



Cadran solaire équatorial en papier

Jean-François LAHAEYE, 2 janvier 2013

édité en février 2015 sur ce site

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Cet article propose un modèle de cadran solaire en papier, pliable, pré-découpé pour la latitude de 45° Nord. Un canevas permet néanmoins une adaptation pour les latitudes comprises entre 40 et 50°N. Le modèle mathématique pour la conception de cette maquette est présenté dans cet article.

*
* *

CADRAN SOLAIRE EQUATORIAL EN PAPIER

Principe

Le soleil fait, en apparence, un tour de la terre (360 degrés) en 24 heures, soit 15 degrés par heure. Cette régularité n'est directement vérifiée (observée) que si *le plan de lecture du cadran est parallèle au plan équatorial. Il est facile de réaliser un tel plan parallèle, quel que soit le lieu où l'on se trouve sur la terre.*

Ce plan fait avec le plan horizontal local un angle égal à la hauteur h du soleil, à midi vrai, les jours d'équinoxe (21 mars et 21 septembre) quelle que soit, par ailleurs, la latitude Φ , et cet angle s'écrit alors $h = 90 - \Phi$.

A la latitude $\Phi = 45$ degrés Nord, on a, de plus, $\Phi = h = 45^\circ$.

Ceci permettra d'utiliser un triangle isocèle dans la construction et le pliage décrits ci-dessous, dans le modèle d'un **cadran solaire standard pour la latitude de 45 degrés NORD**.

Pliage

Le cadran solaire en papier est un simple ruban de papier avec des ailettes triangulaires pliables pour réaliser les murs de soutènement d'un plan parallèle au plan équatorial (**figure 1**). A la latitude 45° N les pliages sont très simples car les triangles d'inclinaison (soutènement du plan de lecture du cadran) par rapport à l'horizontale sont à la fois rectangles et isocèles.

Après pliage (voir **photos 1 et 2**) selon C1 C2, le point A1 vient en D1, le point A2 vient en D2. Attention ! La rosette des heures de l'hémisphère SUD imprimée sur le ruban passe dessous après le pliage.

Il est recommandé d'effectuer le découpage suivant CSAB plutôt que selon CAB : les triangles supplémentaires qui en résultent pourront se replier sous le cadran après le pliage préliminaire du ruban, et servir de fondations à l'équilibre et la rigidité de l'ensemble (on peut même ajouter un point de colle si le cadran n'a pas à être déplacé).

