



[Frédéric Elie on ResearchGate](#)

Réflexions sur Les « cerveaux de Boltzmann » en cosmologie et le problème de la mesure en mécanique quantique

Frédéric Élie

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est interdite. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract :

Le concept de « cerveaux de Boltzmann » a été employé pour la première fois en 2004 par Andreas Albrecht et Lorenzo Sorbo. Il est né d'une question du physicien Ludwig Boltzmann (1844-1906), le père de la Thermodynamique statistique : si l'on considère l'univers comme un système thermodynamique isolé, alors selon le Second Principe de la thermodynamique qui prévoit que son entropie augmente avec le temps, l'univers observable devrait montrer une structure désordonnée et uniforme aussi loin dans l'espace et dans le temps qu'on l'observe ; or, c'est l'inverse : l'univers présente un degré d'organisation élevé, ce qui correspondrait à un niveau d'entropie bas. Pourquoi ? La réponse proposée par Boltzmann exploite la possibilité d'existence de fluctuations aléatoires au sein d'un système hautement désorganisé (entropie élevée) et proche de l'équilibre thermodynamique, ces fluctuations pouvant aboutir à des structures, des sous-systèmes à entropie localement faible, autrement dit, très organisés. L'entropie est reliée à la probabilité d'apparition d'une structure.

Les fluctuations qui aboutissent à des systèmes complexes dans l'univers sont de très faible probabilité ; l'exemple le plus fameux est notre monde vivant. Mais la structure de l'univers observable, qui nous apparaît organisée, au lieu d'être d'un désordre homogène, est elle aussi le résultat de ces fluctuations rares, et c'est pourtant cet univers-là qui a contribué à l'émergence de notre système complexe local : la Terre avec le monde vivant, l'humanité formée d'êtres conscients. Selon Boltzmann, tout se passe comme si nous, en tant qu'humains apparus à l'issue de cheminements mettant en jeu des fluctuations de faible probabilité, pouvions seulement observer un aspect de l'univers lui aussi hautement improbable donc fortement structuré : c'est le principe de « sélection » ou de principe anthropique faible, sous son expression avant l'heure. Sous cette hypothèse, l'univers que nous pouvons observer n'est qu'un aspect ordonné, de faible entropie, d'un univers plus vaste dont l'entropie est élevée.

Le présent article propose un tour d'horizon des questions que pose le concept de cerveaux de Boltzmann, en particulier comment il se positionne dans le problème de la mesure en mécanique quantique, et quelles sont les différentes conceptions possibles de la cosmologie favorables ou bien défavorables à ce concept. Concrètement, il s'agira de présenter ou de rappeler :

- Quelles sortes de fluctuations fortement improbables ont pu donner des structures organisées de l'univers ? Tandis que Boltzmann évoquait à l'époque des fluctuations d'entropie, dans la physique actuelle ces fluctuations sont comprises comme des fluctuations quantiques du vide dans l'espace-temps cosmologique.

- En admettant que l'univers observable existe depuis 13,7 milliards d'années, est-il possible que les seules structures conscientes, et donc organisées, soient celles de l'être humain, cette durée étant trop courte pour qu'il y ait une probabilité suffisante qu'il en existe d'autres que les nôtres ? Dans l'affirmative, d'autres structures organisées conscientes, des cerveaux de Boltzmann, pourront-elles émerger dans un temps

suffisamment long, et se comporter elles aussi comme observateurs de l'univers ? Dans la négative, comment se positionnent ces cerveaux de Boltzmann par rapport à nous, et notamment dans les effets qu'ils induisent dans l'univers ? Toujours dans la négative, peut-on imaginer que, considérant la très faible probabilité d'apparition de cerveaux de Boltzmann contemporains dans un même univers, il existe d'autres « univers-bulles », ou multivers, où cette probabilité est plus grande ? Dans ce cas, l'univers que nous observons est un univers-bulle parmi d'autres et les autres ne sont pas observables par nous, comme le nôtre n'est pas observable par les autres cerveaux de Boltzmann ? L'ensemble des univers-bulles serait alors inclus dans un univers plus vaste à entropie élevée.

- Dans l'affirmative à la question précédente, y aurait-il « concurrence » entre les cerveaux de Boltzmann (thèse du « darwinisme quantique ») ? Si oui, sous quelle forme et à quelles fins ?

- Dans le problème de la mesure quantique, non encore résolu à ce jour, différentes interprétations sont proposées en tenant compte de tous ou une partie des 6 postulats de la mécanique quantique. Nous passerons en revue ces postulats et les différentes interprétations proposées. Parmi elles figurent des propositions selon lesquelles la conscience intervient dans le processus de mesure ou d'observation d'un système quantique, lequel n'est donc pas connaissable « en soi », indépendamment de l'observation ou de l'observateur : la réduction de l'onde quantique, c'est-à-dire la suppression de la superposition des états possibles du système, serait imputable à la conscience. Aucune expérience cruciale ne permet aujourd'hui de valider ou de réfuter cette théorie, mais si celle-ci était vraie, est-il concevable que les consciences des cerveaux de Boltzmann modifient la réalité de l'univers, auquel cas nous serions amenés, à terme, à reconsidérer tout ce que nous savons sur elle ?

- Dans le problème de la mesure, il faut distinguer la réduction de l'onde quantique et la décohérence de l'onde quantique. Dans le premier cas, la suppression de la superposition des états est instantanée ; dans le second elle survient en un temps fini, même s'il est extrêmement petit. La décohérence provient du fait que le système quantique n'est pas isolé de son environnement et interagit avec lui ; ce n'est pas la « conscience » qui la provoque. Cependant, la décohérence introduit la flèche du temps, là où le système quantique isolé est soumis à un temps réversible. La question encore ouverte est alors : comment passe-t-on du monde quantique au monde macroscopique où le temps est dans une direction privilégiée ? A ce jour, aucun critère de frontière entre ces deux mondes n'a été établi, il est même avancé que des systèmes macroscopiques peuvent avoir des comportements quantiques.

- Enfin, toujours dans le problème de la mesure quantique, l'interprétation probabiliste de l'onde quantique, et la dualité onde-corpuscule posent la question de la rétrocausalité : tout se passerait comme si un résultat de mesure correspond à un choix différé ou rétroactif d'un état du système quantique dans le passé qui précède la mesure. Autrement dit, le signal se comporterait à rebours, et sous certaines conditions la flèche du temps est rompue. Parmi les explications de la rétrocausalité figure celle des mondes multiples ou multivers.

SOMMAIRE :

1 – Le concept de « cerveaux de Boltzmann », et le paradoxe qu'il est censé résoudre

2 – Fluctuations du vide quantique et cosmologie

3 – Modèle cosmologique Λ CDM

4 - Énergie et fluctuations du vide

4-1 - La conception du vide, en mécanique quantique

4-2 - Perturbations de l'hamiltonien

4-3 - Diagrammes de Feynman et états virtuels

4-4 - Opérateurs de création et d'annihilation

4-5 – Lagrangien du champ et quantification

4-5-1 – Degrés de liberté et moments conjugués du champ

4-5-2 – Couplage d'un champ classique avec un système de particules

4-5-3 – Champs spinoriels de Dirac

5 – Rôle éventuel des fluctuations du vide dans l'émergence supposée des grandes structures

5-1 – Pour expliquer l'importance du rôle éventuel des fluctuations du vide

5-2 – L'inflation cosmologique, son rôle éventuel dans l'excitation du vide quantique, et l'ère radiative qui lui succède

5-2-1 – Généralités

- 5-2-2 – L'inflation cosmologique
- 5-2-3 – L'ère radiative
- 5-2-4 – La période du découplage
- 5-3 – Le problème de la faible entropie de l'univers primordial
- 5-4 – Inflation éternelle et multivers
 - 5-4-1 – Champ et bosons de Higgs
- 5-5 – Effets de courbure de l'espace-temps sur le vide
 - 5-5-1 – Équations d'Euler-Lagrange, et équations d'onde des champs
 - 5-5-2 – Principe de superposition
 - 5-5-3 – Fonction d'onde d'univers et équation de Wheeler-De Witt (WDW)
 - 5-5-4 – Équation de Klein-Gordon dans un espace-temps courbe de type FLRW
 - 5-5-5 – États « observer-dependent »
 - 5-5-6 – Formulation cosmologique du principe anthropique
- 6 – Comment expliquer les fluctuations cosmologiques : fluctuations de l'entropie ou bien fluctuations du vide quantique ?
 - 6-1 - Fluctuations de l'entropie ?
 - 6-2 - Fluctuations du vide quantique ?
- 7 – Cerveaux de Boltzmann dans un univers unique (le nôtre) ou dans plusieurs univers-bulles ?
- 8 – Les postulats de la physique quantique et diverses propositions de réponses au problème de la mesure quantique
 - 8-1 – Les 6 postulats du formalisme de la physique quantique, et les problèmes fondamentaux de leur cohérence mutuelle
 - 8-1-1 – Postulat 1 : Définition de l'état quantique
 - 8-1-2 – Postulat 2 : Principe de correspondance
 - 8-1-3 – Postulat 3 : Principe du résultat de mesure d'une observable
 - 8-1-4 – Postulat 4 : Interprétation probabiliste de la fonction d'onde (Postulat de Born)
 - 8-1-5 – Postulat 5 : Réduction de l'onde quantique
 - 8-1-6 – Postulat 6 : Évolution temporelle de l'état quantique
 - 8-1-7 - Désignation des 2 problèmes fondamentaux
 - 8-2 - Différentes interprétations de la physique quantique comme réponses proposées aux problèmes de la mesure quantique : réduction et décohérence de l'onde quantique ?
 - 8-2-1 - L'interprétation positiviste de l'École de Copenhague
 - 8-2-2 - Interprétation réaliste des mondes multiples
 - 8-2-3 - Interprétation par les « histoires consistantes » d'un objet quantique
 - 8-2-4 - Interprétation réaliste de la décohérence de l'onde quantique
 - 8-2-5 - Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : potentiel quantique de Bohm-Hiley
 - 8-2-6 - Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : Interprétation réaliste de la disparition de la superposition des états causée par des perturbations non linéaires de l'équation d'onde
 - 8-2-7 - Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : Mécanique stochastique de Nelson (ou mouvement brownien universel)
 - 8-2-8 - Interprétation idéaliste de la disparition de la superposition des états par l'intervention de la conscience
 - 8-3 – Proposition d'une interprétation perso : la décohérence de l'onde quantique comme réalisation du principe de négligeabilité
- 9 – Problème du temps : relation entre le temps quantique et le temps macroscopique ; flèche du temps
 - 9-1 - L'origine quantique de la flèche du temps
 - 9-2 – Notes sur l'irréversibilité, l'entropie, l'information, la complexité
- 10 – Conclusion
- Références

1 – Le concept de « cerveaux de Boltzmann », et le paradoxe qu'il est censé résoudre

Expliquons le plus simplement possible le concept de « cerveaux de Boltzmann » (en anglais « Boltzmann's Brains » BB).

Le concept est né d'une question du physicien Ludwig Boltzmann (1844-1906), le père de la Thermodynamique statistique : si l'on considère l'univers comme un système thermodynamique isolé, alors selon le Second Principe de la thermodynamique qui prévoit que son entropie augmente avec le temps, l'univers observable devrait montrer une structure désordonnée et uniforme aussi loin dans l'espace et dans le temps qu'on l'observe ; or, c'est l'inverse : l'univers présente un degré d'organisation élevé, ce qui correspondrait à un niveau d'entropie bas. Pourquoi ? La réponse proposée par Boltzmann exploite la possibilité d'existence de fluctuations aléatoires au sein d'un système hautement désorganisé (entropie élevée) et proche de l'équilibre thermodynamique, ces fluctuations pouvant aboutir à des structures, des sous-systèmes à entropie localement faible, autrement dit, très organisés. L'entropie est reliée à la probabilité d'apparition d'une structure, selon la relation :

$$S = k_B \ln \Omega \quad (1-1)$$

où S est l'entropie, Ω la probabilité de la configuration, on complexion, k_B la constante de Boltzmann. L'équilibre thermodynamique correspond à l'entropie S maximale, c'est-à-dire à l'état le plus probable (Ω maximale), celui-ci étant l'état d'un désordre uniforme dont la description nécessite une quantité d'information minimale (en termes de description statistique). Un sous-système complexe de l'univers, d'entropie faible et décroissante, contribue à l'entropie d'univers : celle-ci devant être croissante et élevée, l'environnement de ce système complexe doit avoir une entropie croissante, donc une évolution vers le désordre, de telle sorte que la somme de son entropie et de celle du système complexe donne l'entropie d'univers, croissante et élevée. Le maintien du système complexe nécessite alors un transfert de l'environnement vers lui qui augmente sa complexité et, par conséquent, appauvrit celle de l'environnement : ce transfert est un « apport de variété » (Henri Atlan, [2])⁽¹⁾ qui permet au système complexe d'avoir une entropie qui, sur une durée significative, connaît une phase de décroissance. Au-delà de cette phase, le système évolue vers un état de plus grand désordre et retrouve le comportement classique d'une entropie croissante. Les fluctuations qui aboutissent à des systèmes complexes dans l'univers sont de très faible probabilité ; l'exemple le plus fameux est notre monde vivant. Mais la structure de l'univers observable, qui nous apparaît organisée, au lieu d'être d'un désordre homogène, est elle aussi le résultat de ces fluctuations rares, et c'est pourtant cet univers-là qui a contribué à l'émergence de notre système complexe local : la Terre avec le monde vivant, l'humanité formée d'êtres conscients. Selon Boltzmann, tout se passe comme si nous, en tant qu'humains apparus à l'issue de cheminements mettant en jeu des fluctuations de faible probabilité, ne pouvions observer qu'un aspect de l'univers lui aussi hautement improbable donc fortement structuré : c'est le principe de « sélection » ou de principe anthropique faible, sous son expression avant l'heure (T. Boisson [6]).

On appelle alors *cerveau de Boltzmann* une entité consciente de soi qui a été engendrée par des fluctuations aléatoires dans une structure plus vaste, telle l'univers ou le vide dans un état de chaos. L'utilité de ce concept est qu'il tient compte du constat, effectué déjà par Boltzmann, que l'univers observé est dans un état faiblement probable, donc de faible entropie : il présente partout une structure organisée, hors équilibre (au sens thermodynamique), contrairement à un état chaotique. Or un tel univers est seul capable de générer des structures hautement organisées et conscientes de son existence : ces structures sont des « cerveaux de Boltzmann » (Albrecht et Sorbo, [1]) ; elles ne pourraient pas exister dans un univers où sont absentes des fluctuations de probabilité finie.

Le paradoxe en objet est le suivant : des structures organisées conscientes dans un univers chaotique homogène, dans un état de quasi-équilibre thermodynamique, ont une probabilité plus grande d'exister que celles dans un univers organisé, tel que celui que l'on observe effectivement. L'univers, tel qu'il est observé par des entités autonomes et conscientes, comme le sont les humains, se présente comme un environnement organisé ; cette situation est beaucoup moins probable que celle d'un univers désorganisé,

1 Les numéros entre crochets [...] renvoient aux références listées en fin du présent document.

un chaos thermodynamique, qui contiendrait des entités autonomes et conscientes nées de fluctuations dans ce chaos. Pourtant la première situation semble l'emporter sur la seconde malgré sa très faible probabilité.

Comment alors concilier, en termes de probabilité d'occurrence, l'existence de structures conscientes hautement organisées et hors équilibre et celle d'un univers lui aussi organisé qui les contient ?

Depuis le Big Bang, il y a 13,7 milliards d'années, si l'univers est considéré comme un système thermodynamiquement isolé, son entropie aurait dû augmenter conformément au Second Principe de la thermodynamique, et aujourd'hui une structure de l'univers complètement désordonnée devrait être observée. Or c'est l'inverse : l'univers observable présente une organisation assez élaborée, donc très peu probable pour un système isolé.

Pour lever ce paradoxe, il est donc nécessaire de supposer que l'univers, tel que nous l'observons, n'est pas thermodynamiquement isolé mais est inclus dans un univers plus vaste : comme l'entropie de l'univers observé est faible et contribue à l'entropie de l'univers englobant, supposé isolé cette fois, celle-ci devra être bien plus grande que l'entropie de l'univers observé ; on doit avoir :

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{univers observé}} + \Delta S_{\text{environnement}} > 0 \quad (1-2)$$

où $\Delta S_{\text{total}} > 0$ est la variation d'entropie de l'univers englobant total, toujours croissante car il est isolé, $\Delta S_{\text{univers observé}} \leq 0$ variation d'entropie de l'univers observé, décroissante ou nulle puisqu'il présente un ordre élevé, $\Delta S_{\text{environnement}} > 0$ variation de l'entropie de l'environnement de l'univers observé où ont eu lieu les fluctuations d'entropie qui ont engendré notre univers observé peu probable, cette entropie est nécessairement croissante et largement supérieure à celle de l'univers observé pour que celle de l'univers total soit elle aussi croissante.

■ *Remarque* : la relation précédente (1-2) est la même pour un système complexe organisé (un être vivant par exemple) ouvert et en interaction avec un environnement ; sa néguentropie (représentative de son niveau organisé) est maintenue au prix d'une augmentation de l'entropie d'univers, qui se traduit par un transfert d'information vers le système vivant, ce que Henri Atlan a appelé « apport de variété » ([2],[3]).

On voit d'ores et déjà se profiler la question cosmologique de la situation de l'univers observable dans un ensemble plus vaste qui peut être celui d'un multivers (Everett [4]), ou même d'une hiérarchie d'univers jusqu'à régression infinie, dans laquelle l'univers (n+1) est source de fluctuations engendrant un univers (n) (Madore [5]).

Plus les fluctuations sont intenses, moins elles sont probables dans l'univers englobant ; elles peuvent aller jusqu'à générer l'univers englobé lui-même. C'est la raison pour laquelle, dans l'univers observé, englobé, il est quasi impossible d'observer d'autres structures plus organisées que celles déjà accessibles à l'observation.

Il peut sembler sans intérêt pratique de soulever le problème des cerveaux de Boltzmann, étant donné le niveau spéculatif auquel il se place : en quoi impacte-t-il notre vie quotidienne, tout au moins quel enjeu scientifique – et philosophique – porte-il ? Réponse : inscrit dans le contexte du problème de la mesure de la physique quantique, et en tenant compte de la structure et de l'évolution cosmologiques de l'univers observable, ce problème présente un enjeu majeur :

- a) Selon la structure et l'évolution cosmologiques de l'univers, peut-il exister aujourd'hui, dans le passé, ou dans le futur plusieurs cerveaux de Boltzmann, et sous quelles conditions de fluctuations ?
- b) Parmi les interprétations possibles de la physique quantique, en réponse au problème de la mesure quantique, si celles qui établissent un lien entre la conscience de l'observateur et le phénomène mesuré s'avèrent exactes, alors les cerveaux de Boltzmann, en tant qu'observateurs conscients de l'univers, peuvent à long terme modifier celui-ci : en conséquence, pour l'homme, sa vision du monde telle que lui offre la physique, serait amenée à changer et à être remise en cause sous la pression des interactions entre

les consciences des BB et l'univers.

- c) L'esprit humain, en tant qu'observateur de la nature, forme-t-il un cerveau de Boltzmann lui aussi ; pourquoi ? Les humains sont-ils les seuls cerveaux de Boltzmann ? Comment cela reste-t-il compatible avec le principe de non finalisme de l'univers, qui est un des piliers de l'approche rationnelle et objective en science (principe d'objectivité)[9] ?

Réponses succinctes : l'esprit humain n'est pas un cerveau de Boltzmann car il est le résultat d'un long processus d'évolution, et non le produit quasi-spontané de fluctuations du vide. D'autre part, celles-ci étant totalement cohérentes avec les Principes Fondateurs qui sous-tendent la formation et l'évolution de ou des univers, qui par définition excluent tout finalisme a priori universel, elles ne doivent pas être interprétées comme des vecteurs d'une finalité qui justifierait l'existence des cerveaux de Boltzmann.

2 – Fluctuations du vide quantique et cosmologie

Les fluctuations du vide peuvent s'expliquer par la cosmologie quantique. La théorie quantique prévoit les fluctuations des états quantiques autour des états fondamentaux du vide quantique, sur la base des relations d'incertitude de Heisenberg portant sur l'énergie E et le temps t :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (2-1)$$

où $\hbar = h/2\pi$, h est la constante de Planck [13]. Plus généralement ces inégalités portent sur les grandeurs physiques conjuguées au sens de Hamilton, p et q, comme par exemple la quantité de mouvement ou moment p et les degrés de liberté ou position q :

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2 \quad (2-2)$$

Les fluctuations du vide quantique ont été mises en évidence, entre autres, par l'*effet Casimir* [15]. Pour une fluctuation de durée finie Δt , une variation d'énergie ΔE peut se produire et être suffisamment élevée pour engendrer des particules virtuelles, des paires de particules-antiparticules, des photons, des atomes ou des structures plus complexes qui peuvent interagir avec la matière ou les rayonnements. Les structures complexes apparaissent seulement si la variation d'énergie est suffisamment grande, donc si la durée de la fluctuation est très courte. Mais la probabilité de leur création est extrêmement faible, particulièrement sur la durée de 13,7 milliards d'années depuis le Big Bang.

En 2008, A. Linde considéra que ces fluctuations apparaissent dans l'énergie sombre du vide qui contribue aux forces répulsives opposées à la gravitation et rassemblées dans la constante cosmologique Λ . D'après les dernières données du satellite Planck, lancé par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) en 2009 [12], on sait que l'énergie sombre, encore inconnue, représente 68,3% de l'énergie totale de l'univers observable (les 31,7% d'énergie restante se répartissent en 4,9% de matière ordinaire et 26,8% de matière noire, elle aussi encore inexpliquée, présente dans les structures astrophysiques [14]. Depuis 1998 (Perlmutter 1999, Riess 1998) [10], [11], [12], les observations montrent une accélération cosmologique de l'univers, ce qui laisse supposer l'existence d'effets opposés à la gravitation à grande échelle.

L'introduction de la constante cosmologique par Einstein est parfaitement compatible avec la théorie de la relativité générale, mais comme elle peut aboutir à un modèle d'univers stationnaire (sans expansion ni ralentissement), ce que refusait Einstein, celui-ci l'a retirée de ses équations, allant jusqu'à s'autocritiquer en écrivant à Weyl que l'introduction de la constante cosmologique est « la plus grande bêtise de sa vie ». Mais les progrès de la cosmologie observationnelle ont remis la constante cosmologique sur le devant de la scène. Les observations, issues de programmes de la sonde WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe ou WMAP est un observatoire spatial américain de la NASA lancé en juin 2001), SNE (utilisation des supernovae de type I), BAO (mesures de spectres de puissance d'oscillations acoustiques baryoniques), donnent :

■ **La partie observable de l'univers** s'étend jusqu'à 3000 Mpc environ, au-delà il y a la limite de l'horizon cosmologique. Au-delà de 100 Mpc, la structure de l'univers est statistiquement homogène et isotrope à

grande échelle. Pour des distances $a < 100$ Mpc, la structure est fortement hétérogène, avec une sorte de hiérarchisation : galaxies, amas, super-amas.

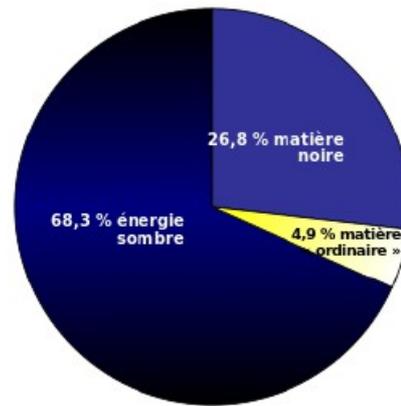


Figure 2-1 : distribution de l'énergie dans l'univers :
énergie sombre, matière noire, matière ordinaire

■ « *Constante* » de Hubble : c'est le temps cosmique écoulé depuis le Big Bang. Le temps cosmique est le temps propre d'un observateur, situé sur la Terre par exemple, comobile avec l'univers supposé homogène et isotrope, ce qui est effectivement observé, aux fluctuations près du fond diffus cosmique, de sorte que l'on peut affirmer que le principe cosmologique s'applique : aucun observateur dans l'univers n'occupe une place privilégiée pour observer l'univers. En conséquence, le temps cosmique est le temps propre d'un observateur au repos par rapport au référentiel espace-temps de l'univers qui, lui, est en évolution depuis le Big Bang. De sorte que les référentiels comobiles des observateurs sont équivalents dans un univers homogène et isotrope. Le modèle cosmologique répondant à ce critère, le plus communément admis, est basé sur la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Cette métrique introduit le facteur d'échelle qui mesure comment varie la distance entre deux objets au repos, en fonction du temps cosmique, à cause de l'expansion de l'univers. Si r_0 est la distance comobile entre ces objets à l'instant cosmique t_0 , elle deviendra $r(t)$ au temps cosmique t par l'intermédiaire du facteur d'échelle $a(t)$:

$$r(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} r(t_0)$$

Du fait de la comobilité des deux objets, le rapport entre les distances comobiles est égal à celui des rayons de l'univers R en ces instants ; si, en outre, t_0 est choisi comme temps présent, on pose $a(t_0) = 1$, et l'on a :

$$a(t) = \frac{r(t)}{r(t_0)} = \frac{R(t)}{R(t_0)} \quad (2-3)$$

Le facteur d'échelle $a(t)$ est relié aux différentes formes d'énergie de l'univers, par les équations de Friedmann. Mais la loi de Hubble (1929), qui indique la proportionnalité entre la vitesse de récession d'une galaxie depuis un observateur terrestre et sa distance, suggère que l'observation porte plutôt sur le taux de variation du facteur d'échelle, qui est appelée abusivement « constante de Hubble » malgré que ce taux varie avec le temps cosmique du fait des différentes phases d'expansion de l'univers :

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad \text{où} \quad \dot{a}(t) = \frac{da}{dt} \quad \text{est la variation du facteur d'échelle} \quad (2-4)$$

C'est pourquoi une appellation plus appropriée de H est « taux d'expansion ». Pour fixer les idées, l'élément métrique FLRW a la forme suivante, pour un espace sans courbure (ce qui est proche du cas observé aujourd'hui) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2-5a)$$

où dx, dy, dz désignent les coordonnées comobiles, c'est-à-dire intervenant dans la distance entre deux points de l'univers indépendamment de l'expansion de l'univers (ce qui implique que cette distance s'exprime avec une unité liée à l'expansion).

Si les coordonnées comobiles de l'observateur sont fixes (dx = dy = dz = 0) alors dt = ds/c est son temps propre. Le ds² s'écrit aussi avec les coordonnées physiques dl² = a(t)²(dx²+dy²+dz²) = a(t)² dr² :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (2-5b)$$

le facteur d'échelle a(t) exprime donc le passage des coordonnées comobiles aux coordonnées physiques. En vertu du principe copernicien (il n'existe pas d'observateur privilégié et central dans l'univers), la récession a été interprétée comme une dilatation de l'espace-temps, homogène et isotrope pour tout observateur, ce qui est à l'origine des théories cosmologiques d'expansion de l'univers depuis une singularité initiale. L'observation donne environ : H = 71,9 km/s/Mpc à +2,6, -2,7 km/s/Mpc près. H a la dimension de l'inverse d'un temps [T⁻¹].

■ **Rappel** : L'unité de distance Mpc (Mégaparsec) est : 1 Mpc = 3,26.10⁶ années-lumières = 3,086.10²² m. Le parsec (pc), unité de distance souvent utilisée en astronomie, est la distance au Soleil d'un observateur telle que celui-ci verrait la distance Terre-Soleil sous un angle de 1" d'arc :

1 pc = 3,085 677 581 467 2 × 10¹⁶ m ; on l'exprime aussi en unités astronomiques (1 ua = distance moyenne Terre-Soleil = 1,495 978 707 × 10¹¹ m), soit : 1 pc = 206 264,806 245 48 ua.

■ **Âge de l'univers** : c'est la durée écoulée depuis le Big Bang. Comme l'on ne sait rien sur ce qui précède le Big Bang, un âge fini de l'univers ne signifie pas que celui-ci n'ait pas toujours existé, ou en tous cas existé bien avant l'ère du Big Bang, car celle-ci est un horizon de la physique. Parmi les différentes méthodes pour évaluer l'âge de l'univers, les résultats issus des données du satellite d'observation Planck, combinées avec celles du WMAP. Le principe repose sur la mesure de l'expansion de l'univers (voir ci-dessus), c'est-à-dire du « taux d'expansion » ou « constante de Hubble ». Techniquement on utilise la spectroscopie pour obtenir la vitesse de récession des galaxies qui est obtenue par effet Doppler : le décalage vers le rouge du spectre des galaxies dû à leur récession à la vitesse v est donné par :

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \quad \text{où } \lambda \text{ est la longueur d'onde et } \beta = v/c \text{ (c : vitesse de la lumière)}$$

d'où la vitesse de récession : $v = c \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$

Celle-ci étant reliée à la loi de Hubble par $v = \frac{da(t)}{dt} = Ha(t)$ on tire H à partir de z. La valeur de H après diverses méthodes, est H = 67,4 ± 0,5 km s⁻¹ Mpc⁻¹ (18 juillet 2018). Plus exactement, H n'est pas rigoureusement constante :

- 1°) on observe une tendance à l'accélération de l'expansion de l'univers ;
- 2°) la vitesse de récession de chaque point d' l'univers a changé au cours du temps cosmique depuis le Big Bang : elle était plus importante aux temps qui ont juste suivi le Big Bang, notamment lors de la phase inflationnaire ; puis elle a fortement diminué en donnant la vitesse de récession des galaxies actuelle.

- 3°) Enfin la phase d'accélération nouvellement observée montre un accroissement de la vitesse de récession. Malgré ces changements, le modèle cosmologique FLRW montre que H reste pratiquement constante. **L'estimation de l'âge de l'univers** utilise le « temps de regard vers le passé » (ou « lookback time ») noté s, qui est le moment depuis lequel un objet lointain a émis son rayonnement qui parvient jusqu'à nous, compte tenu du décalage spectral vers le rouge dû à l'expansion ; il fournit donc un âge de

l'objet exprimé en temps cosmique. Il est égal à : $s = \frac{v}{c} \frac{1}{H_0}$ ce qui donne en fonction du décalage z :

$s = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$. Or lors de l'émission du fond diffus cosmologique (voir ci-après), on sait que le décalage spectral était $z \approx 1000$, ce qui donne pratiquement pour l'âge de l'univers depuis le Big Bang

$$s \approx t_0 = \frac{1}{H_0} \quad (2-6)$$

Avec les valeurs numériques données ci-dessus, on obtient: $t_0 = 13,69 \pm 0,13$ milliards d'années, c'est l'âge présumé du Big Bang. Les données du satellite Planck donnent plus précisément : $t_0 = 13,82$ milliards d'années.

■ **Température du fond diffus cosmologique** : cette température est rattachée au rayonnement électromagnétique qui emplit l'univers à ses tous premiers instants, son existence est prévue dans le modèle du Big Bang. Dans les 380 000 années qui suivent le Big Bang, l'univers, alors de très petite dimension, est rempli d'un plasma de particules (un plasma est un gaz constitué de particules chargées électriquement) : protons, électrons, photons, etc. Cette matière primordiale est en équilibre thermique et, à ce titre, elle émet un rayonnement électromagnétique de corps noir avec une longueur d'onde inversement proportionnelle à la température (loi de Wien) ; cette observation est incompatible avec les théories cosmologiques de l'état stationnaire (sans expansion), lesquelles, du coup, perdent de l'intérêt. La densité est telle que les photons interagissent rapidement avec la matière, et donc ont un libre parcours moyen très faible : l'univers est donc opaque à cause de ce piégeage des photons.

Cette situation perdure jusqu'à ce que, 380 000 ans après le Big Bang, l'univers est suffisamment dilaté pour que sa température moyenne baisse et qu'il se produise le découplage du rayonnement et de la matière : les électrons libres peuvent s'associer aux protons et aux neutrons, ce qui forme les premiers atomes, et les photons, n'étant plus piégés par la matière du fait de sa charge devenue neutre, peuvent se propager avec un libre parcours moyen plus important, de l'ordre des dimensions de l'univers. L'énergie rayonnée ainsi libérée est alors très élevée : des quelques 3000 K de température qu'elle avait au moment du découplage ⁽²⁾ (qui correspond aux longueurs d'onde du proche infrarouge), par suite de l'expansion de l'univers elle chute, par effet Doppler, à une température très basse, $2,7260 \pm 0,0013$ K ⁽³⁾, correspondant à une longueur d'onde de 3 mm qui est du domaine spectral compris entre l'infrarouge lointain (10 à 100 μm) et les micro-ondes, ou hyperfréquences (longueurs d'onde centimétriques). C'est le **rayonnement fossile, ou du fond diffus cosmologique** (ou CMB : Cosmic Microwave Background)[16] tel qu'il fut observé par le dispositif du laboratoire spatial WMAP de la NASA lancé en 2001, et affinant les observations de l'observatoire spatial COBE (Cosmic Background Explorer) de la NASA, opérant de 1989 à 1996 en vue d'établir une cartographie des anisotropies à grande échelle du CMB. Avec l'expansion de l'univers, le CMB continuera son décalage vers le rouge jusqu'à ne plus être détectable car son spectre sera noyé dans ceux des structures astrophysiques nettement plus énergétiques.

Le rayonnement fossile est globalement homogène, cependant il présente des fluctuations distribuées dans certaines directions de très faible amplitude, dont l'une des origines remonterait aux périodes qui précèdent l'inflation cosmique apparue 10^{-35} seconde après le Big Bang, à l'issue de l'« ère de Planck » : les fluctuations seraient causées principalement par des oscillations acoustiques des baryons et par des effets de diffusion. Les oscillations acoustiques résultent des interactions entre les photons et les baryons du plasma primordial : tandis que le gaz de photons exerce une pression isotrope qui tend à supprimer les irrégularités, l'attraction gravitationnelle exercée par les baryons entre eux les fait se déplacer lentement et former des amas de densités non uniformes ; des oscillations acoustiques résultent de la compétition entre ces deux effets opposés et génèrent par résonance des pics de rayonnement perceptibles dans le CMB. La densité de ces perturbations est adiabatique (sans variation de chaleur), ce qui est compatible avec le fait

2 Cette température correspond à une énergie de 0,26 eV, nettement plus petite que celle d'ionisation de l'hydrogène 13,6 eV, c'est pourquoi les photons avant le découplage ne peuvent pas modifier l'énergie des atomes d'hydrogène H.

3 La température du CMB à 2,726 K correspond à une densité d'énergie, compte tenu de l'expansion, égale à $0,25 \text{ eV/cm}^3$ ($4,005 \times 10^{-14} \text{ J/m}^3$). La quasi totalité de l'énergie de rayonnement de l'univers est contenue dans le CMB. Le rayonnement du CMB correspond à une densité de photons égale environ à $400\text{--}500 \text{ photons/cm}^3$. La température a diminué d'un facteur égal à $3000/2,726 = 1100$.

que l'énergie diminue jusqu'à atteindre l'énergie du champ scalaire, déclenchant alors la phase d'inflation cosmique, processus non adiabatique au cours duquel en un temps extrêmement court l'univers a connu une expansion brutale l'amenant à une courbure très faible. Les zones de concentration de matière engendrée par les interactions gravitationnelles entre baryons sont distribuées de manière non uniforme, elles donneront naissance aux grandes structures telles que les galaxies et les amas de galaxies, matière noire (qui reste encore à expliquer).

Les effets de diffusion, quant à eux, proviennent du fait que le découplage des photons et des baryons s'effectue après une certaine durée, il n'est pas immédiat : la probabilité avec laquelle le photon a diffusé (appelée PVF, photon visibility function) est une fonction du temps ; on montre que le maximum de PVF avec laquelle le photon a diffusé pour la dernière fois correspond à 372 000 années, qui est une valeur finie (on dit alors que la profondeur de la surface de dernière diffusion des photons est finie, ce qui est effectivement observé). Mais la durée totale des découplages s'étend sur 115 000 ans après les tout premiers instants qui suivent le Big Bang, ce qui, compte tenu du résultat précédent, donne comme durée de formation du CMB : $115000 + 372000 = 487000$ années.

De plus, aux oscillations primordiales du CMB présentées ci-dessus s'ajoutent les anisotropies tardives ou secondaires : depuis que les photons ont pu se propager librement, la matière ordinaire, d'origine baryonique, était constituée d'atomes électriquement neutres (hydrogène, hélium). Or les observations montrent au contraire que l'espace intersidéral est rempli majoritairement d'ions : le processus qui a provoqué l'ionisation des atomes neutres, ou « réionisation », s'est accompagné de fluctuations dans le rayonnement électromagnétique, qui a abouti à de nouvelles hétérogénéités du CMB. Toutefois, ces inhomogénéités du CMB sont suffisamment infimes pour ne pas remettre en cause l'observation qui indique que la structure cosmologique est de géométrie quasi plate, sans courbure (figure 2-2). Mais la structure pseudo-euclidienne de l'espace-temps semble ne pas convenir, et certains astrophysiciens, comme Jean-Pierre Luminet, proposent une géométrie analogue à celle du dodécaèdre de Poincaré [17].

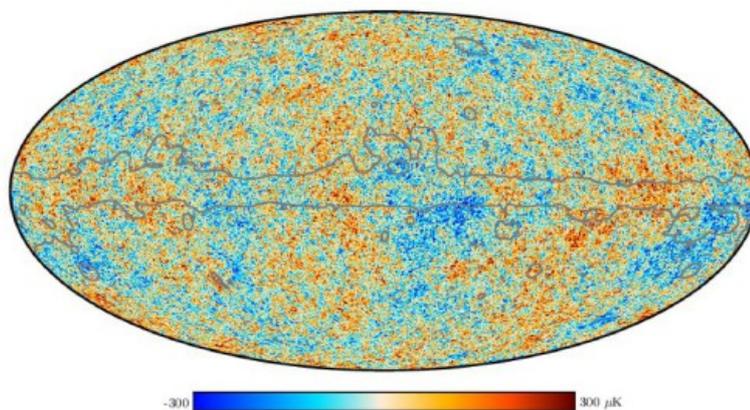


figure 2-2 : carte du CMB après correction des effets de polarisation, représentant la distribution thermique (Planck 2018) : l'amplitude des variations de température donnée par les couleurs s'échelonne de -300 μK à +300 μK

3 – Modèle cosmologique ΛCDM

Le modèle cosmologique qui fait actuellement le plus grand consensus est le « modèle ΛCDM » : il intègre la prise en compte de la constante cosmologique Λ (associée à l'énergie sombre), et de la matière noire froide (CDM : Cold Dark Matter) ; la géométrie relativiste de l'univers est celle d'une variété « plate » (courbure quasi nulle), c'est-à-dire pseudo-euclidienne si l'on utilise les coordonnées physiques au lieu des coordonnées comobiles, comme vu ci-dessus (métrique FLRW) ; ceci revient à adopter comme densité d'énergie ρ la densité critique ρ_c comme le montrent les observations.

Cette densité est déduite des équations de Friedmann-Lemaître qui relient la courbure, le taux d'expansion et la densité d'énergie :

$$H^2 + c^2 \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + c^2 \frac{\Lambda}{3} \quad (3-1)$$

où K est le facteur de courbure, Λ la constante cosmologique, G la constante de gravitation de Newton, c la vitesse de la lumière, ρ_m la densité de masse de l'univers. L'équation (3-1) signifie :

expansion + courbure = masse de l'univers + énergie du vide quantique

Unités et dimensions : $H = [T^{-1}]$, $K = [L^{-2}]$, $\rho_m = [ML^{-3}]$, $\Lambda = [L^{-2}]$. Selon les valeurs de K , l'univers est soit ouvert, soit sans courbure, soit fermé :

$K = -1$: univers ouvert ;

$K = 0$: univers sans courbure (« plat »)

$K = +1$: univers fermé (« sphérique »).

