



Frédéric Elie on
ResearchGate

Bulles et ballons

Frédéric Elie
12 juin 2004

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : La mécanique des bulles (de savon par exemple) et des ballons gonflables en matière plastique est extrêmement compliquée. Je propose ici d'examiner comment deux bulles ou deux ballons, de tailles différentes, fusionnent.

SOMMAIRE

- 1 - Quand une bulle "mange" l'autre...
 - 2 - Pour comprendre ce qu'il s'est passé: énergie de surface et loi de Laplace
 - 3 - Et ça marche aussi avec des ballons ?
- Références

1 - Quand une bulle "mange" l'autre...

Lorsque l'on met deux bulles faites avec de l'eau savonneuse en contact il arrive que l'une pénètre dans l'autre, ce qui donne une bulle unique plus grande. Mais on remarque peut-être plus rarement que c'est la plus petite bulle qui est "absorbée" par la plus grande. De prime abord, cela peut surprendre: n'est-ce pas la bulle la plus grande qui contient le plus d'air et donc tendra à en fournir à la plus petite? On verra qu'il n'en est rien: la recherche d'une énergie minimale a bien pour conséquence que c'est la plus petite bulle qui se vide dans la plus grande. Pour s'en convaincre expérimentalement, plutôt que de jouer avec des bulles flottant dans l'air, chose assez délicate à mettre en œuvre, j'ai fait la manip suivante. Il s'agit d'obtenir plusieurs bulles qui soient stables dans un liquide et de voir si les plus petites fusionnent dans les plus grandes. La difficulté était de créer des bulles de durée de vie assez élevée pour le temps de l'expérience. Pour cela j'ai choisi des bulles d'huile flottant dans une solution mélange d'eau et d'alcool. La raison de ce choix réside dans :

- L'huile n'est miscible ni dans l'eau ni dans l'alcool, mais l'eau et l'alcool sont miscibles, donc cela permettra d'obtenir des phases distinctes d'huile et de solution (pas d'émulsion ni de dissolution)
- L'huile est moins dense que l'eau mais plus dense que l'alcool, donc en mélangeant convenablement l'eau et l'alcool je peux obtenir une huile et un mélange de même densité: ainsi l'huile pourra flotter sur ou dans la solution.

D'où le mode opératoire:

- Dans un récipient verser de l'eau puis une quantité un peu plus grande d'alcool à 90°, on

obtient un mélange parfaitement homogène;

- Ajouter un peu d'huile et agiter : on obtient plusieurs gouttes de tailles différentes (voir photo A)
- Au cours du temps, on remarque que les petites bulles viennent grossir les plus grandes (voir photos B et C)
- Puis, finalement, il n'y a pratiquement qu'une seule grosse bulle (voir photo D)

Remarque: si l'huile était versée sur seulement de l'eau elle formerait une couche qui recouvrirait complètement la surface parce que sa densité serait inférieure à celle de l'eau. Dans le mélange eau-alcool, elle forme une bulle, ou plus exactement une demi-bulle parce que la partie inférieure au contact du mélange subit de sa part une force superficielle qui tend à minimiser la surface à volume constant.



Photo A



Photo B



Photo C



Photo D

2 - Pour comprendre ce qu'il s'est passé: énergie de surface et loi de Laplace

Le phénomène observé ci-dessus, appelé **mûrissement d'Ostwald**, est une conséquence des forces de surface des liquides. Essayons de comprendre le sens physique de ces forces. On a vu que les atomes et les molécules se lient par diverses interactions de façon à minimiser leur énergie, mais ceci à condition d'être dans un état condensé (liquide ou solide). En effet, à l'état gazeux, l'agitation thermique des molécules les empêche d'interagir pour former des liaisons

