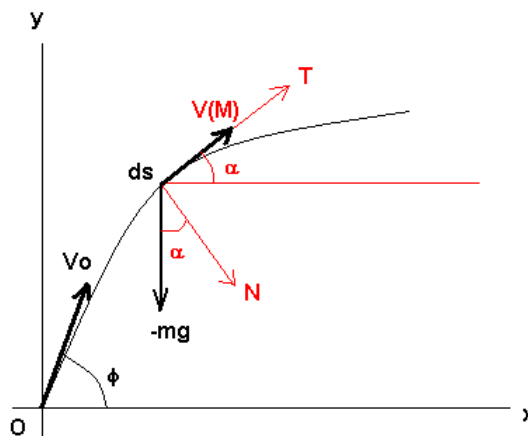
les composantes de la vitesse se calculent aisément et l'élimination du temps entre elles fournit l'équation de la courbe hodographe:

$$V_y = (mg/A_y + V_0 \sin \varphi)(V_x/V_0 \cos \varphi)^{(A_y/A_x)} - mg/A_y$$

L'hodographe est une droite si les coefficients aérodynamiques sont les mêmes suivant l'horizontale et la verticale (projectile à symétrie sphérique). A l'asymptote la composante horizontale de la vitesse est nulle et la composante verticale atteint une limite: $V_{y\text{lim}} = -mg/A_y$.

3-3 - Cas où la force de résistance est une fonction quelconque de la vitesse

La solution générale est difficile en repère cartésien, mieux vaut utiliser le repère lié au mobile ($\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$) (repère de Frénet), $\mathbf{T}$ étant le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, faisant un angle α avec l'horizontale Ox , et $\mathbf{N}$ le vecteur unitaire normal à elle (voir figure).



Le module de la vitesse, portée par la tangente $\mathbf{T}$, est $V = ds/dt$ (ds : portion de longueur élémentaire de la trajectoire), le rayon de courbure en M est $r = -ds/d\alpha$. Composantes de l'accélération:

$$\Gamma_N = V^2/r = -V^2 d\alpha/ds = -V^2 d\alpha/dt \cdot dt/ds = -V d\alpha/dt$$

$$\Gamma_T = dV/dt$$

La résistance de l'air $\mathbf{R(V)}$ étant opposée à la vitesse sa composante normale est nulle et sa composante tangentielle est $-\mathbf{R(V)}$. L'accélération de la pesanteur, dans le repère local, a pour composantes $g_T = -g \sin\alpha$ et $g_N = g \cos\alpha$. Les équations du mouvement sont alors:

$$mdV/dt = -mg \sin\alpha - R(V)$$

$$-mV d\alpha/dt = mg \cos\alpha$$

en faisant le rapport de ces deux expressions, on a la relation suivante:

$$dV/Vd\alpha = \tan\alpha + R(V)/mg\cos\alpha$$

qui permet de trouver la vitesse V , puis d'exprimer la durée du vol $dt = ds/V = -V(\alpha) d\alpha / g\cos\alpha$, soit en intégrant:

$$t(\alpha) = \int_{\varphi \leq u \leq \alpha} -V(u)du/g\cos u$$

Les coordonnées cartésiennes s'obtiennent comme suit:

$$dx = ds \cos\alpha = V(\alpha) \cos\alpha dt \Rightarrow x = -1/g \int_{\varphi \leq u \leq \alpha} V^2(u)du$$

$$dy = ds \sin\alpha = V(\alpha) \sin\alpha dt \Rightarrow y = -1/g \int_{\varphi \leq u \leq \alpha} V^2(u)\tan u du$$

Il y a une asymptote verticale quand $\alpha = \pi/2$ donc pour l'abscisse limite:

$$x_{\text{lim}} = -1/g \int_{\varphi \leq u \leq \pi/2} V^2(u)du$$

Le cas où $R(V) = AV^n$ peut être traité de façon explicite à partir de ces relations par une méthode de changement due à Legendre. On obtient l'expression:

$$dV/Vd\alpha = \tan\alpha + AV^n/mg\cos\alpha$$

par le changement de variable $1/V^n = pq$, la relation précédente devient:

$$p(dq + nq \tan\alpha d\alpha) + qdp + nAd\alpha/mg \cos\alpha = 0$$

l'astuce de la méthode consiste à s'être donné deux degrés de liberté avec deux variables p et q et d'imposer une contrainte sur l'un d'eux, en l'occurrence d'annuler le coefficient de p , ce qui conduit à:

$$q = \cos^{n\alpha}$$

p s'obtient alors par l'intégration du membre restant $qdp + nAd\alpha/mg \cos\alpha = 0$:

$$p = -nA/mg \int_{\varphi \leq u \leq \alpha} du/\cos^{n+1} u$$

finalement la solution complète est:

$$1/V^n = pq = - nA/mg. \cos^n \alpha \int_{\varphi \leq u \leq \alpha} du / \cos^{n+1} u$$

4 - Faites le calcul vous-même !

Dans le lien ci-dessous je vous propose de voir au cours des secondes qui s'écoulent le vol d'un projectile en présence de résistance de l'air, le modèle choisi étant, pour raisons de simplicité, celui des forces résistantes proportionnelles à la vitesse du mobile.