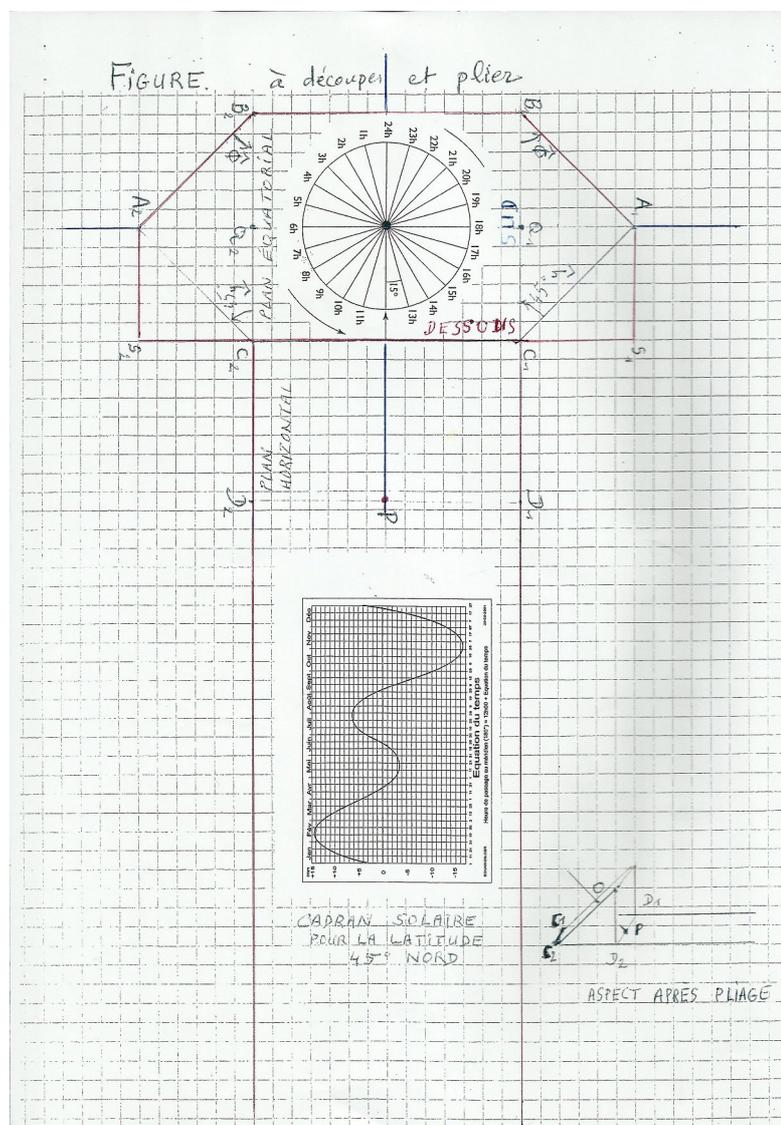


figure 1 – principe de préparation du cadran solaire

Orientation, Collage, Utilisation, Correction légale de fuseau horaire

Une fois plié, le cadran doit être orienté comme une flèche qui indique le nord vrai, c'est-à-dire le nord géographique. Le style (aiguille de couturière piquée en O)⁽¹⁾ est positionné en P (milieu du segment D1 D2) et il pointe alors vers l'étoile polaire.

Attention ! En automne et hiver (du 22 septembre au 21 mars), le cadran est éclairé *par-dessous le pli du ruban*, où la rosette des heures est pré imprimée (**photo 1**). Au printemps et en été, le soleil éclaire *le dessus du papier replié*, où il faut coller la rondelle NORD, avec midi dans la direction du NORD (**photo 2**). Les jours d'équinoxe, les 21 mars et 22 septembre (et les quelques jours voisins qui précèdent ou suivent ces dates) les rayons du soleil arrivent dans le plan du papier et n'éclairent pratiquement ni le dessus ni le dessous...

Astuce : Pour effectuer le centrage et le collage de la rondelle nord, il est recommandé d'établir un plan de quadrillage par transparence du papier de la rondelle sud.

On peut, théoriquement, orienter le style directement vers l'étoile polaire. Mais on ne suivra pas une voie aussi peu commode pour la mise en pratique !

On peut réaliser l'orientation du cadran avec une boussole, mais le nord magnétique peut induire une erreur de quelques degrés (consulter une carte topographique locale et pas trop ancienne, pour connaître la déclinaison magnétique locale).

On peut également orienter le cadran vers le NORD VRAI avec une montre, à condition de retirer 2 heures à la montre pendant la période légale de l'heure d'été et 1 heure pendant l'heure d'hiver, car le cadran solaire indique l'heure vraie, non l'heure légale. Telle est la correction d'heure légale (en Europe). Il convient en outre d'effectuer des

1 La longueur de l'aiguille doit être de 5 à 6 centimètres.

corrections de longitude et d'équation du temps : ces corrections sont indiquées ci-après *pour l'emploi du cadran correctement orienté*. Cependant, lorsqu'il s'agit de la phase préliminaire d'orientation du cadran (et pas encore de son utilisation) on comprendra sans difficulté que les dites corrections doivent être effectuées à l'envers.