Quel que soit le scénario d'évolution de l'univers en fonction du temps cosmique, les deux conditions suivantes doivent être prises en compte :

- a) - Conservation de la masse totale, exprimée avec le rayon de l'univers $R(t)$:

$$\rho_m R(t)^3 = \text{constante}$$

soit, avec $a = R(t)/R(t_0)$:

$$\rho_m a^3 = \text{constante} \quad (3-2)$$

- b) - Le rayon de courbure de l'espace-temps, rayon de l'univers $R(t)$, varie avec le temps en fonction du paramètre d'accélération ou de décélération :

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{4\pi G \rho_m}{3H_0^2} \quad (3-3)$$

où $\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$ et H_0 constante de Hubble actuellement connue, q_0 est sans dimension.

La densité critique de masse de l'univers correspond à la situation où l'énergie de gravitation et l'énergie cinétique des masses sur lesquelles s'exerce l'attraction gravitationnelle de l'univers sont en équilibre. Soient M la masse de l'univers et m celle d'un corps matériel quelconque animé de la vitesse v due à

l'expansion, alors cette condition est : $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GM}{R} m$

Or d'après la loi de Hubble, $v = H_0 R$ et la masse de l'univers, supposé sphérique, est :

$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_m$; à l'équilibre on a donc : $\frac{1}{2} H_0^2 R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{G}{R} \rho_c$ où ρ_c est la densité critique, soit :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (3-4)$$

En utilisant les paramètres de densité :

- densité de la matière, sans pression, dans l'univers : $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m$

- densité d'énergie sombre : $\Omega_\Lambda = c^2 \frac{\Lambda}{3H_0^2}$

- densité liée à la courbure et à l'expansion : $\Omega_R = \frac{-Kc^2}{H_0^2 a^2}$

(3-1) s'exprime alors par :

$$\Omega_m + \Omega_R + \Omega_\Lambda = 1 \quad (3-5)$$

La densité massique de l'univers est la somme des densités de matière baryonique Ω_b et de matière noire froide Ω_{dm} :

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}$$

avec :

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_b \quad (\rho_b \text{ densité massique de matière baryonique})$$

$$\Omega_{dm} = \frac{\rho_{dm}}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{dm} \quad (\rho_{dm} \text{ densité massique de matière noire froide})$$

La densité massique de matière totale de l'univers, qui inclut l'équivalent en masse de l'énergie de rayonnement Ω_r , est la somme :

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r$$

où les rayonnements sont la somme des rayonnements des neutrinos Ω_ν et des photons (rayonnement électromagnétique) Ω_γ :

$$\Omega_r = \Omega_\nu + \Omega_\gamma$$

avec $\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c}$ où ρ_γ densité des photons.

Nota : Avec la définition de Ω_m , la condition de conservation (3-2) s'écrit aussi :

$$H_0^2 \Omega_m = \text{constante} \times a^3$$

L'univers est « plat » (sans courbure) si $\Omega_R = 0$, c'est-à-dire pour : $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Son expansion est accélérée si $q_0 > 1$, la valeur critique $\rho_m = \rho_c$ correspond à $q_0 = 1$, d'après (9) : $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} > \frac{1}{2}$.

Les données d'observation de 2006 fournissent les valeurs suivantes [19], où la constante de Hubble est réécrite sous la forme paramétrique :

$$H_0 = 100 h_0 (\text{km.s}^{-1} . \text{Mpc}^{-1}) \quad (3-6)$$

où h_0 est ajustée en fonction des observations obtenues. En ordre de grandeur : $h_0 \approx 0,7$

Les valeurs du tableau 3-1 suivant montrent que l'univers est plat, $\Omega_R = 0$ avec

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 0,24_{-0,04}^{+0,03} + 0,76_{-0,06}^{+0,04} = 1,00_{-0,06}^{+0,04}$$

et l'expansion accélère puisque :

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \frac{0,76_{-0,06}^{+0,04}}{0,24_{-0,04}^{+0,03}} \geq \frac{0,70}{0,27} = 2,59 > \frac{1}{2}$$

grandeur	notation	Valeur et unités
Température du CMB	T_0	$2,725 \pm 0,001$ (K)
Densité d'entropie	s/k_B (s : entropie S par unité de volume)	$2889,2 (T/T_0)^3$ (cm^{-3})
Densité de photons du CMB	n_γ	$410,5 \pm 0,5$ (cm^{-3})
Facteur d'échelle de la constante cosmologique	$c^2/3H_0^2$	$2,853 \times 10^{51}/h_0^2$ (m^2)
Densité critique de masse de l'univers	$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$	$2,77536627 \times 10^{11} h_0^2$ ($M_{\text{soleil}} \text{Mpc}^{-3}$) $= 1,87837(28) \times 10^{29} h_0^2$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) $= 1,05369(16) \times 10^{-5} h_0^2$ ($\text{GeV}/c^2 \cdot \text{cm}^{-3}$)
Densité de la matière sans pression de l'univers	$\Omega_m = \rho_m/\rho_c$	$0,127_{+0,007;-0,009} \cdot h_0^{-2} = 0,24_{+0,03;-0,04}$
Densité de matière baryonique de l'univers	$\Omega_b = \rho_b/\rho_c$	$0,0223_{+0,0007;-0,0009} \cdot h_0^{-2} = 0,042_{+0,003;-0,005}$
Densité de matière sombre de l'univers	$\Omega_{\text{dm}} = \Omega_m - \Omega_b$	$0,105_{+0,007;-0,010} \cdot h_0^{-2} = 0,20_{+0,02;-0,04}$
Densité de rayonnement de l'univers	$\Omega_\gamma = \rho_\gamma/\rho_c$	$(2,471 \pm 0,004) 10^{-5} h_0^{-2} = (4,6 \pm 0,5) \times 10^{-5}$
Densité de neutrinos de l'univers	Ω_ν	$< 0,007 h_0^{-2} = 0,014$
Densité d'énergie sombre de l'univers	Ω_Λ	$0,76_{+0,04;-0,06}$ (95%)
Densité d'énergie totale de l'univers	$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda$	$1,003_{+0,013;-0,017}$
Proportion de baryons par rapport aux photons	$\eta = n_b/n_\gamma$	$4,7 \times 10^{-10} < \eta < 6,5 \times 10^{-10}$ (95%)
Densité du nombre des baryons de l'univers	n_b	$1,9 \times 10^{-7} (\text{cm}^{-3}) < n_b < 2,7 \times 10^{-7} (\text{cm}^{-3})$
Âge de l'univers (depuis le Big-Bang)	t_0	$13,7_{+0,1;-0,2}$ (Gannées)

Tableau 3-1 : quelques données d'observations cosmologiques

4 - Énergie et fluctuations du vide

4-1 - La conception du vide, en mécanique quantique, est très différente de celle de la physique classique : elle met en œuvre l'énergie du « point zéro », état quantique fondamental correspondant à l'absence de quanta, et comme conséquence du principe d'incertitude de Heisenberg qui est un des fondements du formalisme quantique, le concept de particules virtuelles. Les conséquences de l'existence du vide quantique, s'il venait à faire l'objet d'expériences cruciales prouvant définitivement sa réalité, sont multiples, de l'échelle nanophysique jusqu'aux échelles cosmologiques puisque, dans le Modèle Standard cosmologique, l'énergie du vide serait associée à la constante cosmologique. Les principaux effets qui sont considérés comme manifestation du vide quantique sont l'effet Casimir, le décalage de Lamb, et d'autres effets. Le rayonnement des trous noirs, établi par Stephen Hawking, impliquerait aussi le rôle du vide quantique...

■ **Expliquer l'état du point zéro** (et les fluctuations associées) fait intervenir les notions suivantes [13] :

- les opérateurs de création et d'annihilation en physique quantique ;
- ceci nécessite d'exprimer les perturbations de l'hamiltonien du champ ;
- ces opérateurs s'utilisent dans le couplage du champ avec des particules ;
- les diagrammes et intégrales de chemin de Feynman ;
- les états virtuels.

Les champs quantiques impliqués dans ces modèles sont non seulement de nature champ scalaire classique, mais aussi d'autres natures importantes en physique des particules et en cosmologie quantique : champ spinoriel (théorie de Dirac), champ scalaire de brisure de symétrie (champ des bosons de jauge de Higgs), champ vectoriel (tel que ceux de l'électromagnétisme, et plus généralement de Proca), champ

tensoriel (adapté à la description des interactions entre la gravitation et les autres champs, donc en cosmologie). Pour mémoire, les champs sont des domaines où des particules sont créées et sont annihilées, ce qui fait l'objet du formalisme des opérateurs création et annihilation ; ces particules ont des spins caractérisés par la nature du champ (en unité \hbar) : celles du champ scalaire sont de spin 0, celles du champ spinoriel (fermions par exemple) sont de spin 1/2, celles du champ vectoriel (photons par exemple) sont de spin 1, celles du champ tensoriel (gravitons par exemple)[41] sont de spin 2, etc.

Le vide quantique regroupe les états fondamentaux des champs d'interaction en l'absence de particules de matière (fermions). Dans le modèle standard des interactions il s'agit des champs : électromagnétique, électrofaible (bosons de Higgs), de jauge et de fermions.

Les champs sont des superpositions de modes d'oscillation, de différentes pulsations $\omega = 2\pi\nu$ (ν est la fréquence), sur des niveaux quantifiés $n\omega$, où n est un entier. On montre que les différents modes peuvent être assimilés à ceux d'oscillateurs harmoniques et que, en appliquant les principes de la mécanique quantique (notamment la non commutation des opérateurs impulsion \mathbf{p} et position \mathbf{x} , à l'origine des inégalités de Heisenberg), leurs énergies sont, pour chaque pulsation (4) :

$$E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (4-1)$$

L'état fondamental, pour chaque mode du champ, correspond à $n = 0$; son énergie, appelée **énergie du point zéro**, n'est pas nulle mais égale à $E_0 = 1/2 \cdot \hbar\omega$ (avec $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,62606876 \cdot 10^{-34}$ J.s constante de Planck). Le vide quantique contient donc de l'énergie, et même, a priori, beaucoup d'énergie puisque les pulsations ne sont pas supérieurement bornées. Mais cette énergie n'est pas utilisable parce que :

- Pour chaque oscillateur au niveau fondamental, cette énergie est la plus petite possible : son extraction demande alors une énergie extérieure qui lui est au moins égale.
- Par suite des inégalités de Heisenberg (ou principe d'incertitude), elle subit des fluctuations par lesquelles peuvent émerger puis disparaître des particules virtuelles. L'apport d'une énergie extérieure en vue d'une utilisation de l'énergie du vide agirait sur ces fluctuations, dans le sens d'une augmentation de l'instabilité, et pour retrouver son état d'équilibre stable le vide retournerait vers un nouvel état de point zéro.
- Aux échelles étendues, sur des grands volumes d'espace, les énergies des fluctuations du vide autour du point zéro (et non les énergies du point zéro qui constituent le vide quantique) deviennent négligeables. En effet, par exemple en électrodynamique quantique, on montre que l'énergie moyenne du point zéro correspondant à un oscillateur du champ électromagnétique dépend du volume V dans lequel il est confiné selon :

$$E^2 = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \quad (4-2)$$

($\varepsilon_0 = 8,854187817... \text{ F.m}^{-1}$ permittivité du vide). La relation (4-2) signifie qu'aux échelles macroscopiques l'énergie moyenne est négligeable puisque sur de grandes échelles les fluctuations s'annulent mutuellement.

Cependant l'énergie moyenne des fluctuations du vide quantique entraîne des effets à l'échelle microphysique observables, comme :

- L'effet Casimir ;
- Des photons émis spontanément par des atomes ;
- Échange de particules virtuelles, non directement observables, qui empruntent de l'énergie au vide, et sont vecteurs des interactions entre les particules élémentaires, qui sont, elles, observables ; ce sont par exemple les photons virtuels échangés entre deux particules chargées lors de leur interaction électromagnétique. Suite aux relations d'incertitude, l'énergie n'est pas conservée sur un laps de temps très court, en revanche elle l'est au bout d'un temps fini parce que les particules virtuelles disparaissent en restituant l'énergie.
- L'apparition de paires particules-antiparticules virtuelles, par exemple électrons-positrons, résultant de la conservation de la charge ; tandis que l'énergie peut ne pas se conserver sur une durée très courte qui

4 Expression donnée dans le cas simple d'un opérateur hamiltonien sans dégénérescence de ses valeurs propres.

correspond à une incertitude d'autant plus grande sur l'énergie ; la charge électrique, en revanche se conserve toujours (car elle n'est pas impactée par les relations d'incertitude).

L'apparition de paires de particules possédant une masse au repos s'explique par l'équivalence relativiste masse-énergie $E = mc^2$, d'où il résulte qu'une fluctuation d'énergie du vide produise une fluctuation de masse, sujette à apparaître et à disparaître sur un temps très court.

• Des oscillations moléculaires contribuant aux forces de Van der Waals (voir par ex. [46]) ...

De sorte qu'à la température $T = 0$ K, où pour la thermodynamique statistique classique les particules sont supposées ne plus se déplacer, pour la thermodynamique statistique quantique, en revanche, un minimum d'agitation subsiste à cause de l'énergie du point zéro et de ses fluctuations. Par exemple, sous 1 atmosphère et à $T = 0$ K, l'hélium liquide ne gèle pas à cause des fluctuations de son énergie du point zéro.

4-2 - Perturbations de l'hamiltonien

Elles s'expriment au moyen de l'opérateur d'évolution qui agit sur un état quantique décrit par la fonction d'onde $|u(t)\rangle$. L'opérateur d'évolution est introduit sous l'hypothèse fondamentale que l'évolution est causale : un état quantique $|u\rangle$ connu à un instant t_0 évolue vers un autre état à une date ultérieure $t > t_0$, et cette évolution est prédictible. De plus, l'hypothèse selon laquelle la superposition des états, supposée linéaire, est maintenue lors de l'évolution. Ces hypothèses amènent à la relation entre deux états à l'instant t_0 et l'instant t :

$$|u(t)\rangle = U(t, t_0)|u(t_0)\rangle \quad (4-3)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution agissant dans l'espace de Hilbert des vecteurs états quantiques $|u\rangle$. L'opérateur U vérifie la condition initiale :

$$U(t_0, t_0) = \mathbf{1}$$

et la relation de composition où un temps intermédiaire quelconque t' intervient :

$$U(t, t_0) = U(t, t')U(t', t_0)$$

Les fonctions d'onde, vecteurs de l'espace de Hilbert, vérifient l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |u(t)\rangle = H(t)|u(t)\rangle$$

où H est l'opérateur hamiltonien. On montre alors que, H étant un opérateur hermitique et $|u\rangle$ un vecteur unitaire, c'est-à-dire vérifiant $\langle u|u\rangle = 1$, l'opérateur d'évolution vérifie l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad (4-4)$$

On montre alors que, lorsque des états quantiques différents se succèdent selon l'ordre chronologique des temps intermédiaires $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$, faisant intervenir les opérateurs d'évolution $U(t', t_0)$, $U(t', t_1)$, ..., $U(t_{n-1}, t_n)$, ..., l'évolution globale est décrite par le développement en série, appelée *série de Dyson* :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & \mathbf{1} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H(t_2) dt_2 + \dots \\ & \dots + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) dt_n + \dots \end{aligned} \quad (4-5)$$

Pour un hamiltonien H indépendant du temps, le système est conservatif et la solution générale (4-5) se simplifie considérablement sous la forme :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H\right) \quad (4-6)$$

Si l'hamiltonien est perturbé, il se décompose en un hamiltonien non perturbé H_0 qui vérifie l'équation de Schrödinger, et en une perturbation H_i :

$$H(t) = H_0 + H_i(t)$$

À l'hamiltonien non perturbé H_0 est associé l'opérateur d'évolution donné par (4-6) :

$$U_0(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0\right)$$

solution de :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = H_0 U_0(t, t_0) \quad (4-7)$$

qui est donc connue puisque H_0 est supposé connu. Soit $U(t, t_0)$ l'opérateur d'évolution associé à l'hamiltonien total H . On montre alors que, suite à la présence de la perturbation H_i , d'opérateur d'évolution U_i , l'équation d'évolution est :

$$i\hbar \frac{\partial U_i}{\partial t} = U_0^\dagger H_i U_0 U_i = H'_i U_i \quad (4-8)$$

où $H'_i(t, t_0)$ est l'opérateur hamiltonien transformé de l'hamiltonien perturbé dans la représentation de Heisenberg (H_i étant celui dans la représentation de Schrödinger) :

$$H'_i(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0) H_i(t, t_0) U_0(t, t_0) \quad (4-9)$$

(4-8) équivaut aussi à :

$$U_i(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H'_i(t') U_i(t', t_0) dt' \quad (4-10)$$

On montre que les états intermédiaires $|a'\rangle$ issus de la perturbation de l'hamiltonien sont aussi solutions d'une équation de Schrödinger où l'hamiltonien est H'_i :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a', t\rangle = H'_i(t, t_0) |a', t\rangle \quad (4-11)$$

On détermine la probabilité de transition d'un état intermédiaire $|a'(t_0)\rangle$ en un état intermédiaire $|b'(t)\rangle$. De manière générale, le postulat n°4 de la mécanique quantique (voir chapitre 8) pose que la probabilité de transition d'un état $|a(t_0)\rangle$ en un état $|b(t)\rangle$ est définie par :

$$P(a \rightarrow b) = |\langle b | U(t, t_0) | a \rangle|^2 \quad (4-12)$$

En présence d'un hamiltonien perturbé $H(t) = H_0 + H_i(t)$, la probabilité de transition de l'état initial $|a, t_0\rangle$ d'hamiltonien H_0 vers l'état final $|b, t\rangle$ devient :

$$P(a \rightarrow b) = |\langle b | U_i(t, t_0) | a \rangle|^2$$

avec la condition initiale sur l'état intermédiaire :

$|a', 0\rangle = |a, t_0\rangle$ et sur son état final : $|a', t'\rangle = |b, t\rangle$.

Pour la perturbation, $U_i(t, t_0)$ s'exprime par la série de Dyson (4-5).

On montre alors que l'élément de matrice de $U_i(t, t_0)$ à différents ordres de son développement en série de Dyson est :

$$U_i(t, t_0) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U_i^{(n)}(t, t_0) \quad (4-13a)$$

où $U_i^{(n)}$ est le terme du développement de $U_i(t, t_0)$ au rang n :

$$U_i^{(n)}(t, t_0) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0} dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 H_i(t_n) H_i(t_{n-1}) \dots H_i(t_1) \quad (4-13b)$$

Compte tenu de (4-9), (4-13a,b) donne pour l'opérateur d'évolution global :

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (4-14a)$$

où $U^{(n)}$ est le terme du développement de $U(t, t_0)$ au rang n :

$$U^{(n)}(t, t_0) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0} dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 U^{(0)}(t, t_n) H_i(t_n) U^{(0)}(t_n, t_{n-1}) H_i(t_{n-1}) \dots U^{(0)}(t_2, t_1) H_i(t_1) U^{(0)}(t_1, t_0) \quad (4-14b)$$

Les éléments de matrice de $U(t, t_0)$ qui interviennent dans la probabilité de transition (4-12) sont donc, suite à (4-14a,b) :

$$\langle b | U(t, t_0) | a \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle b | U^{(n)}(t, t_0) | a \rangle \quad (4-15)$$

où $U^{(0)}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0\right)$ (relation (4-6)).

4-3 - Diagrammes de Feynman et états virtuels

Les diagrammes de Feynman permettent de calculer jusqu'à un ordre n les éléments de matrice $\langle b | U_i(t, t_0) | a \rangle$. De (4-13a,b) ces éléments de matrices sont :

$$\begin{aligned} \langle b | U_i(t, t_0) | a \rangle = & \langle b | a \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \exp(-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t_1)) \langle b | H_i(t_1) | a \rangle \exp(-i\frac{E_a}{\hbar}(t_1-t_0)) \\ & + \dots + \frac{1}{(i\hbar)^n} \sum_{a_k} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \exp(-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t_1)) \langle b | H_i(t_1) | a_1 \rangle \times \\ & \times \exp(-i\frac{E_{a_1}}{\hbar}(t_1-t_2)) \langle a_1 | H_i(t_2) | a_2 \rangle \exp(-i\frac{E_{a_2}}{\hbar}(t_2-t_3)) \dots \exp(-i\frac{E_{a_{n-1}}}{\hbar}(t_{n-1}-t_0)) \end{aligned} \quad (4-16)$$

On peut représenter par les diagrammes de Feynman les contributions des ordres successifs, de la manière suivante (figure 4-1) :

Le temps suivant lequel ont lieu les évolutions est porté sur l'axe vertical ; sur l'axe horizontal on porte les différents ordres n de contribution successifs. À l'ordre n , chaque interaction intermédiaire k , aux temps t_k , est représentée par un point appelé vertex, situé entre 2 lignes d'évolution consécutives : ce point décrit un état intermédiaire, encore appelé « état virtuel » au-delà de l'ordre 1 (ceci par opposition aux états initial et final $|a\rangle$ et $|b\rangle$ qui sont considérés réels).

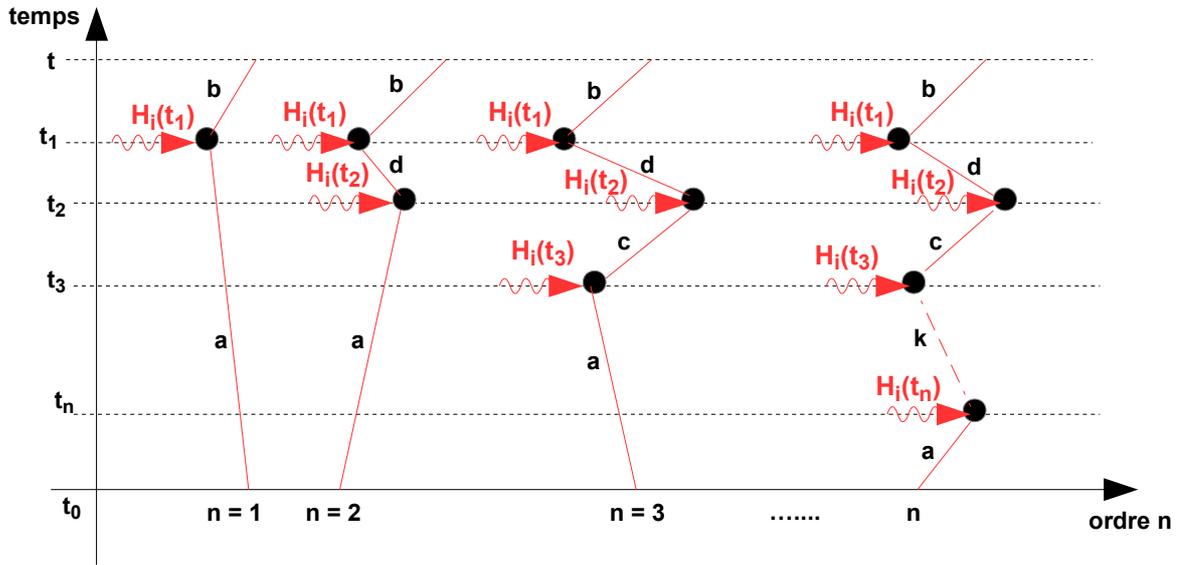


figure 4-1 : Diagrammes de Feynman représentant les contributions d'ordre successif $n = 1, 2, 3 \dots$ à l'amplitude de probabilité $P(a \rightarrow b)$ de transition de l'état $|a\rangle$ à $|b\rangle$. Les traits rectilignes donnent l'évolution des états dans le temps, et les flèches ondulées indiquent l'action de l'hamiltonien perturbé aux différentes dates intermédiaires.

À l'ordre n quelconque de la série de Dyson, les transitions s'effectuent par $(n - 1)$ états virtuels. D'après (4-15) la probabilité de transition de $|a\rangle$ à $|b\rangle$ est, à cet ordre :

$$P(a \rightarrow b) = |\langle b | U_i(t, t_0) | a \rangle|^2 \approx |\langle b | U_i^{(1)}(t, t_0) | a \rangle + \langle b | U_i^{(2)}(t, t_0) | a \rangle + \dots + \langle b | U_i^{(n)}(t, t_0) | a \rangle|^2 \quad (4-17)$$

■ *Remarque* : On n'a pas $P(a \rightarrow b) = P(b \rightarrow a)$, sauf si l'hamiltonien perturbé se conserve par renversement du temps : $H_i(-t) = H_i(t)$ (micro-réversibilité). Cependant l'égalité est satisfaite en première approximation pour l'ordre $n = 1$.

On peut se demander alors si la question de la flèche du temps fait intervenir les états virtuels ?

On peut déduire les règles quantitatives des diagrammes de Feynman [36].

Sur la figure 4-1, chaque bande associée à un état repéré par k , comprise entre les temps t_{j+1} et t_j , correspond à une évolution avec le seul hamiltonien non perturbé H_0 de valeur propre E_k :

$$U_k(t_j, t_{j+1}) = \begin{cases} \exp(-\frac{i}{\hbar}(t_j - t_{j+1})E_k) & \text{si } t_j > t_{j+1} \\ 0 & \text{si } t_j < t_{j+1} \end{cases} \quad (4-18)$$

puisque par construction $t_0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_{j+1} < t_j < \dots < t_1 < t$. Chaque vertex correspond à une transition due à la perturbation $H_i(t_j)$ qui se produit en t_j , et dont la contribution est :

$$\frac{1}{i\hbar} \langle a_{k+1} | H_i(t_j) | a_k \rangle \quad (4-19)$$

Comme l'indique (4-16) la contribution à $P(a \rightarrow b)$ s'obtient en intégrant sur tous les temps intermédiaires t_j , et sur tous les états intermédiaires a_k .

Pour inclure les bornes d'intégration à l'infini, en vue d'une transformation de Fourier, on redéfinit l'opérateur d'évolution de la transition $a \rightarrow b$ par :

$$U'(t, t_0) = \begin{cases} U_i(t, t_0) & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

Avec ces conditions, on montre que la transformée de Fourier $U'(\omega)$ de $U'(t, t_0)$ est égale à :

$$\frac{1}{i\hbar} U'(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega - H + i\eta} \quad (4-20)$$

où $\eta \rightarrow 0$. La relation (4-20) s'interprète comme suit : dans le diagramme de Feynman (figure 4-1) chaque bande comprise entre deux vertex représente l'évolution de l'état quantique sous l'action du seul hamiltonien non perturbé $H = H_0$, soit $\frac{1}{\hbar\omega - H_0 + i\eta}$, et les vertex représentent l'opérateur $H_i = H - H_0$ perturbation de l'hamiltonien.

4-4 - Opérateurs de création et d'annihilation [37]

Ces opérateurs interviennent dans l'expression du nombre de quanta (ou particules) occupant un état quantique en présence d'un champ. Leur emploi dans le formalisme quantique permet de prévoir que, même lorsque la totalité de ces nombres est nul (état du vide quantique), il existe une énergie résiduelle non nulle : l'énergie du vide quantique, ou « état zéro ».

On introduit ce concept avec l'exemple simple d'un champ scalaire réel d'amplitude $\Phi(\mathbf{r}, t)$ en chaque point \mathbf{r} de l'espace et à chaque instant t . Les conclusions peuvent être étendues au cas des champs scalaires décomposables sur des fonctions de base complexes, à degrés de liberté infinis discrets ou bien continus, ou des champs descriptibles par des spineurs de Dirac.

Ici, le champ scalaire est un système à une infinité de degrés de liberté vérifiant une équation d'évolution de la forme :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = f(\Phi(\mathbf{r}, t), \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t))$$

avec la condition initiale : $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right)_{t=t_0}$

On montre, pour un champ scalaire, que la fonctionnelle f la plus simple qui laisse l'équation invariante par les transformations de Lorentz donne l'équation de Klein-Gordon :

$$\left(\square^2 + \frac{\mu^2}{c^2} \right) \Phi = 0 \quad (4-21)$$

où $\square = (\nabla, \partial/ic\partial t)$ est le quadri vecteur gradient d'espace-temps, son carré $\square^2 = (\nabla^2 - \partial^2/c^2 \partial^2 t)$ est le d'alembertien, où ∇^2 est le laplacien, et :

$$\mu = \frac{mc^2}{\hbar}$$

où m est la masse au repos des particules associées au champ quantifié ; μ a la dimension de l'inverse d'un temps $[T^{-1}]$. D'ailleurs (4-21) est la transposition, avec les opérateurs quantiques, de l'équation d'énergie d'Einstein :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

avec les correspondances : $E \rightarrow i \hbar \partial/\partial t$ pour l'énergie, et $p \rightarrow i \hbar \nabla$ pour la quantité de mouvement p . Dans (4-21) le terme $\nabla^2 \Phi$ a pour effet de coupler les unes aux autres les coordonnées, ou degrés de liberté, du système, qui sont des oscillations de fréquence μ .

On peut décomposer le champ dans un système de coordonnées, dites normalisées, $q_k(t)$ associées à des oscillateurs mutuellement indépendants, cette décomposition s'effectuant sur des fonctions de base f_k devant satisfaire les conditions d'orthonormalisation et de complétude :

$$\langle f_k | f_m \rangle = \int f_k^*(\mathbf{r}) f_m(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int f_k(\mathbf{r}) f_m(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \delta_{km}$$

$$\sum_{k=1}^p f_k(\mathbf{r}) f_k(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Le système est dit de dimension p si $k = 1, 2, \dots, p$. Dans l'exemple discuté ici, et compte tenu de (4-21), les fonctions de base sont solutions des équations aux valeurs propres de l'opérateur p^2 , où w_k^2 sont les valeurs propres associées :

$$-\nabla^2 f_k = w_k^2 f_k$$

Le champ $\Phi(\mathbf{r}, t)$, solution de (4-21) se développe alors sur cette base selon :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k=1}^p q_k(t) f_k(\mathbf{r}) \\ \text{avec: } q_k(t) &= \int f_k(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} \end{aligned} \right| \quad (4-22)$$

Les coordonnées (ou degrés de liberté) q_k vérifient l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\left. \begin{aligned} q_k''(t) + \omega_k^2 q_k(t) &= 0 \\ \text{avec: } \omega_k &= \sqrt{c^2 w_k^2 + \mu^2} \end{aligned} \right| \quad (4-23)$$

où l'on a noté $q_k''(t) = d^2 q_k(t)/dt^2$, ω_k est la pulsation propre du degré de liberté $n^\circ k$.

Si les degrés de liberté sont spatialement homogènes, les valeurs propres de p^2 sont supposées dégénérées $w_k^2 = w^2$ et donc sont de pulsations identiques $\omega_k = \omega = \sqrt{c^2 w^2 + \mu^2}$; hypothèse simplificatrice qui suffit ici pour introduire les opérateurs création et annihilation, et l'énergie de l'état zéro (ou du vide). (4-22) montre que l'amplitude du champ est une superposition linéaire des oscillateurs indépendants. Pour chaque degré de liberté $n^\circ k$ l'hamiltonien H_k est :

$$H_k = \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_k^2 \quad (4-24a)$$

où $p_k = m dq_k/dt$ est la quantité de mouvement. L'hamiltonien total est la somme des hamiltoniens des degrés de liberté :

$$H = \sum_{k=1}^p H_k \quad (4-24b)$$

En physique quantique on remplace les variables dynamiques q_k , p_k par leurs opérateurs (les observables) qui doivent vérifier les relations de commutation :

$$[q_k, p_m] = i \hbar \delta_{km}$$

On introduit les opérateurs sans dimension suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \text{création de quanta des oscillateurs: } b_k^+ = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \left(\omega q_k - i \frac{p_k}{m} \right) \\ \text{annihilation de quanta des oscillateurs: } b_k = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \left(\omega q_k + i \frac{p_k}{m} \right) \end{array} \right\} \quad (4-25a)$$

b_k^+ est le conjugué de b_k , donc : $(b_k^+)^+ = b_k$. b_k^+ et b_k ne sont pas des opérateurs hermitiques donc ce ne sont pas des observables. Ils vérifient la relation de commutation :

$$[b_k, b_m^+] = \delta_{km} \quad (4-25b)$$

L'opérateur nombre de quanta dans les états du degré de liberté (k) est :

$$N_k = b_k^+ b_k \quad (4-26)$$

D'où l'expression de l'hamiltonien du degré de liberté (k) en fonction du nombre de quanta de cette dimension :

$$H_k = \left(N_k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (4-27)$$

avec N_k (ses valeurs propres) = 0, 1, 2 ... ∞ . (4-27) montre que les valeurs propres de l'hamiltonien sont directement reliées aux valeurs propres de l'opérateur nombre de quanta. Soient n_k les valeurs propres de N_k et $|n_k\rangle$ ses vecteurs propres :

$$N_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \quad (4-28)$$

Les valeurs propres n_k sont réelles puisque N_k est un opérateur hermitique : $N_k^+ = N_k$, donc :

$$n_k = n_k^* = \langle n_k | N_k | n_k \rangle = \langle n_k | b_k^+ b_k | n_k \rangle = \| b_k | n_k \rangle \|^2 \geq 0$$

Les valeurs propres n_k de N_k sont donc positives ou nulles, et si elles sont nulles alors les vecteurs propres correspondants sont nuls. Le champ est fonction des opérateurs création et annihilation :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{k=1}^p (b_k^+ + b_k) f_k \quad (4-29)$$

L'ensemble des états propres de l'hamiltonien total H est le produit tensoriel des états propres des H_k . Soit l'espace (\mathbf{E}_k) dans lequel l'hamiltonien H_k est défini avec les variables dynamiques q_k et p_k . L'espace de tous les états dynamiques, d'hamiltonien H, est le produit tensoriel (\mathbf{E}) = $\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_p$, le vecteur de cet espace $|n_1 \dots n_p\rangle = |n_1\rangle \dots |n_p\rangle$ est le vecteur propre de l'hamiltonien total :

$$H |n_1 \dots n_p\rangle = \sum_{k=1}^p H_k |n_1 \dots n_p\rangle = \sum_{k=1}^p H_k |n_1\rangle \dots |n_k\rangle \dots |n_p\rangle$$

avec $H_k |n_k\rangle = \left(N_k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega |n_k\rangle = \hbar \omega N_k |n_k\rangle + \frac{1}{2} \hbar \omega |n_k\rangle = \hbar \omega n_k |n_k\rangle + \frac{1}{2} \hbar \omega |n_k\rangle$ d'où :

$$H_k |n_k\rangle = \left(n_k + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega |n_k\rangle \quad (4-30)$$

Il s'ensuit, en posant :

$$n = n_1 + \dots + n_p \quad (4-31a)$$

l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien :

$$H |n_1 \dots n_p\rangle = \left(n + \frac{p}{2}\right) \hbar \omega |n_1 \dots n_p\rangle \quad (4-31b)$$

La valeur propre de (4-31b) est l'énergie du système distribuée sur p degrés de liberté de populations quanta n_1, \dots, n_p :

$$E_n = \left(n + \frac{p}{2}\right) \hbar \omega \quad (4-32)$$

Cette énergie dépend uniquement de n donné par (4-31a). Ces valeurs propres peuvent prendre un nombre de valeurs distinctes égal à :

$$C_{n+p-1}^n = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} \quad (4-33)$$

donc chaque valeur propre E_n de H a une dégénérescence de C_{n+p-1}^n .

Les degrés de liberté dont toutes les populations de quanta sont nulles correspondent au **vide quantique**, ou **état zéro**, on note son vecteur comme suit :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_p = 0 \rightarrow |0\rangle = |0 \dots 0\rangle \text{ avec donc } b_k |0\rangle = |0\rangle, 1 \leq k \leq p \text{ (p fois)}$$

On montre que les vecteurs propres $|n_1 \dots n_p\rangle$ de H se déduisent de l'état zéro $|0\rangle$ par le produit :

$$|n_1 \dots n_p\rangle = \prod_{k=1}^p \frac{(b_k^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle = \frac{(b_1^+)^{n_1} \dots (b_p^+)^{n_p}}{\sqrt{n_1! \dots n_p!}} |0\rangle \quad (4-34)$$

ainsi que :

$$b_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \quad (4-35)$$

L'opérateur annihilation b_k transforme donc la valeur propre n_k de N_k en la valeur propre $\sqrt{n_k}$ associée au vecteur propre $|n_k - 1\rangle$ de N_k . En réitérant le raisonnement aux états successifs on obtient, jusqu'à l'ordre p :

$$\left. \begin{aligned} b_k |n_k\rangle &= \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \\ b_k^2 |n_k\rangle &= b_k (b_k |n_k\rangle) = b_k \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle = \sqrt{n_k(n_k - 1)} |n_k - 2\rangle \\ &\dots\dots\dots \\ b_k^p |n_k\rangle &= \sqrt{n_k(n_k - 1) \dots (n_k - p + 1)} |n_k - p\rangle \end{aligned} \right| \quad (4-36)$$

Puisque pour $n_k = 0$, on a $b_k |n_k\rangle = 0$, alors :

$$b_k |0\rangle = 0 \quad (4-37)$$

Donc $n_k = 0$ appartient à la suite des valeurs propres de N_k qui diffèrent par un écart égal à 1 pour 2 états consécutifs, donc les valeurs propres n_k sont des entiers positifs ou nuls : $n_k = 0, 1, 2, \dots, p$

Pour l'opérateur création b_k^+ on montre de même une relation analogue à (4-35) :

$$b_k^+ |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \quad (4-38)$$

Puisque les n_k sont des entiers, on déduit de (4-27) et (4-28) que les valeurs propres E_k de l'hamiltonien H_k sont discrètes : $H_k |n_k\rangle = (n_k + \frac{1}{2})\hbar\omega |n_k\rangle = E_k |n_k\rangle$, soit :

$$E_k = (n_k + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (4-39)$$

Les énergies des oscillations forment une suite discrète.

De (4-38) il s'ensuit qu'à partir d'un vecteur propre $|n_k\rangle$ de N_k on peut obtenir les autres vecteurs propres en itérant l'action de b^+ (ou de b). Si l'on choisit l'état du vide quantique $|0\rangle$, cela donne la suite :

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |0\rangle \\ |n_1\rangle &= |1\rangle = b_1^+ |0\rangle \\ |n_2\rangle &= |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_2^+)^2 |0\rangle \\ &\dots\dots\dots \\ |n_p\rangle &= |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_p!}} (b_p^+)^{n_p} |0\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (b_k^+)^{n_k} |0\rangle \quad , 1 \leq k \leq p$$

ce qui donne (4-34).

Les vecteurs propres de N_k forment une base complète pour la représentation des oscillateurs en présence du champ, dont les quanta d'énergie sont donnés par (4-39) : l'espace engendré par cette base est appelé **espace de Fock**.

L'application de b_k au vecteur propre $|n_1 \dots n_p\rangle$ de l'hamiltonien total H donne, d'après (4-35) :

$$b_k |n_1 \dots n_p\rangle = b_k |n_1\rangle \dots |n_k\rangle \dots |n_p\rangle = |n_1\rangle \dots \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \dots |n_p\rangle$$

soit :

$$b_k |n_1 \dots n_p\rangle = \sqrt{n_k} |n_1 \dots (n_k - 1) \dots n_p\rangle \quad (4-40)$$

L'égalité (4-40) montre que l'opérateur b_k supprime une particule de l'état quantique $|n_k\rangle$, et donc de l'ensemble des particules du système d'hamiltonien H :

$$n \rightarrow n - 1 = n_1 + n_2 + \dots + (n_k - 1) + \dots + n_p$$

Cela justifie pour b_k l'appellation « **opérateur annihilation** ».