stables. Lorsque le système évolue vers un état condensé (suite à une augmentation de pression ou à une compression en volume, ou à une diminution de température par exemple), les distances entre molécules se réduisent et leur attraction moléculaire devient plus importante que leur agitation thermique: les molécules passent de la phase gazeuse à une phase où elles sont liées mais encore désordonnées, c'est-à-dire la phase liquide. Une molécule complètement entourée de molécules du liquide est dans un état énergétique favorable car minimisant l'énergie. Par contre, si cette molécule est à la surface du liquide, elle ne subira d'attraction que de la part des molécules qui ne sont pas au contact de la surface, mais elle n'aura aucune liaison du côté du milieu extérieur: son énergie de liaison sera diminuée de moitié. Comme les molécules de la phase liquide "cherchent" toujours à interagir avec le plus grand nombre afin de minimiser l'énergie totale, la phase liquide va acquérir une forme superficielle de façon à diminuer sa surface. Le déficit en énergie d'interaction sera ainsi réduit.

Quantitativement, soit u l'énergie d'interaction par molécule dans la phase liquide; une molécule à la surface n'aura plus qu'une énergie d'interaction égale à $u/2$. Si le liquide contient N molécules dont n à la surface, l'énergie totale d'interaction devient $U = Nu - nu/2$, or n est proportionnel à la surface du liquide A : $n = cA$, d'où le déficit en énergie d'interaction $cAu/2$. Une variation élémentaire de la surface correspond à celle du nombre de molécules de surface $dn = cdA$ et s'accompagne d'une variation d'énergie d'interaction $dU = 1/2.cudA$. On définit alors la tension superficielle comme l'énergie de cohésion moléculaire par unité de surface libre du liquide:

$$\gamma = dU/dA = 1/2.cu \text{ (unité: J/m}^2 \text{ ou N/m)} \quad (1)$$

elle est proportionnelle à u qui est une caractéristique du liquide, et donc plus les interactions moléculaires sont importantes plus la tension superficielle est élevée. Si l'on augmente la surface du liquide par un procédé quelconque d'une quantité dA il faut fournir un travail dW proportionnel à cette variation de surface et qui contribue à faire varier de dU l'énergie d'interaction totale du liquide puisqu'il modifie le nombre de molécules de surface, d'où:

$$dW = \gamma dA \quad (2)$$

et l'on peut définir la tension superficielle γ comme l'énergie qu'il faut fournir pour accroître la surface du liquide de 1 m^2 . Bien entendu les énergies mises en œuvre étant très faibles on emploie usuellement le mJ/m^2 . Les relations (1) ou (2) définissant γ peuvent être généralisées en utilisant l'**énergie libre de Helmholtz** plutôt que l'énergie interne si l'on veut exprimer l'énergie en fonction de la température T et des autres grandeurs extensives du système (X_i , A), dont la surface A , et non de l'entropie S :

$$F(X_i, A, T) = U(X_i, A, S) - TS$$

la tension superficielle est alors la grandeur intensive conjuguée de la grandeur extensive surface du liquide:

$$\gamma = (\partial F / \partial A)_{X_i, T} \quad (3)$$

Soient $Y_i = (\partial F / \partial X_i)_{X_j}$ les grandeurs intensives conjuguées des grandeurs extensives X_i et supposons que l'une des grandeurs intensives est fixée, disons Y_k . Alors il faut utiliser comme nouvelle grandeur représentative de l'énergie la fonction **enthalpie libre de Gibbs** définie par:

$$G(X_i, A, T) = F(X_i, A, T) - X_k Y_k$$

Si l'état du système liquide est défini par les grandeurs extensives: surface A , nombre de molécules N , volume V , de grandeurs intensives conjuguées respectivement γ (tension superficielle), $\mu = \partial F / \partial N$ (potentiel chimique), $p = - \partial F / \partial V$ (pression), et si l'on fixe le potentiel

chimique (phase physique unique), alors l'énergie de Gibbs s'écrit ici:

$$G(V, A, T) = F(V, N, A, T) - N\mu = - pV + \gamma A \quad (4)$$

Lorsque l'on déforme la surface du liquide et que l'on fait varier son volume le travail produit est la somme du travail de pression et de celui de la tension superficielle (ou travail des forces capillaires):