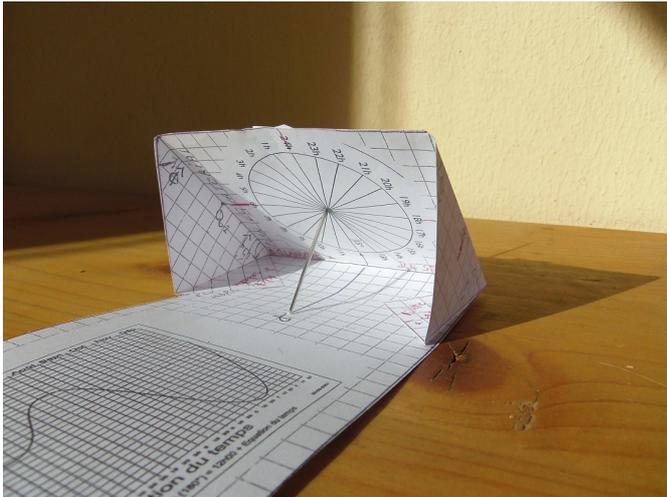


photo 1 – le cadran solaire, une fois plié, pour la lecture en automne et hiver: l'ombre du style se projette sur la rosette collée face intérieure (rosette SUD) (on lit ici 13h30 environ, heure solaire vraie)

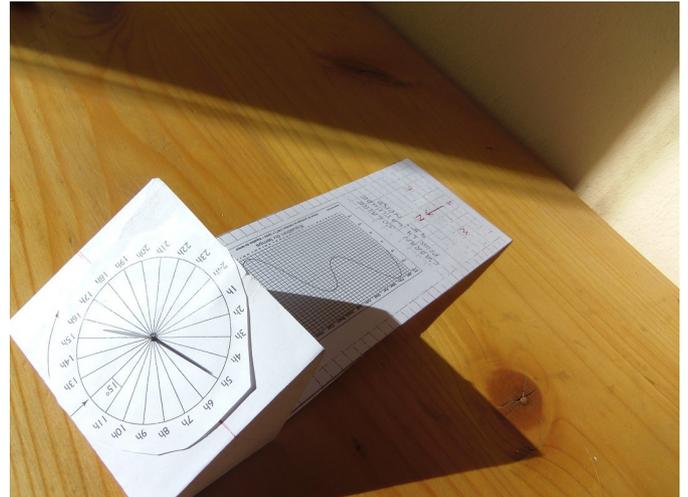


photo 2 – le cadran solaire, une fois plié, pour la lecture en printemps et été: l'ombre du style se projette sur la rosette collée face externe (rosette NORD) (l'heure indiquée ici est fausse, la photo étant prise en hiver, et le cadran tourné au sud, mais c'est à titre d'illustration)

Corrections supplémentaires

1 - Correction due à la longitude

Le modèle standard du cadran est calculé et dessiné pour la latitude de 45° N à la longitude 0° (c'est-à-dire sur le méridien de Greenwich) : son utilisation idéale serait à environ 12 km à l'est de Coutras en Gironde, où seule la correction de l'équation du temps serait à effectuer.

En s'éloignant du méridien de Greenwich, il faut, pour obtenir *l'heure solaire moyenne du méridien*, effectuer une correction due à la longitude, *par rapport à l'heure solaire vraie*, lue sur le cadran, s'il est correctement orienté. (Si on oriente le cadran avec une montre, on effectuera la correction **à l'envers au moment de l'orientation du cadran**, de ce qui est indiqué ci-dessous qui concerne le **moment de son utilisation**.)

A l'est de Greenwich, par exemple à *Valence dans la Drôme*, par 5 degrés de longitude Est, il est midi vrai 20 minutes avant Greenwich (de façon plus générale une horloge à l'heure de Greenwich est donc en retard sur l'heure vraie, d'une heure tous les 15 degrés de longitude Est) mais à l'ouest, par exemple à *Bordeaux en Gironde*, par un demi degré de longitude Ouest il est midi vrai 2 minutes plus tard qu'à Greenwich (de façon plus générale une horloge à l'heure de Greenwich est donc en avance sur l'heure vraie, d'une heure par 15 degrés de longitude Ouest). La correction algébrique est, en valeur absolue, de 4 minutes par degré de longitude. Ce modèle standard de cadran conviendrait encore pour Turin en Italie et Sherbrooke au Canada et jusqu'au détroit de la Pérouse au Japon.