De même l'application b_k^+ à $|n_1 \dots n_p\rangle$ donne, d'après (4-38) :

$$b_k^+ |n_1 \dots n_p\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1 \dots (n_k + 1) \dots n_p\rangle \quad (4-41)$$

L'égalité (4-41) montre que b_k^+ ajoute une particule à l'état quantique $|n_k\rangle$ et donc à l'ensemble des particules du système d'hamiltonien H :

$$n \rightarrow n + 1 = n_1 + n_2 + \dots + (n_k + 1) + \dots + n_p$$

ce qui justifie pour b_k^+ l'appellation « *opérateur création* ».

De (4-26) et de (4-40) et (4-41) on déduit que l'opérateur nombre de particules de l'état $n^o k$ a pour équation aux valeurs propres :

$$N_k |n_1 \dots n_k \dots n_p\rangle = b_k^+ b_k |n_1 \dots n_k \dots n_p\rangle = n_k |n_1 \dots n_k \dots n_p\rangle \quad (4-42)$$

De (4-32) et (4-39) il découle que, pour l'état du vide quantique, $n_k = 0$ pour tout k , donc $n = 0$, l'énergie n'est pas nulle mais égale au quantum :

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

Le vide quantique est un état d'énergie minimale pour lequel le champ est nul en tout point $\Phi_0(\mathbf{r}) = 0$. Pour les autres états (champ quantifié), $\Phi(\mathbf{r})$ exprimé par (4-29), est un opérateur qui ne commute pas avec H , comme on le constate par les développements utilisant (4-29), (4-24b), (4-25b) dans $[\Phi(\mathbf{r}), H]$. La valeur moyenne du champ quantifié relativement à l'état du vide est nulle :

$$\langle 0 | \Phi(\mathbf{r}) | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_k \langle 0 | b_k^+ + b_k | 0 \rangle f_k = 0$$

Par contre l'écart quadratique du champ quantifié relativement au vide quantique est non nul :

$$\langle \Phi^2(\mathbf{r}) \rangle_0 = \sum_k \frac{\hbar}{2m\omega} f_k^2(\mathbf{r}) > 0 \quad (4-43)$$

4-5 – Lagrangien du champ et quantification ⁽⁵⁾

4-5-1 – Degrés de liberté et moments conjugués du champ :

Si le champ, de potentiel scalaire Φ , est un système avec une infinité de degrés de liberté repérés par des indices continus, et non plus discrets, les grandeurs dynamiques du système ne sont plus la position ou l'impulsion, ou plus généralement le degré de liberté q et son moment conjugué p . Le degré de liberté est une fonction Φ de moment conjugué Π auxquels correspondent des opérateurs quantiques de champ. Cette situation est par exemple celle où l'amplitude du champ $\Phi(\mathbf{r})$ est une fonction continue de chaque point de l'espace \mathbf{r} . Dans ce cas le lagrangien L du système est une fonctionnelle de la « coordonnée » Φ et de sa dérivée temporelle $\Phi' = d\Phi/dt$:

$$L = \int \tilde{L}(\Phi, \nabla \Phi, \Phi') d^3 \mathbf{r} \quad (4-44)$$

où \tilde{L} est la densité lagrangienne. Soit S l'action du champ définie par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

c'est une fonctionnelle de $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Le principe de moindre action : $\delta S = 0$ avec $\delta\Phi(t_1) = \delta\Phi(t_2) = 0$, conduit aux équations de Lagrange :

⁵ Voir par exemple [36], [37], [38], [18].

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi'(x^q)} + \sum_p \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^p} \right)} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi(x^q)} \quad (4-45a)$$

En utilisant les coordonnées d'espace-temps $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ avec $x^0 = ict$, (4-45a) prend la forme condensée :

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi(x^\alpha)} = \partial_\mu \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(x^\alpha))} \quad (4-45b)$$

où $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ et la convention de sommation d'Einstein est appliquée ; comme $dx^0 = icdt$ on a noté : $\Phi' = d\Phi/dt$ mais $\partial_0 = \partial \Phi / ic \partial t$.

$\Phi(\mathbf{r}, t)$ variant de manière continue avec les coordonnées d'espace \mathbf{r} , chaque élément infinitésimal d'espace $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+d\mathbf{r})$ correspond à un élément de degré de liberté $\Phi(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r}$. Son moment conjugué, ou impulsion généralisée, est donné par la dérivée fonctionnelle de L par rapport à $\Phi(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r}$:

$$\Pi(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r} = \frac{\delta L}{\delta \Phi'(\mathbf{r}, t)} \quad (4-46)$$

On montre alors que l'évolution du champ est donnée par les équations de Hamilton généralisées :

$$\Pi' = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\nabla \Phi)} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Phi} + \sum_q \frac{\partial}{\partial x^q} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\partial_q \Phi)} \quad (4-47)$$

$$\Phi' = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Pi} \quad (4-48)$$

où \tilde{H} est la densité hamiltonienne définie par :

$$H(\Phi, \Pi) = \int \Pi(\mathbf{r}, t)\Phi'(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r} - L(\Phi, \Phi') = \int \tilde{H}(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r} \quad (4-49a)$$

et qui est égale à :

$$\tilde{H}(\mathbf{r}, t) = \Pi(\mathbf{r}, t)\Phi'(\mathbf{r}, t) - \tilde{L}(\mathbf{r}, t) \quad (4-49b)$$

Dans l'exemple d'un champ scalaire libre, la densité lagrangienne est :

$$\tilde{L} = -\frac{1}{2} \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} \Phi^2 \quad (4-49c)$$

où $\mu = mc^2/\hbar$, Φ étant le potentiel d'auto-interaction d'une particule massive libre de masse m. Les coordonnées dans l'espace-temps de Minkowski sont notées $x^\alpha = (x^0, x^q)$, $q = 1, 2, 3$ où $x^0 = ict$. La densité hamiltonienne est alors :

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \Phi'^2 + (\nabla \Phi)^2 + \frac{\mu^2}{c^2} \Phi^2 \right) \quad (4-50)$$

On montre que le champ scalaire libre peut être quantifié, c'est-à-dire que le moment conjugué et la coordonnée généralisés se décomposent sur une base orthonormée de fonctions propres de l'opérateur vectoriel \mathbf{p} : $-i\hbar \nabla f_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, avec donc $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = A_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$; soit :

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (4-51a)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (4-51b)$$

d'où la densité hamiltonienne du champ :

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(p_{\mathbf{k}}^2 + \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} q_{\mathbf{k}}^2 \right) \quad (4-52)$$

La décomposition (4-52) traduit que l'énergie du champ est la superposition d'énergies d'oscillateurs harmoniques de fréquences données par :

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = c^2 \mathbf{k}^2 + \mu^2 \quad (4-52bis)$$

associées à chaque mode d'oscillation de vecteurs d'onde \mathbf{k} . Les degrés de liberté correspondent à :

$$p_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} i \sqrt{2 \hbar m \omega_{\mathbf{k}}} (b_{\mathbf{k}}^+ - b_{\mathbf{k}}) \quad (4-53a)$$

$$q_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \hbar}{m \omega_{\mathbf{k}}}} (b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+) \quad (4-53b)$$

d'où :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2 \hbar}{m \omega_{\mathbf{k}}}} (b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^+) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (4-54a)$$

qui est aussi égal à :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} e^{i \omega_{\mathbf{k}} t} + a_{\mathbf{k}}' e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t}) A_{\mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4-54b)$$

d'où les relations entre les amplitudes des modes et les opérateurs création et annihilation des particules occupant ces modes :

$$a_{\mathbf{k}} e^{i \omega_{\mathbf{k}} t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \hbar}{m \omega_{\mathbf{k}}}} b_{\mathbf{k}}$$

$$a_{\mathbf{k}}' e^{-i \omega_{\mathbf{k}} t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \hbar}{m \omega_{\mathbf{k}}}} b_{\mathbf{k}}^+$$

On en déduit les relations de commutation des grandeurs de champ :

$$[\Phi(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}')] = 0 \quad (4-55a)$$

$$[\Pi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')] = 0 \quad (4-55b)$$

Ces relations de commutation (4-55a,b) traduisent la possibilité de mesurer simultanément en deux endroits différents les mêmes grandeurs du champ. Ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit de la mesure des grandeurs conjuguées :

$$[\Phi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')] = i \hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4-55c)$$

L'opérateur hamiltonien est encore donné par (4-27) :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} \quad (4-56)$$

Cette relation n'a de sens que si l'énergie totale est la somme des énergies des particules, pour un état dynamique donné. Il suffit de soustraire à chaque composante d'énergie le terme $\frac{1}{2} \hbar \omega(\mathbf{k})$ qui correspond à l'énergie du vide lorsque $n(\mathbf{k}) = 0$. Ce procédé ne modifie pas les équations du mouvement puisque ce sont les différences d'énergie qui sont mesurables. En théorie du champ classique cela est possible.

En revanche, lorsque le champ est couplé à la gravitation, ce procédé n'est plus autorisé puisque la gravitation affecte aussi le vide et contribue donc à son énergie. Dans ce cas l'énergie du vide est représentée par, ou est contenue dans la constante cosmologique dont la présence est systématique dans la modélisation des effets observés, ainsi qu'on l'a esquissé aux chapitres 2 et 3.

Comme dit dans [38] : « C'est dans l'état actuel des connaissances, le plus grave problème qu'ait à affronter la cosmologie théorique, et il provient de la physique des particules ».

4-5-2 – Couplage d'un champ classique avec un système de particules :

L'état du vide quantique participe, comme les autres états, au couplage d'un champ avec un système de particules.

Soit un champ scalaire classique en interaction avec une particule différente et externe à celles constitutives de ses états repérés par \mathbf{k} . L'interaction a pour hamiltonien H_i égal à la somme de l'hamiltonien du champ libre H , étudié précédemment, de l'hamiltonien de la particule H_p , et de l'hamiltonien H' du champ perturbé par l'interaction :

$$H_t = H + H_p + H' \quad (4-57)$$

Soit \mathbf{P}_p l'impulsion de la particule, \mathbf{r}_p sa position, et m_p sa masse. Dans l'approximation non relativiste son hamiltonien est :

$$H_p = \frac{\mathbf{P}_p^2}{2m_p} + V(\mathbf{r}_p) \quad (4-58)$$

En supposant que $m_p \gg m = \mu \hbar / c^2$ l'hamiltonien perturbé de l'interaction est : $H' = g \Phi(\mathbf{r}_p)$ où g est la constante de couplage. Il s'exprime par :

$$H' = g (2\pi)^{-3/2} \int \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega(\mathbf{k})}} (a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_p} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_p}) d^3\mathbf{k}$$

Mais l'approximation non relativiste implique de couper la contribution à l'interaction les termes de hautes fréquences (k élevé) :

$$k = \|\mathbf{k}\| \gg k_{\max} = \frac{m_p c}{\hbar} \quad (4-59)$$

Cette coupure aux hautes fréquences se traduit par un terme de coupure $C(\mathbf{k})$:

$$H' = g (2\pi)^{-3/2} \int \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega(\mathbf{k})}} C(\mathbf{k}) (a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_p} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_p}) d^3\mathbf{k} \quad (4-60a)$$

où :

$$\left. \begin{array}{l} C(\mathbf{k}) = 1 \text{ pour } k \leq k_{\max} \\ C(\mathbf{k}) = 0 \text{ pour } k > k_{\max} \end{array} \right\} \quad (4-60b)$$

H' commute avec $(\mathbf{P}_p + \mathbf{P})$. H_t est invariant par rotation et réflexion ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) mais ne l'est pas par translation à cause de l'interaction. Cette théorie d'interaction d'une particule avec un champ s'applique à l'interaction d'un atome avec un champ électromagnétique.

Soit l'hamiltonien sans interaction :

$$H_0 = H + H_p$$

Soit la suite orthonormale complète des vecteurs propres de H_p : $|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_m\rangle, \dots$, et les énergies propres correspondantes : $E_{p1}, \dots, E_{pm}, \dots$. Multipliant $|\alpha_m\rangle$ par l'état du vide $|0\rangle$ de l'espace du champ libre (H) on obtient un vecteur $|\alpha_m 0\rangle$ tel que :

$$H_0 |\alpha_m 0\rangle = E_m |\alpha_m 0\rangle$$

qui fournit une suite orthonormale complète de vecteurs propres de H par actions successives des opérateurs de création $\alpha^+(\mathbf{k})$ sur $|0\rangle$. On obtient aussi une suite orthonormale complète de vecteurs propres de H_0 par actions successives de $\alpha^+(\mathbf{k})$ sur les $|\alpha_m\rangle$. Ces actions de $\alpha^+(\mathbf{k})$ sur $|0\rangle$ et sur $|\alpha_m\rangle$ créent une base formée de vecteurs propres de H_0 , notée $|n\rangle$:

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$$

Il s'ensuit que dans l'état $|n\rangle$ la particule est dans un état propre $|\alpha_m\rangle$ de H_p tandis que le champ contient alors un nombre ξ de particules d'impulsions $\hbar\mathbf{k}_1, \hbar\mathbf{k}_2, \dots, \hbar\mathbf{k}_\xi$. On a donc $|n\rangle$ de la forme :

$|n\rangle = |\alpha_m \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_\xi\rangle$. Dans le cas d'une seule particule dans l'état $|\mathbf{k}_1\rangle$ associé à l'impulsion $\hbar\mathbf{k}_1$, on a $|n\rangle = |\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle$, c'est le niveau à $\xi = 1$ particule :

$$H_0 |\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle = (E_{k_1} + \hbar\omega(\mathbf{k}_1)) |\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle \quad (4-61a)$$

Pour le niveau à $\xi = 2$ particules dans l'état d'impulsions $\hbar\mathbf{k}_1, \hbar\mathbf{k}_2$, on a :

$$H_0 |\alpha_m \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = (E_{k_1} + \hbar\omega(\mathbf{k}_1) + \hbar\omega(\mathbf{k}_2)) |\alpha_m \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle \quad (4-61b)$$

Le niveau à 1 particule s'obtient par l'action de l'opérateur création sur le niveau à 0 particule :

$$|\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle = a^+(\mathbf{k}_1) |\alpha_m 0\rangle \quad (4-62a)$$

Le niveau à 2 particules s'obtient de même par l'action de l'opérateur création sur le niveau à 1 particule :

$$|\alpha_m \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = a^+(\mathbf{k}_2) a^+(\mathbf{k}_1) |\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle \quad (4-62b)$$

et ainsi de suite. Ces relations sont représentées par la figure 4-2 : les niveaux sont distribués en colonnes associées au nombre ξ de particules par états. Pour une colonne donnée, c'est-à-dire pour un nombre de particules fixé, on représente les différents états associés aux impulsions $\hbar\mathbf{k}_1, \hbar\mathbf{k}_2, \dots, \hbar\mathbf{k}_\xi$.

Par exemple les niveaux à 1 particule forment la suite $|\alpha_1 \mathbf{k}_1\rangle, |\alpha_2 \mathbf{k}_1\rangle, \dots, |\alpha_m \mathbf{k}_1\rangle$. Les niveaux à 2 particules forment la suite $|\alpha_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle, |\alpha_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle, \dots, |\alpha_m \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle$, etc.

Le couplage H', en première approximation, a pour effet de faire interagir les niveaux entre eux. L'opérateur H' est alors déterminé par les éléments de matrice du type :

$$\langle \alpha_p \mathbf{k}_1 \dots | H' | \alpha_q \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \rangle$$

Par exemple, le couplage entre le niveau à 0 particule et le niveau à 1 particule s'écrit, d'après (4-60a,b) :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 0 | H' | \alpha_m \mathbf{k}_1 \rangle &= \langle \alpha_m \mathbf{k}_1 | H' | \alpha_1 0 \rangle^* \\ &= g (2\pi)^{-3/2} \int \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega(\mathbf{k}_1)}} C(\mathbf{k}_1) \langle \alpha_1 | e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_p} | \alpha_m \rangle d^3 \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (4-63a)$$

Le couplage entre le niveau à 2 particules et le niveau à 1 particule s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | H' | \alpha_m \mathbf{k}_1 \rangle &= \langle \alpha_m \mathbf{k}_1 | H' | \alpha_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle^* \\ &= g (2\pi)^{-3/2} \int \frac{\hbar}{2m\omega(\mathbf{k}_1)} C(\mathbf{k}_1) \langle \alpha_1 | e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_p} | \alpha_m \rangle d^3 \mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (4-63b)$$

Le couplage, tel que formalisé en (4-63a,b) par exemple, rend les états instables de par leurs interactions, et donc affectés par des transitions radiatives vers des niveaux d'énergie plus faible, accompagnées par l'émission de particules du champ. Ces transitions sont possibles si l'énergie du niveau situé juste au-dessus du fondamental est suffisante pour que soit émise une particule de masse $m = \mu \hbar / c^2$, ce qui donne comme condition d'instabilité, par exemple pour le niveau $|\alpha_p \mathbf{k}_1 \rangle$ de l'état à 1 particule de fondamental $|\alpha_1 \mathbf{k}_1 \rangle$:

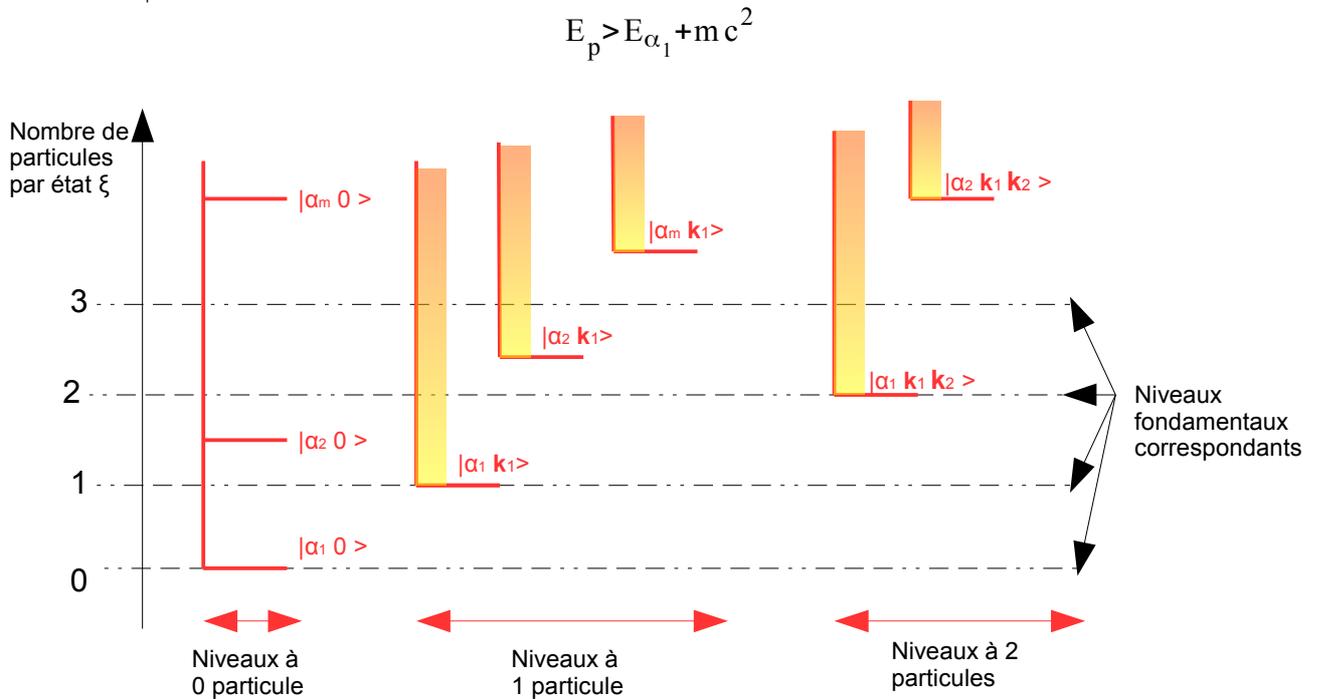


figure 4-2 : premiers niveaux de H_0

4-5-3 – Champs spinoriels de Dirac :

Comme signalé, par exemple dans [38], le lagrangien, et donc l'équation d'onde de Klein-Gordon (4-21), fait apparaître le problème des énergies négatives. (4-21) est l'équivalent sous forme d'opérateurs quantiques de la relation d'Einstein de l'énergie :

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

qui est établie pour $E > 0$. Pourtant cette équation, sous sa forme d'opérateurs, admet deux signes : positif et négatif. Les solutions de l'énergie peuvent être :

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Si la fonction d'onde du champ Φ est l'un de ces états d'énergie, positive ou bien négative, alors elle décrit une **configuration dont l'énergie est plus petite que celle du vide quantique**. Pour résoudre cette difficulté, il faut alors remplacer l'équation d'onde (4-21) par une équation dont la solution est un opérateur de champ Ψ et non plus une simple fonction d'onde de même forme que l'expression $|\mathbf{r}, t\rangle = \Phi(\mathbf{r}, t)|0\rangle$. Les états à 1 particule d'impulsion $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ résultent de l'action de l'opérateur de création $a^+(\mathbf{p})$ sur le vide. Puisque $|\mathbf{p}\rangle = a^+(\mathbf{p})|0\rangle$ donne $\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \langle 0 | a(\mathbf{p}) | \psi \rangle$ on a :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{\hbar} \int A(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle d^3\mathbf{p} = \frac{1}{\hbar} \int A(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \langle 0 | a(\mathbf{p}) | \psi(t) \rangle d^3\mathbf{p}$$

d'où l'opérateur de champ :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar} \int A(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} a(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \quad (4-64)$$

qui produit une particule en \mathbf{r} à partir du vide. Inversement, son conjugué Ψ^+ annihile la particule :

$$\Psi^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar} \int A(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} a^+(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \quad (4-64\text{bis})$$

Il s'ensuit de (4-64) les relations de commutation :

$$\left. \begin{aligned} [\Psi(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r}')] &= [\Psi^+(\mathbf{r}), \Psi^+(\mathbf{r}')] = 0 \\ [\Psi(\mathbf{r}), \Psi^+(\mathbf{r}')] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \right| \quad (4-65)$$

Les relations (4-64, 4-64bis) définissent un opérateur à spin non nul, tandis que le champ scalaire est de spin 0. Le champ spinoriel correspond à un spin 1/2 (en unités \hbar) (voir [39], [40]) et est solution de l'équation de Dirac. L'équation de Klein-Gordon (4-21) respecte la covariance relativiste parce que tous ses termes sont d'ordre 2. Mais pour résoudre le problème du signe de l'énergie, et donc prédire des états d'énergie totale négative, il faut trouver une équation du premier ordre, autrement dit il faut une équation de la forme pour les champs spinoriels (**équation de Dirac**):

$$\left(i \gamma_\mu \partial^\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0 \quad (4-66)$$

On montre que dans (4-66) Ψ est un opérateur vectoriel à 4 composantes et que les γ_μ sont des matrices 4x4 vérifiant la relation d'anti-commutation :

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} \quad (4-67)$$

où $g^{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski (appliquée à la relativité restreinte) et où :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les matrices de Pauli : $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On montre que l'équation de Dirac (4-66) correspond au lagrangien de Dirac :

$$\tilde{L}_D = -\bar{\Psi} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m c}{\hbar} \right) \Psi \quad (4-68)$$

où: $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$

et que sous la condition (4-67), (4-66) permet de retrouver l'équation de Klein-Gordon (4-21) par son module :

$$\left(i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m c}{\hbar} \right) \left(i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m c}{\hbar} \right) \Psi = - \left(\gamma_\mu \gamma_\lambda \partial^\mu \partial^\lambda + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0$$

5 – Rôle éventuel des fluctuations du vide dans l'émergence supposée des grandes structures

5-1 – Pour expliquer l'importance du rôle éventuel des fluctuations du vide dans l'émergence des grandes structures de l'univers, de sa nature fractale et/ou des multivers, il faut :

- Considérer l'inflation qui peut expliquer l'émergence des grandes structures et le caractère fractal de l'univers ;
- Envisager l'inflation éternelle d'où pourraient émerger des multivers ;
- Prendre en compte les effets de courbure de l'espace-temps sur le vide, notamment sensibles aux périodes primordiales, et parmi les effets il y a la variation ou création de particules ;
- Examiner la cosmologie quantique, en particulier avec la métrique FLRW, et comment on peut effectuer une prédiction de la constante cosmologique moyennant l'entropie causale.

5-2 – L'inflation cosmologique, son rôle éventuel dans l'excitation du vide quantique, et l'ère radiative qui lui succède

5-2-1 – Généralités : La théorie de l'inflation permet d'admettre que l'univers observable soit issu d'une même sphère de causalité.

L'énergie noire, supposée responsable de la constante cosmologique Λ qui s'oppose à la gravitation et donc accélérerait l'expansion, serait l'énergie des fluctuations du vide consécutives à la diminution de la température due à l'expansion.

L'ère radiative fait suite à l'inflation : car lorsque la température diminue à $T \approx 10^{15}$ GeV (soit 10^{28} K), les excitations du vide quantique produisent des particules élémentaires et leurs anti-particules. Avec l'expansion, les 3 interactions électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte, qui étaient unifiées (objet d'une théorie GUT encore à découvrir), se différencient parce que leurs portées respectives deviennent plus petites que la taille de l'univers. Cette différenciation se traduit par la brisure des symétries présentes dans l'interaction unifiée.

5-2-2 – L'inflation cosmologique est une phase, encore hypothétique, qui suit l'ère de domination par le rayonnement et qui est caractérisée par un soudain refroidissement suivi d'un réchauffement, tandis que l'expansion accélère de manière exponentielle. Cette phase, si elle existe, est incluse dans l'univers opaque, elle n'est donc pas observable à ce jour, mais son modèle a pour objectif de résoudre le problème suivant.

Le modèle standard adiabatique, tel que celui de Friedmann-Lemaître, conduit à un univers toujours plat, ce qui ne correspond pas rigoureusement aux observations. Dans ce modèle l'univers se refroidit régulièrement tandis que l'expansion continue tout aussi régulièrement. Comme l'observation montre l'isotropie de la température du CMB, et puisque, à l'ère supposée de Planck, l'univers était concentré dans un volume de quelques millimètres à la température de Planck, le **problème de causalité** suivant se pose :

La sphère de causalité est trop petite, par rapport au volume de l'univers de l'ère de Planck, pour expliquer l'isotropie de la température de l'univers observable. En effet, la sphère de causalité, ou horizon causal, est l'hypersurface spatiale dans l'espace-temps contenant les points qui, à un instant t donné, ont pu interagir (l'interaction est un événement), compte tenu que l'interaction se propage à une vitesse limitée par celle de la lumière. Dans un univers sans expansion, le rayon de l'horizon augmente avec le temps à la vitesse de la lumière c ; mais dans un univers en expansion elle augmente plus vite en raison de la distance comobile

(figure 5-1). La sphère de causalité est dite primordiale si elle concerne les événements primordiaux, c'est-à-dire antérieurs (au sens du temps cosmique) à l'émission du CMB. Son rayon correspond donc au rayon de l'univers observable à ce jour. Les photons du CMB ont été émis au moment du découplage-recombinaison où les atomes H se sont formés, à l'âge de l'univers d'environ 10^5 à 10^6 années. La sphère de causalité des particules émettant ces photons a alors un rayon de l'ordre de 10^6 années-lumière, et en-deçà de ce rayon aucune interaction avec l'extérieur de la sphère ne peut affecter ces particules (fig. 5-2).

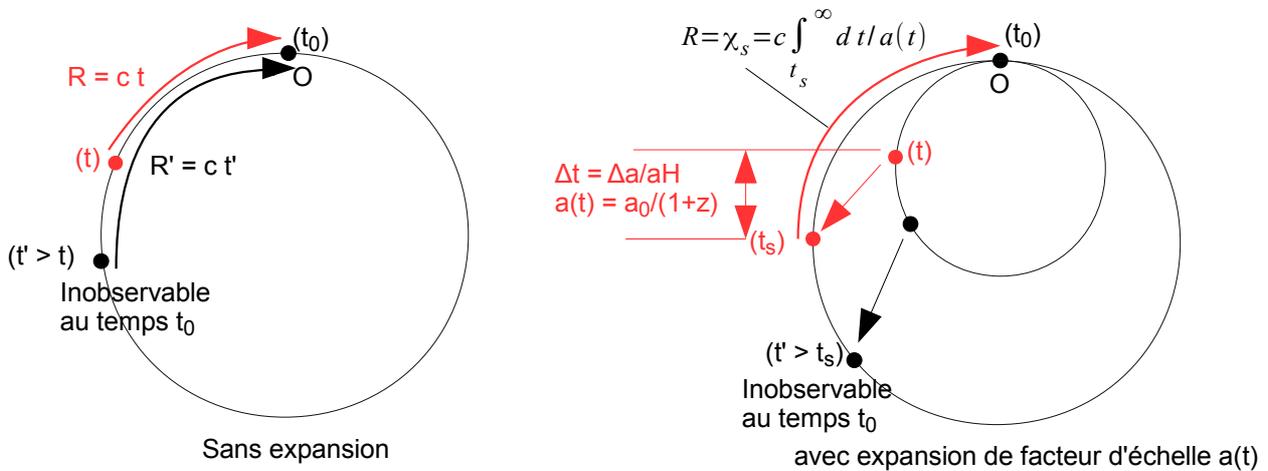


figure 5-1 : horizon des événements

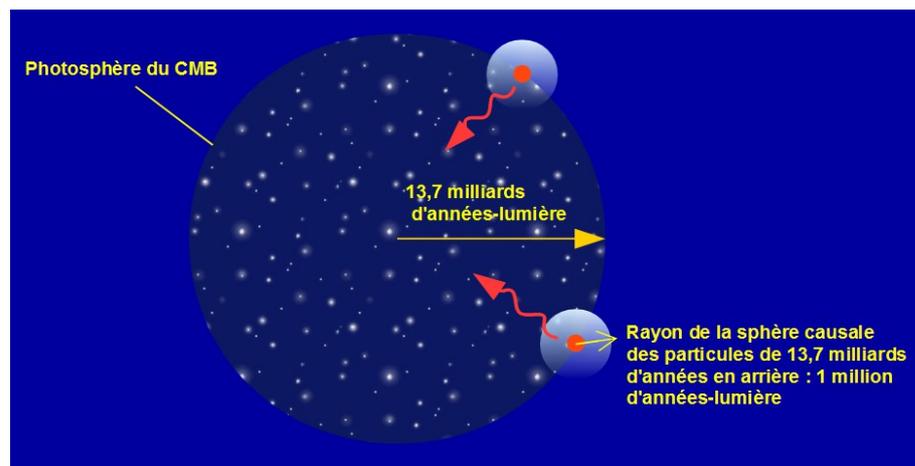


figure 5-2 : isotropie et homogénéité du rayonnement fossile CMB

Les sphères de causalité des particules qui ont émis le rayonnement il y a 13,7 milliards d'années avaient à l'époque un rayon de 1 million d'années-lumière ; elles ne se recouvraient donc pas sur la photosphère du CMB, en conséquence les particules n'étaient pas encore en interaction. Pourtant le caractère isotherme du CMB (qui nous est parvenu refroidi à 2,7K aujourd'hui) incite à supposer qu'elles l'ont été, hypothèse qui a conduit au modèle de l'inflation cosmologique

La mission COBE a permis d'observer le CMB et montre que le rayonnement issu de particules situées à quelque $13,7 \cdot 10^9$ AL est isotherme et isotrope ($T_0 \approx 2,7$ K). Or à cet âge la sphère de causalité au moment de l'émission a un rayon de l'ordre de 10^6 AL. Dans toutes les directions la totalité des sphères de causalité ne se superposent pas, elles sont donc mutuellement non causales, en particulier le fait que leurs émissions thermiques soient à la même température ne peut pas résulter d'une interaction causale. Alors, quel processus physique au-delà de ces sphères de causalité, a-t-il conduit à l'obtention d'une température uniforme du CMB ? Ou bien s'agit-il d'une coïncidence ?

Le scénario de l'univers en inflation (scénario inflationnaire), évacuant la deuxième option de la simple coïncidence, propose de résoudre le problème de la causalité, compte tenu du caractère isotherme et isotrope du CMB.

Le rayon de l'univers R et la température T vérifient, en régime adiabatique, ou isentropique :

$$R(t)T(t) = \text{cste} \quad (5-1)$$

Sachant que $R \approx 10^{60} \ell_p$ et que l'âge de l'univers est $t_0 \approx 10^{60} t_p$, on devrait donc avoir, avec ce régime d'expansion, $T_0 \approx 10^{-60} T_p$; or on a : $T_0 \approx 10^{-32} T_p$ (les grandeurs avec l'indice p correspondent à l'échelle de Planck : $\ell_p = 1,6161 \cdot 10^{-35}$ m longueur de Planck, $t_p = 5,3906 \cdot 10^{-44}$ s temps de Planck, $T_p = 1,41679 \cdot 10^{32}$ K température de Planck, $m_p = 2,1767 \cdot 10^{-8}$ kg masse de Planck).

■ **À l'ère de Planck**, le rayon de l'univers R est de l'ordre du millimètre, mais les horizons ont un rayon de l'ordre de 10^{-32} mm $\approx \ell_p$, ils sont donc globalement disjoints, avec des températures de particules qui, a priori, n'ont pas de raison d'être les mêmes.

Le scénario inflationnaire part donc de l'hypothèse que tout l'univers qui, après l'émission du CMB, deviendra l'univers observable, a été concentré dans un espace plus petit que les sphères de causalité de l'époque. Dans ce cas il devient possible de considérer des liens de causalité commune aux évolutions des particules.

Avec cette hypothèse, pour raccorder l'évolution de l'univers entre cette période de concentration et celle où il poursuit son évolution de manière adiabatique, il faut considérer que l'univers a connu des épisodes non adiabatiques où l'entropie a augmenté, et où donc on n'a plus $RT = \text{cste}$.

Les modèles d'inflation introduisent tous un ou plusieurs champs scalaires d'interaction : l'inflaton, boson supposé de ces interactions. À ces champs scalaires correspondent des densités d'énergie ρ_E qui sont reliées par l'équation d'état où P est la pression : $P = w\rho_E$, w est une constante dont le signe et la valeur caractérisent le caractère attractif ou bien répulsif de la pression :

- $w = 0$ si la matière est sans pression ;
- $w = 1/3$ pour le rayonnement (plus exactement lorsque le rayonnement domine la matière, comme c'est le cas à l'ère radiative) ;
- $w = -1$ pour la matière, dite « énergie sombre », lorsque les effets de la constante cosmologique Λ sont pris en compte ; ces effets sont répulsifs par rapport à la gravitation et favorisent l'expansion, voire son accélération, tandis que la gravitation a une action attractive sur la matière pouvant conduire à sa contraction.

Une particule, ou boson, de champ scalaire possède un spin nul. Une particule libre possède un degré de liberté défini par un potentiel d'auto-interaction Φ . Si, suite à l'expansion, les particules ne sont plus libres, car soumises à un champ extérieur de potentiel fonction du degré de liberté $V(\Phi)$, alors le champ scalaire vérifie une condition particulière, dite « **condition de roulement lent** » :

$$\frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} \ll V(\Phi) \quad (5-2)$$

et l'on montre que sous cette condition il y a accélération de l'expansion. Dans une première phase, cette accélération conduit à une diminution très rapide de la température jusqu'à des valeurs très basses, tandis que les distances entre objets augmentent de manière exponentielle (voir par exemple [14]).

S'il n'y avait pas eu de phase d'inflation, l'expansion aurait toujours été adiabatique (l'entropie d'un volume comobile se conserve) et l'on obtiendrait une entropie de l'univers d'aujourd'hui très élevée : $S_0 \approx 10^{87}$; or cette valeur très élevée de l'entropie d'univers d'aujourd'hui conduit à conclure que l'univers était rigoureusement plat à l'ère de la nucléosynthèse primordiale ou du découplage rayonnement-matière. Comme, dans le modèle standard adiabatique, l'entropie se conserve dans un volume comobile, l'univers devrait être encore rigoureusement plat aujourd'hui, ce que les observations ne montrent pas. C'est pourquoi l'existence d'une phase fortement accélérée, comme l'inflation, dans le passé paraît indispensable.

On montre aussi que la **condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une phase d'inflation**, c'est-à-dire une phase d'expansion fortement accélérée, est :

$$\rho_E + 3P < 0 \quad (\text{soit } w < -1/3) \quad (5-3)$$

La phase d'inflation a une durée limitée car la densité des particules scalaires n'est pas constante : en effet, les particules scalaires interagissent avec d'autres particules et/ou d'autres champs. Selon l'intensité de ces interactions, les particules se désintègrent avec émission de photons, d'électrons, etc., ce qui a pour effet d'augmenter l'énergie thermique : c'est la phase de réchauffement. Elle dure jusqu'à ce que la densité d'énergie thermique est plus grande que la densité d'énergie associée à la masse des particules scalaires ρ_E , marquant la fin de l'inflation. Dès lors, l'évolution thermique de l'univers continue comme avant l'inflation, et l'expansion retrouve un comportement conforme au modèle de Friedmann-Lemaître où la courbure de l'univers est très faible (univers quasi plat). On a donc le schéma de la figure 5-3.

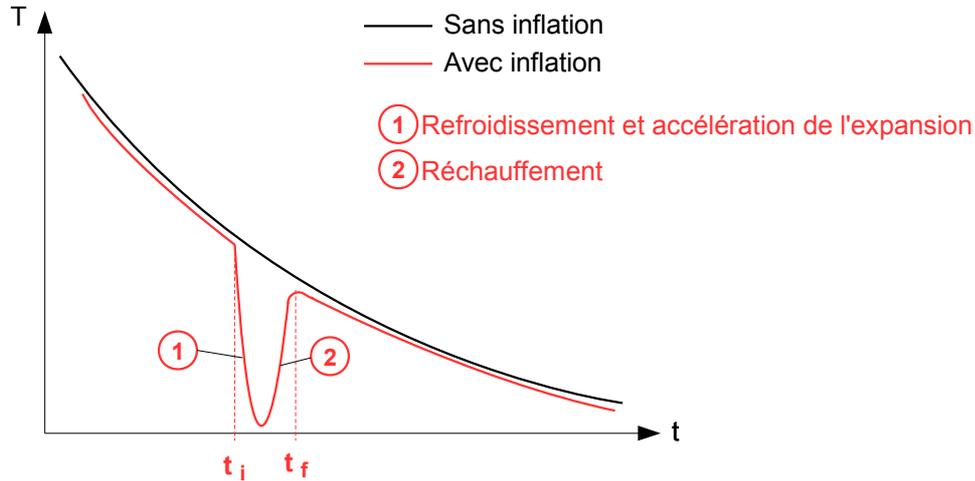


figure 5-3 : évolution de la température avec phase d'inflation

Le facteur d'échelle varie entre a_i et a_f lors de l'inflation. Pour quantifier son importance sur la courbure, les horizons et la durée de l'inflation, on définit le « nombre de e-fold s » : $N = \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right)$.

On montre que l'évolution de la courbure en fonction du facteur d'échelle selon les valeurs de w est :

$$\frac{d\Omega_K}{d \ln a} = (1 + 3w)\Omega_K(1 - \Omega_K) \quad (5-4)$$

Si $-1 < w < -1/3$ l'équation (5-4) possède un point fixe stable pour $\Omega_K = 0$. Il devient instable pour les phases dominées par la matière et/ou le rayonnement, c'est-à-dire si w ne vérifie pas cette condition. D'après la condition d'inflation, lorsque w quittera ce domaine de valeurs à la fin de l'inflation, pour continuer d'avoir $\Omega_K \approx 0$ (univers quasi plat) il faudra que la tendance vers une courbure plus élevée soit suffisamment contrebalancée par la structure de l'espace après réchauffement obtenue par l'inflation : il faut donc que la durée de l'inflation soit suffisamment « longue ».