$$dW = - p dV + \gamma dA \quad (5)$$

avec p et γ imposés pendant ce travail on voit que cette relation est aussi égale à la variation infinitésimale de l'énergie de Gibbs: $dW = dG$. A l'équilibre le travail des forces capillaires est égal à celui des forces de pression: la variation d'énergie empruntée pour déformer la surface compense la variation d'énergie cédée pour modifier le volume, de sorte que le bilan total est nul et l'on a $dG = 0$ c'est-à-dire une minimisation de l'enthalpie libre, d'où $p dV = \gamma dA$.

On a vu que les liquides tendent à minimiser leur surface libre A afin de réduire le déficit en énergie de cohésion. Lorsqu'une phase liquide est soumise seulement à des forces de pression externe p_e et interne p_i , et non plus à des forces extérieures telles la pesanteur, sa surface libre minimale est une sphère de rayon R pour l'instant inconnue. C'est le cas lorsqu'un liquide non miscible est immergé dans un autre liquide de densité sensiblement égale: sa poussée d'Archimède compense son poids et les forces extérieures hormis celles de pression sont nulles. Dans l'expérience du début c'est ce que nous avons pu constater à ceci près que l'immersion n'était pas complète, les gouttes d'huile restant à la surface: seules leurs faces inférieures au contact du mélange eau-alcool devaient minimiser leur surface vis-à-vis de celui-ci; elles présentaient alors une forme de demi-sphère.

NB: pour immerger complètement les bulles d'huile il aurait fallu diminuer la densité du mélange en ajoutant encore plus d'alcool.

Considérons alors une bulle sphérique; la variation de sa surface est $dA = 8\pi R dR$ et celle de son volume est $dV = 4\pi R^2 dR$. Dans la relation (5) le travail des forces de pression se décompose en celui de la pression intérieure $- p_i dV$ et celui de la pression extérieure $p_e dV$ (le changement de signe provient de ce que, pour un liquide incompressible, une augmentation du volume à l'intérieur correspond à une diminution du volume à l'extérieur); d'où: $dW = - \Delta p dV + \gamma dA$, avec $\Delta p = p_i - p_e$. La condition $dG = 0$ ci-dessus, avec les expressions donnant dA et dV , conduit à la relation liant le rayon de la bulle à la différence de pression à laquelle elle est soumise:

$$\Delta p = 2\gamma / R \quad (6)$$

(6) est la **loi de Laplace** (1805). Pour une surface non sphérique, présentant par conséquent deux courbures principales différentes $1/R$ et $1/R'$ on démontre que (6) se généralise en:

$$\Delta p = \gamma (1/R + 1/R')$$

Conséquence de la loi de Laplace (6), qui nous ramène à notre expérience du début: ce sont les plus petites bulles (R petite) qui possèdent la pression interne la plus grande ! Or un système qui est le siège d'une pression plus élevée que son environnement tend à trouver son équilibre thermodynamique en lui cédant l'excès de pression; c'est une des conséquences du second principe de la thermodynamique: lorsque deux systèmes en contact, capables de s'échanger une grandeur extensive X , s'équilibrent, c'est le système ayant la grandeur intensive associée Y la plus grande qui la cède à celui ayant la plus faible. Ce principe définit alors le sens d'écoulement des flux des grandeurs intensives. Pour notre présent problème, c'est donc la bulle ayant la pression la plus élevée (donc de plus petit rayon) qui va transmettre cette pression à la bulle la plus grande en se vidant en elle.