2 - Correction due à l'équation du temps

En raison des irrégularités saisonnières *de l'heure solaire vraie par rapport à l'heure solaire moyenne*, une correction supplémentaire par l'équation du temps est imprimée sur le ruban de papier.

Par exemple à la mi-février et à la mi-juillet, le soleil vrai passe à Greenwich, respectivement avec 15 minutes et 6 minutes environ de retard sur l'heure solaire moyenne (si votre montre est réglée à l'heure moyenne de Greenwich, elle est donc en avance sur le cadran vrai). A la mi-mai et au début novembre, le soleil vrai passe à Greenwich, respectivement avec 4 minutes et 16 minutes environ d'avance sur l'heure solaire moyenne (et la même montre est alors en retard par rapport au cadran).

REMARQUES

Si on s'éloigne trop du 45^{ème} parallèle, le cadran perd en exactitude, il faut recalculer les triangles BAC, BQA, AQC avec

$$\tan \Phi = QA/QB = 1 / \tan h$$

Un modèle de cadran plus sophistiqué est proposé à découper pour des latitudes allant de 40° à 50° Nord, suivant la couleur et le filé (continu ou pointillé) des lignes de coupe et de pliage (figure 2).

Le canevas du cadran solaire, pour latitude 45°N, tel qu'il se présente pour le découpage et le pliage, est donné à la figure 3, pour la face interne (période automne-hiver) et la face externe (période printemps-été).