L'importance de l'inflation, représentée par l'e-folds N , est reliée au rapport des courbures au début et à la fin de l'inflation par :

$$\left| \frac{\Omega_K(t_f)}{\Omega_K(t_i)} \right| = \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^2 = e^{-2N} \quad (5-5)$$

Il s'ensuit que, puisque au Big Bang chaud (moment du réchauffement post-inflation) l'observation donne : $|\Omega_K(t_f)| \leq 10^{-60}$ et qu'au début de l'inflation la courbure est très importante (rayon de l'univers très petit après l'ère de Planck), $\Omega_K(t_i) \geq 1$, (5-5) donne la condition sur N :

$$N \geq 69 \quad (5-6)$$

Définissant le rayon de Hubble $r_H = \frac{c}{H}$ et le rayon de Hubble comobile $\tilde{r}_H = \frac{c}{aH} = \frac{r_H}{a}$ on montre que le rayon de Hubble comobile décroît au cours de l'inflation : $\frac{d\tilde{r}_H}{dt} < 0$ ce qui implique que deux points situés en-deçà de l'horizon de l'un et de l'autre, donc en relation causale, peuvent être séparés, à la fin de l'inflation, par une distance supérieure au rayon de Hubble comobile, puisque celui-ci décroît, tout en restant en relation causale. La théorie de l'inflation permet donc d'admettre que l'univers observable soit issu d'une même sphère de causalité. La figure 5-4 montre qualitativement la relation entre le rayon de Hubble comobile et le facteur d'échelle lors de l'inflation.

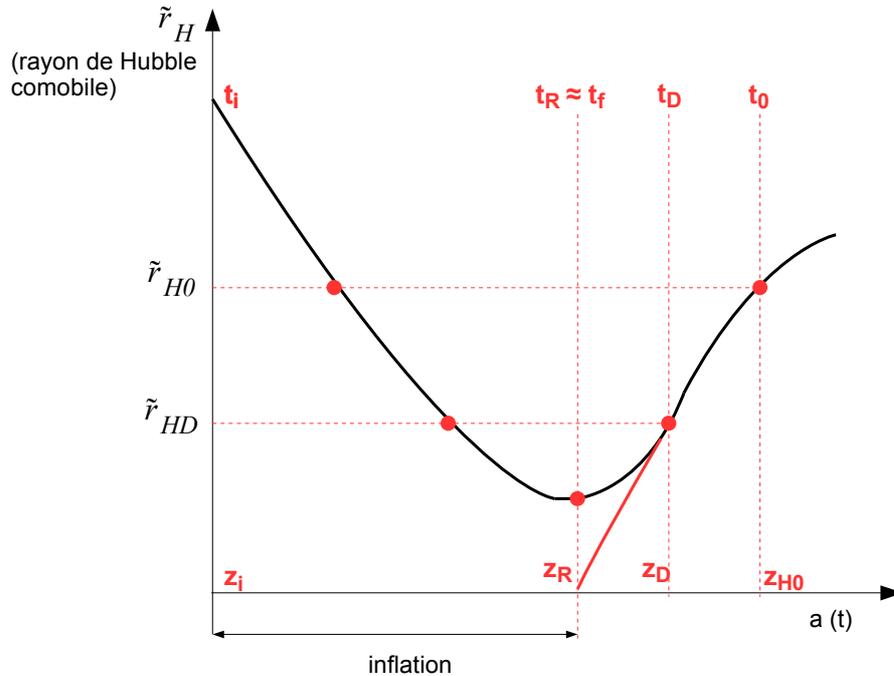


figure 5-4 : évolution du rayon de Hubble comobile avec le facteur d'échelle.

Au facteur d'échelle correspondent différentes valeurs du décalage spectral z aux époques qui viennent après l'inflation : découplage au temps t_D , univers actuel au temps t_0 . Le début de l'inflation est au temps t_i , le réchauffement au temps t_R , la fin de l'inflation au temps $t_f \approx t_R$. En l'absence de l'inflation le rayon de Hubble comobile serait toujours croissante (trait rouge). Avec l'inflation il a une branche décroissante ce qui permet d'obtenir les échelles des sphères causales remontant au début de l'inflation, fournissant une relation causale commune à toutes les parties de l'univers observables aujourd'hui.

La figure 5-4 indique qu'au début de l'inflation il existe des facteurs d'échelle a_i , donc des sphères de causalité de rayon comobile \tilde{r}_{Hi} qui sont du même ordre que ceux de l'univers tel qu'on l'observe aujourd'hui a_0 , \tilde{r}_{H0} . Sous cette condition, on a :

$$e^N \approx \frac{T_0 r_{H0}}{T_f r_{Hf}}$$

Avec les données d'observation :

$r_{Hf} = \text{cste} \times 10^{-13} \text{ (GeV)}^{-1}$, $r_{H0} = \text{cste} \times 10^{41} \text{ (GeV)}^{-1}$, $T_0 = \text{cste} \times 10^{-4} \text{ eV}$, $T_f = \text{cste} \times 10^{16} \text{ GeV}$,
il vient :

$$e^N \approx \frac{10^{-4}}{10^{25}} \times \frac{10^{41}}{10^{-13}} = 10^{25} \rightarrow N \geq 58 \quad (5-7)$$

La phase d'inflation qui se termine avec le Big Bang chaud et avec une courbure quasi nulle requiert, avec

(5-6) et (5-7), une durée d'inflation suffisamment longue telle que pour le e-folds :

$$N \geq 58 - 70 \quad (5-8)$$

Il est supposé que dans la phase d'inflation l'univers est dominé par les champs scalaires. En supposant l'existence d'un champ scalaire unique, celui-ci est associé à une particule scalaire de masse au repos m_s . Le champ doit vérifier la condition de roulement lent (5-2), et la forte accélération de l'expansion est conditionnée par (5-3).

■ Vient ensuite la **phase de réchauffement** :

L'inflation a une durée limitée puisque la densité des particules scalaires ρ_s change à cause de l'interaction des particules scalaires du champ avec d'autres particules. Les particules scalaires finissent par être désintégrées en photons, électrons, neutrinos..., faisant alors augmenter la température par l'apport d'énergie thermique produite par ces désintégrations. L'augmentation de la densité de photons n_γ consécutive à ces désintégrations conduit à un accroissement considérable de l'entropie d'univers jusqu'à une valeur qui reste constante. L'expansion, alors dominée par le rayonnement thermique, redevient adiabatique et suit donc les évolutions d'un univers de type Friedmann-Lemaître.

■ En résumé, les **différentes phases de l'expansion de l'univers lors et près de l'inflation** sont :

- pour $t < 10^{-35}$ s, l'énergie thermique est supérieure à toutes les autres formes d'énergie de l'univers : l'expansion est de type Friedmann-Lemaître où la température diminue régulièrement (évolution adiabatique où $aT = \text{cste}$) ;
- à $t = 10^{-35}$ s l'énergie thermique a diminué jusqu'à devenir du même ordre que l'énergie du champ scalaire demeurée constante : c'est le début de l'inflation. La température chute et le champ scalaire est le moteur d'une expansion exponentielle ;
- à $t = 10^{-33}$ s les particules du champ scalaire ont été désintégrées par les particules qui ont pu émerger suite à la faible température : en l'absence du champ scalaire la température augmente suite aux interactions des particules (phase de réchauffement), les photons deviennent prédominants et l'entropie augmente. Succède alors **l'ère radiative** où le rayonnement domine.
- L'univers reprend son expansion adiabatique (type Friedmann-Lemaître), et la température diminuant régulièrement, l'ère matérielle remplace l'ère radiative. L'émission du CMB se place entre l'ère radiative et l'ère matérielle.

■ **En résumé** :

L'inflation, en tant qu'épisode non adiabatique, est une solution au problème de causalité lié à la très faible dimension de la sphère causale initiale $R_C \approx 10^{-33}$ cm par rapport à celle de l'univers $R \approx 10^3$ m.

L'inflation est aussi l'épisode où les interactions grandes-unifiées (GUT) se séparent : elle est associée à la brisure de symétrie de grande unification à $t \approx 10^{-35}$ s.

L'univers étant considéré comme un milieu homogène et isotrope lors de l'inflation, sa métrique peut être celle de Robertson-Walker :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 + Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

5-2-3 – L'ère radiative :

Lorsque la température diminue brutalement à l'inflation et atteint $1 \text{ GeV} \approx 10^{13} \text{ K}$, les particules et leurs anti-particules interagissent et s'annihilent avec émission de photons. Ceux-ci deviennent dominants, le rapport entre le nombre de particules et le nombre de photons est de l'ordre de 10^{-9} . En particulier, le nombre baryonique, c'est-à-dire le rapport nucléons/photons, est de $3 \cdot 10^{-10}$. dans ce processus un très faible excédent de matière par rapport à l'anti-matière a conduit à un univers constitué de matière, l'anti-matière semblant absente des observations.

On montre que pour chaque espèce de particules $n^{\circ}A$ (et antiparticule \bar{A}), si la particule de masse m_A

est relativiste, c'est-à-dire aux températures T telles que $k_B T > m_A c^2$, les particules et leurs anti-particules sont en équilibre avec les photons (γ) :

$$n_A \approx n_{\bar{A}} \approx n_\gamma \propto T^3 \quad (5-9)$$

La température diminuant avec l'expansion, les particules deviennent non relativistes : $k_B T < m_A c^2$, et leurs densités relatives aux photons décroissent de manière exponentielle :

$$\frac{n_A}{n_\gamma} = \text{cste} \times g_A(T) \left(\frac{m_A c^2}{k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(- \frac{m_A c^2}{k_B T} \right) \quad (5-10)$$

Leur densité atteint une valeur correspondant à la température de découplage T_{eq} , telle que l'intervalle de temps entre les annihilations particules-anti-particules est plus grand que l'âge de l'univers : la densité reste alors quasi constante :

$$\frac{n_A(T_{eq})}{n_\gamma} \sim \text{cste} \quad (5-11)$$

Cette évolution de n_A/n_γ dépend donc de m_A/T selon (5-10) et atteint un plateau selon (5-11) pour $T < T_{eq}$ (figure 5-5).

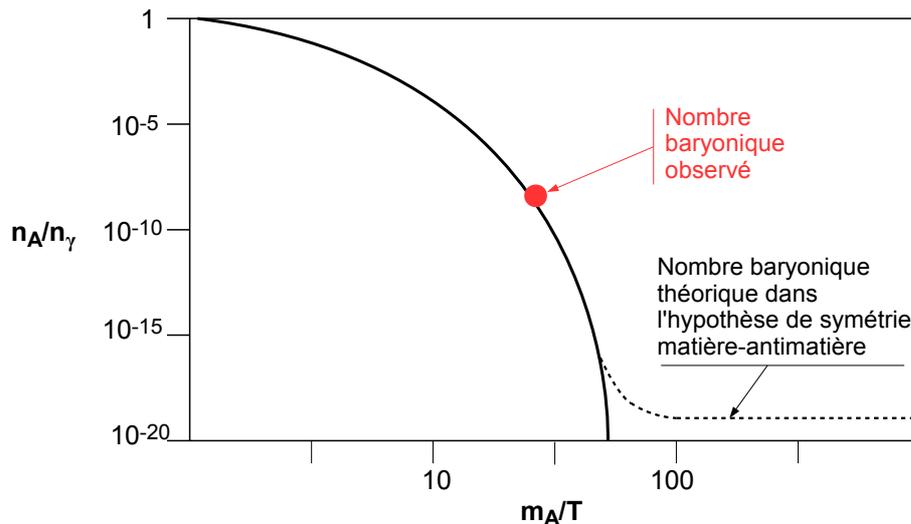


figure 5-5 : densité relative aux photons des particules et anti-particules en fonction de leur masse et de la température

S'agissant de la relation entre la température et l'expansion, on montre que la période radiative correspond à des décalages spectraux :

$$z \geq z_{eq} \approx 3612 \Theta_{2,7}^{-4} \left(\frac{\Omega_{m0} h^2}{0,15} \right) \quad (5-12)$$

où $\Theta_{2,7} = \frac{T_{CMB}}{2,725}$, avec T_{CMB} température du fond diffus cosmologique (donc actuellement $\Theta_{2,7} \approx 1$),

Ω_{m0} paramètre de densité de matière actuelle, $h \approx 0,7$ facteur correctif de la constante de Hubble. Avec $\Omega_{m0} = \rho_{m0}/\rho_c \approx 0,127$ on a : $z_{eq} \approx 3058$. La température T_{eq} correspondant à z_{eq} est obtenue à partir du fait que T varie avec $a = a_0/(1+z)$:

$$\frac{T_{\text{eq}}}{T_0} = \frac{1+z_{\text{eq}}}{1+z_0} \approx z_{\text{eq}}$$

puisque $z_{\text{eq}} \gg 1$ et $z_0 \approx 0$ aujourd'hui. Avec (5-12) on a donc : $T_{\text{eq}} \approx z_{\text{eq}} T_0$. Or $T_0 \approx T_{\text{CMB}} = 2,725 \Theta_{2,7}$

d'où : $T_{\text{eq}} = 2,725 z_{\text{eq}} \Theta_{2,7} = 2,725 \times 3612 \Theta_{2,7}^{-3} \frac{\Omega_{\text{m}0} h^2}{0,15}$ (K) $\approx 8300 \text{ K} = 0,718 \text{ eV}$.

Vient ensuite la période de découplage.

5-2-4 – La période du découplage :

Lorsque la température diminue, suite à l'expansion, jusqu'à 3000-4000 K, les photons n'ont plus assez d'énergie pour ioniser les atomes d'hydrogène, les électrons restent liés aux noyaux et les atomes d'hydrogène deviennent stables. En parallèle, les photons n'interagissent plus avec les atomes : il y a un découplage du rayonnement. Ces photons ne sont plus piégés et se propagent librement, par conséquent l'univers devient transparent et donc observable. Ils constituent le rayonnement fossile, le fond diffus cosmologique (CMB) émis à une température de l'ordre de 3000 K qui, à cause de l'expansion, sont observés à la température $T_0 \approx 2,725 \text{ K}$.

Suite au découplage des photons, la recombinaison des atomes d'hydrogène (c'est-à-dire leur formation par capture d'un électron par un proton non suivie d'une ionisation) peut s'effectuer.

Il s'ensuit la succession des réactions impliquant l'hydrogène qui conduisent à la formation d'atomes plus lourds. Noter cependant que l'hélium, qui est formé après l'hydrogène et coexiste ensuite avec lui, a sa recombinaison qui se termine bien avant celle de l'hydrogène ; car l'énergie d'ionisation de l'hélium est supérieure à celle de l'hydrogène.

Après le découplage la densité d'énergie de la matière (numéro atomique A) décroît selon $a(t)^{-3}$:

$$\rho_A(t) \propto \left(\frac{a_{\text{DA}}}{a(t)} \right)^3$$

tandis que la densité d'énergie du rayonnement décroît, selon comme $a(t)^{-4}$, puisque $\rho_\gamma(t) \propto T^4$ donc $\rho_\gamma(t) \propto a(t)^{-4}$ en expansion adiabatique où $a(t)T(t) = \text{cste}$. Les deux densités deviennent équivalentes $\rho_A \approx \rho_\gamma$ à un âge cosmique d'environ 3.10^5 années à une température d'environ 4000 K ; avant cet âge le rayonnement domine, après c'est la matière qui domine (ère matérielle) (figure 5-6).

Au découplage, on montre que le décalage spectral z_D est donné par :

$$(1+z_D)^{3/2} = \frac{280,01}{X_{\text{e résiduel}}} \left(\frac{\Omega_{\text{b}0} h_0^2}{0,02} \right)^{-1} \left(\frac{\Omega_{\text{m}0} h_0^2}{0,15} \right)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{1+z_D}{1+z_{\text{eq}}}} \quad (5-13)$$

où $\Omega_{\text{b}0}$ et $\Omega_{\text{m}0}$ paramètres de densité actuelle respectivement des baryons et de la matière ; $X_{\text{e résiduel}}$ est la fraction d'ionisation restante après la fin de la recombinaison, elle dépend du comportement de $X_{\text{e}}(z)$ pendant la phase de recombinaison.

La théorie prévoit $z_D \approx 1057,3$: cette valeur correspond au découplage des photons qui deviennent et restent libres, ils forment ainsi le rayonnement du fond diffus cosmologique. L'épaisseur de la zone de découplage, ou *surface de dernière diffusion*, correspond à des décalages compris entre z_D et le décalage pour lequel la probabilité de diffusion d'un photon entre les décalages spectraux z et $z+\Delta z$ atteint

$$p_\gamma = \frac{1}{2} p_\gamma(z_D)$$

Cette épaisseur est $\Delta z_D = 185,7$ d'après le modèle et correspond à la durée moyenne de l'ère du

découplage. Ces valeurs de z_D et Δz_D sont confirmées par les observations WMAP qui donnent $z_D = 1089 \pm 1$ et $\Delta z_D = 195 \pm 2$.

Les derniers photons à être émis, constitutifs du CMB, sont ceux qui correspondent à $z_D \leq z \leq z_D + \Delta z_D$. Après cette émission l'univers se refroidit à cause de son expansion et n'émet plus de nouveau rayonnement global qui puisse être détecté. L'ensemble est dominé par de la matière froide formée d'hydrogène moléculaire.

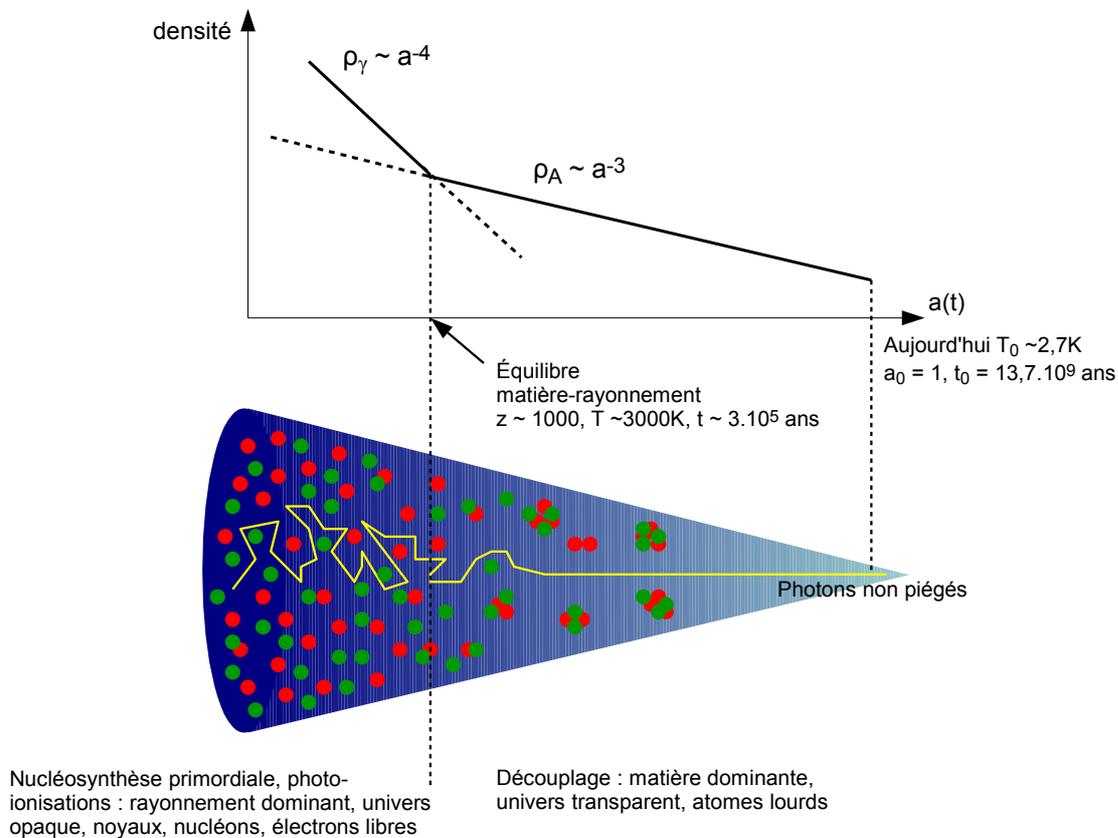


figure 5-6 : transition de l'ère univers opaque à l'univers transparent via le découplage matière-rayonnement

5-3 – Le problème de la faible entropie de l'univers primordial

Parmi les nombreuses questions ouvertes relatives à la cosmologie, en relation avec la physique quantique, listées par exemple en [14], figure celle de la valeur estimée de l'entropie de l'univers, évaluée par les données d'observations actuelles.

Aux temps primordiaux de l'univers, à l'ère de Planck (si elle existe), les 4 interactions fondamentales connues sont unifiées : gravitationnelle, électromagnétique, nucléaire faible, nucléaire forte. L'univers, avec une densité extrêmement élevée, et sous l'action de l'interaction unifiée, devait être un « fluide » homogène, muni d'une réserve d'énergie et d'une entropie initiales. Si l'on considère que l'univers est un système isolé, alors d'après le Second principe de la thermodynamique, son entropie devrait augmenter au cours du temps : $\Delta S \geq 0$. Après le début de l'expansion (si tant est qu'il y ait un sens de parler de « début ») l'énergie initiale est transformée en diverses formes d'énergie : thermique, radiative, gravitationnelle, nucléaire forte, nucléaire forte. Ces transformations sont sources de diversité, au sens de la théorie de l'information, et cet apport de diversité dans différentes régions de l'univers correspond à une diminution de l'entropie pour ces régions, ou négumentropie, qui participe au bilan de l'entropie globale qui, elle, doit toujours augmenter. Ceci implique une décomposition de l'entropie d'univers en une négumentropie et en une entropie complémentaire, associée aux milieux extérieurs aux structures qui sont le siège de processus négumentropiques :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{structures}} + \Delta S_{\text{milieux}} \geq 0$$

avec $\Delta S_{\text{structures}} \leq 0$ et $\Delta S_{\text{milieux}} \geq 0$. La négumentropie concerne les structures en devenir comme les étoiles, les galaxies, les amas, les super-amas, etc., tandis que l'entropie des milieux est liée à l'expansion (dont on sait que $S \propto a^3(t)$), aux rayonnements, etc.

Au cours de leurs vies, sous certaines conditions, les étoiles évoluent et s'effondrent lorsqu'elles ont dépassé leur masse de Jeans. Une proportion d'entre elles continuent de s'effondrer au lieu de se stabiliser en étoiles naines ou en étoiles à neutrons, et deviennent des trous noirs.

On montre que les trous noirs ont une entropie élevée. Bekenstein et Hawking ont montré que celle-ci est une entropie gravitationnelle et qu'elle est directement proportionnelle au carré de la masse du trou noir,

et donc à l'aire de la surface de l'horizon d'événement du trou noir A : $S \propto M^2 = \left(\frac{Rc^2}{2G}\right)^2 \propto R^2$ soit :

$$S \propto \frac{1}{4}A \quad (5-14)$$

où M et R sont la masse et le rayon du trou noir ; S. Hawking a établi que la masse M est inversement proportionnelle à la température du rayonnement $M \propto 1/T$. Le trou noir émet donc un rayonnement rigoureusement thermique, qui est indépendant du processus de sa formation (problème de la perte d'information dans le trou noir) [42] [43], [44], [45]. C'est une source d'entropie importante qui contribue à l'accroissement de l'entropie d'univers.

Pourtant, en comparaison avec l'ancienneté du cosmos, la proportion de trous noirs est basse : l'entropie de l'univers augmente alors moins rapidement que prévu. Des trous noirs auraient pu se former très tôt, dès lors que les structures matérielles se formaient suite au découplage et après le début de l'ère matérielle. Mais s'ils étaient relativement peu massifs, ils ont pu s'évaporer comme le prédit la théorie. Restent alors les trous noirs massifs et super-massifs, normalement moins anciens (décalage z peu élevé). Mais ils sont en nombre insuffisant pour permettre une entropie d'univers élevée. Ainsi, l'entropie d'univers actuelle est faible, ce qui laisse supposer que l'entropie primordiale était encore plus faible.

Alors : pourquoi y a-t-il si peu de trous noirs par rapport à l'âge de l'univers, et pourquoi, par quelle causalité, une entropie initiale de l'univers si faible ?

■ On peut se rendre compte de l'importance du **rôle de la gravitation, et en particulier des trous noirs, sur l'entropie d'univers**, par rapport à celui du rayonnement (photons et neutrinos) :

L'entropie du rayonnement est proportionnelle à la densité des particules relativistes (photons, neutrinos, HDM) :

$$S_R \propto n_\gamma$$

Pour l'univers observable actuellement on a : $S_R = 10^{88} k_B \approx 10^{65} \text{ J.K}^{-1}$. L'entropie gravitationnelle est produite principalement par les trous noirs. En utilisant la relation de Bekenstein-Hawking (5-14) et les observations, on obtient pour un seul trou noir :

$$S_{\text{BH}} = 10^{77} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \quad (5-15)$$

La masse totale de la matière ou de son équivalent en énergie est estimée actuellement à $10^{22} M_\odot$. Si elle est entièrement contenue dans un trou noir primordial – comme cela est envisagé dans certains modèles – l'entropie gravitationnelle de l'univers serait : $S_G = 10^{77} \times (10^{22})^2 = 10^{121} k_B \approx 10^{98} \text{ J.K}^{-1}$.

Donc $S_G \gg S_R$, ce sont les trous noirs qui contribueraient le plus à l'entropie d'univers. Ils sont cependant relativement trop peu nombreux pour que l'entropie de l'univers soit grande.

À la phase d'inflation l'entropie augmente, comme on l'a vu : on n'a plus $aT = \text{cste}$.

De part et d'autre de cette phase, l'expansion est isentropique : pour une température grande devant l'énergie des particules du champ scalaire $T > m_s$, on a $a(t) \propto t^{1/2}$ et donc $T \propto t^{-1/2}$.

Lorsqu'elle atteint $T \leq m_s$, on a : $a(t) \propto \exp(t/\tau_s)$ l'expansion est exponentielle : début de l'inflation, et donc la température chute brutalement $T \propto \exp(-t/\tau_s)$.

Puis l'évolution n'est plus adiabatique.

Ce changement de température entraîne une forte $\Delta S > 0$. Désignons par (i) le début de l'inflation, (f) la fin de l'inflation, alors le paramètre entropique est :

$$C(i, f) = \frac{a_f T_f}{a_i T_i} = \text{constante si adiabatique, variable sinon.}$$

À la fin de l'inflation, après réchauffement, on retrouve $T_f = T_i$ et donc $C(i, f) = a_f/a_i$, avant et après l'inflation sont dans le rapport $R_f = C(i, f)R_i = (a_f/a_i)R_i$, ce qui est cohérent avec les observations (fig. 5-7).

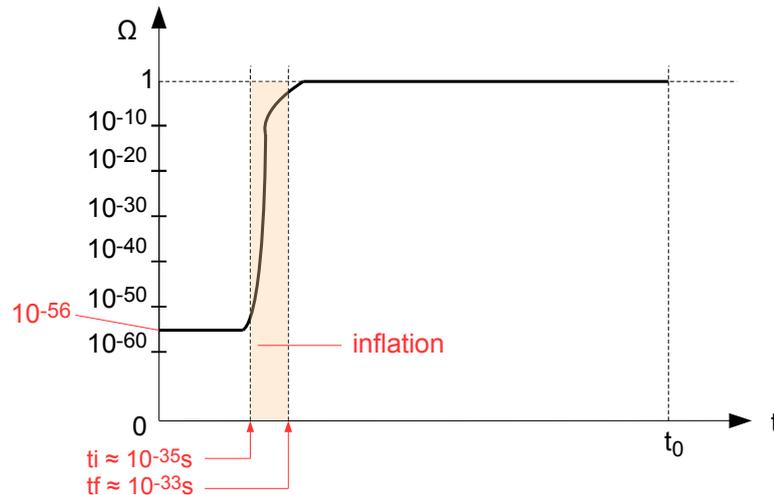


figure 5-7 : évolution de la densité, représentée par $\Omega = \rho/\rho_c$, dans le modèle comprenant l'inflation ; après celle-ci l'évolution suit le scénario de Friedmann-Lemaître

5-4 – Inflation éternelle et multivers

5-4-0 - Selon certaines théories, l'inflation pourrait augmenter considérablement sous l'effet des fluctuations quantiques ; dans ce cas l'expansion est localement plus grande et les fluctuations quantiques pourraient engendrer dans ces domaines de nouvelles inflations (auto-reproduction).

Si c'est le cas, cela aurait diverses conséquences cosmologiques : existence d'un multivers comprenant des univers différents, diversité des vides, constantes fondamentales de la physique différentes d'un univers à l'autre ; et cela pourrait justifier le principe anthropique faible.

Au départ des arguments il y a les rôles conjoints du champ de Higgs et des fluctuations du vide quantique, que l'on rappelle qualitativement ci-après.

5-4-1 – Champ et bosons de Higgs

En théorie quantique des champs, un champ de Higgs est un champ scalaire qui transporte de l'énergie en affectant une masse-énergie (c'est-à-dire de la matière ou de l'énergie en relation d'équivalence d'Einstein $E = mc^2$) à toute particule de masse nulle (comme un photon). En conséquence, la masse n'est plus considérée comme une propriété intrinsèque d'une particule, mais comme le produit d'une interaction (ou mesure) quantique (voir par exemple [56]).

La masse cause à la particule une réaction d'inertie (résistance à la variation de sa vitesse) suite à l'action d'une force (un exemple étant la principe fondamental de la dynamique de Newton). La nature scalaire du champ de Higgs entraîne que l'effet d'inertie induit à la particule est omnidirectionnel.

Les interactions de portée finie font intervenir des bosons de jauge dotés d'une masse qui détermine le rayon de leur portée (voir par exemple [13] point 1.2). L'attribution d'une masse aux bosons de jauge met

en jeu la brisure spontanée de symétrie. Les bosons de jauge de masse nulle obtiennent une masse par effet dans le vide avec des champs de Higgs, cette masse dépendant des constantes de couplage du champ d'interaction (voir tableau 5-1).

Mais il existe aussi, par couplage de Yukawa, des interactions entre les bosons du champ de Higgs et les fermions ([56],[57],[58]).

interaction	potentiel du champ et sa portée	boson de jauge et masse (GeV)	charge du boson de jauge
électromagnétique	$V_E(r) = C/r$ infinie	photon γ $m = 0$	0
faible	$V_F(r) = \alpha_F \exp(-r/r_0)/r$ $r_0 = \hbar / mc$ rayon de Yukawa	$W^+, W^- : m = 80,403$ $Z^0 : m = 91,188$	± 1 0
forte	$V_S(r) = A/r + Br$ ($B > 0$)	8 gluons $g : m = 0$	0
champ de Higgs	mécanisme BEH (Brout-Englert-Higgs)	bosons de Higgs $m = 125,7$	0

Tableau 5-1 : Bosons des 3 interactions fondamentales (hors gravité) et du champ de Higgs.

NB : le mécanisme BEH attribue une masse aux bosons des interactions faibles liée aux constantes de couplage g_F et g_E respectivement des interactions faible et électromagnétique :

$$\begin{aligned} \text{pour } W^\pm : m &\propto g_F/2 \\ \text{pour } Z^0 : m &\propto (g_F^2 + g_E^2)^{1/2} / 2 \\ \text{pour } \gamma : m &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie du champ de Higgs (et donc la masse qu'il attribue à une particule) est plus grande dans un champ environnant nul que dans un champ environnant non nul. En conséquence les effets du champ de Higgs sont favorisés dans le vide quantique et ses fluctuations. Il s'ensuit qu'une masse est plus aisément affectée aux particules sans masse lorsque l'univers est suffisamment étendu pour un vide plus important, donc à température suffisamment « basse » (dans le cas d'une expansion adiabatique $a(t)T(t) \approx \text{cste}$), donc après le Big-Bang, après la phase accélération et découplage qui font suite à l'inflation ⁽⁶⁾.

Le boson du champ de Higgs (ou boson de Higgs ou boson BEH pour R. Brout, F. Englert, P. Higgs)⁽⁷⁾, conjecturé en 1964 dans le cadre du Modèle Standard des particules élémentaires, de masse 125,7 GeV, et de spin 0 (boson de champ scalaire), fut découvert le 4 juillet 2012 lors de l'expérience avec le LHC portant sur la collision de 2 protons d'énergie 14.10^3 GeV, qui se décomposèrent ensuite en 4 muons.

■ **Rappel** : on a vu au chapitre 5 trois définitions sur la dimension de l'Univers :

- Rayon de l'univers observable, ou rayon physique : c'est le rayon R de la sphère (plus exactement 3-sphère spatiale) dans laquelle la lumière émise depuis le Big Bang, il y a $t_0 = 13,7$ milliards d'années (13,7 GA) nous parvient. On a : $R = \chi_S = 47$ milliards années-lumière (47 GAL) ⁽⁸⁾.
- Rayon de Hubble r_H : rayon de la sphère où la récession des galaxies suite à l'expansion s'effectue à la vitesse $v \leq c$; on a $r_H = c/H$, où H « constante » de Hubble.
- Rayon de Hubble comobile : $\tilde{r}_H = r_H/a(t)$ où $a(t)$ facteur d'échelle ; il diminue au cours de l'inflation (voir figure 5-4).

La vitesse d'expansion peut être plus grande que c sans que cela contredise la Relativité générale : celle-ci ne concerne pas les changements de la géométrie de l'espace-temps. Par conséquent, si une galaxie est éloignée de nous de plus de r_H , et si nous recevons quand même sa lumière, alors sa vitesse de récession est supérieure à c .

Lors de l'inflation l'expansion est extrêmement intense : le rayon physique de l'univers double à chaque

6 Cela arrive au bout d'un temps d'environ 10^{-36} s après le Big Bang, la température de transition étant alors d'environ 10^{15} GeV.

7 Sans oublier les autres théoriciens : C.R. Hagen, G. Guralnik, T. Kibble.

8 Rappel : 1 année-lumière (AL) = $9,4608.10^{15}$ m.

10^{-38} s, par conséquent à l'issue de l'inflation le rayon physique a augmenté d'un facteur 2.10^{78} . Après l'inflation, et en particulier à l'âge t_0 (aujourd'hui) l'expansion est nettement plus lente : le rayon physique double seulement toutes les 8 GA.

Avec ces considérations, on comprend que la sphère physique, de rayon R, bornée d'une part par l'horizon de l'ère de Planck, et d'autre part par l'horizon de Hubble, ne contient qu'une partie seulement de l'univers. Dans ce domaine on a dénombré, à ce jour, environ 10^{11} galaxies, et un nombre total d'étoiles d'environ 10^{23} . Le CMB émis à sa surface 3D il y a $t_0 = 13,7$ GA nous parvient car l'univers était plus petit à l'époque de son émission, par conséquent l'horizon causal était beaucoup plus grand que son rayon physique.

Dans la phase d'inflation, l'énergie potentielle de l'espace peut devenir négative (condition (5-3)) ; elle engendre alors une pression négative qui crée de la matière-énergie (attribution d'une masse-énergie), accompagnée d'une dilatation de l'espace. Par conservation de l'énergie totale, l'énergie potentielle de l'espace diminue : la densité de matière-énergie reste alors constante. La conversion de l'espace en matière-énergie est réalisée par les bosons de Higgs, par attribution d'une masse aux particules réelles qui émergent des particules virtuelles associées aux fluctuations du vide quantique. L'expansion de l'espace entre alors dans une croissance exponentielle (équation (5-5)). Cette expansion s'effectue à densité de matière-énergie constante, et non à matière-énergie constante, laquelle varie jusqu'à la fin de l'inflation. En effet, pendant l'inflation la formation de particules massives, à partir du processus BEH favorisé par l'énergie potentielle négative de l'espace, fait augmenter la quantité totale de masse-énergie, mais la dilatation de l'espace maintient constante la densité de masse-énergie.

C'est seulement à la fin de l'inflation que, la quantité de masse-énergie ne variant plus, l'expansion reprend à densité variable et à matière-énergie constante, donc devient adiabatique.

La quantité de masse-énergie cesse d'augmenter parce qu'elle devient suffisante pour que l'attraction gravitationnelle contrebalance l'expansion rapide et la ralentisse considérablement. L'expansion devenue alors adiabatique s'accompagne d'une diminution de la température, ceci jusqu'à aujourd'hui (t_0) où la répartition connue de la matière et de l'énergie, sous leurs différentes formes, est donnée au tableau 3-1.

Par ce refroidissement, la température passe par la valeur où la séparation des interactions électrofaible et forte se produit (brisure de symétrie GUT). L'interaction forte, ainsi libérée, permet alors la cohésion des nucléons, formant les noyaux atomiques, parce qu'elle devient plus intense que l'interaction électromagnétique qui produit la répulsion des particules chargées de même signe.

Au début de l'inflation, les fluctuations quantiques d'énergie du vide entraînent une variation de l'énergie potentielle de l'espace qui devient donc instable. En conséquence, cette variation conduit à des variations locales de densité de matière-énergie. Cependant, cette densité reste globalement conservée en moyenne à l'échelle de l'univers de l'époque inflationnaire, parce que l'énergie ΔE prélevée à l'espace par fluctuations quantiques lui est restituée au bout d'une durée Δt telle que $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, comme déjà vu.

Or, d'après certaines théories, l'inflation pourrait continuer dans certains domaines de l'univers à cause de fluctuations du vide quantique suffisamment intenses. Dans ce cas, il se créerait dans l'univers total de la matière-énergie en quantité suffisante pour entretenir l'inflation sur une durée longue (le début du réchauffement, qui marque la fin de l'inflation, a lieu beaucoup plus tard).

Certains auteurs considèrent que l'inflation pourrait être éternelle. Mais en vertu de la conservation de l'énergie moyenne de l'univers total, l'énergie potentielle de l'espace devrait finir par devenir insuffisante pour produire de la matière-énergie.

On a vu au chapitre 3 que Ω est proche de 1, ce qui suggère que notre univers observable (délimité par le rayon physique R) est plat (courbure ≈ 0), et que la densité est très proche de la densité critique (tableau 3-1) :

$$\Omega = 1,003_{-0,017}^{+0,013} \quad , \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,87837 \cdot 10^{-29} h_0^2 \text{ (g/cm}^3\text{)} \approx 9 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \text{ soit } 6 \text{ atomes H / m}^3 \text{ d'espace}$$

(avec $h_0 \approx 0,7$). **Rappel :**

- si $\Omega = 1$: conservation de la forme de l'univers, sa courbure est nulle (univers plat)
- si $\Omega > 1$: la matière-énergie tend à se regrouper sur de petites échelles

- si $\Omega < 1$: la matière-énergie tend à se regrouper sur de grandes échelles

On a vu aussi au chapitre 3 que l'expansion de l'univers observable accélère puisque $\Omega_{\Lambda}/\Omega_m > 1/2$.

Certains auteurs (par ex. [47]) considèrent que l'univers total serait de rayon infini, puisque étant quasiment plat, le CMB observé montrerait seulement des variations thermiques de fréquences bien déterminées s'il était fini alors que son spectre observé aujourd'hui est continu du domaine IR lointain jusqu'aux hyperfréquences et que le rayonnement fossile est globalement homogène (Rappel : à l'émission du CMB, la sphère de causalité est environ 10^6 AL et la température T de 3000 K, devenue jusqu'à nous 2,7 K suite à l'expansion).

Si l'univers total est infini (⁹), et puisque l'univers physique est fini et a comme rayon $R = 47$ GAL, il peut exister des domaines extérieurs à l'univers physique plus éloignés que ce rayon. De plus l'existence de l'univers depuis l'infini est compatible avec une quantité infinie de matière-énergie contenue dans l'univers total.

Dans l'affirmative, si l'univers total est infini, il peut y exister plusieurs, voire une infinité, d'univers physiques finis comme notre univers physique. L'ensemble de ces univers physiques finis forme un **multivers de niveau 1**. Ils suivent les mêmes lois physiques, avec les mêmes constantes fondamentales, que notre univers physique.