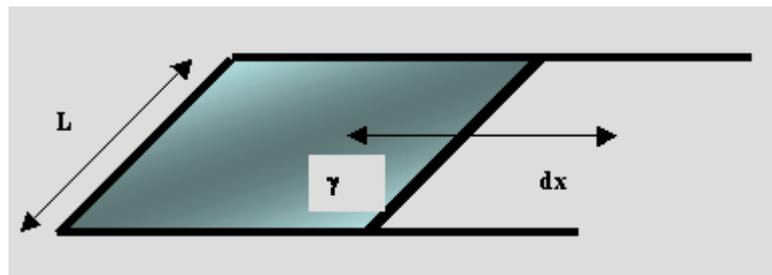
Autre conséquence (parmi bien d'autres!): quand des grosses bulles et des petites bulles coexistent et sont soumises à un refroidissement de l'atmosphère, les petites bulles (aux pressions les plus élevées) vont tendre à céder l'excès de pression d'abord à l'air froid, donc de basse pression, avant de se vider dans les grosses bulles. Les petites bulles vont donc disparaître. Pour la petite histoire, d'expérience populaire, on dit que si pendant la pluie les gouttes d'eau au sol sont grosses alors le froid ou le mauvais temps (basse pression) vont arriver. Faut-il voir dans ce qui précède une explication plausible ? seules les grosses gouttes d'eau subsistent puisque les plus petites disparaissent rapidement du fait de la baisse de pression?

Remarque et quelques valeurs de la tension superficielle :

Lorsque l'on augmente une surface rectangulaire sur laquelle est accroché un film liquide (mélange glycérique par exemple) en déplaçant l'un des côtés, on exerce une force latérale sur ce côté et un travail Fdx égal au travail de la force capillaire. Si L est la longueur du côté et dx le déplacement, ce travail est (voir figure):

$$Fdx = \gamma dA = \gamma Ldx$$

ce qui montre que la tension superficielle est aussi une force par unité de longueur: $\gamma = F/L$ mesurée en N/m (équivalent bien sûr au J/m²).



Quelques valeurs de γ (d'après Pierre-Gilles De Gennes et coll., v. références):

liquide	tension superficielle (mN/m ou mJ/m ²)
éthanol	23
acétone	24
cyclohexane	25
glycérol	63
eau (20°C)	72
eau/huile	50
mercure	485
hélium (-269°C)	0,1
eau (100°C)	58
verre fondu (1300°C)	300

3 - Et ça marche aussi avec des ballons ?

On peut se demander si ce qui est valable pour une bulle l'est aussi pour un ballon en matière plastique gonflable, d'épaisseur très fine? Contrairement au cas de la bulle, l'enveloppe du ballon est soumise à une contrainte tangentielle liée à l'élasticité de son matériau. Cette

contrainte a pour effet d'opposer une résistance à la pression de gonflage. Pour que le ballon puisse gonfler il faudra donc que la pression de gonflage devienne plus grande que la contrainte de l'enveloppe. On observe ce fait aisément: lorsque vous gonflez un ballon vous remarquez qu'au début c'est difficile. A ce stade la pression est insuffisante pour vaincre la contrainte élastique de l'enveloppe. Comme, dans cette situation, le volume de celle-ci reste pratiquement inchangé, si l'on continue à envoyer de l'air dans le ballon, la pression intérieure augmente. Il arrive alors un moment où la pression parvient à dominer la contrainte de l'enveloppe: le ballon gonfle brusquement.

A l'équilibre, la contrainte de l'enveloppe compense la pression. On peut alors établir une relation entre le rayon du ballon, sa pression intérieure et la contrainte (voir modélisation plus loin). Faisons maintenant l'expérience suivante. Deux ballons faits avec le même matériau sont gonflés et atteignent des tailles différentes. Ils sont reliés par un petit robinet fermé au départ (voir photos E, F ci-après). D'après ce qui a été dit plus haut, il faut bien veiller à ce que, lorsqu'on arrête le gonflage, on est dans la phase où la pression domine largement la contrainte élastique de l'enveloppe. Il faut avoir franchi le cap où le ballon se met à grossir brusquement. Ouvrons alors le robinet pour mettre en contact l'air contenu dans les deux ballons. On constate que le volume du plus petit ballon diminue et que celui du plus grand augmente: l'air du petit ballon s'est vidé dans le plus grand, comme pour les bulles !



photo E: robinet fermé



photo F: robinet ouvert, le petit ballon se vide dans le plus grand

On doit donc s'attendre, à l'équilibre, à une relation rayon-pression du même type que pour les bulles.