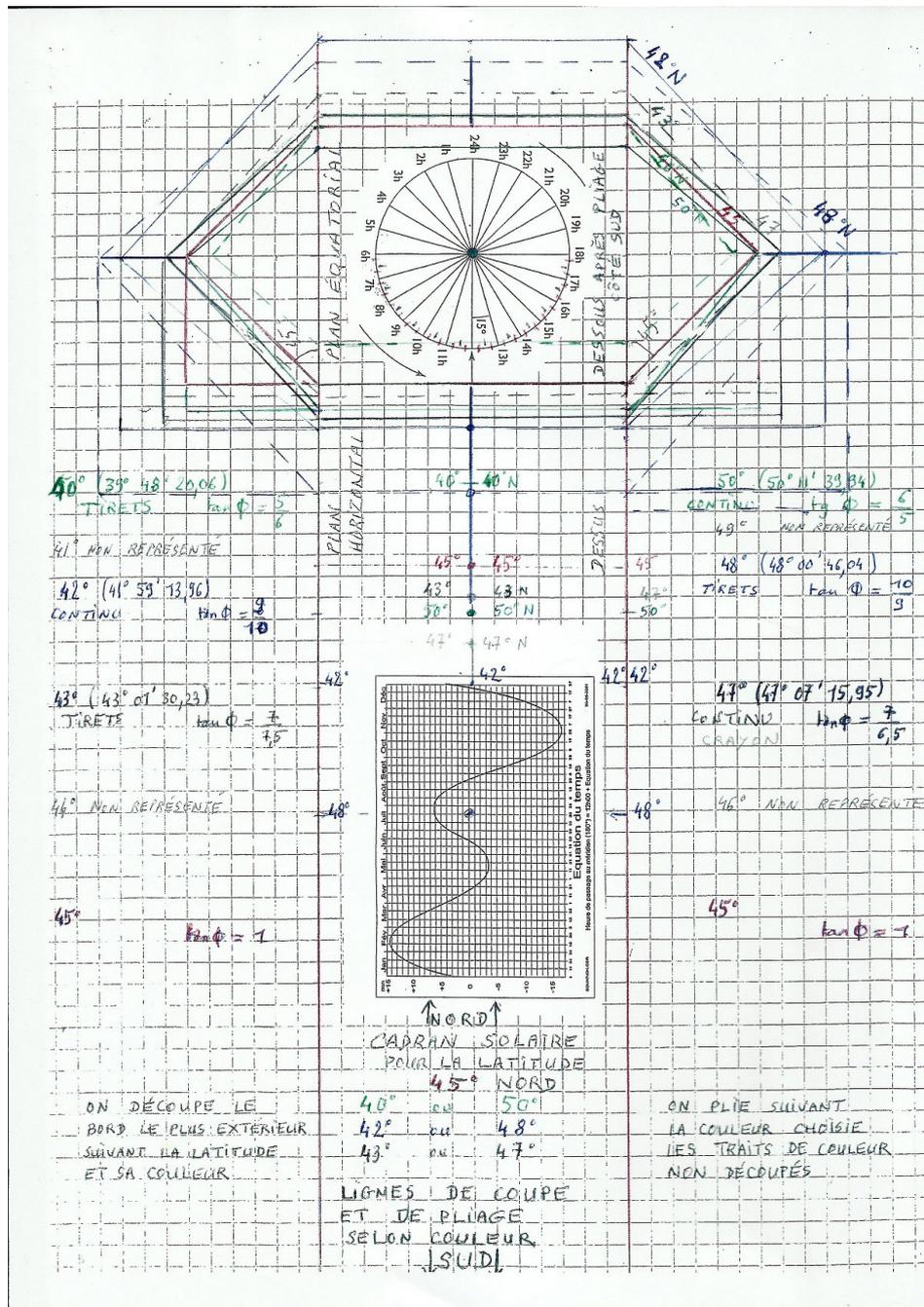
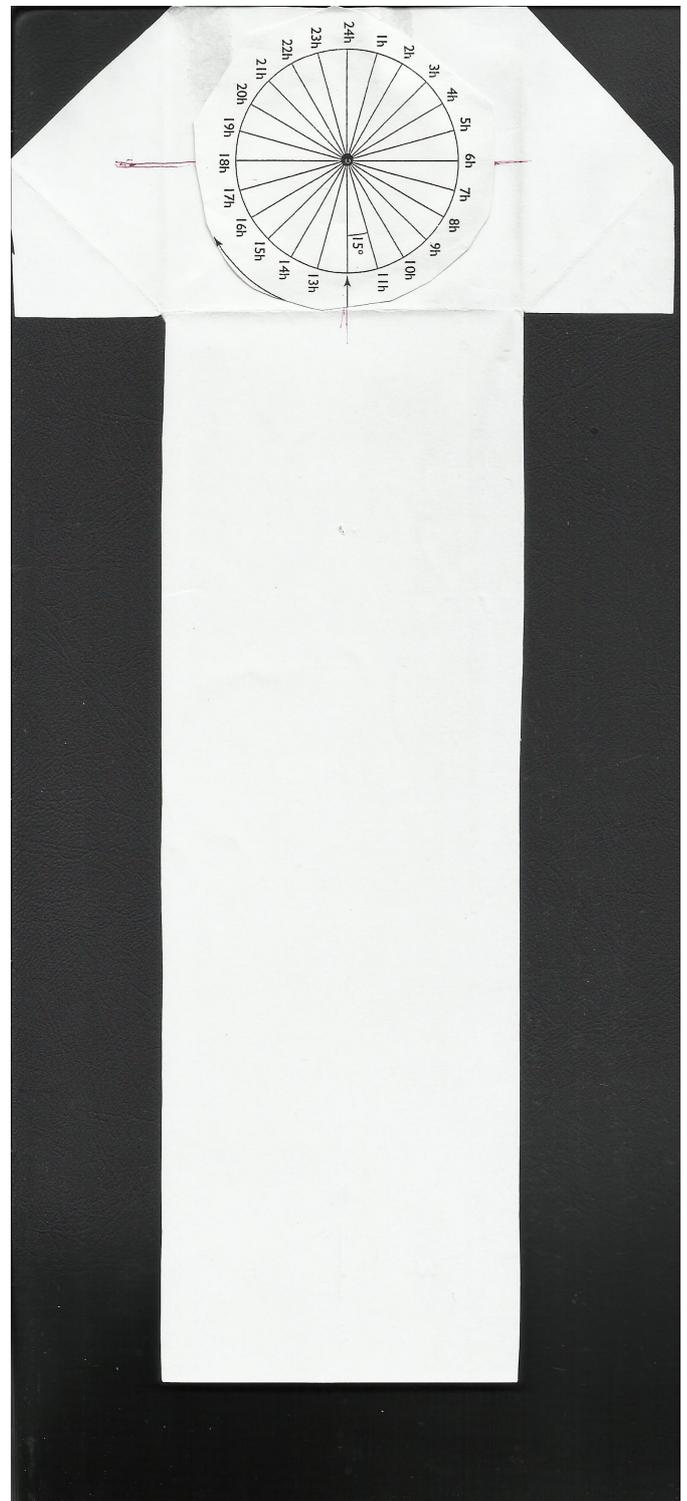