Si l'inflation n'est pas terminée en certains domaines de l'univers total, en ces domaines la variation de l'espace est à densité matière-énergie constante et l'espace génère de la matière-énergie à partir des fluctuations du vide. D'autres domaines de l'univers, tel le nôtre, ont leur inflation terminée ou en cours d'achèvement : ils connaissent une expansion comparable ou différente de celle de notre univers physique. Ils sont alors distribués en univers-bulles séparés par des domaines d'inflation où, dans certains cas, l'inflation s'auto-entretient et devient donc éternelle.

Selon cette description d'un univers total extrêmement petit (dimensions de Planck), mais pouvant éventuellement exister depuis l'éternité, émerge un univers total structuré en arborescence faite d'univers-bulles en expansion et d'inflation terminée, et de domaines d'inflation éternelle (**multivers de niveau 2**). dans ce cas certaines lois et constantes fondamentales de la physique pourraient être différentes de celles d'un univers-bulle à un autre, et les nôtres seraient perceptibles et intelligibles par l'Homme parce que, précisément, son évolution et toute l'histoire qui l'a conditionnée dans l'univers physique, lui permettraient d'être observateur seulement de celles-ci. C'est l'hypothèse du **principe anthropique faible** qui propose ici une solution au problème du « fine-tuning » des constantes fondamentales.

La théorie usuelle de l'inflation se heurte à une limite dans l'inflation éternelle.

Pour la lever, une description alternative de l'inflation éternelle est proposée comme une théorie conforme des champs (CFT, Conformal Fields Theory), adaptée aux surfaces d'univers sans domaines limites (au sens des variétés en géométrie différentielle), donc placées au seuil de l'inflation.

Le point de départ s'appuie sur un univers sans limites initiales d'espace et de temps (singularité) avec une fonction d'onde d'univers Ψ_{univ} , fonctionnelle du tenseur métrique défini sur une surface compacte de dimension (D-1), où D est la dimension de l'espace-temps [54]. La théorie duale en question utilise la correspondance entre, d'une part, la théorie des cordes M (théories dites anti-De Sitter AdS) et, d'autre part, les théories conformes des champs (CFT) [49] qui regroupent les théories quantiques des champs QFT (dont celle de Yang-Mills sur les particules élémentaires) [50].

Cette théorie duale est appelée correspondance AdS/CFT, ou de jauge-gravité, ou correspondance holographique (Maldacena, 1997) [51], [52].

Un espace AdS est une solution de l'équation d'Einstein de la Relativité Générale pour le vide ; il fait intervenir des sous-variétés de métrique hyperbolique qui correspondent chacune à un instant de l'histoire de l'univers. Sa surface intervient dans la correspondance AdS/CFT : en effet, en chaque point de sa

9 Univers infini, au sens où l'âge de l'univers n'est pas la durée de son existence : l'âge de l'univers est la durée écoulée depuis le Big Bang. Ce qui s'est produit avant, et qui donc ne nous est pas parvenu de manière observable, nous est inconnu. Un âge fini de l'univers (environ 13,7 GA) ne signifie donc pas que celui-ci n'ait pas toujours existé, car l'ère de Planck est un horizon de la physique.

surface le voisinage a une métrique semblable à celle de Minkowski de la Relativité Restreinte, c'est-à-dire hors gravitation. Dans ce voisinage il est donc possible d'appliquer une théorie conforme des champs (CFT) et de traiter la gravitation selon la théorie quantique des champs (QFT). Mais cette possibilité nécessite l'emploi de dimensions d'espace-temps différentes entre chacune des théories en correspondance, et donc un formalisme de compactification des dimensions pour relier AdS à CFT. De plus, une entité dans une des théories (par exemple une particule) correspond à une ou plusieurs entités dans l'autre qui lui sont équivalentes : dans la théorie de correspondance elles ont même propriété physique (par exemple, probabilité de collision, ou de désintégration...).

Les espaces AdS, où s'appliquent les théories des cordes, sont à constante cosmologique Λ négative, et leur géométrie est hyperbolique ; tandis que notre univers observable est de De Sitter (dS) avec Λ positive, et doté d'un bord. Dans la correspondance AdS/CFT la gravité devient équivalente à un champ qui peut être décrit par la théorie quantique des champs (QFT).

La théorie des correspondances AdS/CFT a initialement été formalisée pour les correspondances entre la théorie des cordes de type II sur l'espace $AdS_5 \times S_5$ et la théorie conforme super Yang-Mills $N = 4$ (CFT4) sur sa frontière de dimension 4 : la théorie de gravitation s'applique à un espace anti-de Sitter de dimension 5 (AdS_5) auquel s'ajoutent 5 autres dimensions compactées (formant l'espace S_5).

En théorie quantique des champs les particules en interactions sont ponctuelles, et leurs interactions, décrites selon la théorie des perturbations, sont représentées par des chemins sous forme de diagrammes de Feynman. Cette théorie est applicable seulement si la constante de couplage des interactions est faible. L'interaction de gravitation n'y figure pas.

En théorie des cordes les particules sont représentées par des cordes unidimensionnelles, et leurs interactions par des surfaces bidimensionnelles qui, dit schématiquement, représentent le déplacement d'une corde. La gravité peut y être prise en compte comme champ quantique.

La mise en correspondance de ces deux types de modélisation dans la théorie duale AdS/CFT conduit à une équivalence entre la CFT super Yang-Mills et la théorie des cordes en géométrie $AdS_5 \times S_5$, qui inclut les couplages forts et les calculs perturbatifs.

D'après la théorie classique de l'inflation, les effets stochastiques dominant ceux du roulement lent (condition (5-2)), ce qui a pour conséquence que, si l'inflation est éternelle, celle-ci produirait des univers hautement irréguliers. Dans [53], S. Hawking et T. Hertog, constatant que cette conception évacue la séparation entre les considérations classiques et la nature quantique des fluctuations, proposent de traiter l'inflation éternelle selon une cosmologie quantique. À cette fin, le modèle de correspondance AdS/CFT (ou dualité jauge-gravité) est utilisé : il conduit à la conclusion d'amplitudes faibles des variations des interfaces conformes issues du champ supposé scalaire responsable de l'inflation éternelle. Les univers engendrés par l'inflation éternelle seraient donc réguliers à grandes échelles.

Il s'ensuit que cette cosmologie « holographique » (suivant la théorie AdS/CFT) suggère que la régularité des univers équivaldrait à l'existence d'un univers unique et non d'un multivers composé d'univers aux structures très différentes et séparés par des zones d'inflation. Ceci impacte négativement le principe anthropique faible, lequel se réduit à dépendre seulement du roulement lent.

Le modèle s'appuie sur l'hypothèse d'une fonction d'onde définie sur une surface Σ du genre espace 3D à courbure négative (espace hyperbolique, forme de selle de cheval) délimitant un volume très grand. Elle fait intervenir la fonction de partition Z_{QFT} des déformations d'un espace pseudo-euclidien en théorie CFT, définie sur la surface Σ . Le domaine concerné a une structure géométrique définie par la métrique de base (h_{ij}) hyperbolique (selle de cheval sans bord, en AdS avec $\Lambda < 0$) et est soumis à des fluctuations générées, en faible gravité, par un champ scalaire de potentiel négatif $-V(\Phi)$ où Φ est le potentiel d'auto-interaction. Cette métrique de base et le potentiel ont leurs correspondants duaux conformes (h_{ij}^*, Φ^*) selon AdS/CFT. La fonction d'onde est exprimée, par la théorie des cordes, dans l'espace sans bord (AdS) mais en correspondance AdS/CFT elle intègre la présence de gravitation avec $\Lambda > 0$ et un potentiel $\Phi > 0$; elle est notée Ψ_{NBWF} (pour « no-boundary wave function »).

Les probabilités décrites par NBWF se conservent le long d'une trajectoire classique : c'est une conséquence de l'équation de Wheeler-De Witt ce qui confirme que la fonction d'onde correspondante est bien sans bord. On montre qu'elle est de la forme [55] :

$$\Psi_{\text{NBWF}}(h_{ij}, \Phi) = \frac{1}{Z_{\text{QFT}}(h_{ij}^*, \Phi^*)} \exp(iS_{\Sigma}(h_{ij}, \Phi)/\hbar) \quad (5-16)$$

où S_{Σ} action hamiltonienne sur l'hypersurface Σ .

La NBWF prévoit un ensemble d'univers classiques lorentziens, où chaque univers est associé à une géométrie de point selle de cheval complexe, et qui coïncident en Σ avec la configuration classique. Ces univers sont globalement réguliers, et forment un seul univers sans inflation éternelle.

Une hypothèse où le domaine considéré Σ n'est pas sans bord peut conduire à des conclusions différentes de celle exprimant l'absence d'inflation éternelle et de multivers constitué d'univers fortement hétérogènes et irréguliers.

5-5 – Effets de courbure de l'espace-temps sur le vide

5-5-1 – Équations d'Euler-Lagrange, et équations d'onde des champs

En présence de champs de potentiels Φ_m , le lagrangien est fonction de tous ces champs et de leurs dérivées par rapport aux 4-coordonnées d'espace-temps x_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$) :

$$L = L(\Phi_m, \partial\Phi_m/\partial x_{\mu})$$

L'action hamiltonienne est définie par : $S = \int L dt = \int \tilde{L} dt d^3x$, où \tilde{L} est la densité volumique du lagrangien (4-44), invariante par rapport aux petites variations des champs et de leurs dérivées, ce qui conduit aux équations d'Euler-Lagrange, d'où découlent les équations d'onde des champs Φ_m .

Le tenseur énergie-quantité de mouvement (EQM) est la dérivée fonctionnelle de l'action S par rapport à la métrique de l'espace-temps.

► Remarque : dérivation fonctionnelle :

Soit une fonctionnelle $F[f]$, c'est-à-dire une application d'un espace de Banach (espace linéaire normé de fonctions) $\mathcal{B} = \{f(x) ; x \in \mathbf{R}\}$, sur \mathbf{C} ou \mathbf{R} :

$$F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{C} \text{ ou } \mathbf{R} \\ f \rightarrow F[f]$$

La dérivée fonctionnelle de F est alors définie par :

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F[f(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[f(x)]) \quad (5-17)$$

où $\delta(x-y)$ est la distribution de Dirac.

Exemple de fonctionnelle F : dérivée de la fonction f : $F[f(x)] = f'(x)$.

Sa dérivée fonctionnelle est alors : $\frac{\delta f'(y)}{\delta f(x)} = \frac{d}{dy} [\delta(y-x)]$

■ Les invariances des propriétés des champs dans un espace courbe dépendent du lagrangien L :

- Si les propriétés des particules et leurs lois d'interaction sont indépendantes du référentiel, alors il y a conservation des moments linéaires, des moments cinétiques, et de l'énergie totale.
- Si les propriétés sont indépendantes des vitesses galiléennes absolues du système, alors il y a équivalence masse-énergie et conservation du tenseur EQM.

Ces conditions d'invariances justifient l'emploi des groupes algébriques : L doit être invariant pour toutes les opérations des groupes de symétrie correspondants.

■ Remarque : dérivation covariante d'un vecteur contravariant :

Soit un vecteur V dans un espace de métrique $(g_{\mu\nu})$; sur une base de vecteurs contravariants e_{μ} , il se

décompose suivant ses coordonnées covariantes V^μ : $V = V^\mu e_\mu$. La différentielle des vecteurs de base est : $de_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma dx^\nu e_\sigma$ où $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ est le symbole de Christoffel. Il s'ensuit que la différentielle du vecteur V , $dV = (dV^\mu)e_\mu + V^\mu de_\mu$, est égale à :

$$dV = (D_\nu V^\mu) dx^\nu e_\mu$$

où la dérivée covariante du vecteur V est :

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma$$

On note aussi : $dV = (D V^\mu) e_\mu$ avec $D V^\mu = (D_\nu V^\mu) dx^\nu$

■ **Remarque : définitions relatives à la courbure de l'espace :**

En utilisant la notation $(AB)_{\mu\nu} = A_{\mu\varepsilon}^\tau B_{\nu\tau}^\varepsilon - A_{\mu\nu}^\tau B_{\tau\varepsilon}^\varepsilon$, le tenseur de courbure de Ricci s'exprime par :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + (\Gamma\Gamma)_{\mu\nu}$$

La courbure scalaire est : $R = R_{\mu}^\mu$

Tenseur de courbure d'Einstein : $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, il est à 4-divergence nulle : $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

Soit une hypersurface Σ de l'espace-temps définie pour la coordonnée de temps $x^0 = \text{constante}$; cette hypersurface spatiale présente une courbure, dite « courbure extrinsèque », définie par $K = K_i^i$ où intervient la « seconde forme fondamentale » :

$$K_{ij} = K_{ji} = -\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \partial_0 g_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ (indices d'espace)}$$

K représente la courbure de Σ vue depuis un observateur placé dans l'espace-temps. La courbure scalaire de l'espace-temps est obtenue par l'équation de Gauss-Codazzi :

$$R = {}^{(4)}R_{\mu}^\mu = {}^{(3)}R_i^i + [\text{Tr} K^2 - (\text{Tr} K)^2] + \partial_0 K + g^{ij} \partial_0 K_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 ; \mu = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5-18)$$

où l'on a posé :

$$[\text{Tr} K^2 - (\text{Tr} K)^2] = K_{ij} K^{ij} - (K_i^i)^2$$

L'équation de Gauss-Codazzi établit ceci : la courbure scalaire de l'espace-temps, R , s'exprime avec la courbure intrinsèque ${}^{(3)}R_i^i$ (vue depuis Σ), la courbure extrinsèque K et l'évolution temporelle du tenseur K_{ij} seconde forme fondamentale.

■ **En présence seule de gravitation** (particule libre dans un espace-temps courbe), l'action hamiltonienne, $S = S_g$, est donnée par la formule de E. Cartan :

$$S_g = -\frac{1}{2\chi} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{g} d^4x \quad (5-19)$$

où $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ et $g = \det(g_{\mu\nu})$, Λ est éventuellement la constante cosmologique.

La particule qui évolue dans cet espace-temps est libre (absence de champ), son action hamiltonienne est donc :

$$S = -mc \int ds \quad \text{où } ds = c d\tau \text{ (}\tau \text{ : temps propre)}$$

Le principe de moindre action $\delta S = 0$ conduit aux équations du mouvement, qui sont celles des géodésiques :

$$D u^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (5-20)$$

où $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ quadrivitesse. Dans un espace-temps plat, les géodésiques sont des droites, et $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = 0$; dans un espace-temps courbe, les géodésiques sont des courbes, et $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \neq 0$.

■ **En présence seule d'un champ scalaire** (sans effets de courbure de l'espace-temps) :

Un champ scalaire est associé à une particule de spin = 0.

Dans le cas d'une **particule libre** (sans interaction) de masse m, la densité du lagrangien est (cf. 4-49c) :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} \Phi^2 \quad (5-21a)$$

avec $\mu = mc^2/\hbar$ (cf. § 4-5-1), le premier terme $1/2 \cdot \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi$ est l'énergie cinétique du champ, et $1/2 \cdot \mu^2 \Phi^2$ est le terme de masse ; Φ est le champ scalaire.

Dans le cas d'une particule dont le champ scalaire correspondant possède un potentiel $V(\Phi)$ (potentiel effectif), le terme de masse est remplacé par $V(\Phi)$, et la densité du lagrangien devient :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \quad (5-21b)$$

Le potentiel de Higgs en est un exemple : il est tel que pour $\Phi = 0$ (absence de particule, ou vide) le potentiel résiduel n'est pas nul $V(0) \neq 0$ et donc un couplage continue d'exister entre lui et d'autres champs, ce qui entraîne la présence d'une énergie non nulle dans le vide (énergie du vide), et la brisure spontanée de symétrie par laquelle une masse est attribuée à des particules sans masse. Le potentiel de Higgs est de la forme :

$$V_H(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (\Phi_0^2 - \Phi^2)^2 \quad (5-22)$$

où λ est la constante de couplage avec les autres champs. Le minimum du potentiel de Higgs est atteint, non pas pour $\Phi = 0$, mais pour une valeur finie $\Phi = \Phi_0$ vers laquelle le champ scalaire tend à évoluer spontanément (configuration stable), figure 5-8.

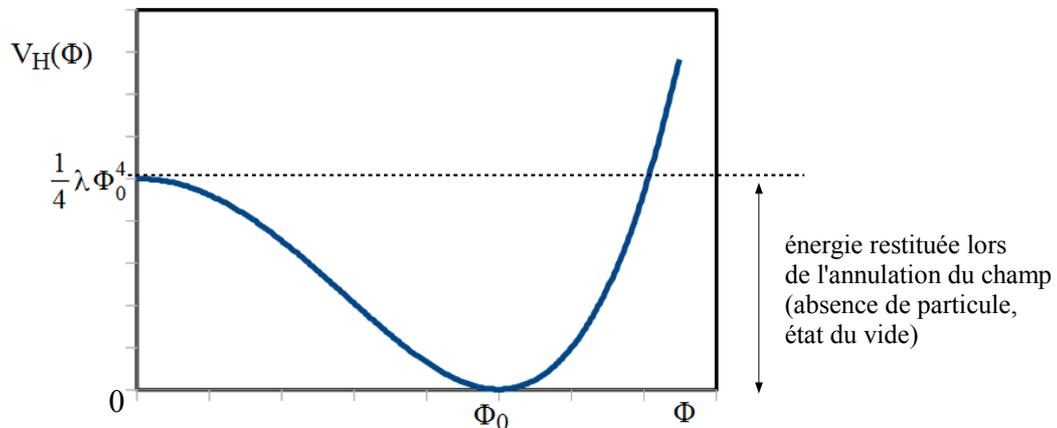


figure 5-8 : Potentiel de Higgs

Au champ nul (absence de particules associées), le potentiel effectif n'est pas nul : l'état est instable, et l'énergie correspondante est restituée. Par contre, l'état stable correspond à un champ scalaire fini Φ_0

Le principe de moindre action $\delta S = 0$ conduit aux équations d'Euler-Lagrange. Par exemple, pour une particule libre associée à un champ scalaire, où la densité du lagrangien est donnée par (5-21a), elles s'expriment par (4-45b) :

$$\frac{\partial S}{\partial \Phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \right)} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi} = 0$$

d'où l'équation d'évolution du champ scalaire, en l'absence de gravitation, qui est l'équation de Klein-Gordon (4-21) :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi - \frac{\mu^2}{c^2} \Phi = 0 \quad \text{que l'on note encore : } \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \frac{\mu^2}{c^2} \Phi = 0$$

■ **Pour un champ scalaire dans un espace courbe** de dimension D (par exemple, courbure liée à la gravitation selon la relativité générale, avec dans ce cas D = 4), l'action hamiltonienne est :

$$S_m = \int L_m^*(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^D x, \quad \text{où : } L_m^* = \sqrt{g} \tilde{L}_m(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (5-23)$$

\tilde{L}_m densité volumique du lagrangien, donnée par (5-21b) et : $g = |\det(g_{\mu\nu})|$.

Le principe de moindre action $\delta S_m = 0$ conduit à l'équation de Klein-Gordon dans un espace courbe :

$$D^\mu D_\mu \Phi = \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi} \quad (5-24)$$

avec le D'Alembertien modifié dans un espace courbe : $D^\mu D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial^\mu \partial_\mu (\sqrt{g} \Phi)$.

En présence de gravitation, l'action hamiltonienne totale S est la somme de l'action hamiltonienne de gravitation S_g (relation de E. Cartan 5-19) et de celle S_m propre à l'interaction matière/rayonnement liée au champ scalaire (5-23) :

$$S = S_g + S_m \quad (5-25)$$

On montre alors que le principe de moindre action $\delta S = 0$ conduit à la relation entre le tenseur de courbure d'Einstein et le champ scalaire qui intervient dans le tenseur énergie-impulsion :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi (T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}) \quad (5-26)$$

où le tenseur énergie-impulsion est :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu \Phi \partial_\mu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi + V(\Phi) \right) \quad (5-27)$$

L'état du champ scalaire dans un espace-temps courbe est assimilable à un fluide parfait lorsque le tenseur d'énergie-impulsion est relié au terme de pression P et à la densité ρ selon :

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \rho) u_\mu u_\nu \quad (5-28)$$

et l'on montre que si un tel fluide vérifie l'équation d'état $P = -\rho$, son énergie potentielle $V(\Phi)$ ne s'annule pas lorsque le champ Φ s'annule (espace vide de particules d'échange du champ), comme c'est le cas, par exemple, du champ de Higgs évoqué précédemment. Dans ce cas le tenseur énergie-impulsion est directement proportionnel au tenseur métrique de l'espace-temps.

■ **Action d'Einstein-Hilbert** (réf. [36]) :

Un domaine de l'espace-temps peut être décrit comme une hypersurface spatiale (Σ) dont l'évolution temporelle est obtenue comme une trajectoire de (Σ) sur une ligne de temps. L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que les grandeurs cosmologiques sont obtenues par des observations spatiales à des temps constants : géométriquement, cela revient à effectuer un feuilletage de l'espace-

temps par des hypersurface (Σ) à temps t constant.

Si (Σ) divise l'espace-temps en deux domaines, l'un une variété (M) d'espace-temps, l'autre son bord variété d'espace (∂M), à un instant (t) l'élément de longueur dans (∂M) est :

$$d\sigma^2 = h_{ij}(t, x_1, x_2, x_3) dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3), \text{ où } h_{ij} = {}^{(3)}g_{ij} \text{ métrique 3D dans } (\partial M)$$

et au bout d'une durée dt , l'hypersurface spatiale (∂M) s'est déplacée en ($\partial M'$) où l'élément de longueur est :

$$d\sigma'^2 = h_{ij}(t+dt, x_1, x_2, x_3) dx'^i dx'^j$$

pendant dt , un point de (∂M) se trouve en un point de ($\partial M'$), avec comme nouvelles coordonnées spatiales obtenues au bout d'une durée $w(t, x_1, x_2, x_3) dt$:

$$dx'^i = dx^i + w^i dt$$

d'où l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = d\sigma'^2 - (w dt)^2 = - (w^2 - w_i w^i) dt^2 + 2w_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j$$

On montre alors que l'action (5-25) prend la forme de l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S = S_g + S_m = S_{EH}(g_{\mu\nu}, \Phi) = -\frac{1}{2\chi} \int dt d^3 x w \sqrt{h} [\text{Tr } K^2 - (\text{Tr } K)^2 - {}^{(3)}R_i^i] + \int dt d^3 x w \sqrt{h} \tilde{L}_m(\Phi) \quad (5-29)$$

avec $h = \det(h_{ij})$. Le premier terme est la densité lagrangienne comobile de la gravitation, c'est la différence entre les courbures intrinsèque et extrinsèque.

La constante $\chi = 8\pi G/c^4$ est souvent exprimée avec la masse de Planck $m_p = \sqrt{\hbar c/G}$, sous la forme exprimée en unités $\hbar = c = 1$, soit : $\chi = 8\pi/m_p^2$. Cela permet l'évaluation des ordres de grandeurs des effets de courbure et des champs relativement aux échelles de Planck, échelles de l'univers à l'ère cosmologique primordiale de la grande unification des interactions fondamentales : gravitationnelles, électrofaibles, et fortes.

De façon générale, l'action d'Einstein-Hilbert, dans un espace-temps de dimension $D = 4$, en présence d'un champ scalaire Φ , est :

$$S_{EH}(g_{\mu\nu}, \Phi) = -\frac{1}{2\chi} \left[\int_{\partial M} 2\sqrt{h} K d^3 x + \int_M (R - 2\Lambda) \sqrt{g} d^4 x \right] + \int \tilde{L}_m(g_{\mu\nu}, \Phi) \sqrt{g} d^4 x \quad (5-30)$$

la première intégrale étant sur le bord (∂M) ($x^0 = ct = \text{constante}$) hypersurface spatiale 3D de métrique (h_{ij}), la troisième étant l'action S_m due au champ scalaire en présence de courbure. On rappelle que K est la trace de la seconde forme fondamentale $K = K_i^i$, avec $K_{i1} = -\frac{1}{2} \partial_0 g_{i1}$ et la courbure scalaire de l'espace-temps $R = R_{\mu}^{\mu}$ ($i, l = 1, 2, 3$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). Si $g = 1$, la variété est plate, sa métrique est de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ de la relativité restreinte.

Lorsqu'il existe un potentiel du champ scalaire $V(\Phi)$, on montre que l'action de Einstein-Hilbert est remplacée sous la forme :

$$S = -\frac{1}{2} \int \sqrt{g} \left[\partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi + 2V(\Phi) - \xi \Phi^2 R \right] d^D x \quad (5-31)$$

dans un espace de dimension D ($= 4$ pour l'espace-temps), de métrique $g_{\mu\nu}$ (où $g = \det(g_{\mu\nu})$), de courbure scalaire R , et où ξ est un facteur scalaire représentant l'effet de couplage entre la courbure et le champ. Le principe de moindre action conduit à l'équation de type Klein-Gordon du champ scalaire associé à un potentiel effectif, en espace courbe [38] :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu) + \xi R \right) \Phi = \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} \quad (5-32)$$

5-5-2 – Principe de superposition

Comment prendre en compte le formalisme quantique dans la description des états du vide et de leurs fluctuations, en présence de champ scalaire, dans un espace-temps courbe ?

Par ailleurs, les interactions fondamentales électromagnétiques, faibles et fortes sont généralement décrites dans un univers dont la métrique est celle de la relativité restreinte (Minkowski), et plus généralement FLRW (voir remarque ci-après).

■ **Remarque** : métrique FLRW. Pour un univers supposé homogène et isotrope aux échelles cosmologiques, l'élément métrique a la forme générale (2-5a) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a^2(t) \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \quad i, j = 1, 2, 3$$

où $x^0 = ct$, t est le temps cosmique, $a(t)$ le facteur d'échelle, η_{ij} métrique des hypersurfaces d'espace à t fixé, $\Sigma(t)$. La métrique de Minkowski, utilisée en relativité restreinte, correspond au cas particulier $a(t) = 1$ et $\eta_{ij} = (+1, +1, +1)$.

On définit le temps conforme : $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$ d'où $ds^2 = a^2(\eta)(-c^2 d\eta^2 + d\sigma^2)$ avec $d\sigma^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j$.

On a donc $g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu}$ (où $\eta_{00} = -1$), ce qui montre que la métrique FLRW est plate pour toute transformation conforme.

■ Cette description classique cesse d'être valide en théorie quantique des champs dans un espace-temps muni d'une courbure, principalement lorsque l'on ne peut pas traiter la gravitation par la relativité générale de manière séparée des champs. Cette situation arrive surtout quand la gravitation quantique est nécessaire aux échelles de Planck (ère de Planck), c'est-à-dire lorsque l'énergie d'interaction est de l'ordre de celle de la masse de Planck m_p .

C'est une difficulté, car la gravitation se couple à toutes formes d'énergies, donc le calcul de l'énergie totale au moyen de la renormalisation doit être adapté. On ne peut plus écrire l'hamiltonien total

$$H(t) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+)$$

où $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^+$ sont des opérateurs non hermitiques respectivement d'annihilation et de création (cf. (4-25)), avec $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}$ opérateur nombre de particules dans l'état de degré de liberté \mathbf{k} (4-26), sous la forme :

$$H(t) = \int d^3 \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} = \int d^3 \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$$

Le formalisme quantique définit les états physiques comme les fonctions propres associées aux valeurs propres des opérateurs (ou observables) agissant sur un espace de Hilbert.

Pour une seule particule, on a un seul espace de Hilbert regroupant ses états. Pour plusieurs particules, leurs états sont les éléments d'un produit tensoriel des espaces de Hilbert à 1, 2, ..., n, ... particules successivement construits par ordre croissant de n : ce produit tensoriel forme l'**espace de Fock**, et sur ses bases les états physiques des n particules peuvent être développés (voir point 4-4, relation (4-40)).

En présence de plusieurs champs, les lagrangiens comprennent des termes de couplage entre ces champs, et les équations du mouvement qui résultent du principe de moindre action $\delta S = 0$ contiennent alors des termes d'interaction entre champs.

■ Le cas d'un seul champ scalaire Φ correspond, dans la description quantique des états (quantification) à la présence d'un terme d'**auto-interaction** (ici décrit par un potentiel effectif $V(\Phi)$) entre les n différentes

particules de masse m : c'est le champ scalaire libre de potentiel : $V(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$ et l'équation du mouvement du champ Φ est l'équation de Klein-Gordon **linéaire** :

$$D^\mu D_\mu \Phi = \frac{\partial}{\partial \Phi} V(\Phi) = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right) = m^2 \Phi \quad (5-33)$$

La linéarité de (5-33) entraîne que tout état d'évolution des particules vérifie le **principe de superposition** des états quantiques : un état $|q\rangle$, correspondant comme fonction propre d'un observable Q , conserve sa forme au cours de son évolution.

■ Si le potentiel effectif $V(\Phi)$ est différent de celui du champ scalaire libre de particules massives, alors l'équation du mouvement de Klein-Gordon est **non-linéaire**, et en toute rigueur le principe de superposition n'est plus applicable.

Une conséquence est qu'il n'est plus possible de déterminer l'état d'un ensemble de particules en interaction dans $V(\Phi)$, si leur nombre est fixé. Or ce nombre doit être considéré connu et fixé pour permettre une mesure, puisque celle-ci résulte d'une interaction des particules.

■ On peut résoudre cette difficulté par au moins deux méthodes :

■ Pour des interactions non gravitationnelles (électromagnétiques, faibles, fortes) on peut négliger les effets de $V(\Phi)$ sur des durées et distances suffisamment grandes, donc aux échelles de la mesure, et ainsi continuer à exprimer les états dans un espace de Fock.

■ Traduire l'équation d'évolution du champ, non linéaire, par une équation linéaire qui permette le principe de superposition, en remplaçant le champ scalaire Φ par la fonctionnelle :

$$\Psi[\Phi(x), t] \equiv \langle \Phi(x) | \Psi(t) \rangle \quad (5-34)$$

analogue à une fonction d'onde de la mécanique quantique. La correspondance est complète pourvu que l'on utilise comme grandeurs canoniques les opérateurs $\Phi(x)$ et son moment conjugué exprimé avec la dérivée fonctionnelle :

$$\Pi(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta(x)} \quad (5-35)$$

respectant toujours les relations de commutation.

On montre que l'équation d'évolution du champ est équivalente à l'**équation linéaire de Tomonaga-Schwinger** ([63], [64], [38]) :

$$i \frac{d}{dt} \Psi[\Phi(x), t] = H \Psi[\Phi(x), t] = \int d^3 y \left[-\frac{\delta^2}{\delta \Phi(y)^2} + (\nabla_y \Phi)^2 + 2V[\Phi(y)] \right] \Psi[\Phi(x), t] \quad (5-36)$$

On peut ainsi prédire les états d'interaction et d'échanges des particules au moyen des opérateurs de création a_k^+ et d'annihilation a_k des particules, pour des états où le nombre de ces particules est fixé, et ceci avec des potentiels d'interaction fortement non-linéaires, comme cela peut être le cas de celui de Higgs (point 5-4-1).

Cependant, avec ce formalisme de correspondance, les états de n particules ne sont plus des fonctions propres de l'opérateur hamiltonien H ; cela a pour conséquence que le nombre n de particules peut varier au cours de l'interaction. Cette variation peut être interprétée comme un échange de particules virtuelles, que traduisent les diagrammes de Feynman (v. par ex. [65]).

L'évolution de l'état d'un système de particules dans un potentiel $A^\mu(x)$ est décrite par la fonctionnelle :

$$\Psi[A^\mu(x), e(x), \dots, t] = \exp[iH[A^\mu(x), e(x), \dots](t-t_0)] \Psi(t_0) \quad (5-37a)$$

et l'état du système à n particules est déterminé par celui de la condition initiale t_0 :

$$|A^\mu(x), e(x), \dots, t\rangle = \exp iH(t-t_0) |A^\mu(x), e(x), \dots, t_0\rangle \quad (5-37b)$$

Avec les diagrammes de Feynman, pour l'interaction entre $n = 2$ électrons ou positrons, cela se traduit par la figure 5-9 :

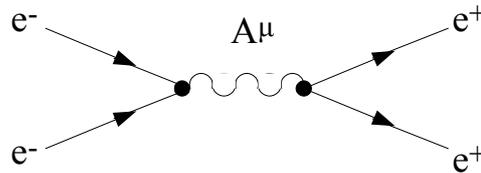


figure 5-9 : diagramme de Feynman de l'interaction de 2 électrons, par un champ de potentiel A^μ , donnant 2 positrons

Pour les transitions, en champ scalaire réel, entre l'état du vide $|0\rangle$ et les états initial et final des particules, dont le nombre n_i et n_f a varié, on a :

$$|\Psi_i\rangle = a_{k1}^+ a_{k2}^+ \dots a_{kni}^+ |0\rangle$$

$$|\Psi_f\rangle = a_{p1}^+ a_{p2}^+ \dots a_{pnf}^+ |0\rangle$$

on obtient, avec (5-36), les relations entre l'état final et l'état initial des particules :

$$|\Psi_f\rangle = U(t_f, t_i) |\Psi_i\rangle$$

où U est un opérateur unitaire hermitique, vérifiant donc : $U^\dagger(t_f, t_i) = U^{-1}(t_f, t_i)$.

5-5-3 – Fonction d'onde d'univers et équation de Wheeler-De Witt (WDW)

Si l'on considère l'univers dans sa globalité, un modèle comme WDW permet de traiter directement le problème de superposition comme pour l'équation de Klein-Gordon. Aussi, dans ce cas, on considère la fonction d'onde d'univers $\Psi(h_{ij}(x), \Phi(x), \Sigma)$ d'un univers clos, muni d'une métrique 3D, $h_{ij}(x)$ et d'un champ de matière $\Phi(x)$ définis sur une hypersurface spatiale (Σ), solution d'une équation analogue à celle de Schrödinger : équation de Wheeler-De Witt (WDW), dont les conditions initiales ou aux limites sont telles que la solution soit unique [36].

Le caractère « clos » de l'univers entraîne que l'univers comme un tout ne dépend pas du temps : tout changement observé ou observable l'est seulement pour un observateur macroscopique dans un référentiel d'espace-temps, formant une partie de l'univers, lequel comprend cet observateur (ou le système en interaction) et le « reste » qui, lui aussi, est dans divers référentiels d'espace-temps, l'ensemble des deux étant dans un référentiel d'espace [62].

Sur (Σ) la métrique se réduit à sa partie spatiale : $ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Pour appliquer le principe de moindre action à l'action d'Einstein-Hilbert, on prend comme variables canoniques la métrique h_{ij} et le moment conjugué :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} \quad (5-38a)$$

qui vérifient les relations de commutation en QFT :

$$\left. \begin{aligned} [h_{ij}(x), h_{kl}(x')] &= 0 \\ [\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(x')] &= 0 \\ [h_{ij}(x), \pi^{kl}(x')] &= i \delta_{ij}^{kl} \delta^{(3)}(x-x') \end{aligned} \right| \quad (5-38b)$$

et le principe de correspondance

$$\left. \begin{aligned} \pi^{ij} &\rightarrow \pi^{ij} = -i \delta_{ij} = -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \\ \pi^\Phi &\rightarrow \pi^\Phi = -i \delta_\Phi = -i \frac{\delta}{\delta \Phi} \end{aligned} \right| \quad (5-38c)$$

où δ dérivation fonctionnelle, et l'on a posé $\hbar = 1$. Le potentiel d'interaction est ici lié à la courbure intrinsèque de (Σ) :

$$V(x) = \sqrt{h} \, {}^{(3)}R_i^i \quad \text{où } h = \det(h_{ij})$$

On montre alors l'équation fondamentale de la cosmologie quantique de Wheeler-De Witt (WDW) :

$$\left[-G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - \sqrt{h} \left({}^{(3)}R - 2\Lambda + \frac{16\pi}{m_p^2} T_{00}(\delta_\Phi, \Phi) \right) \right] \Psi(h_{ij}, \Phi) = 0 \quad (5-39a)$$

avec les conditions aux limites :

$$D_i \left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}} \right) = 0 \quad (5-39b)$$

et T_{00} est la composante de temps du tenseur énergie-impulsion du champ d'interaction de matière et/ou rayonnement (5-27), et où :

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} \sqrt{h} (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - 2h^{ij} h^{kl})$$

sous sa forme contravariante.

Dans un espace de métrique FLRW où le champ $V(\Phi)$ interagit faiblement avec la gravitation, l'équation WDW prend la forme simplifiée :

$$\left[-\frac{1}{3\pi m_p^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{3\pi m_p^2}{4} R^2 + \frac{1}{4\pi^2 R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} - 2\pi^2 R^4 V(\Phi) \right] \Psi(R, \Phi) = 0 \quad (5-40)$$

où les variables canoniques suivent le principe de correspondance : $\left. \begin{aligned} \pi_\Phi &\rightarrow -i \partial_\Phi \\ \pi_R &\rightarrow -i \partial_R \end{aligned} \right|$

On montre alors que la probabilité d'un état de l'univers clos muni d'un champ scalaire est :

$$P(\Phi) \approx |\Psi|^2 \approx N^2 \exp\left[\pi m_p^2 R^2(\Phi) \right]$$

où le facteur de normalisation est : $N \approx \exp\left(-\frac{3m_p^4}{8V(\Phi_0)} \right)$ avec les conditions primordiales sur le champ

$\Phi = \Phi_0$, et $0 < V(\Phi_0) \ll m_p^4$ (c'est-à-dire le champ n'appartient pas à l'ère de Planck et son existence lui est ultérieure). Si le seul effet de Φ est de produire l'énergie du vide $V(\Phi) \neq 0$, cette probabilité devient :

$$P(\Phi) \approx |\Psi|^2 = N^2 \exp\left(-\frac{3m_p^4}{8V(\Phi)} \right) \quad (5-41)$$

5-5-4 – Équation de Klein-Gordon dans un espace-temps courbe de type FLRW

Si la géométrie de l'espace-temps de dimension D est courbe, et est de la forme (2-5a) en présence de champ scalaire, elle fait l'objet d'une transformation conforme :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\mathbf{x}) g_{\mu\nu}$$

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \Omega^{(2-D)/2} \Phi$$

d'où la transformation de la courbure scalaire :

$$\tilde{R} = \frac{R}{\Omega^2} + 2 \frac{D-1}{\Omega^3} g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \Omega + \frac{(D-1)(D-4)}{\Omega^4} g^{\mu\nu} D_\mu \Omega D_\nu \Omega$$

où D_μ, D_ν sont les dérivées covariantes vues au point 5-5-1 : $D_\mu X^\nu = \partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu X^\sigma$.

Cette transformation laisse l'action S invariante. En l'absence de particules massives interagissant avec le champ Φ , $V(\Phi) = 0$, le couplage qui intervient dans (5-31) est le couplage conforme, qui dépend de la dimension :

$$\xi = \xi_c = \frac{D-2}{4(D-1)} \quad (5-42)$$

Dans ce cas, le modèle d'interaction champ-courbure est invariant conforme. On a en particulier :

D = 2 (variété de dimension 2) $\rightarrow \xi_c = 0$: le couplage champ-courbure est nul ;

D = 4 (variété de dimension 4, espace-temps) $\rightarrow \xi_c = 1/6$.

En présence de particules massives, on a vu que le potentiel effectif est : $V(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$ ⁽¹⁰⁾ ; dans ce cas, pour D = 4 (espace-temps), et avec K = 0, on montre que l'équation de Klein-Gordon conduit à l'équation des fonctions propres u_k de l'opérateur impulsion ($-i\nabla u_k = \mathbf{k} u_k(\mathbf{x})$) sur lesquelles se décomposent les grandeurs (comme par exemple le champ) :

$$\left. \begin{array}{l} u_k'' + \omega_k^2 u_k = 0 \\ \text{avec: } \omega_k^2 = k^2 + a^2 \left(m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right) \end{array} \right| \quad (5-43)$$

où u_k' désigne la dérivée par rapport au temps conforme : $u_k' = \frac{\partial u_k}{\partial \eta}$; a(t) est le facteur d'échelle (2-3).