Assimilons le ballon à une enveloppe sphérique de rayon $R(t)$ à l'instant t , et d'épaisseur " e " très petite devant le rayon. Au cours du gonflage chaque point de l'enveloppe, de coordonnées (x_i) , $i = 1, 2, 3$, subit un petit déplacement par unité de temps dans les trois directions spatiales,

vecteur noté \mathbf{u} de composantes u_j , $j = 1, 2, 3$. On introduit alors le tenseur des vitesses de déformation:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2.(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) \quad (7)$$

En coordonnées sphériques et par considérations de symétrie (voir figure G) on obtient:

$$\varepsilon_{rr} = 1/e.de/dt \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 1/R.dR/dt \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = 1/R.dR/dt \quad (10)$$

(les autres composantes ε_{ij} non diagonales du tenseur des déformation (7) sont négligées car on suppose que la déformation s'effectue de manière homothétique: il n'y a pas de cisaillement).

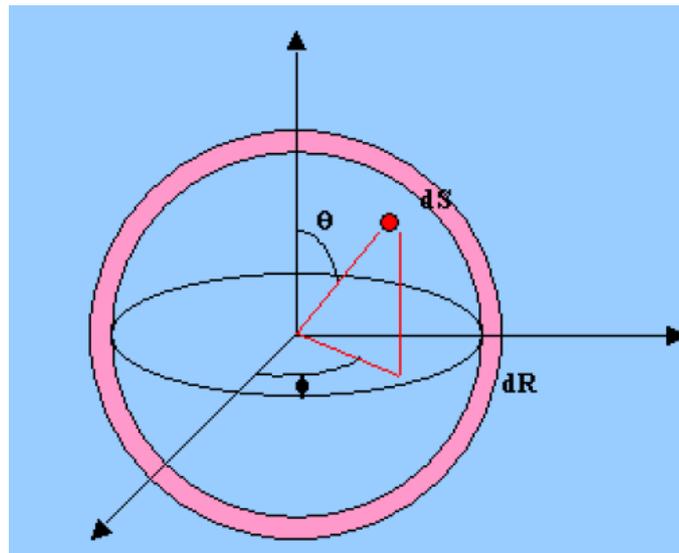


figure G

On suppose que le matériau de l'enveloppe est incompressible: les déformations laissent son volume inchangé. Cette propriété se traduit par l'annulation de la divergence du vecteur vitesse des déformations, ou ce qui revient au même, l'annulation de la trace du tenseur des déformations (7): la somme de ses termes diagonaux est nulle

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \rightarrow \text{Tr} [\varepsilon_{ij}] = 0 \rightarrow 1/e.de/dt + 2/R.dR/dt = 0$$

cette relation conduit bien au fait que le volume de l'enveloppe est constant au cours du gonflage:

$$R^2(t) e(t) = R_0^2 e_0 \quad (11)$$

où l'indice 0 se réfère aux valeurs initiales du rayon et de l'épaisseur du ballon. Reste à exprimer les relations entre les déformations et les contraintes mécaniques de l'enveloppe. Pour cela, exploitant la symétrie sphérique du problème, on considère une section de la sphère coupée suivant un grand cercle, par exemple son équateur, et on fait le bilan des forces qui s'exercent sur cette section. La première force est celle générée par la différence entre la pression interne du ballon et la pression externe, soit P cette différence:

$$F = \int_S P \cos\theta \, dS = \int_{0 \leq \phi \leq \pi} d\phi \int_{0 \leq \theta \leq \pi/2} R^2 P \sin\theta \cos\theta \, d\theta = P \pi R^2$$