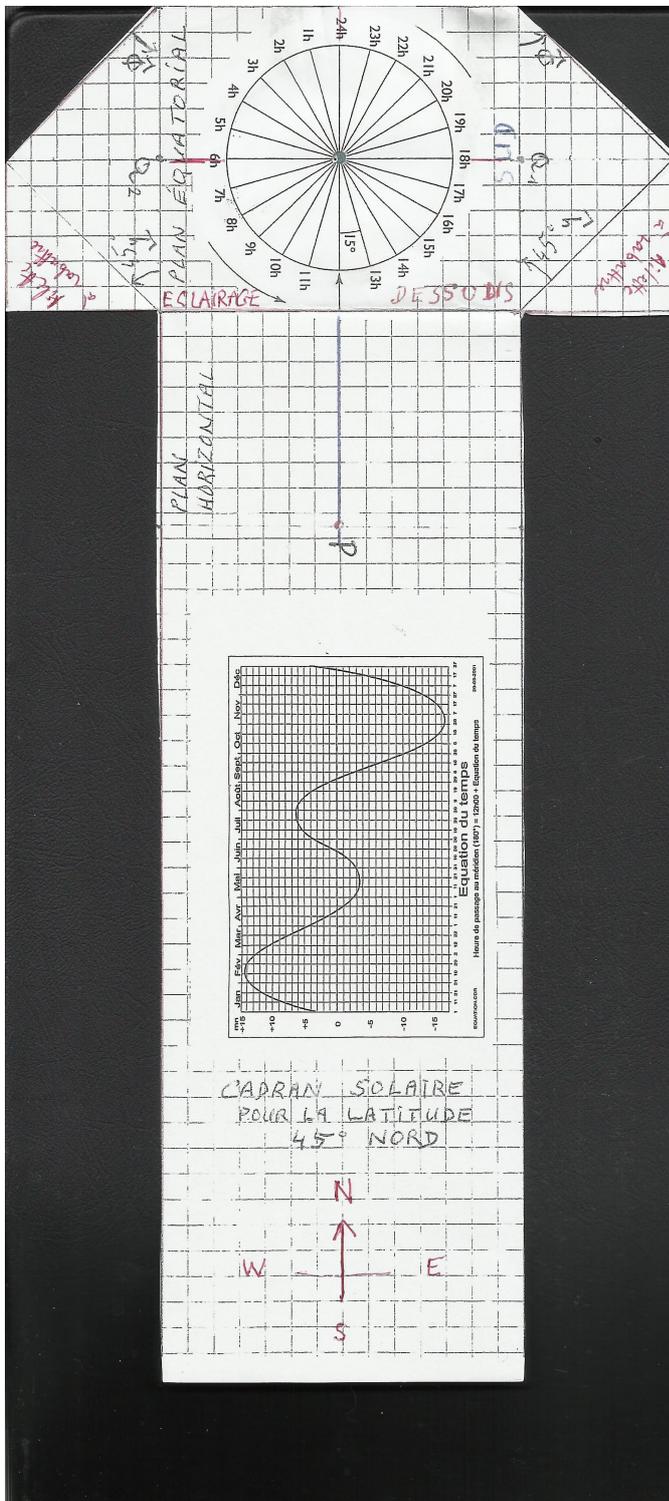