[Tir d'un projectile sur une cible avec effet de résistance de l'air](#)

Annexe

A1 - Effet du vent : réflexion sur le rôle du théorème du viriel

Soit une mobile ponctuel M, de rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ par rapport au point d'origine O. Son moment d'inertie par rapport à O est:

$$J = mr^2$$

Lorsque le mobile se déplace sur une trajectoire sous l'action de forces extérieures, il est évident que, puisque $r(t)$ change, ce moment d'inertie change aussi. Le viriel désigne alors la vitesse avec laquelle ce moment d'inertie évolue, c'est donc la dérivée temporelle de J:

$$V^\circ = 1/2.dJ/dt = m\mathbf{r}.d\mathbf{r} / dt$$

On veut savoir si le viriel évolue significativement dans le temps au bout d'une durée suffisamment longue, autrement si c'est une grandeur stationnaire en moyenne. On considère donc sa dérivée:

$$dV^\circ/dt = m(dr/dt)^2 + m\mathbf{r} \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2$$

Or: $m(dr/dt)^2 = 2T$ (T : énergie cinétique), et $md^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}$ où $\mathbf{F}$ désigne la somme des forces extérieures. Donc:

$$dV^\circ/dt = 2T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$

Si $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel U, c'est-à-dire si $\mathbf{F} = - dU/d\mathbf{r}$ (système conservatif, pas de force dissipative comme par exemple la résistance de l'air), on a: $dV^\circ/dt = 2T - \mathbf{r} \cdot dU/d\mathbf{r}$. On remarque que dans le cas où ce potentiel est en $-1/r$ (potentiel newtonien ou coulombien par exemple), $dU/d\mathbf{r} = 1/r^2 = - U/r$, et le taux d'évolution temporelle du viriel devient:

$$dV^\circ/dt = 2T + U$$

La moyenne de cette quantité sur une durée très grande est donnée par:

$$\langle dV^\circ/dt \rangle = 1/t \int_{0 \leq t' \leq t} (2\langle T \rangle + \langle U \rangle) dt' = 0$$

quand $t \rightarrow \infty$ si les fonctions T et U restent bornées (ce qui est le cas) auquel cas on a le "**théorème du viriel**":

$$2\langle T \rangle = - \langle U \rangle$$

qui s'énonce: pour un système soumis à potentiel newtonien l'énergie cinétique moyenne est égale à la moitié de l'énergie potentielle moyenne sur une durée suffisamment longue, car sur celle-ci le moment d'inertie du système n'évolue pas en moyenne (l'extension spatiale du

système reste bornée au cours de son évolution sur cette durée). Il s'ensuit que l'énergie totale du système $E = T + U = - \langle T \rangle$ est égale à l'opposé de l'énergie cinétique moyenne, donc est négative. Ce résultat est exploité en mécanique céleste.

Par contre si le potentiel est proportionnel à r , comme c'est le cas pour le projectile dans le vide avec $U = mgr$ (ici $r = z$), alors $F = -dU/dr = -mg$ et donc $Fr = -mgr = -U$, d'où $dV^0/dt = 2T - U$, et avec les mêmes arguments que ci-dessus la dérivée du viriel est nulle en moyenne, avec cette fois:

$$2 \langle T \rangle = \langle U \rangle$$

En effet: $2T - U$ est bornée puisque d'après $E = T + U = 1/2 mV_0^2$, on a $2T - U = mV_0^2 - 2U$ et U est bornée puisque l'énergie potentielle maximale est atteinte à la flèche $z_{\max}$: $U_{\max} = mgz_{\max} = 1/2 mV_0^2 \sin^2 \varphi = T \sin^2 \varphi$, qui est toujours finie.

Que se passe-t-il alors si en plus d'une force dérivant du potentiel de pesanteur $U = mgr$, on a aussi une force dissipative (résistance de l'air) du type $\mathbf{R}(V)$? Le calcul de la moyenne du viriel donne immédiatement dans ce cas là:

$$\langle dV/dt \rangle = 2\langle T \rangle - \langle U \rangle + \langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} \rangle$$

Si l'on admet que $\mathbf{R} = -KV$ (vitesses faibles) alors la moyenne du viriel est nulle car les termes instantanés sont tous des fonctions bornées, par conséquent on a cette fois:

$$2\langle T \rangle = \langle U \rangle + K \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \rangle$$

Il arrive un moment où la vitesse du mobile change de signe et devient négative lorsqu'il retombe, donc son module s'annule. A ce moment la résistance de l'air devient comparable à la pesanteur et la vitesse du vent ne peut plus être considérée faible devant celle du mobile. A ce même moment, le viriel change de signe et à partir de lui on passe d'un régime où le vol du mobile était comme dans le vide à un régime où c'est l'effet du vent qui prédomine. Soit x_0 et t_0 l'abscisse et l'instant dans le vol où ce franchissement du viriel a lieu, alors dans le plan Oxy, les nouvelles conditions initiales deviennent à cet instant:

$$V_x = V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha, \text{ et: } V_y = W \sin \alpha \text{ pour } t = t_0$$