Par quantification, le champ et son moment conjugué sont des opérateurs, que l'on notera encore $\Phi(\mathbf{x}, t)$ et $\Pi(\mathbf{x}, t)$, vérifiant la relation canonique :

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \text{avec : } \Pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi'(\mathbf{x})} = a^2 \Phi'(\mathbf{x}) \quad \text{et : } \Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

Lorsque la géométrie de l'espace de dimension D présente une symétrie maximale, on montre que le champ quantifié, exprimé avec le temps conforme, se décompose sur les modes propres selon :

$$\Phi(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{a} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} [a_k Q_k(\mathbf{x}) u_k(\eta) + a_k^+ Q_k^*(\mathbf{x}) u_k^*(\eta)] \quad (5-44)$$

où Q_k fonctions propres du laplacien (spatial) en présence de courbure :

10 Pour rappel, les expressions utilisent la normalisation $\hbar = c = 1$.

$$\nabla^2 Q_k \equiv \delta^{ij} \partial_i \partial_j = -(\mathbf{k}^2 - K) Q_k \quad (i,j = 1,2,3)$$

et les opérateurs de création a_k^+ et d'annihilation a_k dépendent du champ :

$$a_k = i \int d^3 \mathbf{x} \left[u_k^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_k^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) \right] \quad (5-45)$$

On montre que les modes u_k satisfont la condition de normalisation :

$$u_k u_k'^* - u_k'^* u_k = i$$

où on a noté $u' = \partial u / \partial \eta$, et que la courbure scalaire est donc reliée au facteur d'échelle par :

$$R = - \frac{6a'''}{a}$$

qui est de même comportement que (3-3).

Il découle, de ce qui précède, que l'état du vide quantique $|0\rangle$ tel que défini par $a_k |0\rangle = 0$ (cf. (4-37)), avec la condition de normalisation $\langle 0|0\rangle = 1$, n'est plus invariant par le **groupe de Poincaré** applicable à la relativité restreinte :

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu + \beta^\mu \quad \text{avec : } \alpha_\nu^\mu \alpha_\sigma^\nu = \delta_\sigma^\mu$$

■ **Rappel** : L'état d'une particule (impulsion \mathbf{k}) résulte de l'état du vide quantique par l'action de l'opérateur création (cf. relations (4-35) et (4-34)) :

$$|\mathbf{k}\rangle = a_k^+ |0\rangle$$

On a vu que, si $n(\mathbf{k})$ particules sont dans un état \mathbf{k} , il est valeur propre de l'opérateur N_k nombre de quanta dans les états du degré de liberté (\mathbf{k}) (relation (4-26)) :

$$N_k |n(\mathbf{k})\rangle = a_k^+ a_k |n(\mathbf{k})\rangle$$

En présence d'un champ $\Phi(\mathbf{x}, t)$, réel ou complexe, une particule dans l'état $|\mathbf{x}, t\rangle$ peut être créée par l'action de l'opérateur champ Φ sur l'état du vide quantique $|0\rangle$:

$$|\mathbf{x}, t\rangle = \Phi^+(\mathbf{x}, t) |0\rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} |\mathbf{k}\rangle \quad (5-46)$$

où $|\mathbf{k}\rangle$ est obtenu par (4-34 et 35) ci-dessus, autrement dit l'état de la particule $|\mathbf{x}, t\rangle$ créé par le vide quantique est la transformée de Fourier de l'état d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$.

5-5-5 – États « observer-dependent »

Dans un espace de métrique non-Minkowski, l'état du vide $|0\rangle$ vu plus haut, n'est plus invariant : l'opérateur N_k développé sur une base de modes $|\mathbf{k}\rangle$ dans un référentiel non-Minkowski n'a plus 0 comme valeur propre :

$$N_k |0\rangle \neq 0$$

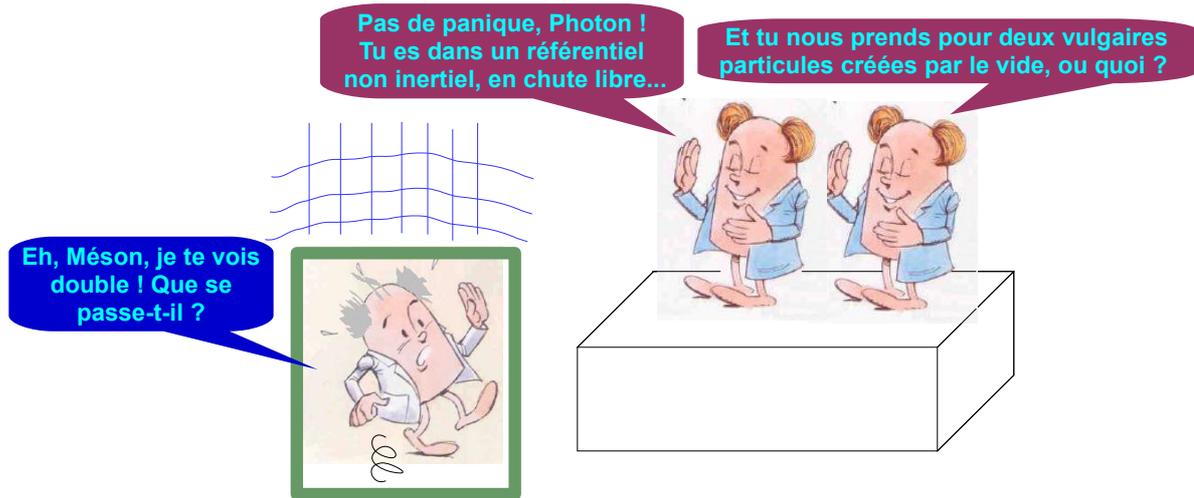
Cela signifie que le nombre de particules dans un état $|\mathbf{k}\rangle$ dépend du référentiel d'observation : le nombre de particules est dit « **observer-dependent** ». En présence de courbure, le vide quantique peut être source de particules dans différents états $|\mathbf{x}, t\rangle$, en présence de champ scalaire Φ , dont le nombre dépend du référentiel.

Ainsi, un détecteur de particules, qui est en chute libre dans un champ de gravitation, ne donne pas le même nombre de particules que pour un détecteur situé dans un référentiel inertiel.

Dans le cas de l'hypothèse des « cerveaux de Boltzmann, cela entraîne que ceux-ci seraient observer-dépendent [59].

Ce constat a pour conséquence que, dans un espace non-Minkowski, l'espace et les bases sur lesquelles se développent les états, construites sur lui, ne doivent pas être utilisés de façon globale, mais uniquement locale.

De manière pragmatique, pour contourner cette difficulté, compte tenu de la géométrie quasi-plat de l'univers physique observable, on peut traiter le vide classiquement, pour un espace-temps de Minkowski, et procéder aux recouvrements des états du vide entre les régions contenant localement des domaines non-Minkowski (comme par exemple le voisinage d'un trou noir) pour déterminer le nombre de particules créées par le vide, en présence de champ, à la frontière de ces domaines [38].



■ **Exemple : espace-temps localement courbe avec une métrique de Schwarzschild dans un espace-temps global plat de De Sitter [59] :**

Si l'on admet qu'aux échelles cosmologiques l'espace-temps est géométriquement décrit par un modèle Λ CDM plat, de métrique FLRW (2-5a) (avec donc $K = 0$, $\Omega_R = -Kc^2/H_0^2 a^2$), avec une densité de matière sans pression $\Omega_m = \rho_m/\rho_c < 1$, son comportement asymptotique dans le temps est celui d'un univers de De Sitter en expansion exponentielle et de métrique :

$$ds^2 = -d\tau^2 + r_0^2 \cosh^2 \tau \cdot (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (5-47)$$

où $r_0^2 = 3/\Lambda$. Considérons alors un domaine de cet espace-temps faisant l'objet d'un recouvrement partiel par une métrique de Schwarzschild traduisant une courbure locale due à la gravitation :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5-48)$$

(où l'on a posé $c = 1$). Il existe donc un horizon des événements en $r = r_0$ (comme pour un trou noir), et tout observateur situé en $r = 0$ (en-deçà de l'horizon) détectera un rayonnement de Gibbons-Hawking de température ([60]) :

$$T_{GH} = \frac{1}{2\pi r_0}$$

issu de tout objet au repos par rapport à lui.

Dans ce cas, le tenseur d'énergie, après renormalisation, dans un espace de De Sitter en présence d'un état de vide de Gibbons-Hawking, compte tenu du fait que dans cet espace il n'y a pas d'état privilégié de

repos, et en présence de champ d'énergie noire $V(\Phi)$ à l'origine de la constante cosmologique locale Λ , s'écrit :

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_n = -\frac{g_{\mu\nu}}{8\pi} \Lambda_{\text{eff}} \quad (5-49a)$$

qui est invariant De Sitter, où $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{C}{r_0^4} + \Lambda$ constante cosmologique effective, d'où l'horizon modifié :

$$r_0 = \sqrt{3/\Lambda_{\text{eff}}} \quad (5-49b)$$

En conséquence, l'état du vide de Gibbons-Hawking apporte une correction à la constante cosmologique provenant du potentiel scalaire d'énergie noire $V(\Phi)$, et a un effet sur la température T_{GH} perçue par l'observateur situé en $r = 0$.

Il en est ainsi pour toute particule, telle photon ou graviton, et aussi pour celles qui forment un BB (cerveau de Boltzmann) issu des fluctuations quantiques du vide. Tout autre observateur en mouvement et traversant l'horizon, donc dans un référentiel différent de celui en $r = 0$, détectera une distribution thermique de particules différente. Ainsi, les BB avec leurs particules qui, par définition du caractère faiblement probable de leurs structures complexes, sont détectables avec une probabilité très faible, sont eux-mêmes observables avec une très faible probabilité et en dépendance avec le référentiel d'observation : ils sont « observer-dependent », et donc non réels (au sens épistémologique de la réalité objective). Seuls sont réels, au sens du Principe d'Objectivité [9], les photons recueillis par un observateur à partir du vide quantique, et enregistrés sur son détecteur par hypothèse au repos par rapport à lui, un autre observateur obtenant une distribution différente, et avec la condition expresse de correspondance entre les deux résultats permise par une invariance qui exprime un caractère objectif. Dans les deux situations, les photons recueillis n'impliquent pas que leur source soit un BB.

Noter que pour $r > r_0$ (en-dehors de l'horizon) la situation est du type rayonnement de Hawking-Unruh, car les photons sont indépendants du référentiel d'observateur (« observer-independent »), l'effet de courbure étant négligeable sur les fluctuations du vide.

5-5-6 – Formulation cosmologique du principe anthropique

On a évoqué plus haut le principe anthropique et son rôle dans le problème des BB (chapitre 1, et paragraphe 5-4).

Traduit en termes de considérations cosmologiques, il peut conduire à prendre en compte le rôle d'un explorateur dans l'implication logique entre l'existence d'un phénomène, comme condition nécessaire, et l'existence d'une condition sur le « fine tuning » de constantes fondamentales qui interviennent dans sa modélisation et, en particulier ici, sur la constante cosmologique.

La constante cosmologique intervient dans les modèles cosmologiques pour « expliquer » la phase d'accélération $q_0 < 0$ (relation (3-3)) que l'univers semble amorcer selon les observations. Cette accélération pourrait s'expliquer par un univers globalement dominé par un fluide (énergie sombre) d'équation d'état $w = -1$ (cf. point 5-2-2). Cependant la densité d'énergie sombre et son Λ seraient beaucoup trop faibles en comparaison de celles qui tiennent compte des interactions de champs avec le vide quantique dans un univers courbe.

La constante cosmologique Λ intervient dans les équations d'Einstein (5-26) :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

où $g_{\mu\nu}$ métrique de l'espace-temps, supposé ici avec courbure, $T_{\mu\nu}$ tenseur énergie-impulsion associé ici au champ d'interaction matière-rayonnement :

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \tilde{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \tilde{L}_m - 2 \frac{\delta \tilde{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5-50)$$

et où l'on rappelle que le tenseur d'Einstein est lié à la courbure : $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ avec $D_\nu G^{\mu\nu} = 0$

Dans l'hypothèse où la constante cosmologique est directement liée à de la matière-énergie, elle pourrait s'exprimer par un tenseur d'énergie-impulsion noté T_Λ :

$$T_{\Lambda\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (5-51)$$

L'équation d'état de cette matière-énergie est celle d'un fluide de type « énergie sombre » (point 5-2-2) : $P = w\rho_E$, avec $w = -1$ (effets répulsifs par rapport à la gravitation, favorisant donc l'expansion).

La densité d'énergie du fluide est alors :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (5-52)$$

Aucune théorie à ce jour ne permet de fixer la valeur a priori de Λ , qui correspond à une échelle de longueur cosmologique :

$$\ell_\Lambda = 1/\sqrt{|\Lambda|}$$

cependant les observations cosmologiques entraînent un bornage de celle-ci, aujourd'hui t_0 :

$$|\Lambda| \leq H_0^2 \text{ soit } \ell_\Lambda \leq 1/H_0 \approx 10^{26} \text{ m} \approx 10^{41} \text{ GeV}^{-1}$$

On note que cette valeur maximale est très grande par rapport à la longueur de Planck ℓ_p :

$\ell_\Lambda = 10^{60} \ell_p$, d'où $\rho_\Lambda \leq 10^{-120} m_p^4 \approx 10^{-47} \text{ GeV}^4$.

L'énergie du vide cosmologique résulte de la contribution de cette énergie sombre et de celle des énergies du vide quantique (énergie du point zéro) associées aux interactions de champs scalaires de potentiel $V(\Phi)$ avec les états du vide quantique.

Le tenseur énergie-impulsion de ces interactions avec le vide quantique correspond à la valeur minimale du champ, $\Phi = \Phi_m$, telle que :

$$\partial_\mu \Phi = 0$$

pour laquelle le potentiel $V(\Phi_m)$ n'est pas nul, d'où d'après (5-27) :

$$T_{\mu\nu} = -V(\Phi_m) g_{\mu\nu}$$

La densité d'énergie moyenne correspondante est $\langle \rho \rangle_m$. Par exemple, pour une interaction de type Higgs, dont le potentiel scalaire est (cf. (5-22)) :

$$V(\Phi) = V_0 - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4 \quad (5-53)$$

l'état de vide quantique est obtenu pour $\Phi_m = \frac{m}{\sqrt{g}}$, pour lequel $V = V_0$. Pour $m = 0$, on a $\Phi_m = 0$, pour lequel $V = V_0$ (figure 5-8). Noter que, en général, cette valeur de Φ_m , est un minimum au sens du critère vu ci-dessus $\partial_\mu \Phi = 0$ et ne signifie pas que le potentiel correspondant $V(\Phi_m)$ soit un maximum local. La densité d'énergie correspondante est :

$$\langle \rho \rangle_m = V_0 - \frac{m^4}{4g}$$

(pour rappel on a posé $\hbar = c = 1$).

Pour les autres champs, non gravitationnels, les interactions avec le vide quantique ont pour densité d'énergie (cf. (4-23)) :

$$\langle \rho \rangle_m = \int_0^{k_{\max}} \frac{1}{2} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \approx \frac{k_{\max}^4}{16\pi^2} \quad (5-54)$$

où k_{\max} est la fréquence (plus exactement le nombre d'onde en unités $\hbar = c = 1$) de coupure (cf. (4-59)) correspondant aux échelles minimales de ces interactions. Ainsi :

• pour les interactions électrofaibles, on a :

$$\langle \rho \rangle_{m,EF} \approx \frac{k_{EF,\max}^4}{16\pi^2} \approx (200 \text{ GeV})^4$$

valeur très élevée par rapport aux données d'observation cosmologique ;

• pour les échelles de Planck, on a :

$$\langle \rho \rangle_{m,p} \approx \frac{k_{p,\max}^4}{16\pi^2} \approx (10^{18} \text{ GeV})^4$$

elle aussi valeur très élevée par rapport aux données d'observation.

Il vient donc, pour la densité totale d'énergie du vide cosmologique, qui est somme de l'énergie sombre et des énergies du vide quantique en présence de champs, la condition de bornage :

$$\langle \rho \rangle_{\text{vide}} = |\rho_{\Lambda} + \langle \rho \rangle_m| \leq 10^{-47} \text{ GeV}^4 \quad (5-55)$$

et si l'on définit une constante cosmologique du vide cosmologique de la même manière par :

$$\langle \rho \rangle_{\text{vide}} = \frac{\Lambda_{\text{vide}}}{8\pi G}$$

cette condition (5-55) devient :

$$|\Lambda_{\text{vide}}| = |\Lambda + 8\pi G \langle \rho \rangle_m| \leq 10^{-120} m_p^2 \quad (5-56)$$

Cette valeur est largement plus petite que celles prédites par les modèles actuels : pourquoi $\langle \rho \rangle_{\text{vide}}$, telle qu'on la suppose observée aujourd'hui, est-elle si faible ? Ce qui revient à nous demander pourquoi l'univers semble amorcer une phase d'accélération relativement tardive depuis la fin de l'inflation ?

Différentes approches théoriques sont proposées pour résoudre ce problème [38], elles sont classées principalement en deux familles :

• a) **Existence d'un nouveau type de matière**, qui ne relève pas du modèle standard de la physique des particules ; la gravitation reste décrite par la relativité générale aux échelles cosmologiques. Ce nouveau type de matière évolue comme un fluide dont l'équation d'état vérifie $w < -1/3$.

Exemples : théorie de la quintessence [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72] ; théorie de la matière noire solide [73] ; théorie de la K-essence et de la K-inflation [74], [75] ; théorie des tachyons [76]...

• b) **Modification de la théorie de la gravitation** : aux grandes échelles de l'univers, elle n'est plus décrite par la relativité générale.

Exemples : théorie de la gravité induite [77] ; théorie de la multi-gravité [78].

Face à ces difficultés, on peut aussi chercher à poser certains critères utilisant le **principe anthropique**, ici, en termes de cosmologie [38]. Ce principe repose sur l'inférence logique suivante :

si un phénomène physique (P) existe, **alors** une certaine condition (C) doit être vérifiée

ce que l'on note : $(P) \Rightarrow (C)$.

Cette proposition est logiquement équivalente à sa contraposée : $\text{non}(C) \Rightarrow \text{non}(P)$, autrement dit, si la condition (C) n'est pas vérifiée, alors le phénomène (P) ne peut pas exister.

Ce principe est qualifié d'anthropique parce que, sous sa forme initiale, il était exprimé pour les relations entre l'existence de la vie humaine consciente et toutes les conditions, y compris celles concernant les constantes fondamentales de la physique qui semblent fixées à des valeurs non arbitraires (« *fine tuning* »), qui ont permis toute la chaîne d'évolution reliant l'univers primordial à l'émergence de la vie consciente humaine. On a donc :

(H) : la vie humaine existe \Rightarrow (T) fine tuning

et en conséquence :

(H) \Rightarrow l'univers observable prend en compte l'observateur issu de (H)

en d'autres termes :

L'existence de l'observateur humain dans le processus d'observation, et la modélisation, de l'univers ne peut pas être négligée.

Ceci ne conduit pas, pour autant, à la considération anthropocentrique qui affirmerait : « l'univers, avec son fine-tuning, est de telle sorte que l'existence de l'être humain qui l'observe arrive obligatoirement », c'est-à-dire que l'on n'a pas : $(T) \Rightarrow (H)$.

Et plus généralement, on n'a pas : $(C) \Rightarrow (P)$.

Cela signifie que, même si la condition (C) est vérifiée, on ne doit pas conclure automatiquement que le phénomène (P) doit se produire.

Ce principe s'applique ici au rapport entre l'existence des galaxies, en nombre et en récession due à l'expansion, tels que le révèlent les observations, et la valeur de la constante cosmologique Λ (ou son paramètre densité $\Omega_\Lambda = c^2 \Lambda / 3H_0^2$). Si la valeur de Ω_Λ est trop importante par rapport à la densité de matière dans l'univers $\Omega_m = \rho_m / \rho_c$, ou de manière équivalente, si l'énergie du vide cosmologique est trop grande, alors les galaxies ne se forment jamais. L'existence des galaxies (proposition (P)) implique la condition (C) sur l'énergie sombre, c'est-à-dire la contrainte :

$$\Omega_{\Lambda 0} / \Omega_{m 0} \leq (1+z)^3 \quad \text{où } z \text{ décalage spectral de la galaxie dû à la récession}$$

ce qui équivaut aussi à :

$$\Omega_{\Lambda 0} / \Omega_{m 0} > (1+z)^3 \Rightarrow (\text{pas de galaxies}).$$

La contrainte sur Ω_Λ laisse donc une marge sur les valeurs possibles de Λ , dès lors que z devient grand. Il s'ensuit que l'on peut envisager que la constante cosmologique « réelle » pourrait être plus grande que celle observée, tout en permettant la formation de galaxies.

Cependant, en termes de probabilité d'observer des galaxies par un observateur, cette probabilité serait plus faible dans un univers où $\Omega_{\Lambda 0} / \Omega_{m 0}$ est grand, que dans un univers où $\Omega_{\Lambda 0} / \Omega_{m 0} \approx 1$ car dans ce dernier cas le nombre de galaxies serait plus élevé. Par conséquent les observateurs « sélectionneraient » des observations conduisant à des valeurs de $\Omega_{\Lambda 0} / \Omega_{m 0}$ proches de 1, et donc à une énergie du vide correspondante de densité ρ_Λ . Cette probabilité d'observation $dP(\rho_\Lambda)$ est le produit de la probabilité a priori (c'est-à-dire sans observation) $P_A(\rho_\Lambda)$ et du nombre moyen de galaxies $N(\rho_\Lambda)$ dans un modèle cosmologique :

$$dP(\rho_\Lambda) = P_A(\rho_\Lambda) N(\rho_\Lambda) d\rho_\Lambda$$

Bien évidemment il est difficile de connaître $P_A(\rho_\Lambda) d\rho_\Lambda$, d'autant que la distribution peut être variable.

De plus, un principe de parcimonie dans les modèles physiques (principe d'Occam), contraignant à un nombre minimal de paramètres intervenant dans le modèle, et sans hypothèses ad-hoc, suggère de ne pas recourir à de nouveaux paramètres.

Pour évaluer $P_{\Lambda}(\rho_{\Lambda}) d\rho_{\Lambda}$ il faut donc pouvoir s'affranchir de la contrainte (5-55), et donc accéder à des variations plus fines de l'énergie noire à grandes échelles. On montre que la théorie de l'inflation éternelle fournit cette possibilité, en établissant des distributions spatiales de paramètres physiques. De plus, elle affirme nettement que $w = -1$. On a vu aussi que l'inflation éternelle, et le multivers que cela peut impliquer (paragraphe 5-4), peut apporter une réponse logique à la question du principe anthropique sous sa forme cosmologique.

Cependant, si la description par un univers « holographique » s'avère pertinente ([51], [52]), le multivers serait un univers unique régulier où le principe anthropique serait conditionné uniquement par la condition de roulement lent (5-2).

6 – Comment expliquer les fluctuations cosmologiques : fluctuations de l'entropie ou bien fluctuations du vide quantique ?

6-1 - Fluctuations de l'entropie ?

Il existe différentes méthodes de calcul de la probabilité de l'inflation, utilisant les fluctuations d'entropie d'un système thermodynamiquement isolé. Parmi elles, il y a celle DKS (Dyson, Kleban, Susskind). La DKS défavorise fortement la survenance de l'inflation et du Big Bang, tandis qu'un autre modèle, celui de Albrecht et Sorbo [1], conduit à une inflation exponentiellement favorisée.

■ **La méthode DKS** utilise la représentation « causal patch » : l'univers a évolué jusqu'à un état De Sitter qui correspond à un équilibre thermodynamique et présente un horizon. Le principe pose que tout ce qui est au-delà de l'horizon (donc non observable, y compris d'autres domaines pouvant connaître une inflation) ne peut pas entrer dans la chaîne causale de l'univers en-deçà de l'horizon. D'où : à l'intérieur de l'horizon, l'état de notre univers observable est décrit par des données complètes et non éventuellement reliées à d'autres issues de l'extérieur de l'horizon. Dans ce cas le domaine de l'univers contenu dans l'horizon est un système fini et isolé donc vérifie le second principe de la thermodynamique.

Selon le modèle DKS, l'expansion de l'univers résulte de l'effet de l'énergie sombre représentée par la constante cosmologique Λ et opposée à la gravitation, et elle conduit à un état d'équilibre futur où la métrique est de De Sitter, présentant un horizon des événements. L'horizon a pour rayon :

$$R_{\Lambda} = \sqrt{3/\Lambda} \quad (R_{\Lambda} \text{ joue le rôle de } r_0 \text{ dans (5-47)})$$

et en-deçà de lui, un observateur en $r = 0$ détectera le rayonnement de Gibbons-Hawking de température (en unités normalisées) :

$$T_{GH} = \frac{1}{2\pi R_{\Lambda}}$$

et la densité d'énergie du fluide représentant l'énergie sombre (5-52) :

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

On montre alors que l'entropie à l'état d'équilibre de l'univers est :

$$S_{\Lambda} = \pi \left(\frac{R_{\Lambda}}{\ell_p} \right)^2 \quad (6-1)$$

Mais cet état d'équilibre est constamment perturbé par des fluctuations (issues du vide quantique, comme on l'a vu), pouvant avoir d'importantes amplitudes qui sont de probabilité très faible. Ces fluctuations sont

des écarts à l'état d'équilibre, avec des variations d'entropie éventuellement négatives (négentropies), pouvant correspondre à des structures complexes (apport de variété).

Mais l'univers global retrouve un état d'équilibre, à grande entropie, le ramenant à une géométrie De Sitter, processus qui implique une (ré-) accélération de l'expansion qui semble être observée à ce jour.

Une entropie élevée correspond à un nombre total des états accessibles au système (ou complexion) N_T élevé :

$$N_T = \exp S_\Lambda \quad (\text{dans (1-1) on avait noté } N_T = \Omega)$$

En considérant que toute fluctuation (f) évolue depuis l'équilibre puis passe par un état d'entropie faible S_f , et enfin retourne à l'état d'équilibre, et si l'on suppose que le système vérifie le théorème ergodique (i.e. au terme d'un temps suffisamment long, la trajectoire du point figuratif dans l'espace des phases – coordonnées positions-moments – est passée par tous les états disponibles), on montre que la probabilité de la fluctuation est :

$$P_f = \exp (S_f - S_\Lambda) \quad (6-2)$$

Parmi les fluctuations autour de l'état d'équilibre de l'univers, il y a d'une part le Big Bang, d'entropie donnée par le modèle standard $S_B \approx 10^{85}$, et d'autre part l'inflation, d'entropie S_I , pour laquelle le modèle DKS, utilisant l'entropie de Gibbons-Hawking S_{GH} à S_I pour un rayon de De Sitter affectif lors de l'inflation, donne :

$$S_I \approx \left(\frac{R_I}{\ell_p} \right)^2 \approx \left(\frac{m_p}{m_I} \right)^4 \approx 10^{10}$$

où m_I est l'échelle d'énergie caractéristique de l'inflation. On voit que selon le modèle DKS la probabilité de l'inflation, en tant que fluctuation à partir de l'équilibre, est très petite devant celle du Big Bang, et a fortiori devant celle liée à l'entropie de l'univers (principalement issue des trous noirs) $S \approx 10^{90}$.

D'après DKS l'inflation est donc très improbable devant un Big Bang sans inflation : elle n'aurait jamais dû exister, et cela pose problème !

■ **Pour traiter cette difficulté**, dans [1], il est remarqué qu'elle provient de l'application de l'un des principes de chaîne causale (entropie causale) : cette application pose que tous les degrés de liberté à l'intérieur de l'horizon de l'univers primordial sont pris en compte dans le calcul de l'entropie de la fluctuation qu'est l'inflation naissante. Or dans [1] il est proposé d'utiliser les degrés de liberté à l'intérieur d'un horizon De Sitter où a lieu la fluctuation, qui présente une géométrie type Schwarzschild de rayon R_S autour d'elle. On montre alors [114] que le rayon de l'horizon De Sitter doit être remplacé par :

$$R'_\Lambda = R_\Lambda^2 - R_\Lambda R_S \quad (6-3)$$

d'où la modification de S_B :

$$S'_B = S_\Lambda - \sqrt{S_\Lambda S_B} + S_B \approx S_\Lambda - \sqrt{S_\Lambda S_B} \quad (6-4a)$$

et la probabilité de l'inflation par rapport à celle du Big Bang seul :

$$\frac{P_I}{P_B} = \exp(S_I - S'_B) \approx \exp(-S_\Lambda) \ll 1 \quad (6-4b)$$

Dans ce modèle, l'inflation serait donc défavorisée par rapport au Big Bang.

En fait dans ce modèle modifié, l'entropie du Big Bang, comme fluctuation autour d'un état d'équilibre De Sitter, inclut l'extérieur de l'horizon de l'univers primordial, ce qui surévalue P_B . Dans le cas contraire, l'entropie de l'inflation est modifiée ainsi :

$$S'_I = S_\Lambda - \sqrt{S_\Lambda S_I} + S_I \approx S_\Lambda - \sqrt{S_\Lambda S_I} \quad (6-5a)$$

d'où :

$$\frac{P_I}{P_B} = \exp(S'_I - S'_B) \approx [\exp(\sqrt{S_B})]^{\sqrt{S_\Lambda}} \gg 1 \quad (6-5b)$$

montrant une probabilité d'inflation plus forte que celle du Big Bang seul.

Dans [1], la possibilité d'évoquer un univers où se déroulent, dans un nombre très grand de domaines, des inflations éternelles, est mentionnée comme une solution au problème du caractère probable de l'inflation et du Big Bang. Mais il est montré que cela pose problème par rapport au rôle de Λ si l'on continue d'utiliser le formalisme DKS.

Aussi, la méthode DKS doit-elle être remplacée, même si, grâce aux corrections mentionnées ci-dessus, elle conduit à un résultat satisfaisant sur l'occurrence de l'inflation, comme (6-5b).

La méthode DKS considère toujours que l'état de départ est le Big Bang, et toutes les fluctuations qui lui sont ultérieures et conduisent à un état final d'entropie $S_F \neq S_B$ (le cas de l'inflation correspond à $F = I$). Selon que les corrections ci-dessus sont utilisées ou pas, on obtient des résultats où l'on peut avoir :

$$P_F/P_B = \exp(S_F - S_B) > 1$$

ou bien, au contraire :

$$P_F/P_B = \exp(S'_F - S'_B) \ll 1$$

Puisque le formalisme DKS confère de fortes probabilités aux fluctuations cosmologiques les plus importantes, il soulève automatiquement le paradoxe des cerveaux de Boltzmann (BB). Ceux-ci sont des états complexes (faible entropie) issus de fluctuations « brèves » (à l'échelle cosmologique), qui par définition sont observateurs des aspects organisés de l'univers, et qui sont amenés à retourner à l'état de chaos, état d'équilibre, suite à la diminution des apports de variété (H. Atlan [2], [3]), ou de redondance (au sens de la théorie de l'information), c'est-à-dire à une entropie élevée.

L'inflation permettrait de résoudre le paradoxe des BB parce que ces structures complexes issues de fluctuations, écarts à l'état d'équilibre, émergeraient dans un domaine singulier de l'univers inflationnaire, et donc seraient de très faible probabilité. Mais cette approche n'est pas permise par le formalisme DKS classique car il conclut à une inflation fortement défavorisée par rapport au Big Bang (6-4b).

■ Dans [1] une solution est proposée à partir du **formalisme de Fischler, Morgan, et Polchinski (FMP)**. Il considère un univers primordial contenant des particules porteuses d'un potentiel pouvant produire l'inflation (c'est-à-dire agissant sur le roulement lent), appelées **inflatons**. Le passage de l'état inflation à celui de non-inflation, et inversement, proviendrait de l'effet tunnel quantique dans un univers de structure de base De Sitter, s'affranchissant ainsi de la difficulté liée à l'horizon de l'entropie causale.

On montre que la probabilité d'occurrence de la fluctuation donnant l'état inflationnaire, est donnée par :

$$P_I = P_C P_q$$

où P_C probabilité de formation d'un état classique, définie par DKS :

$$P_C = \exp(S_C - S_\Lambda)$$

et P_q probabilité de la transition inflation \rightarrow non-inflation par effet tunnel quantique :

$$P_q \approx \exp(-2F)$$

avec : $F = \frac{\pi}{2\ell_p^2} R_I^2 \approx \frac{1}{2} S_I$

R_I étant le rayon de De Sitter de la région en inflation de l'univers, S_C entropie liée au rétrécissement de l'horizon De Sitter :

$$S_C \approx S_\Lambda - \sqrt{S_\Lambda S_S}$$

avec $S_S = \pi m_p^2 R_S^2$, où R_S rayon de Schwarzschild de la zone perturbée par l'inflation de l'espace De Sitter. Comme la masse des particules m_I intervient par S_S , et puisque le cas $m_I \rightarrow 0$ est exclu (car pas d'inflation à partir de rien), l'effet tunnel est limité aux masses finies, et on obtient :

$$\frac{P_I}{P_B} \approx [\exp(\sqrt{S_B})]^{\sqrt{S_\Lambda}} \gg 1 \quad (6-6)$$

Ainsi la transition d'un état d'équilibre vers l'inflation, dans l'univers primordial, est favorisée par rapport au seul Big Bang. Et le paradoxe des BB est « résolu » par la très faible probabilité d'émergence de ces BB dans un domaine restreint de l'univers primordial en inflation.

■ Par ailleurs, le *principe de l'entropie causale*, appliquant le second principe de la thermodynamique et la causalité, reste un formalisme relativement performant pour la prévision théorique des grandeurs cosmologiques, telles que Λ , que les observations semblent confirmer, [79].

D'après ce principe, les grandeurs décrivant un état physique d'un système, doivent avoir des valeurs correspondant à une production maximale d'entropie au sein d'un domaine de l'espace-temps en relation causale avec ce système (c'est-à-dire dans son horizon causal).

L'accélération de l'expansion, qui est actuellement observée, entraîne que Λ , associée à l'énergie sombre, a une valeur non nulle [10], [11], et la densité d'énergie du vide correspondante (5-52), est en unités normalisées :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = (1,25 \pm 0,25) \cdot 10^{-123}$$

valeur très faible (de 55 ordres de grandeur plus petite) que celle attendue du modèle standard, ce qui correspond à (cf. tableau 3-1) :

$$\Omega_\Lambda = c^2 \frac{\Lambda}{3 H_0^2} \approx 0,76$$

Dans [79] il est suggéré que la constante cosmologique n'est pas une constante de même valeur dans toute région de l'univers à t_0 , mais est une variable environnementale, prenant des valeurs différentes entre des domaines séparés dans l'univers.

Le principe de l'entropie causale conduit à considérer que la densité de probabilité d'observer l'énergie du vide en fonction de ρ_Λ dépend de la création d'entropie ΔS produite dans un domaine où les éléments sont causalement connectés, excluant alors les domaines de l'espace-temps causalement inaccessibles (alors que dans certains modèles cosmologiques, comme le standard, toutes les régions sont intégrées quel que soit leur éloignement causal). ΔS intervient donc dans ρ_Λ et donc dans la densité de probabilité :

$$\frac{dP}{d\rho_\Lambda} \propto w(\rho_\Lambda) \frac{dp}{dN} \frac{dN}{d\rho_\Lambda}, \text{ soit : } \frac{dP}{d \log \rho_\Lambda} \propto \rho_\Lambda w(\rho_\Lambda) \text{ si } \rho_\Lambda > 0 \text{ et } \frac{dp}{d\rho_\Lambda} = \text{cste} \quad (6-7)$$

où N nombre de vides d'énergie $< \rho_\Lambda$, p probabilité a priori de ces vides, w pondération liée à l'entropie totale produite dans le « diamant causal » : $w = \Delta S$.

■ **Remarque : diamant causal.** Il désigne un domaine de l'espace-temps contenant tous les éléments de matière pouvant interagir, donc en connexion causale. Il est formé de deux cônes de lumière, où l'axe est le temps conforme (v. point 5-5-2), délimitant l'espace affecté par le réchauffement après l'inflation (v. point 5-2-2), et celui affecté par un événement ultérieur (figure 6-1).

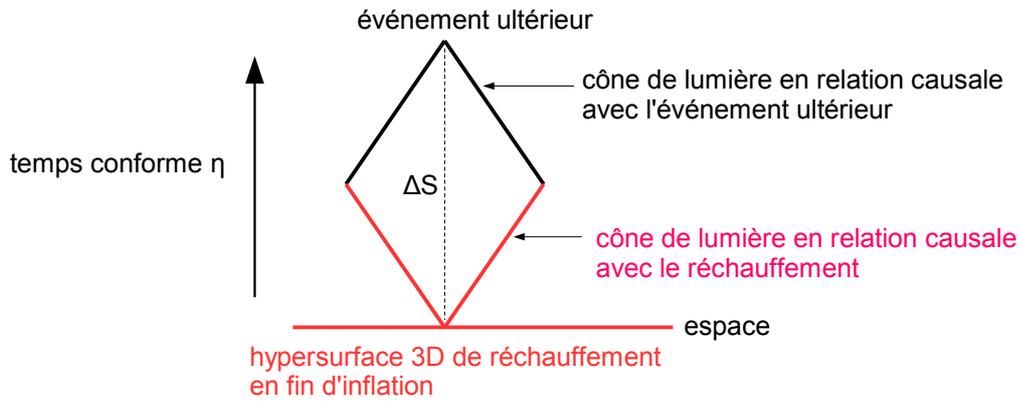


figure 6-1 : diamant causal d'un domaine d'espace-temps en connexion causale avec la phase réchauffement en fin d'inflation, et sa production d'entropie ΔS

Le principe entropique causal est utilisé sous ces deux postulats :

- a) L'univers est considéré comme une région de l'espace-temps causalement connectée, ou « diamant causal ». les régions situées au-delà ne peuvent pas être testées ni contribuer à la géométrie de l'univers.
- b) Le nombre d'interactions (les « observations ») est proportionnel à l'entropie totale ΔS produite dans le diamant causal.

On montre ([79]), à partir de ces conjectures, que la densité de probabilité est donnée par :

$$\frac{dP}{d \log \rho_\Lambda} \propto \rho_\Lambda \Delta S(\rho_\Lambda) \quad (6-8a)$$

avec :

$$\Delta S(\rho_\Lambda) = \int_0^\infty \frac{\partial \dot{S}}{\partial V_c}(\rho_\Lambda, t) V_c(\rho_\Lambda, t) dt \quad (6-8b)$$

où V_c est le covolume dans le diamant causal à la date t , \dot{S} taux de création d'entropie dans ce covolume, avec, dans une géométrie FLRW :

$$V_c = \frac{4}{3} \pi r^3(\eta)$$

où η temps conforme depuis le Big Bang, et :

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial V_c}(\rho_\Lambda, t) = \int_0^t \frac{d^2 S}{dt dm} (t-t') \dot{\rho}(t') dt'$$

où dm et ρ sont les masses et densités d'énergie relatives aux objets cosmologiques comptabilisés pour l'évaluation de l'entropie (par exemple, des étoiles, ou toutes diverses sources d'entropie).

La distribution de probabilité de l'énergie du vide en fonction de $\log(\rho_\Lambda)$ obtenue dans ce modèle est représentée figure 6-2 ; elle montre une cohérence entre les valeurs proches de $\log(\rho_\Lambda) \approx -123$ et le maximum de la probabilité. Ceci confirmerait la pertinence du principe entropique causal pour la détermination de Λ et de l'observation de l'accélération de l'expansion sous l'effet de l'énergie sombre, et de sa variation selon que les régions cosmologiques sont ou non en connexion causale.