figure 2 – pré-découpage des ailettes pour des latitudes comprises entre 40 et 50°N

La précision du cadran, après les corrections, mais sans précautions supplémentaires, **est de l'ordre du quart d'heure ou un peu mieux**. Pour l'améliorer davantage, il conviendrait d'assurer par nivellement la planéité et l'horizontalité du support, la perfection des angles de soutènement. Autant prévoir alors un cadran mural en marbre dans ce cas, avec de nouveaux calculs d'architecture et de nouvelles constructions géométriques. On admet que le cadran solaire de Jaipur, en Inde, serait un des plus parfaits au monde avec une erreur absolue de l'ordre de 20 secondes...



(a) face interne (utilisation pour automne-hiver)

(b) face externe (utilisation pour printemps-été)

figure 3 – canevas prêt pour pliage et découpage du cadran solaire en papier (latitude 45°N)

NAVIGATION ASTRONOMIQUE POUR LE PLANCHER DES VACHES OU LE GPS EN PAPIER

Principe

Il peut sembler anachronique de s'intéresser aujourd'hui à la navigation astronomique qui vous donne une position géographique médiocre, alors que le système GPS (Global Positioning System) vous donne instantanément une position précise à quelques mètres près. Et à vrai dire, sur le plancher des vaches, une carte topographique ne permet-elle pas, moyennant quelques repérages et quelques calculs, de connaître également votre position sur la terre à quelques mètres près, dans un système de coordonnées spécifié (Nouvelle Triangulation Française, WGS84, etc.) aux innombrables subtilités sur les arcs d'ellipses et le choix

du méridien origine ?

L'intérêt de la navigation astronomique est ailleurs : il est d'apprendre à réfléchir sur les principes de fonctionnement d'une mesure géographique, car toute mesure géographique se ramène, en définitive, à une mesure astronomique. On se contentera pour le raisonnement du bon vieux *modèle sphérique* de la terre dont se servit Ératosthène pour mesurer la circonférence à partir d'un arc de méridien entre Alexandrie et Syène, dans l'Ancienne Égypte.

Latitude : à mesurer à midi vrai (à la méridienne). Si on connaît déjà la longitude, alors il est permis de tricher avec une montre..., pour repérer midi vrai plus facilement.

Un simple bâton vertical, appelé *gnomon*, éclairé par le soleil, dessine sur un papier millimétré, une ombre sur un plan horizontal. La figure ainsi constituée est *un triangle rectangle*, dont l'hypoténuse est la trace du rayon lumineux passant par le sommet du gnomon et l'extrémité de l'ombre portée. L'angle de visée du soleil, appelé h , à partir de l'extrémité de l'ombre est la hauteur du soleil. L'angle complémentaire, noté dz est égal, *les jours d'équinoxe*, à la latitude Φ , *mais ces jours-là seulement*.

La latitude Φ s'écrit de façon générale : $\Phi = dz + D$, où D est la déclinaison du soleil, et cette déclinaison est nulle les jours d'équinoxe. Il faut disposer des *éphémérides nautiques* pour connaître la déclinaison du soleil n'importe quel jour de l'année *à midi vrai (et à toute heure)* à Greenwich. On peut aussi utiliser les *éphémérides astronomiques* qui fournissent ces éphémérides pour 0 heure UTC (temps universel coordonné) mais il y a un peu plus de calculs à faire si on veut garder la même précision. On gardera ci-après, pour ce qui nous concerne, l'ancienne abréviation TU.

D est algébrique : si D est négative, le soleil est au sud de l'équateur, la somme algébrique se ramène à une soustraction, si D est positive, le soleil est au nord de l'équateur. Il est recommandé de faire tous les calculs en degrés décimaux, et de reconvertir les résultats en minutes et secondes d'arc.