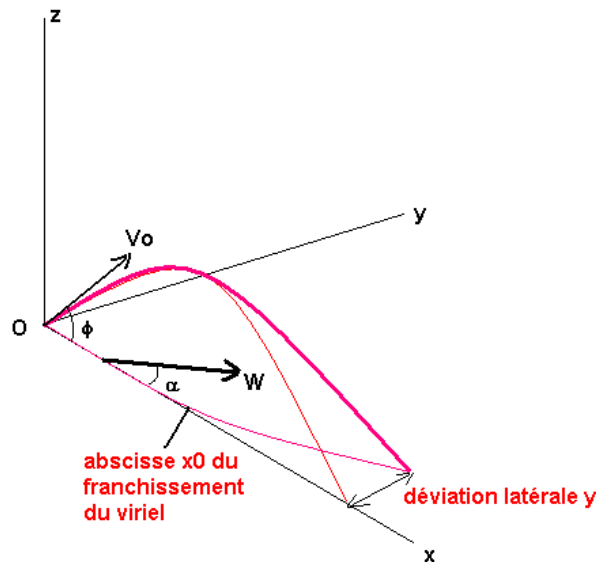
l'intégration donne les coordonnées:

$$x(t) = (V_0 \cos \varphi + W \cos \alpha)t + \text{cste}$$

$y(t) = W \sin \alpha \cdot t + \text{cste}$: on a $y = 0$ jusqu'au moment t_0 du franchissement du viriel donc la constante vaut $-W \sin \alpha \cdot t_0$, et comme entre l'instant initial et l'instant t_0 la distance x_0 a été parcourue avec la vitesse comme dans le vide $V_0 \cos \varphi$ on a $t_0 = x_0/V_0 \cos \varphi$ il vient:

$$y = W \sin \alpha (t - x_0/V_0 \cos \varphi)$$

cette formule pourrait s'exprimer en disant: "la déviation latérale due au vent est égale au produit de la composante latérale de la vitesse du vent par la différence des durées du vol réel et du vol jusqu'au franchissement du viriel". Elle redonne la formule de Didion si l'on admet que x_0 est très proche de x , autrement dit que l'effet du vent se fait sentir vers les derniers moments du vol, donc que la déviation s'effectue assez brutalement. C'est bien ce qui se passe dans beaucoup de cas. Mais, comme je l'ai dit, il s'agit d'une réflexion personnelle...



A2 - Encore deux mots sur les effets perturbateurs sur la trajectoire

- Pour les tirs en altitude la variation de la pesanteur et/ou de la densité de l'air ont un effet non négligeable sur le trajectoire
- La déviation du projectile, hormis les effets du vent, provient aussi du fait que l'axe du mobile ne coïncide pas avec la tangente à la trajectoire: un moment dynamique contribue à infléchir la trajectoire latéralement
- Afin de stabiliser le projectile sur sa trajectoire, on lui impose une rotation sur lui-même provoquée par les rayures du canon. Cette rotation, sous l'action du couple mécanique des forces extérieures, a pour effet une précession de l'axe du projectile: le centre de masse sort du plan de tir, dévié à gauche ou à droite selon l'orientation du pas des rayures (la plupart des armes sont rayées à droite)
- Les effets de recul du canon lors du tir perturbent la vitesse initiale et par suite la trajectoire
- Pour les tirs à très longue portée et à vitesse élevée, déviations dues à la **force de Coriolis** de la rotation de la Terre
- etc...

La modélisation mathématique de ces effets est très complexe et dépend de chaque catégorie de projectile. La portée programmée pour le tir doit être minorée par rapport à celle donnée par les tables lorsque:

- le coefficient balistique est plus petit que celui de la table
- la vitesse initiale est plus grande que celle de la table
- le tir est dirigé vers l'est (effet de la force de Coriolis)
- la température réelle est inférieure à 15°C
- la densité de l'air est inférieure à 1,208

Par contre la hausse (angle de tir) doit être majorée lorsque:

- le vent se dirige en poupe du projectile
- le tireur se dirige vers la cible ou la cible se dirige vers le tireur

Enfin la dérive latérale doit être corrigée:

- du côté d'où vient le vent latéral
- du côté opposé au mouvement de l'arme si ce mouvement est situé hors du plan de tir
- du même côté que le mouvement de la cible si ce mouvement est hors du plan de tir

Les impacts de tirs présentent immanquablement une dispersion statistique dans le voisinage de la cible. On démontre la "**règle du n-ième de fourchette**": si p coups sont trop longs et q coups trop courts, avec $n = p + q$, alors il faut ajouter algébriquement la quantité suivante à l'angle de tir j :

$$(q - p)f/2n$$

où f est la fourchette donnée par les tables; de manière générale f est de l'ordre de 0,02xportée.

Références

- J. Ottenheimer: Balistique extérieure, Armand Colin
- Legendre: Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants, 1782
- André Delachet, Jean Taille: La balistique, PUF, 1968
- Site <http://www.earmi.it> enciclopedia delle armi 1997, Balistica (en italien)
- Hélie: Traité de balistique extérieure, éd. Dumaine, 1865