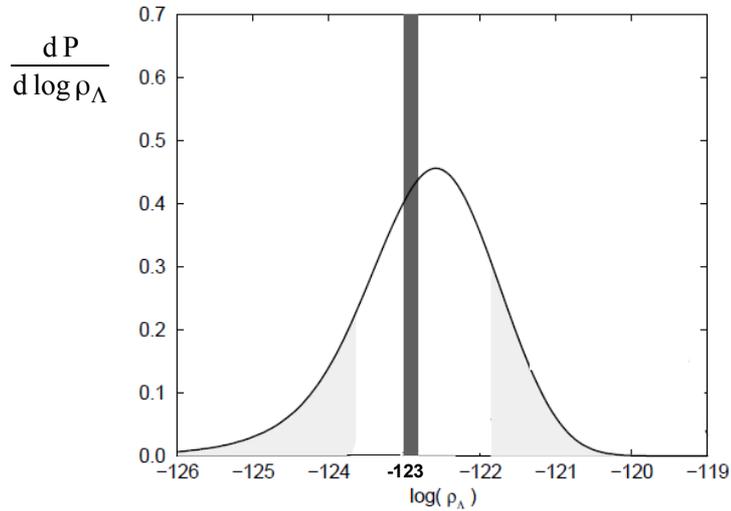


figure 6-2 (source [79] fig. 1) : distribution de probabilité d'énergie du vide obtenue par le principe entropique causal

Entre autres conséquences, le formalisme du principe entropique causal, appliqué à la détermination de l'énergie du vide, permet d'une part d'éviter le recours à des conditions anthropiques ambiguës, ou supposées ad hoc, et d'autre part d'étendre à l'ensemble des structures observables, et non seulement à des domaines de basse énergie, la distribution de probabilité.

6-2 - Fluctuations du vide quantique ?

La modélisation de la distribution de probabilité de l'inflation peut aussi faire intervenir les fluctuations du vide quantique, par exemple dans un espace de métrique De Sitter (voir [7] pour une présentation générale). Nous avons vu, en effet, quelques notions sur les fluctuations du vide quantique aux chapitres 4 et 5, et leurs éventuels effets sur l'expansion de l'univers via l'énergie sombre. C'est ce que propose A. Linde dans [62].

■ L'univers inflationnaire a une métrique de type De Sitter (5-47) :

$$ds^2 = dt^2 - r_0^2 \cosh^2 \tau (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (6-9a)$$

où $r_0^2 = 3/\Lambda$, la métrique de De Sitter est semblable à FLRW fermée. Dans [62] l'écriture de la métrique correspondante est :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{H^2} \cosh^2 Ht (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (6-9b)$$

(donc $H = c/r_0$).

Cette métrique est celle d'un 4-hyperboloïde plongé dans un espace à 5 dimensions de métrique Friedmann plat, et on montre que si cet espace De Sitter est fermé, alors il est géodésiquement complet (i.e. sa métrique décrit complètement l'hyperboloïde de 4D correspondant) [62].

La correspondance entre les 5 coordonnées (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) intervenant dans l'équation de l'hyperboloïde de l'espace 5D de Friedmann

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\frac{1}{H^2} \quad \left(= -\frac{r_0^2}{c^2} = r_0^2 \text{ si } c = 1 \right)$$

et celles intervenant dans (5-47), est :

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{H} \sinh Ht \\
z_1 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \cos \chi \\
z_2 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \cdot \sin \chi \cos \theta \\
z_3 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \cdot \sin \chi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\
z_4 &= \frac{1}{H} \cosh Ht \cdot \sin \chi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi
\end{aligned}$$

On montre que si la métrique De Sitter correspond à un espace **ouvert** (univers De Sitter plat), alors elle peut correspondre à la métrique de Schwarzschild de coordonnées statiques (t, r, θ, φ), décrivant l'espace-temps **à l'intérieur de l'horizon** ($0 \leq r \leq 1/H$ ou r_0) :

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{1/H^2 - r^2} \sinh Ht \\
z_1 &= \sqrt{1/H^2 - r^2} \cosh Ht \\
z_2 &= r \sin \theta \cos \varphi \\
z_3 &= r \sin \theta \sin \varphi \\
z_4 &= r \cos \theta
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour le domaine De Sitter tel que $z_0 + z_1 > 0$, la métrique (qui n'est pas géodésiquement complète) ⁽¹¹⁾ :

$$ds^2 = (1 - r^2 H^2) dt^2 - \frac{1}{1 - r^2 H^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6-10)$$

semblable à la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6-11)$$

où $r_S = \frac{2m}{m_p}$ (m : masse à l'intérieur de l'horizon) rayon de Schwarzschild. Ceci suggère que l'espace De Sitter, lors de la phase inflationnaire de l'univers, est dans une région de rayon $1/H$ et analogue à un trou noir. Par cette analogie le théorème concernant l'horizon du trou noir s'applique à l'espace-temps De Sitter où a lieu l'inflation : les seules informations observables qui peuvent sortir de l'horizon $r = r_S$ sont la masse, les charges, les moments angulaires ; toute autre information sur les processus physiques ne le peut pas, car amortie au bout d'un temps $t \gg 1/H$. Et, par suite, l'univers ne se distingue pas d'un univers De Sitter homogène et isotrope, toute trace de fluctuations ayant « disparu ». L'existence de l'horizon entraîne aussi l'absence de connexion causale entre le domaine intérieur à $1/H$ et ceux extérieurs.

Une première conséquence : cet effacement des inhomogénéités explique l'isotropie et l'homogénéité de l'univers inflationnaire.

Une deuxième conséquence : si un domaine de l'univers inflationnaire franchit l'horizon ($r > 1/H$), alors les processus extérieurs à ce domaine ne peuvent pas interagir avec l'inflation qui s'y déroule (**principe de l'inflation chaotique**). Il s'ensuit que, en sortie d'inflation, l'univers peut présenter des structures complexes et fortement hétérogènes à grandes échelles, mais qu'aux échelles locales les domaines sont fortement uniformes et homogènes.

¹¹ Cela signifie : parmi les géodésiques, certaines conduisent en-dehors de l'espace-temps vérifiant cette métrique.

Sur cette base, la détermination de la probabilité d'occurrence de l'inflation à partir de considérations sur l'entropie causale, n'est plus pertinente, puisque les processus de l'inflation entraînent, dans une première phase, la diminution du volume du vide initial (diminution du rayon de Hubble comobile, figure 5-4), et donc une intensification des fluctuations quantiques du vide.

Dans la deuxième phase, vers la fin de l'inflation, le tenseur énergie-impulsion (5-27) est très différent de la composante $g_{\mu\nu}V(\Phi)$, et l'on a $V(\Phi) \ll \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2$; et les fluctuations de densité d'énergie $\delta\rho/\rho$ deviennent de l'ordre de $H^2/\dot{\Phi}^2$. Ces fluctuations de densité donneraient un univers post-inflationnaire très hétérogène ($\delta\rho/\rho \gg 1$) si les champs scalaires étaient constants lors de l'inflation ($\dot{\Phi}=0$), ce qui n'est pas la situation observée. Il est alors nécessaire de considérer l'importance des interactions du vide quantique avec les champs scalaires variables, en phase d'inflation.

■ Les problèmes impliquant l'inflation, la constante cosmologique, l'accélération de l'expansion, et l'homogénéité et hétérogénéité de l'univers, sont liés. Et cela a aussi des conséquences sur le principe anthropique.

Certains modèles de cosmologie quantique utilisent la théorie des cordes. Mais celle-ci soulève un problème. On a vu que l'accélération de l'expansion de l'univers, observée, est supposée causée par l'énergie sombre, qui pourrait être liée aux fluctuations du vide, mais reste tout de même de nature inconnue, et qui est éventuellement représentée par la constante cosmologique positive $\Lambda > 0$. Or la théorie des cordes « classique » ne concerne que les univers à $\Lambda \leq 0$, et donc ne conduit pas à cette accélération. Pour rendre compatible la théorie des cordes avec l'accélération et $\Lambda > 0$, P. Kallosh et al. [115] ont proposé un formalisme qui permet un nombre extrêmement élevé (10^{500}) de théories des cordes où les paramètres peuvent être ajustés : ce formalisme pose un « paysage de théories des cordes » (*string theory landscape*, STL), toutes théoriquement admissibles, qui ouvre la possibilité de l'hypothèse d'univers multiples (ou multivers), résolvant du coup le problème du principe anthropique (« fine tuning »).

D'après les théories STL l'espace De Sitter est instable : son vide, doté d'un $\Lambda > 0$, s'effondre avec un taux élevé vers un espace-temps doté d'un $\Lambda < 0$, ou d'un vide de métrique Minkowski, et ceci de manière irréversible. STL prévoit l'existence de canaux, conduisant les flux de probabilité vers des puits vers lesquels s'effectuent ces effondrements. Lorsque ces puits sont pris en compte, on montre qu'il existe des relations entre les différentes mesures de probabilité des fluctuations associées à l'inflation éternelle, c'est-à-dire les inflations des différents univers formant le multivers [81], [82] ; sans cette prise en compte, ces différentes possibilités seraient indépendantes. Pour des taux d'effondrement relativement faibles, la présence d'états inflationnaires dans les univers formant le multivers, entretient une inflation éternelle dans le multivers, dans lequel, en conséquence, des BB auraient le temps de se former dans l'espace qui n'a pas encore évolué vers les puits.

Certaines versions de théories STL n'ont pas le problème des BB, même en l'absence de puits : dans ces versions le nombre de types de vides différents dans STL est suffisamment élevé, ce qui a pour conséquence que la constante cosmologique, telle que « mesurée » selon des arguments anthropiques, conserve sa valeur dans une classe étendue de mesures de probabilité, et de ce fait, n'est pas spécifiquement anthropique : elle est indépendante de la mesure (« *measure-independent* »).

■ Dans [81], par exemple, différents types de mesures de probabilité sont identifiés, donnant des résultats et des prédictions différents : la distribution de probabilité comobile, la distribution de probabilité quasi-comobile, et la distribution de probabilité « standard » :

■ La distribution de probabilité comobile suit l'évolution des différents « points » individuels dans l'univers indépendamment de l'expansion de l'univers. Les propriétés de cette distribution dépendent directement des puits (les états terminaux des vides) ; il s'ensuit qu'elle ne permet pas de faire des prédictions liées à l'évolution des « points » dans l'inflation. Mais elle peut être utilisée pour étudier une évolution d'un point donné à partir de conditions initiales physiques.

■ La distribution de probabilité quasi-comobile tient compte d'une pondération en volume des évolutions des différents points de l'univers, indépendamment des taux d'expansion de ces volumes, mais en prenant en compte que le nombre des points dans ces volumes croît de manière exponentielle lors de

l'inflation. Comme on le verra plus loin (point 8-2-4), cette création de « points » dans le vide pourrait résulter des chaînes de décohérence quantique initialisées chacune par l'émergence de particules virtuelles lors des fluctuations du vide quantique (v. par exemple [35], [83]). Cette mesure de probabilité est adaptée, par exemple, pour des volumes physiques de l'univers formant ensemble une hypersurface à temps t fixé (mesuré le long des géodésiques en unités $1/H$). Les prédictions théoriques issues de cette distribution de probabilité ne peuvent pas être liées aux conditions initiales, et elles identifient deux régimes de courants d'effondrement vers les puits : un régime thermalisé, comme c'est le cas pour un espace De Sitter, l'autre non thermalisé (sans variation de température)

■ La distribution de probabilité « standard » tient également compte d'une pondération en volume de l'évolution des différentes parties de l'univers, mais les hypersurfaces sont définies pour un temps fixé mesuré non plus en unités $1/H$ mais en unités de Planck m_p^{-1} ou de corde m_s^{-1} . Cela présente l'avantage de prendre en compte, pour différentes parties de l'univers, leur taux d'expansion lors de l'inflation, ainsi que les échelles de temps plus appropriées aux oscillations locales. Les prédictions théoriques issues de cette distribution sont indépendantes des conditions initiales et des puits.

Les distributions de probabilité comobile et quasi-comobile restent concernées par le problème des cerveaux de Boltzmann BB, tandis que la distribution de probabilité « standard » le résout. De plus, avec la distribution « standard », le fait d'utiliser des échelles de temps de Planck m_p^{-1} ou de corde m_s^{-1} , au lieu d'une échelle cosmologique telle que H^{-1} , est adapté aux mesures de probabilité des processus qui ont lieu dans les systèmes physiques, chimiques et biologiques de l'environnement cosmologique local.

■ De manière très schématique, l'effondrement irréversible d'un domaine d'univers De Sitter en inflation vers un domaine doté d'un $\Lambda < 0$, s'explique par l'effet tunnel quantique des particules à travers un maximum local de potentiel du champ scalaire $V(\Phi)$ (figure 6-3a). Lorsque la transition s'achève en un domaine où l'on a encore $V(\Phi) > 0$, il n'y a pas d'effondrement : la transition s'effectue d'un De Sitter dS_1 à un autre De Sitter dS_2 , et ceci de manière réversible dans les deux sens, avec une probabilité d'effet tunnel donnée par (cf. [117]) :

$$\Gamma_{12} = \exp(-S(\Phi) + S(\Phi_1)) \quad (6-12)$$

où $S(\Phi)$ action euclidienne de la trajectoire de transition $1 \rightarrow 2$ dans le potentiel, $S(\Phi_1)$ action euclidienne de la situation initiale où le champ Φ est égal à Φ_1 . Si le potentiel présente un certain écrasement tel que l'effet tunnel fait se rencontrer deux particules au même endroit du potentiel dans le domaine De Sitter, on montre que la probabilité précédente doit être remplacée par celle de Hawking et Moss :

$$\Gamma_{12} = \exp(-S_0 + S_1) = \exp\left(-\frac{24\pi^2}{V(\Phi_1)} + \frac{24\pi^2}{V(\Phi_0)}\right) \quad (6-13)$$

où Φ_0 est le champ correspondant au sommet de la barrière de potentiel séparant les deux minima du potentiel. On montre que l'entropie S_1 est, en unités normalisées, l'opposée de l'action S_1 : $S_1 = -S_1$, par conséquent le temps caractéristique de décroissance du vide De Sitter est : $t_d = t_r \exp S(\Phi)$, où $t_r \approx \exp S_1$ est le temps de récurrence du vide De Sitter dS_1 initial ⁽¹²⁾.

12 Attention aux notations ici pour l'entropie, l'action et la désignation de l'espace-temps De Sitter !

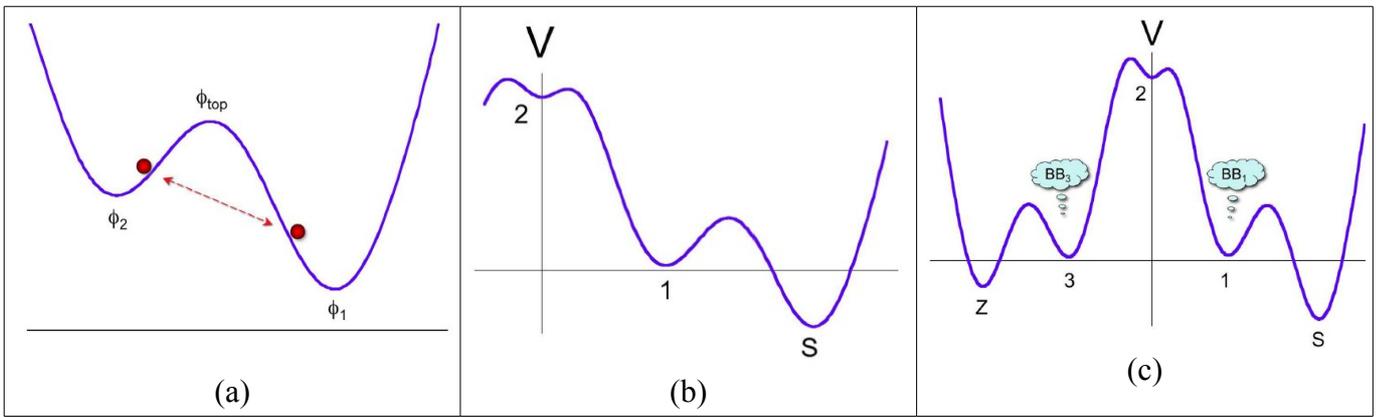


figure 6-3 (source : [81]) : effets des énergies du vide (représentées par $V(\Phi)$) issues d'interactions avec un champ scalaire Φ , initialement dans un espace De Sitter (dS) d'un univers inflationnaire :

- (a) Dans le vide dS, effet tunnel de Coleman-De Luccia [117] réversible entre deux états du potentiel $V(\Phi_1)$ et $V(\Phi_2)$ séparés par un maximum local Φ_{top} (Φ_0 dans notre texte)
- (b) Potentiel présentant un minimum dans le vide dS et un puits en (S) (énergie négative)
- (c) Occupation du « paysage » dS par les BB, en présence des puits AdS

Le puits correspond, quant à lui, à un domaine où $V(\Phi) < 0$ (figure 6-3b), c'est-à-dire à une énergie négative du vide, et la structure d'espace-temps d'arrivée est un anti-De Sitter (AdS). Le vide De Sitter décroît avec création de « bulles » décrivant l'effondrement d'univers avec une densité d'énergie du vide négative, avec un taux de décroissance par effet tunnel :

$$\Gamma \approx \exp\left(\frac{C m_p^2}{m_g^2}\right) \quad (6-14)$$

où la masse du gravitino m_g est directement liée à l'énergie du vide dans le puits AdS : $m_g^2 \approx |V_{AdS}|/3$ rendant l'effondrement dS \rightarrow AdS de forte probabilité ; ainsi la description du « paysage » des vides De Sitter en équilibre thermique est-elle modifiée.

Lorsque le vide présente des minima d'énergie $V(\Phi)$ très faibles, mais positifs, les fluctuations du vide quantique ont une probabilité d'autant plus grande de donner des structures complexes telles les BB (figure 6-3c). Un univers émergé à partir d'un vide de basse énergie (tel le modèle de Hartle-Hawking) présenterait une forte probabilité de BB, tandis que, à l'inverse, si son énergie du vide est plus élevée, cette probabilité devient très faible.

■ La théorie de l'inflation permettrait d'expliquer l'homogénéité observée de l'univers si celle-ci était déjà présente dans la phase inflationnaire. Par l'inflation, un volume très petit s'étend exponentiellement à des dimensions qui dépassent largement la taille de l'horizon observable. L'univers global pourrait présenter des inhomogénéités si, lors de l'inflation, le volume initial est déjà constitué de domaines hétérogènes dus aux différents potentiels associés aux fluctuations du vide quantique. L'extension des inhomogénéités aux dimensions de l'univers largement au-delà de l'horizon pourrait conduire à des « univers-bulles » de propriétés différentes, constituant un multivers. Ces conséquences sont encore plus favorisées dans le cas d'une inflation éternelle. Celle-ci proviendrait d'une augmentation du volume entourant chaque point inflationnaire, avec pour effet de produire de nouveaux domaines inflationnaires. Face à ces éventualités théoriques, la méthode de mesure de probabilité impacte le type de résultats que l'on peut favoriser ou au contraire ignorer. Certaines mesures ne sont pas adaptées au cas de l'inflation éternelle, d'autres ne le sont pas à l'inflation finie ; les différences reposent sur le caractère stationnaire ou non de la probabilité, et des échelles de temps et leurs seuils de coupure (v. par exemple [80]). Différents modèles, conduisant à des prédictions différentes, sont paramétrés par l'énergie du vide pendant le roulement lent, $V_s = 3H_s^2$ et ont pour variables les nombres de e-fold N^+ et N^- séparés par un temps suffisamment grand (point 5-2-2). On obtient dans [80] le tableau (6-1) qui montre la faculté de prendre en compte ou non l'inflation éternelle,

selon la référence temporelle utilisée pour déterminer la probabilité.

Méthode de mesure de la probabilité $P(\Phi,t)$	Modèle prédisant l'inflation non éternelle	Modèle prédisant l'inflation éternelle
Sur la base du temps propre	$\exp 3(N_+ - N_-)$	$\exp [-(3H_0/H_s)(N_+ - N_-)]$
Sur la base du facteur d'échelle	$\exp 3(N_+ - N_-)$	1
Sur la base du diamant causal	$\exp 3(N_+ - N_-)$ si N petit 1 si N grand	1
Sur la base de stationnarité	$\exp 3(N_+ - N_-)$	$\exp 3(N_+ - N_-)$

Tableau 6-1 (source [80]) : prédictions par quatre méthodes de mesure de probabilité de l'inflation éternelle ou non-éternelle

■ En somme, *sur un plan épistémologique*, la façon d'obtenir des prédictions et leurs probabilités dépend directement de la référence et de l'échelle auxquelles on ramène celle-ci, comme souligné dans [81]. En l'absence de précision sur lesdites référence et échelle, on bute rapidement sur des paradoxes métaphysiques qui remplacent des modèles testables expérimentalement. Plus précisément, il s'agit de poser des « *questions bien définies à propos des probabilités conditionnelles, et traitant tous les faits disponibles, incluant les faits liés à la vie, comme données observationnelles. Si on ne procède pas ainsi, on peut arriver à toutes sortes de conclusions paradoxales.* » (A. Linde)

Sur ces sujets, l'emploi des probabilités conditionnelles (théorème de Bayes, etc.), mais aussi les formalismes sur les attracteurs des régimes chaotiques ou de systèmes complexes (v. par exemple [116]), semble incontournable (¹³).

Toujours dans [81], il est remarqué que, à la racine des problèmes et paradoxes touchant la cosmologie (paradoxe anthropique, paradoxe des cerveaux de Boltzmann, etc.), nous voulons « trop en faire ». Avant l'existence de la théorie de l'inflation, ou de la STL, l'objectif était de modéliser en une seule théorie unitaire tous les processus cosmologiques et même plus largement physiques observables ou prédictibles dans notre monde. Aujourd'hui, nous nous apercevons que le monde, au sens large (l'univers...), peut faire l'objet de descriptions différentes et que, peut-être, nous sommes dans une partie seulement qui fait l'objet de l'une de ces descriptions ; et malgré cette éventualité, nous nous obstinons à trouver un modèle unique pour décrire la totalité du monde. Pourtant ce modèle, s'il existe, ne peut qu'être fondé sur des hypothèses liées à notre position dans l'univers, et celle de notre environnement ou domaine cosmologique local, muni de son histoire consistante, et de ses échelles d'évolutions adaptées. Si nous évacuons cette éventualité, nous resterons toujours tentés d'appliquer à l'univers entier les conclusions qui sont valides seulement au niveau local de notre situation cosmologique, des chaînes causales qui y figurent, et de ce qui s'y trouve observable, et alors surviennent les paradoxes (¹⁴). Le fait d'évoquer un principe anthropique, et non un autre principe, comme par exemple « principe atomique » ou « principe galactique » [81] est déjà bien le signe d'un biais dans la façon de questionner la nature, car cela revient à évacuer certains principes de la méthode expérimentale par lesquels « nous évaluons la probabilité de ce qui survient dans les observations futures sur la base de données obtenues et confirmées auparavant »

13 Considérons, par exemple, une fourmi qui se balade en un endroit précis et à une date précise. Si je ramène la probabilité de ma rencontre avec elle à l'échelle de l'histoire et de l'étendue de l'univers, ou plus simplement de la Terre, je trouverai une probabilité quasi-nulle, rendant l'événement impossible. Si, par contre, je tiens compte de ce qui se passe dans les environs (existence de fourmilières, végétaux, nourriture, aménagements effectués, etc.), j'obtiendrai une probabilité certes petite mais finie qui s'appuie sur une chaîne de probabilités conditionnelles.

14 La situation est analogue, par exemple, à notre emplacement géographique sur la Terre, d'où dépend l'heure de coucher du Soleil. Même si j'utilise le fait que la Terre est ronde, mais si j'ometts son inclinaison de 23°27' sur le plan de l'écliptique, et si je m'obstine (principe ou paradoxe égo-centrique) à modéliser un coucher du Soleil identique pour toutes les personnes situées sur mon méridien, alors je risquerais de considérer que le comportement de la Terre a fait en sorte que la probabilité que j'observe le coucher du Soleil à telle heure et tel endroit est maximale.

(A. Linde) ; et pour mettre en œuvre cette démarche expérimentale, il nous faut considérer les chaînes de probabilités inférentielles conditionnelles : les questions encore sans réponse, à supposer qu'elles soient bien posées, ne doivent pas nous empêcher des réponses pragmatiques utilisant des probabilités conditionnelles.

Face aux considérations anthropiques il faut une approche scientifique où la consistance globale (ici, l'univers et son évolution) est évaluée en comparaison avec les observations, les prédictions, et les données locales.

■ **Suggestion d'univers-bulles dans un multivers** [81] :

Bien que la nature précise de l'énergie sombre, énergie du vide responsable de l'expansion et de son accélération, soit encore inconnue, et d'après les considérations précédentes, l'existence de l'inflation suggère la possibilité que l'univers entier ait pu se former de différentes manières en des domaines d'espace-temps qui le constituent, impliquant des valeurs différentes de leurs constantes cosmologiques. Ces différents domaines, munis chacun d'une histoire causale différente des interactions du vide quantique lors de l'inflation, pourraient être le produit de différentes histoires de la réduction ou de la décohérence de la fonction d'onde quantique de l'univers primordial. Ils pourraient aussi provenir d'une inflation éternelle.

On aurait donc des univers-bulles constituant un multivers, en nombre pas nécessairement limité. Une contrainte, liée au fait que notre vie humaine existe dans l'un de ces univers (donc anthropique), porte sur la limite inférieure de la valeur absolue de la constante cosmologique : $|\Lambda| \gg 10^{-120}$.

7– Cerveaux de Boltzmann dans un univers unique (le nôtre) ou dans plusieurs univers-bulles ?

■ On a vu que la probabilité de la création de structures organisées depuis les fluctuations quantiques du vide est extrêmement faible, particulièrement sur la durée de 13,7 milliards d'années depuis le Big Bang. Cependant Andrei Linde [82] envisage la possibilité de cette création malgré sa très faible probabilité, et va même jusqu'à montrer qu'elle peut conduire à la formation de cerveaux de Boltzmann. Si l'expansion de l'univers continue en accélérant, comme semblent le montrer les observations, sous l'action de l'énergie sombre, on peut imaginer que pendant cette durée a priori très grande, des structures complexes de même nature que les cerveaux de Boltzmann puissent émerger des fluctuations du vide quantique. Mais alors, l'univers qu'observeraient ces cerveaux de Boltzmann ne serait plus le même que celui que nous observons actuellement, avec ses signaux et ses structures astrophysiques qui s'étendent sur ces quelques 13,7 milliards d'années : dans ce futur extrêmement éloigné (plusieurs centaines de milliards d'années estimées), l'expansion cosmologique sera telle que l'éloignement entre les galaxies, les amas de galaxies, les amas d'amas, etc. sera très important, laissant apparaître des très vastes domaines de l'espace vides, noirs, sans possibilité de vie ; les horizons cosmologiques seront si vastes que certains domaines de l'univers deviendront inobservables depuis d'autres. Et, bien sûr, notre Terre et notre humanité auront disparu depuis fort longtemps. Curieusement, cette perspective a été pressentie dans le concept de la « nuit de Brahma » dans les Védas [20]. Les cerveaux de Boltzmann auront eu largement le temps d'agir sur la structure du cosmos si leurs observations influencent les structures observées, conformément à l'interprétation non encore validée de la physique quantique selon laquelle la réduction de la fonction d'onde quantique est un effet de la conscience (approche idéaliste de l'intervention de la conscience : John von Neumann, Eugene Wigner, etc.) (point 8-2-8).

Mais cette éventualité repose sur l'hypothèse que l'univers est unique. Or, en l'état actuel des recherches en cosmologie quantique, rien n'interdit la possibilité d'existence d'univers multiples, ce que l'on appelle le multivers (univers d'univers). Dans ce cas des cerveaux de Boltzmann pourraient déjà exister bien « avant » ou « en même temps » que nous, dans des univers différents apparus suite aux fluctuations du vide quantique. Tout comme notre univers, ces « bulles d'univers », auxquels sont rattachés des référentiels d'espace-temps différents du nôtre (d'où l'emploi des guillemets dans les expressions « avant » et « en même temps »), seraient nés des fluctuations du vide quantique de la manière suivante. Lors d'une fluctuation du vide quantique (plus techniquement appelé « état quantique du point zéro »), des paires de particules virtuelles émergent en chaque point du champ quantique présent dans l'espace (champ électromagnétique par exemple), à chaque instant contenu dans la durée correspondant à l'incertitude

temporelle Δt , et elles disparaissent si elles ne reçoivent pas une énergie d'interaction suffisante, au moins égale à l'énergie associée à leurs masses propres (mc^2). Noter que, par suite des inégalités de Heisenberg, les particules virtuelles peuvent « remonter » le temps dans le laps de durée Δt . Lorsque des particules virtuelles deviennent réelles, d'autres particules virtuelles disparaissent. Ces processus de création et d'annihilation modifient localement le champ du vide, ce qui va entraîner de nouvelles fluctuations : ainsi, les fluctuations du vide quantique ont un caractère non linéaire, avec rétroaction positive et amplification. Or l'espace-temps est aussi influencé par la gravitation : plus précisément, en relativité générale, la structure géométrique de l'espace-temps est associée aux sources d'énergie (et en particulier matérielles), et l'on montre que la gravitation est elle aussi de caractère non linéaire, les effets de la gravitation devenant à leur tour des sources de gravitation, c'est-à-dire de déformation de l'espace-temps. Les fluctuations quantiques du vide et celles géométriques dues à la gravitation peuvent alors être couplées (voir par exemple Edgar Gunzig [21]). La cascade d'apparitions de particules réelles à partir de ces fluctuations, très intense dans un espace-temps très réduit, se raréfie avec l'expansion cosmologique parce que les particules virtuelles sont de plus en plus éloignées dans le vide. L'annihilation d'une particule virtuelle s'accompagne d'une perte d'énergie véhiculée par un photon, celui-ci peut alors interagir avec une autre particule virtuelle et lui apporter l'énergie nécessaire à sa transformation en particule réelle, et ainsi de suite. D'une fluctuation à l'autre, le photon n'est jamais le même, et la particule réelle n'est jamais la même : il n'y a pas déplacement d'une même particule, mais changement de particule en des points différents du vide.

Voici, de manière très simplifiée, ce que l'on pouvait dire sur les fluctuations du vide quantique.

■ Revenant au sujet des cerveaux de Boltzmann, si l'univers est unique, leur apparition depuis le Big Bang est très improbable, mais cela n'interdit pas qu'elle ait pu se produire une fois, les apparitions suivantes se réalisant dans l'univers beaucoup plus « vieux ». Si l'univers n'est pas unique (multivers), on a dit que les cerveaux de Boltzmann peuvent a priori exister dans d'autres univers nés eux aussi des fluctuations du vide quantique primordial (Mason Inman, [7]), mais on ne sait pas s'ils peuvent observer ou entrer en relation avec le nôtre... Dans les deux cas, l'univers unique et le multivers sont des structures isolées, elles vérifient donc le deuxième principe de la thermodynamique : leur évolution spontanée conduit à un état thermodynamique de désordre homogène. Donc si les cerveaux de Boltzmann interagissent avec leur univers en y introduisant un ordre plus important, donc une diminution d'entropie, c'est au prix d'une augmentation d'autant plus forte de l'entropie de cet univers ; or celle-ci n'est pas observée, nous observons au contraire un univers relativement organisé. Alors, tout se passe comme si les produits des interactions des cerveaux de Boltzmann avec le ou les univers, montrant des structures organisées, sont tels qu'ils soient seuls observables, la partie chaotique ou fortement désordonnée de l'univers ne nous étant pas accessible. Pourquoi cette restriction dans nos observations de l'univers ? Réponses possibles :

■ Comme les cerveaux de Boltzmann sont des entités conscientes, leurs interactions avec l'univers qu'ils « observent » produisent des états ou des structures qui dépendent de leur conscience, selon l'interprétation idéaliste de l'intervention de la conscience dans la réduction de l'onde quantique ; or l'observateur humain est lui aussi conscient, mais ce n'est pas un cerveau de Boltzmann parce qu'il résulte d'une longue évolution et non directement des fluctuations du vide quantique ; donc sa conscience ne peut observer que ce qui résulte d'une interaction dépendant de la conscience, et qui, par nature de ce que produit le cerveau de Boltzmann, est relativement organisé. En quelque sorte, ce qui a été produit par le ou les cerveaux de Boltzmann agit comme un filtre dans ce que l'homme peut observer. En conséquence, fondamentalement, nous ne pouvons pas observer tout l'univers, ni tel qu'il est indépendamment du processus d'observation ou d'interaction : le sujet qui observe est indissociable du binôme qu'il forme avec l'objet observé. L'objectivité de la réalité de l'objet « en soi » n'a alors plus de sens.

■ Au lieu de considérer un univers unique ou plusieurs univers inclus dans un multivers, dans lesquels l'interaction d'observation où intervient la conscience dans la réduction de l'onde quantique a pour effet de détruire tous les états possibles sauf un superposés dans cette onde, on adopte l'hypothèse que les états superposés continuent d'exister, mais que l'observation en sélectionne un seul sans annihiler les autres. Pour une même structure, les états possibles existent dans des univers multiples qui leur

correspondent : c'est la théorie des mondes multiples de Hugh Everett (1957) [4] qui attribue une réalité objective à l'objet observé, parce qu'un même objet existe en soi, indépendamment de l'observateur, avec des états différents mais appartenant et observables dans des univers différents : la conscience n'a aucune action sur cette superposition d'états, elle ne fait que sélectionner l'un d'entre eux. Selon cette théorie, le « chat de Schrödinger » serait vivant dans un des univers et mort dans un autre ! (voir par exemple [22]). Avec cette hypothèse, les structures issues des fluctuations du vide quantique peuvent être dans des états organisés dans certains univers, et dans des états désordonnés dans d'autres univers, et globalement l'ensemble des mondes multiples qui regroupe tous les états quantiques possibles suit une évolution conforme au second principe de la thermodynamique. Alors, ce que les humains observent correspond à des états sélectionnés parmi les états possibles dans l'univers, le nôtre, qui présentent un ordre global, sans que pour autant celui-ci résulte de l'action d'entités organisées conscientes telles que les cerveaux de Boltzmann. Le caractère organisé de l'univers cosmologique est sélectionné par l'observation humaine parce que, précisément, la structure cognitive humaine, dotée de conscience, est elle-même d'une organisation complexe, néguentropique, résultant d'un long processus d'évolution et de sélection darwinienne. Tout se passe comme si l'esprit humain ne recherche et n'observe que ce qui lui ressemble... Ainsi, selon moi, l'hypothèse réaliste ontologique des mondes multiples en physique quantique n'a pas besoin de l'hypothèse des cerveaux de Boltzmann pour expliquer la structure globalement ordonnée du cosmos. De plus, souvenons-nous que la partie visible, matérielle, de l'univers que nous observons ne représente que 5% de l'énergie totale du cosmos, laissant aux 95% restants la possibilité de suivre des évolutions chaotiques.

■ L'hypothèse idéaliste de l'intervention de la conscience dans la réduction de l'onde quantique, et l'hypothèse des mondes multiples d'Everett, sont deux des nombreuses tentatives pour répondre au problème d'interprétation de la mesure quantique, qu'aucune expérience cruciale n'a encore réussi à trancher. Tout ce que l'on peut dire c'est que le formalisme de la physique quantique fonctionne expérimentalement et que l'on ne sait ni pourquoi ni comment.

■ Ce formalisme et les expériences qui le valident montrent de curieuses propriétés et des paradoxes qui restent des problèmes ouverts : par exemple, la *non-séparabilité* des particules quantiques initialement dans des états intriqués avant réduction de leurs ondes quantiques, comme le souligne le paradoxe EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) [22] ; ou encore la *rétrocausalité* de la mesure quantique, à savoir, le processus de mesure d'une structure quantique (par exemple émission d'un électron) soumise à des états et des trajets possibles avant mesure, fournit un résultat unique qui attribue à cette structure une histoire antérieure à la mesure, comme si la structure « savait » dans le passé où et comment elle allait être observée dans le futur ! Cette apparente « remontée dans le temps » d'une structure quantique soulève de nombreuses interprétations et des phantasmes philosophico-métaphysiques, parce que l'on cherche à tous prix à attribuer une réalité ontologique à la rétrocausalité (voir par exemple [23]), là où les tenants de l'interprétation positiviste de la physique quantique n'y voient qu'une limite logique à notre façon classique de voir et comprendre le monde (Niels Bohr, Max Born, Stephen Hawking...), ainsi qu'une illusion liée à l'incontournable imprécision de notre langage macroscopique pour poser les problèmes et exprimer les paradoxes dans des domaines non macroscopiques où notre conscience n'a pas l'habitude de fonctionner (positivisme logique de Ludwig Wittgenstein...) [24]. Et bien d'autres...

8 – Les postulats de la physique quantique et diverses propositions de réponses au problème de la mesure quantique

8-1 – Les 6 postulats du formalisme de la physique quantique, et les problèmes fondamentaux de leur cohérence mutuelle

8-1-0 - Rappelons simplement que la théorie quantique repose sur 6 postulats qui permettent la prévision des résultats expérimentaux, mais qu'elle soulève au moins 2 problèmes relatifs à la cohérence entre ces postulats et qui conduisent à des paradoxes tant qu'ils ne reçoivent pas de réponses satisfaisantes. Désignation des 6 postulats [26] :

8-1-1 – Postulat 1 : Définition de l'état quantique

L'état quantique d'une particule ou d'un système physique est défini, à un instant t , par une fonction d'onde contenant tous les états possibles de l'objet. La fonction d'onde est un vecteur d'un espace vectoriel linéaire muni d'un produit scalaire hermitien, et complet ; cet espace vectoriel, ou espace des états, est donc un espace de Hilbert. Il est aussi séparable. La fonction d'onde dépend de la position de la particule ou du système physique. On note ici \mathcal{H} cet espace de Hilbert.

■ Les vecteurs (fonctions d'onde) sont notés $|\psi\rangle$ et leur produit scalaire est noté $\langle \phi|\psi\rangle$. ce produit scalaire est hermitien, c'est-à-dire satisfait les quatre conditions suivantes :

- a) Pour tous $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ dans \mathcal{H} : $\langle \phi|\psi\rangle = \langle \psi|\phi\rangle^*$
- b) Pour tous nombres complexes a, b et pour tous $|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\phi'\rangle$ dans \mathcal{H} (semi-linéarité) :

$$\langle \psi|a\phi + b\phi'\rangle = a\langle \psi|\phi\rangle + b\langle \psi|\phi'\rangle$$

- c) Le produit hermitien est positif : pour tout $|\psi\rangle$ dans \mathcal{H} : $\langle \psi|\psi\rangle \geq 0$
- d) Le produit hermitien est défini : $\langle \psi|\psi\rangle = 0$ si et seulement si $|\psi\rangle = 0$

Ces conditions confèrent à \mathcal{H} la norme (norme hermitienne) définie par : $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi|\psi\rangle}$

Le produit hermitien et la norme hermitienne vérifient les théorèmes suivants :

Théorème de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle \phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$

Théorème de l'inégalité de Minkowski : $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$

■ L'espace des états quantiques \mathcal{H} est complet, c'est-à-dire, par définition, toute suite de Cauchy est convergente dans \mathcal{H} ⁽¹⁵⁾.