Comme cette déclinaison varie en permanence, il faut impérativement disposer d'éphémérides, sauf deux jours particuliers de l'année, *les jours de solstice*, pour lesquels une éphéméride perpétuelle est acceptable sans erreur notable d'une année à l'autre. Voici cette éphéméride perpétuelle :

Le 21 décembre : $D = - 23^{\circ} 26,2'$

Le 21 juin : $D = + 23^{\circ} 26,2'$

Ces deux jours particuliers, la déclinaison est quasiment constante pendant près de 24 heures et même un peu plus, si bien qu'on peut essayer néanmoins de faire une mesure (moins précise) la veille ou le lendemain, si le soleil manque le jour de rendez-vous.

Les mesures de la longueur du gnomon et de celle de l'ombre ne fournissent pas directement un angle mais sa tangente :

$\tan dz = \text{ombre} / \text{gnomon}$ et **$\tan h = \text{gnomon} / \text{ombre}$**

Une calculatrice de poche dotée des fonctions trigonométriques inverses permettra de trouver l'angle cherché et la suite des opérations n'est pas différente d'une *mesure de latitude à la méridienne* pratiquée par les marins après une mesure d'angles au sextant.

Longitude : déterminer l'heure TU du midi vrai local. Une montre est obligatoire sans tricher. La longitude et la latitude étant présumées inconnues, il faut déterminer l'ombre la plus courte par observation de l'ombre. L'horloge ne sert pas à tricher mais à mesurer l'heure TU de l'ombre la plus courte et à la comparer aux éphémérides.

La mesure des longitudes est plus délicate, car il faut disposer d'une montre précise (à l'heure à la seconde près) pour déterminer *l'instant de passage du soleil au méridien local*. Comme cet instant est très difficile à évaluer, *il faut préparer la mesure* en dessinant des cercles concentriques autour du cercle de rayon minimal *atteint à midi vrai* (qu'il faut estimer préalablement). On notera l'heure de traversée de l'un de ces cercles le matin, puis de ce même cercle l'après-midi, on calculera la durée du parcours de l'ombre à l'intérieur de ce cercle : le midi vrai

est à la moitié de cette durée et cet instant est noté t.

On compare cet instant t à la valeur T_{pass} , *heure de passage du soleil au méridien de Greenwich*, donnée dans les éphémérides. La longitude G s'obtient avec la formule :

$$G = (t - T_{\text{pass}}) \times 15 \text{ degrés par heure}$$

Si G est négative, on est en longitude est.

Si G est positive, on est en longitude ouest.

Il faut donc également disposer d'éphémérides. On notera toutefois qu'il existe quatre jours particuliers dans l'année où une éphéméride perpétuelle permet une mesure honorable (avec T_{pass} à 3 secondes près, au pire) :

Le 3 (ou le 4) novembre, $T_{\text{pass}} = 11 \text{ h } 43 \text{ mn } 34 \text{ s}$ (erreur de 1 seconde)

Le 11 (ou le 12) février, $T_{\text{pass}} = 12 \text{ h } 14 \text{ mn } 14 \text{ s}$ (erreur de 2 à 3 s)

Le 14 (ou le 15) mai, $T_{\text{pass}} = 11 \text{ h } 56 \text{ mn } 19 \text{ s}$ (erreur de 3 s)

Le 25 (ou 26 ou 27) juillet, $T_{\text{pass}} = 12 \text{ h } 06 \text{ mn } 28 \text{ s}$ (erreur de 3s)

Ainsi peut-on savoir où on est sur la terre, sans autre document que ces éphémérides perpétuelles sommaires, à condition de s'armer de patience pour attendre les dates indiquées, à condition qu'il fasse beau...

Mais *les formules* indiquées s'appliquent n'importe quel jour de l'année, à condition de disposer d'éphémérides à jour : la méthode proposée n'est rien d'autre que *le point à la méridienne* des marins pratiqué ici sur le plancher des vaches.

On n'abordera pas ici *le point par intersection de droites de hauteur*, également pratiqué par les marins, et transposable au plancher des vaches, mais dont l'exposé (et la mise en œuvre) est beaucoup plus délicat.