A l'équilibre, cette force est exactement compensée par la deuxième force, celle résultant des effets de contrainte. Sur la tranche équatoriale de l'enveloppe, d'aire $2\pi Re$, cette force est égale à: $2\pi Re\sigma_{\theta\theta}$, où la quantité $\sigma_{\theta\theta}$ est la composante tangentielle du tenseur des contraintes σ_{ij} , qui est aussi égale à $\sigma_{\phi\phi}$. L'égalité des deux forces conduit alors à:

$$\sigma_{\theta\theta} = PR/2e \quad (12)$$

Remarque : L'épaisseur de l'enveloppe e étant très faible devant le rayon du ballon, la composante radiale du tenseur des contraintes σ_{rr} est négligeable devant les autres tangentielles:

$$\sigma_{rr} \approx 0 \quad (13)$$

L'obtention de la loi d'évolution de la taille du ballon avec le temps au cours du gonflage nécessite de fermer le problème en utilisant une loi de comportement contrainte-déformation de l'enveloppe. Celle-ci étant un polymère, la loi de comportement appliquée est:

$$[\sigma] = -P [I] + 2\eta [\varepsilon] \quad (14)$$

où les crochets $[]$ désignent les quantités tensorielles, $[I]$ est le tenseur unité, η est une grandeur assimilable à une viscosité, P est la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du ballon.

Développons (14) suivant ses différentes composantes compte tenu des relations (8), (9), (10). De (13) on tire:

$$\sigma_{rr} = -P + 2\eta /e.de/dt = 0 \rightarrow P = 2\eta /e.de/dt \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -P + 2\eta /R.dR/dt \quad (16)$$

La conservation du volume de l'enveloppe (11) permet d'exprimer encore (15) par:

$$P = -4\eta /R.dR/dt$$

qui réinjectée dans (16) donne:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 6\eta /R.dR/dt \quad (17)$$

Mais on a vu à la relation (12) que ces composantes tangentielles du tenseur des contraintes sont aussi égales à $PR/2e$, ce qui avec (17), et compte tenu de (11), conduit à l'équation différentielle d'évolution du rayon:

$$dR/R^4 = Pdt/12R^2 e_0 \eta$$

que l'on intègre immédiatement en:

$$1/R^3_0 - 1/R^3 = (P/4R^2_0 e_0 \eta)t \quad (18)$$

La bulle éclate, c'est-à-dire R devient infini, pour un temps de gonflage égal à:

$$t_{\text{éclatement}} = 4\eta e_0 / PR_0 \quad (19)$$

le ballon éclate d'autant plus rapidement que sa viscosité est faible (peu de résistance à la pression de gonflage), que son épaisseur est faible et que son rayon initial est déjà grand, autant de choses a posteriori évidentes. Exemple, pour un ballon de caoutchouc de rayon initial 1 cm, de viscosité 10000 Pa.s, soumis à une pression différentielle de gonflage 1 mbar (100 Pa), et d'épaisseur 0,1 mm, on prévoit un éclatement au bout d'environ 4s (pour un débit de gonflage supposé constant).

Terminons en remarquant que, d'après la relation (12), lorsque le ballon est à l'équilibre, la

contrainte tangentielle est maintenue constante et par conséquent le rayon est d'autant plus faible que la différence de pression est élevée, pourvu que l'on soit au-delà de l'étape où les forces de pression ont dominé la résistance élastique de l'enveloppe comme ce fut dit précédemment: dans ces conditions on se retrouve dans une situation comparable à celles des bulles décrites par l'équation de Laplace. C'est le plus petit ballon qui se vide dans le plus grand parce que la pression interne de celui-ci y est plus faible.

Références

- Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard-Wyart, David Quéré : *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin, 2002
- J-F. Agassant, P. Avenas, J-Ph. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent : *La mise en forme des matières plastiques*, Tecdoc 1996
- J. Salençon : *Mécanique des milieux continus*, Ellipses, Paris, 1988
- Luc Chevalier : *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*, Ellipses, Paris, 2004