■ L'espace de Hilbert \mathcal{H} est séparable, c'est-à-dire il possède une base hilbertienne dénombrable. Une base hilbertienne est formée d'une famille libre de vecteurs $\{|\psi_k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ dont l'espace vectoriel qu'elle engendre $\text{Vect}\{|\psi_k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans \mathcal{H} : tout vecteur (fonction d'onde) peut être approché par une combinaison linéaire finie des $|\psi_k\rangle$, c'est-à-dire par des vecteurs appartenant à leur espace vectoriel. On montre alors les propositions mutuellement équivalentes :

- a) Si $|\varphi_n\rangle =_{\text{def}} \sum_{k=0}^n \langle \psi_k|\varphi\rangle |\psi_k\rangle$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$;
- b) Pour tous $|\varphi\rangle, |\varphi'\rangle$ dans \mathcal{H} : $\langle \varphi|\varphi'\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi|\psi_k\rangle \langle \psi_k|\varphi'\rangle$
- c) Égalité de Parseval : $\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \psi_k|\varphi\rangle|^2$
- d) Pour tout k entier, $\langle \psi_k|\varphi\rangle = 0$ si et seulement si $|\varphi\rangle = 0$.

D'où les règles de calcul dans une base hilbertienne :

- décomposition : $|\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) |\psi_k\rangle$ avec : $c_k(\varphi) = \langle \psi_k|\varphi\rangle$
- produit scalaire : $\langle \varphi|\varphi'\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)^* c_k(\varphi') = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi|\psi_k\rangle \langle \psi_k|\varphi'\rangle$
- norme : $\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(\varphi)|^2$

¹⁵ Sur les suites de Cauchy voir par exemple [118], [119].

8-1-2 – Postulat 2 : Principe de correspondance

Le principe de correspondance associe à toute grandeur physique A un opérateur mathématique \hat{A} , appelé « observable », agissant sur les fonctions d'onde.

Selon le formalisme de Dirac et de von Neumann, les opérateurs agissent comme transformations linéaires dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , entre deux sous-espaces denses dans celui-ci. Ils transforment une fonction d'onde $|\psi\rangle$ en une autre $|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$, qui vérifient le postulat 1.

L'opérateur \hat{A} est défini sur un sous-espace dense dans \mathcal{H} , noté D_A : il est complètement défini par la donnée (\hat{A}, D_A) . Il lui est associé l'opérateur adjoint, noté \hat{A}^+ , tel que :

$$\forall |\varphi\rangle \in D_{A^+}, \forall |\psi\rangle \in D_A : \langle \hat{A}^+ \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} \psi \rangle$$

On montre que la condition nécessaire et suffisante pour que A possède un adjoint A^+ , est que D_A soit dense dans \mathcal{H} .

L'opérateur \hat{A} est dit hermitien s'il vérifie : $\langle \hat{A} \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} \psi \rangle$.

Attention : cela n'implique pas que $\hat{A}^+ = \hat{A}$ (opérateur auto-adjoint) ; un opérateur hermitien n'est pas nécessairement auto-adjoint. Un opérateur hermitien \hat{A} coïncide avec son adjoint \hat{A}^+ , $\hat{A} = \hat{A}^+$, dans un espace fonctionnel de dimension finie. Mais en dimension infinie ce n'est plus le cas puisque l'on montre que les domaines de définition vérifient $D_A \subset D_{A^+}$: le domaine de définition de \hat{A}^+ étant plus vaste que celui de \hat{A} , il existe des opérateurs adjoints qui ne coïncident pas avec \hat{A} .

Cependant, si $D_A = \mathcal{H}$, c'est-à-dire si l'opérateur \hat{A} est défini sur \mathcal{H} entièrement, alors $D_A = D_{A^+}$ et donc $\hat{A} = \hat{A}^+$, c'est-à-dire :

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \hat{A}^+ |\psi\rangle = \hat{A} |\psi\rangle$$

Selon le principe de correspondance, un opérateur hermitien est associé à chaque grandeur observable, telle que : la position \mathbf{q} ⁽¹⁶⁾, l'énergie potentielle (uniquement électromagnétique) $V(\mathbf{q})$, la quantité de mouvement $\mathbf{p}(\mathbf{q})$, le moment angulaire $\mathbf{L}(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$, l'énergie cinétique $T(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} / 2m$, l'énergie totale ou hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$, le lagrangien $L(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T - V$, le spin (moment cinétique propre) \mathbf{s} , selon les correspondances suivantes (tableau 8-1) :

Grandeur observable	Opérateur correspondant (« observable »)
Position : \mathbf{q}	$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$
Énergie potentielle : $V(\mathbf{q})$	$\hat{V}(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q})$
Quantité de mouvement : $\mathbf{p}(\mathbf{q})$	$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = -i \hbar \nabla$
Moment angulaire (ou orbital) : $\mathbf{L}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$	$\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \mathbf{q} \times \nabla$
Énergie cinétique : $T(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$	$\hat{T}(\mathbf{q}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
Énergie totale, hamiltonien : $H = T + V$	$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$
Lagrangien : $L = T - V$	$\hat{L} = \hat{T} - \hat{V}$
Spin (moment cinétique propre) : \mathbf{s}	$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \hbar (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ où σ_k matrices de Pauli ([39][40])
Moment cinétique total : $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$	$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}$ ([39])

Tableau 8-1 : principe de correspondance

¹⁶ Dans ce paragraphe, on note en caractères gras les grandeurs vectorielles.

■ **Remarque : correspondance entre le commutateur en physique quantique et le crochet de Poisson en mécanique classique :**

Soient q_k et p_k les variables conjuguées (formant l'espace des phases) dans le formalisme hamiltonien de la mécanique classique ; soit H l'hamiltonien du système, obtenu par transformation de Legendre du lagrangien L (v. par ex. [120]) :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

qui vérifient les équations de Hamilton (équations du mouvement) :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{dq_k}{dt} = [q_k, H] = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= \frac{dp_k}{dt} = [p_k, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \right|$$

où le crochet de Poisson de deux grandeurs (ou variables dynamiques) $A(q_k, p_k; t)$, $B(q_k, p_k; t)$ est :

$$[A, B] = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right)$$

L'équation d'évolution des grandeurs est exprimée par l'équation dynamique de Poisson :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]$$

Puisque, en mécanique quantique, une grandeur correspond à un opérateur observable (postulat 2) :

$$A(q_k, p_k) \rightarrow \hat{A}(q_k, p_k) \quad (8-1a)$$

le crochet de Poisson correspond en mécanique quantique au commutateur des observables, au facteur multiplicatif près $1/i\hbar$:

$$[A, B] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (8-1b)$$

Les variables conjuguées, en particulier, correspondent à des opérateurs qui vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{q}_k, \hat{q}_j] &= 0 ; [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = 0 \\ [\hat{q}_k, \hat{p}_j] &= i\hbar \delta_{kj} \end{aligned}$$

et les équations de Hamilton correspondent à :

$$[\hat{q}_k, \hat{H}] = i\hbar \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_k} ; [\hat{p}_j, \hat{H}] = -i\hbar \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_j}$$

où les p_k et q_j sont ici les valeurs propres des opérateurs \hat{p}_j et \hat{q}_k .

Les observables ne commutent pas toujours entre eux : dans ce cas les inégalités de Heisenberg sont une conséquence.

Les grandeurs A et B dont le commutateur des observables correspondants $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ n'est pas

nul, égal à $i\hbar$, sont dites conjuguées, ou complémentaires : elles ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision aussi grande que l'on veut. Par exemple, pour la position et la quantité de mouvement on a vu que : $[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$, d'où les inégalités de Heisenberg pour leurs écarts-types Δq et Δp : $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$.

■ **Remarque** : Bien que l'énergie E corresponde à un observable, et que ce ne soit pas le cas pour le temps t (dans le formalisme quantique ce n'est pas une « grandeur » observable, et donc est-il vu comme un paramètre ?), on a l'inégalité de Heisenberg : $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$.

8-1-3 – Postulat 3 : Principe du résultat de mesure d'une observable

Une mesure donne seulement une des valeurs possibles de l'observable à laquelle correspond une valeur particulière de la fonction d'onde.

Soit A la grandeur observable que l'on mesure, et soient a_k les valeurs possibles de l'opérateur observable \hat{A} qui lui correspond. La valeur obtenue lors de la mesure, et qui est unique, parmi toutes celles possibles, est une des valeurs propres de \hat{A} , et la fonction d'onde particulière est un des vecteurs propres associés aux valeurs propres a_k :

$$\hat{A} |\varphi_k\rangle = a_k |\varphi_k\rangle$$

où les $|\varphi_k\rangle$ sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres a_k de \hat{A} .

Les vecteurs propres $|\varphi_k\rangle$ de \hat{A} représentent les états quantiques du système mesuré qui résultent « immédiatement » de la mesure de la grandeur A . Le postulat 3 énonce alors que cette mesure sélectionne seulement un de ces états propres : l'expression mathématique de cette sélection est donnée dans le postulat 5 (réduction du paquet d'ondes) présenté plus loin au point 8-1-5.

On montre que toute fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ dans \mathcal{H} se décompose de manière unique sur la base orthonormée que forment les vecteurs propres $|\varphi_k\rangle$ de l'observable \hat{A} :

$$|\psi\rangle = c_1 |\varphi_1\rangle + c_2 |\varphi_2\rangle + \dots + c_k |\varphi_k\rangle + \dots = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n |\varphi_n\rangle \quad (8-2)$$

où les (c_k) sont les coordonnées de $|\psi\rangle$ dans cette base.

On a vu au postulat 1 que l'espace vectoriel engendré par les $|\varphi_k\rangle$, $\text{Vect}\{|\varphi_k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans \mathcal{H} .

8-1-4 – Postulat 4 : Interprétation probabiliste de la fonction d'onde (Postulat de Born)

La fonction d'onde intervient directement dans le calcul de la probabilité des états quantiques.

Soit un système quantique dont l'état est représenté par la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$, qui n'est pas nécessairement un vecteur propre d'une observable. La mesure d'une grandeur A sur ce système donne la valeur a_n , valeur propre de \hat{A} , avec une probabilité égale à :

$$P_n = |c_n|^2 = |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2 \quad (8-3)$$

où $|\varphi_n\rangle$ vecteur propre de \hat{A} . C'est-à-dire : le carré du produit scalaire d'une fonction d'onde décrivant un état quantique du système et d'une fonction d'onde vecteur propre d'une observable \hat{A} donne la probabilité, ou la densité de probabilité, que le système soit trouvé dans l'état propre de \hat{A} après mesure.

Cette proposition se généralise à tout couple de fonctions d'onde, qu'elles soient ou non vecteurs propres d'observable :

$$P_{\varphi\psi} = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$$

Dans le cas d'une mesure de grandeur, la valeur moyenne de la grandeur mesurée de A pour un système dans un état quantique $|\psi\rangle$ est :

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (8-4)$$

■ **Exemple** : Soit une particule unique dans un état quantique $|\psi\rangle$. Sa position est décrite par l'observable \hat{q} dont $|\mathbf{q}\rangle$ est un vecteur (ou fonction d'onde) propre. Alors la probabilité de trouver la particule à une position comprise entre \mathbf{q} et $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ est :

$$dP_\psi(\mathbf{q}) = |\langle \mathbf{q} | \psi \rangle|^2 d^3\mathbf{q} = \rho_\psi(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q}$$

ici, $|\langle \mathbf{q} | \psi \rangle|^2 = \rho_\psi(\mathbf{q})$ est une densité de probabilité, la probabilité étant obtenue par son intégration sur tout l'espace.

■ **Remarque : interférence des ondes quantiques :**

L'expérience des fentes d'Young (voir par ex. [36]) montre que l'envoi d'électrons (alors considérés comme des particules) vers un dispositif muni de 2 fentes donne, sur un écran placé derrière lui, une figure d'intensités présentant des effets d'interférence, et que, lorsque l'on occulte une fente, ces effets disparaissent. Dans le premier cas le comportement ondulatoire de l'électron est mis en évidence, dans le deuxième cas, il a un comportement particulaire. Dans le premier cas, on n'a pas mesuré le trajet qui a été suivi par l'électron, tandis que dans le deuxième cas, on a déterminé le trajet qu'il a suivi, par la suppression d'un des trajets possibles (figure 8-1).

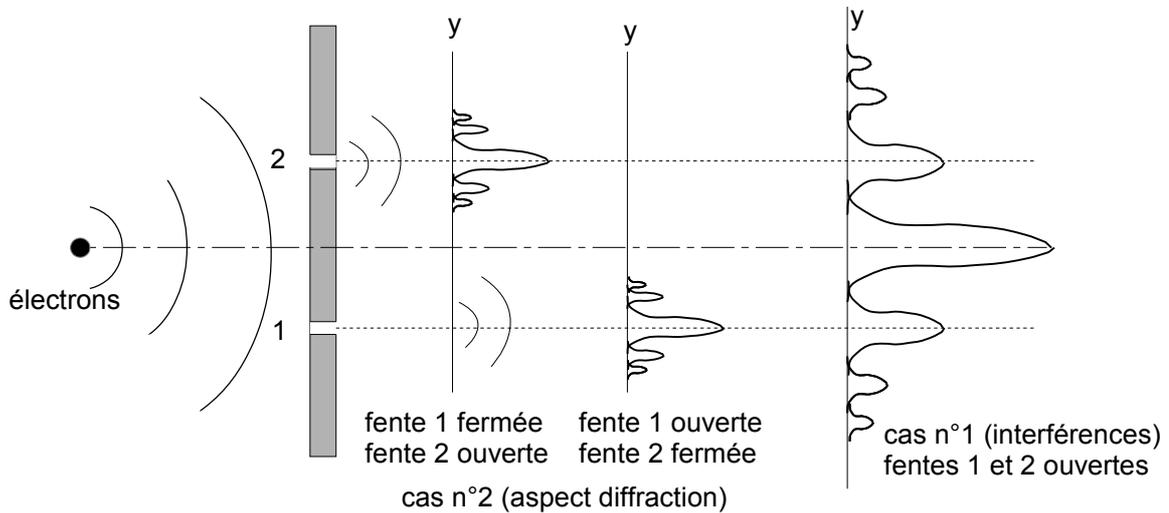


figure 8-1 : aspect interférentiel de l'amplitude de probabilité des électrons à travers les fentes d'Young

Cet exemple est une illustration du cas général où un système quantique peut atteindre un état quantique $|\psi(t)\rangle$ à une date t en prenant plusieurs trajets différents p (dans l'exemple précédent on a $p = 1$ et 2). Tant que l'on ne mesure pas le système dans sa trajectoire, c'est-à-dire si l'on ne détermine pas le trajet suivi, la fonction d'onde est superposition, combinaison linéaire, des fonctions d'onde $|\psi_p\rangle$ associées à chaque trajet :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_p b_p |\psi_p(t)\rangle$$

Le cas n°1 de l'exemple ci-dessus correspond à cette configuration. La probabilité est alors, dans ce cas :

$$P_{\varphi\psi} = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |\langle \varphi | \sum_p b_p |\psi_p\rangle|^2 = \left| \sum_p b_p \langle \varphi | \psi_p \rangle \right|^2 = \sum_p |b_p|^2 |\langle \varphi | \psi_p \rangle|^2 + \text{termes d'interférence } I_{\varphi\psi_p}$$

Par contre, si l'on mesure le système dans l'une de ses trajectoires possibles p' , et donc si le trajet suivi a été déterminé, alors la probabilité se réduit à :

$$P_{\varphi\psi} = |\langle \varphi | \psi_{p'} \rangle|^2$$

(il n'y a plus de termes d'interférence). Le cas n°2 de l'exemple ci-dessus correspond à cette configuration. L'application des relations précédentes au cas n°1 de l'exemple ci-dessus (les deux fentes 1 et 2 ouvertes) donne, avec $|\varphi\rangle = |\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ ($b_1 = b_2 = 1$; ψ_1 et ψ_2 fonctions d'onde respectivement pour le trajet 1 et 2) :

$$P_\psi = |\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*) \quad (8-5)$$

où $I_{12} = 2\text{Re}(\psi_1 \psi_2^*)$ est le terme d'interférence.

Dans les cas n°2, avec $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle$ ou $|\psi_2\rangle$, on a : $P_\psi = |\psi_1|^2$ ou $|\psi_2|^2$.

■ **Remarque : Matrice densité des états :**

On a vu que la valeur moyenne de la mesure d'une grandeur A pour un système dans un état quantique $|\psi\rangle$ est :

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Cela est le cas, en toute rigueur, si l'état du système est déterminé de manière complète. Dans le cas contraire, le système est supposé dans un ensemble d'états $|n\rangle$ qui sont vecteurs propres d'un opérateur hermitique \hat{N} et qui forment une base orthonormale de \mathcal{H} ; la probabilité du système d'être dans un état $|n\rangle$ est noté P_n . La mesure d'une grandeur A sur un système situé dans ces divers états $|n\rangle$ donne une valeur moyenne de A dans chaque état :

$$\langle A \rangle_n = \langle n | \hat{A} | n \rangle \quad (8-6)$$

et la valeur moyenne totale de A mesurée sur l'ensemble de ces états du système est :

$$\langle A \rangle = \sum_n P_n \langle A \rangle_n = \sum_n P_n \langle n | \hat{A} | n \rangle \quad (8-7)$$

avec, par définition des probabilités de ces états $|n\rangle$:

$$P_n \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_n P_n = 1$$

L'état quantique complet où se trouve le système, $|\psi\rangle$, inconnu, se projette sur la base des vecteurs propres de \hat{N} selon : $\langle \psi | n \rangle$. La valeur moyenne de A dans $|\psi\rangle$ se décompose alors en :

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{n, k} \langle \psi | n \rangle \langle n | \hat{A} | k \rangle \langle k | \psi \rangle$$

Si \hat{A} est exprimé dans sa représentation formée de ses vecteurs propres, seuls subsistent les termes $n = k$, c'est-à-dire la représentation matricielle de \hat{A} est diagonale : $\langle n | \hat{A} | n \rangle$, donc :

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_n |\langle \psi | n \rangle|^2 \langle n | \hat{A} | n \rangle \quad (8-8)$$

avec $|\langle \psi | n \rangle|^2 = P_n$, ce qui exprime le postulat 4.

On définit alors l'**opérateur densité des états** $|n\rangle$ par :

$$\hat{\rho} = \sum_n |n\rangle P_n \langle n| \quad (8-9)$$

Si la présence du système dans l'état $|n\rangle$ est connue de manière certaine, alors $P_n = 1$ et l'on a la relation de fermeture : $\hat{\rho} = \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}$.

De façon générale, on montre que la trace de l'opérateur densité des états est égale à 1, et que c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il représente la densité des états $|\psi\rangle$:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_n P_n = 1 \quad (8-10)$$

On montre aussi que la valeur moyenne mesurée d'une grandeur s'exprime avec l'opérateur densité des états :

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A}) \quad (8-11)$$

Dans le cas d'une base orthonormale $|\psi\rangle$ construite sur les vecteurs propres de l'opérateur hamiltonien \hat{H} , $\hat{H}|\psi\rangle = E_n|\psi\rangle$, le postulat de correspondance appliqué à l'équation dynamique de Poisson donne l'équation d'évolution temporelle de la densité des états : $i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$ dont les composantes diagonales de la matrice sont nulles : $i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{nn} = \langle n | [\hat{H}, \hat{\rho}] | n \rangle = (E_n - E_n) \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = 0$, ce qui exprime que les densités des états quantiques $|\psi\rangle$ sont constantes, et que les composantes non diagonales – ou « *cohérences des états quantiques* », $\rho_{nk} = \langle n | \hat{\rho} | k \rangle$, c'est-à-dire des corrélations entre états $|\psi\rangle$ et $|k\rangle$ (avec $n \neq k$) – donnent l'équation d'évolution :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{nk} = (E_n - E_k) \rho_{nk} \quad (8-12)$$

de solution : $\rho_{nk}(t) = \rho_{nk}(0) \exp(i\omega_{nk} t)$ avec $\omega_{nk} = \frac{E_n - E_k}{\hbar}$ fréquence de Bohr. **Les cohérences oscillent à la fréquence de Bohr.**

Ces résultats ont un rôle important dans l'interprétation de la décohérence (point 8-2-4).

8-1-5 – Postulat 5 : Réduction de l'onde quantique

On a vu au postulat 3 que la mesure d'une grandeur observable A sur un système quantique dans un état de fonction d'onde $|\psi\rangle$ donne une valeur unique, qui est une valeur propre a_k de \hat{A} , parmi toutes les valeurs propres possibles de \hat{A} .

Le postulat 5 pose que le nouvel état quantique du système « immédiatement » après la mesure est une projection de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre associé à la valeur propre (a_k), c'est-à-dire l'espace engendré par le vecteur propre ou, en cas de dégénérescence d'ordre g_k de la valeur propre (a_k), par les vecteurs propres $|\varphi_{k,j}\rangle$ correspondant au même (a_k).

Autrement dit, le nouvel état $|\psi'\rangle$ est la projection de $|\psi\rangle$ sur une « droite » dans \mathcal{H} définie par les vecteurs $|\varphi_{k,j}\rangle$:

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{\Pi}_k |\psi\rangle}{\sqrt{P_k}} \quad (8-13)$$

où $P_k = |\langle \varphi_k | \psi \rangle|^2$ probabilité, ou densité de probabilité, de mesurer la valeur propre a_k de \hat{A} (relation (8-3)), et $\hat{\Pi}_k$ opérateur projection :

$$\hat{\Pi}_k = \sum_{j=1}^{g_k} |\varphi_{k,j}\rangle \langle \varphi_{k,j}| \quad (8-14)$$

qui vérifie la définition formelle d'un projecteur : $\hat{\Pi}_k^2 = \hat{\Pi}_k$, puisque les vecteurs propres $|\varphi_{k,j}\rangle$ forment un ensemble orthonormé.

Cette projection est appelée réduction de l'onde quantique $|\psi\rangle$ du système sur lequel a lieu la mesure de

la grandeur observable A . C'est le **postulat de réduction** : après mesure ou observation, tous les états quantiques superposés possibles sauf un disparaissent, l'onde quantique constituée de cette superposition se projette sur le vecteur correspondant à une valeur propre de l'observable correspondant à la grandeur mesurée.

■ **Remarque** : On montre le théorème suivant :

Tout opérateur hermitien \hat{A} se décompose sur un ensemble de projecteurs $\hat{\Pi}_k$ selon :

$$\hat{A} = \sum_k a_k \hat{\Pi}_k$$

où les a_k sont les valeurs propres de \hat{A} , et les projecteurs vérifient : $\hat{\Pi}_k \hat{\Pi}_j = \hat{\Pi}_k \delta_{jk}$ et $\sum_k \hat{\Pi}_k = \mathbf{1}$.

8-1-6 – Postulat 6 : Évolution temporelle de l'état quantique

L'évolution dans le temps de la fonction d'onde suit une équation (de Schrödinger dans le cas non relativiste, de Dirac dans le cas relativiste [40]) dont les solutions sont parfaitement déterministes.

Il existe deux descriptions de la dynamique quantique : la description de Schrödinger où, par définition, c'est l'espace des états \mathcal{H} qui évolue au cours du temps, tandis que les opérateurs observables sont indépendants du temps ; et la description de Heisenberg où, par définition, tout état quantique d'un système est indépendant du temps, tandis que les observables évoluent au cours du temps.

Ces deux descriptions sont équivalentes, et de plus, l'opérateur hamiltonien \hat{H} est indépendant du temps dans les deux descriptions.

En description de Schrödinger, et dans le cas non relativiste, l'équation d'évolution des états est l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{q}, t)\rangle = \hat{H}(\mathbf{q}) |\psi(\mathbf{q}, t)\rangle \quad (8-15)$$

L'évolution de l'état quantique d'un système est donc portée par l'opérateur hamiltonien. Il s'ensuit que toute observable qui commute avec \hat{H} est une constante de mouvement. On peut alors former une base de représentation qui est commune avec \hat{H} et cette observable.

Les remarques suivantes fournissent des précisions sur l'opérateur d'évolution d'un état quantique, et les descriptions de Schrödinger et de Heisenberg.

■ **Remarque : opérateur d'évolution** :

L'évolution d'un état quantique au cours du temps $|\psi(t_0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$ peut s'exprimer par un opérateur évolution $U(t, t_0)$ (qui n'est pas une observable, pour rappel) :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{H} en une même combinaison linéaire :

$$\sum_k \alpha_k |\psi_k(t)\rangle = \sum_k \alpha_k U(t, t_0) |\psi_k(t_0)\rangle$$

On a évidemment : $U(t, t) = \mathbf{1}$, et :

$$U(t, t_0) = U(t, t_i) U(t_i, t_0) \text{ pour tout temps } t_i \text{ intermédiaire et : } U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$$

Soit $\{ |u_n(t)\rangle ; n \in \mathbb{N} \}$ une base orthonormée de \mathcal{H} , vérifiant la relation de fermeture :

$$\sum_n |u_n(t)\rangle \langle u_n(t)| = \sum_n |u_n(t_0)\rangle \langle u_n(t_0)| = \mathbf{1}$$

L'opérateur évolution s'écrit donc, dans cette base :

$$U(t, t_0) = \sum_n |u_n(t)\rangle \langle u_n(t_0)| \quad (8-16)$$

Si, au lieu de cette base, on exprime $U(t, t_0)$ sur des états quantiques orthonormés non discrets, tels la position $|\mathbf{q}(t)\rangle$ ou son moment conjugué (quantité de mouvement) $|\mathbf{p}(t)\rangle$, par exemple, on a :

$$U(t, t_0) = \int |\mathbf{q}(t)\rangle d\mathbf{q} \langle \mathbf{q}(t_0)| \quad (8-17)$$

avec $\langle \mathbf{q}(t) | \mathbf{q}'(t) \rangle = \langle \mathbf{q}(t_0) | \mathbf{q}'(t_0) \rangle = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, et la relation de fermeture :

$$\int |\mathbf{q}(t)\rangle d\mathbf{q} \langle \mathbf{q}(t)| = \int |\mathbf{q}(t_0)\rangle d\mathbf{q} \langle \mathbf{q}(t_0)| = \mathbf{1}$$

Dans tous les cas on a : $U^{-1} = U^+$ (U est unitaire).

L'opérateur d'évolution s'exprime avec la série de Dyson selon les développements (4-14a et b). Si l'opérateur hamiltonien du système \hat{H} ne dépend pas du temps, alors $U(t, t_0)$ s'exprime par :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right)$$

Dans le cas général où \hat{H} dépend du temps, $U(t, t_0)$ est solution de l'équation, de forme semblable à celle de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \hat{H}(t)U(t, t_0) \quad (8-18)$$

■ **Remarque : description de Schrödinger :**

L'évolution dans le temps d'un système quantique peut se traduire soit par l'évolution de l'état quantique $|a(t)\rangle$, soit par celle de l'opérateur observable $\hat{A}(t)$ associé à la grandeur qui est mesurée sur le système. À chaque type d'évolution correspond une description de la dynamique du système très différente, mais les descriptions sont reliées.

La description de Schrödinger pose que seuls évoluent avec le temps les états $|a(t)\rangle$ et que les observables sont indépendantes du temps. Il s'ensuit que la mesure a lieu dans un état de position $|\mathbf{q}\rangle$ invariable dans l'espace de configuration (\mathbf{q}). L'état du système mesuré, vecteur propre de \hat{A} , $|a, t\rangle$ se projette dans l'espace de configuration selon :

$$\langle \mathbf{q} | a, t \rangle = \Psi_a(\mathbf{q}, t)$$

avec :

$$|a, t\rangle = U(t, t_0)|a, t_0\rangle \quad \text{et} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a, t\rangle = \hat{H}(t)|a, t\rangle$$

De : $\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$ il suit pour la valeur moyenne de \hat{A} :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

La projection sur l'espace de configuration de l'équation d'évolution donne :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(\mathbf{q}, t) = \hat{H}(t) \Psi_a(\mathbf{q}, t) \quad (8-19)$$

qui est l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

■ **Remarque : Description de Heisenberg :**

Dans cette description seuls les opérateurs observables, notés alors ici $\tilde{A}(t)$, sont dépendants du temps, les

états quantiques $|\tilde{a}\rangle$ du système restant inchangés. Il en résulte pour la valeur moyenne :

$$\langle A \rangle = \langle \tilde{a} | \tilde{A}(t) | \tilde{a} \rangle$$

Puisque l'état est supposé invariable avec le temps, on peut le fixer pour $t = t_0$:

$$|\tilde{a}\rangle = |a, t_0\rangle = U(t_0, t) |a, t\rangle = U^+(t, t_0) |a, t\rangle$$

car $U^+ = U^{-1}$, et quel que soit un autre temps intermédiaire t ; d'où la valeur moyenne de la grandeur :

$$\langle A \rangle = \langle \tilde{a} | U^+(t, t_0) \hat{A} U(t, t_0) | \tilde{a} \rangle$$

ce qui montre la relation entre les opérateurs de la description de Heisenberg et ceux de la description de Schrödinger :

$$\tilde{A}(t) = U^+(t, t_0) \hat{A} U(t, t_0) \quad (8-20)$$

L'équation de la dynamique dans la description de Heisenberg est :

$$\frac{d}{dt} \tilde{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{A}, \tilde{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{A} \quad (8-21)$$

8-1-7 - Désignation des 2 problèmes fondamentaux

- 1°) Tandis que l'évolution de l'onde quantique est déterministe et causale, et que l'onde contient l'information sur tous les états possibles de l'objet, la mesure fournit un résultat indéterministe, ou probabiliste ; pourquoi ? Ce problème est lié à la **cohérence du postulat 4 avec le postulat 6**.
- 2°) Tandis que l'évolution de l'onde quantique est linéaire et unitaire et que, par conséquent, la superposition des états possibles est conservée, lors de la mesure cette superposition est supprimée ; pourquoi ? Ce problème est lié à la **cohérence du postulat 5 avec le postulat 6**.

Aux réponses proposées, pour l'instant spéculatives, correspondent des modèles d'interprétation de la nature de la fonction d'onde quantique et du processus de mesure ; celui-ci traite soit de la réduction de l'onde quantique lors de la mesure ou observation, c'est-à-dire la projection instantanée des états possibles en un état unique, soit de la décohérence de la fonction d'onde, c'est-à-dire de sa disparition causée par les inévitables interactions de l'objet quantique avec son environnement. Avec le concept de décohérence, on peut tenter d'expliquer le passage du comportement quantique, qui fait intervenir la symétrie du temps et la rétrocausalité, aux comportements macroscopiques de la physique non quantique, où le temps prend une direction privilégiée du passé vers le futur : la « flèche du temps » (voir un article très accessible du physicien Roland Omnès [27], voir aussi [28]). Par décohérence, toute l'information portée par l'onde quantique relative aux états possibles superposés est perdue, et, en théorie de l'information comme en thermodynamique, toute perte d'information s'accompagne d'une augmentation d'entropie et donc se traduit par la flèche du temps, c'est-à-dire l'irréversibilité.

Les postulats 6 et 5 proposent des types d'évolution de la fonction d'onde de natures fondamentalement différentes, tant du point de vue mathématique que du point de vue logique (cf. réf. [84]). En effet, tandis qu'au postulat 6 il s'agit d'une évolution continue, réversible et déterministe, au postulat 5 il s'agit d'une évolution complètement discontinue – la réduction de l'onde quantique – indéterministe et irréversible (la fonction d'onde réduite à une seule composante propre, et la « sélection » de la valeur propre correspondante, résultat de la mesure, ne peuvent plus redonner l'onde quantique d'avant la mesure). Avec le postulat 6, l'évolution de la fonction d'onde conserve le produit scalaire hermitien (propriété d'unitarité, cf. postulat 1), par lequel la probabilité des états est calculée, tandis que, avec le postulat 5, l'évolution ne le conserve plus puisqu'il y a projection de la fonction d'onde sur le sous-espace vectoriel engendré par une fonction propre de l'observable. La probabilité de l'état correspondant à la fonction d'onde réduite ne

prend plus ses valeurs dans l'intervalle continu $[0, 1]$ mais devient soit 0 soit 1. La causalité permise par le postulat 6 disparaît avec le postulat 5.

De plus, il n'existe aucun critère mathématique permettant de déterminer lequel des postulats 5 ou 6 doit être appliqué pour étudier l'évolution d'un système quantique. Cette indétermination pose des difficultés, entre autres, dans la mise en œuvre des systèmes d'informatique quantique, particulièrement pour la préservation de l'intrication ou pour la prévention de la décohérence des états quantiques (voir par ex. [93]).

L'ensemble des deux problèmes mentionnés ci-dessus, avec leurs diverses conséquences, forme le **problème de la mesure quantique**. Ce problème laisse ouverte la question fondamentale du passage des descriptions quantiques aux descriptions classiques : si l'on considère que la physique quantique est une théorie englobante de la physique classique, comment s'obtiennent les résultats de la théorie classique à partir de ceux de la physique quantique, et dans quels cas l'emploi de la théorie quantique est-il exclusivement pertinent ? Le critère dépend-t-il des échelles d'observation ? De la taille des objets ? Des interactions entre systèmes (systèmes ouverts ou bien fermés) ? Etc. Il se pose ainsi la question, toujours actuelle, des racines quantiques du monde classique (voir par ex. [27], [28]) ; les propriétés classiques sont-elles des « moyennes » de propriétés quantiques (théorie d'Ehrenfest), et sous quelles conditions, ou encore les décohérences des états quantiques, qui conduisent aux systèmes classiques, apportent-elles la solution de la transition quantique \rightarrow classique, sous la condition que seuls les systèmes ouverts sont concernés (théorie de Zurek) ?

8-2 - Différentes interprétations de la physique quantique comme réponses proposées aux problèmes de la mesure quantique : réduction et décohérence de l'onde quantique ?

8-2-0 - Les différentes interprétations de la physique quantique se répartissent en véritables écoles de pensées chez les physiciens et certains philosophes. Je cite pour mémoire (liste non exhaustive, voir par ex. [85], et [91] pour une synthèse des comparaisons entre les interprétations autour du concept de décohérence) :

8-2-1 - L'interprétation positiviste de l'École de Copenhague, proposée initialement par Niels Bohr, suivie entre autres par Stephen Hawking : le formalisme de la physique quantique accède seulement à la connaissance que l'on peut avoir sur un système et non sur la réalité du système en soi, indépendante de toute observation ; l'interprétation va même jusqu'à remettre en cause la pertinence de concept de réalité physique, au sens où la seule réalité que l'on peut conférer à un objet est celle fournie par la mesure et l'observation, et que l'état réel d'un objet en-dehors de la mesure et de l'observation n'a pas de sens selon la méthode expérimentale. Cette interprétation ne se préoccupe donc pas de savoir pourquoi et comment a lieu la réduction des états quantiques lors de la mesure (postulat 5), ni de faire le lien entre l'interprétation probabiliste (postulat 4) et la nature déterministe de l'évolution des états quantiques en-dehors de toute mesure (postulat 6).

L'interprétation positiviste de l'École de Copenhague, encore à ce jour, est la position épistémologique « standard » du formalisme quantique. Cependant, des recherches sont menées pour établir la cohérence, voire la causalité, entre les postulats, et plus particulièrement le passage des réalités quantiques (au sens de la mesure ou observation) aux réalités du monde classique (comme c'est le cas des études sur la décohérence des états quantiques, initialisées notamment par W.H. Zurek – voir point 8-2-4 plus loin).

■ Dans l'interprétation standard de l'École de Copenhague les inégalités de Heisenberg expriment l'impossibilité ontologique de mesurer simultanément et avec une précision aussi grande que possible deux grandeurs conjuguées, c'est-à-dire dont les observables correspondantes ne commutent pas. Comme on l'a vu, c'est le cas, par exemple, de la position et de la quantité de mouvement.

Ainsi, pour les grandeurs physiques (mesurables) on ne peut parler seulement que de leur probabilité et des dispersions statistiques de leurs mesures, contraintes par les inégalités de Heisenberg ; d'ailleurs, celles-ci, dans l'interprétation de l'École de Copenhague, sont souvent désignées par « relations d'incertitudes de Heisenberg » au lieu de « inégalités de Heisenberg », plus générale et non marquée par une interprétation.

La performance des appareils et méthodes de mesure en matière de précision ne permet pas de s'affranchir

des contraintes sur les dispersions statistiques fixées par les inégalités de Heisenberg : c'est pourquoi, dans cette interprétation le caractère probabiliste des états quantiques est qualifié d'ontologique. Ces contraintes ne sont pas d'ordre technique, elles sont intrinsèques à la nature probabiliste des états quantiques.

■ Face à cette situation épistémologiquement nouvelle, les physiciens se sont posés la question suivante : ces dispersions statistiques irréductibles sont-elles causées par une connaissance insuffisante des conditions initiales sur l'état d'un système quantique ? Et si cette connaissance est améliorée, les contraintes sur les dispersions peuvent-elles être levées ?

Cette question revient à celle de l'existence des *variables cachées* qui, par définition, contribuent à l'évolution des états quantiques depuis leurs conditions initiales, sans pouvoir être identifiées par le seul formalisme quantique. L'existence de variables cachées, si elle était expérimentalement prouvée, amènerait à conclure que le formalisme quantique est une théorie non complète et qu'une théorie future englobante est nécessaire (voir par ex. [22]). Avec l'existence de variables cachées, le recours à une description essentiellement probabiliste ne traduirait pas la présence d'un hasard ontologique, mais serait dû à notre ignorance sur les variables cachées.

Si l'on parvient à prouver que la théorie quantique est complète, et donc que la description probabiliste n'est pas sous-tendue par l'existence de variables cachées, alors dans cette description le hasard intervient de manière intrinsèque. Noter que le caractère ontologique du hasard est dans la forme ondulatoire, sans annuler le caractère objectif de son objet (système, état, évolution, trajectoire de la particule) : c'est une probabilité *sur* notre information concernant l'objet.

Prouver la complétude de la théorie quantique nécessite une *expérience cruciale* – c'est-à-dire destinée à identifier les limites de validité d'une théorie, selon le principe de réfutabilité de Karl Popper ([22], [9], [24]) – reposant sur les critères de la preuve et sur la faisabilité de l'expérience.

Ces critères existent et ont été établis par John S. Bell et coll. En 1964 sous forme de l'*inégalité de Bell*, et plus précisément Bell-CHSH (J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt) [122], [123], [124].

■ *Remarque : quelques précisions sur l'inégalité de Bell* (voir par ex. [121], [22], [36] ch.5) :

Soit une théorie à variables cachées $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de distribution statistique $\rho(\lambda) = \rho(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. On examine, dans cette théorie, les corrélations 2 à 2 d'un système de particules. Par exemple, il peut s'agir des produits de désintégration d'une particule de spin 0 (donc un boson), qui donne des paires de particules de spins opposés $\pm 1/2$ (donc des fermions). Les trajectoires de ces particules sont corrélées par conservation de l'impulsion. Des analyseurs disposés sur ces trajectoires mesurent, sur leur axe propre, la composante des spins de ces particules (figure 8-2).

Les deux particules 1 et 2 issues de la désintégration étant corrélées, si l'une est sur une trajectoire (1'), alors l'autre est sur une trajectoire (2') qui n'est pas quelconque mais dépendant de cette corrélation. Même situation pour une autre trajectoire (1'') de la particule 1 et (2'') de la particule 2, etc. Les analyseurs A et B sont placés de manière à recueillir chacun une des deux particules. Les orientations des axes de A et B sont données par des paramètres « a » et « b », et les résultats de mesure obtenus par A et B, notés A(a) et B(b), dépendent de ces paramètres. Puisque ces résultats ne peuvent prendre que deux valeurs possibles et opposées, on peut les normaliser en posant $A(a) = \pm 1$, $B(b) = \pm 1$.

En présence de variables cachées (λ) intervenant avant la désintégration, les résultats de mesure donneraient : $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$. La corrélation entre les résultats finaux A(a) et B(b), concernés sur l'ensemble du domaine de variation (D) des variables cachées, est :

$$C(a, b) = \langle A(a)B(b) \rangle = \int_D A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$$

où $\rho(\lambda)$ est la distribution statistique des λ , caractéristique de la particule source, avec donc la condition de normalisation :

$$\int_D \rho(\lambda)d\lambda = 1$$

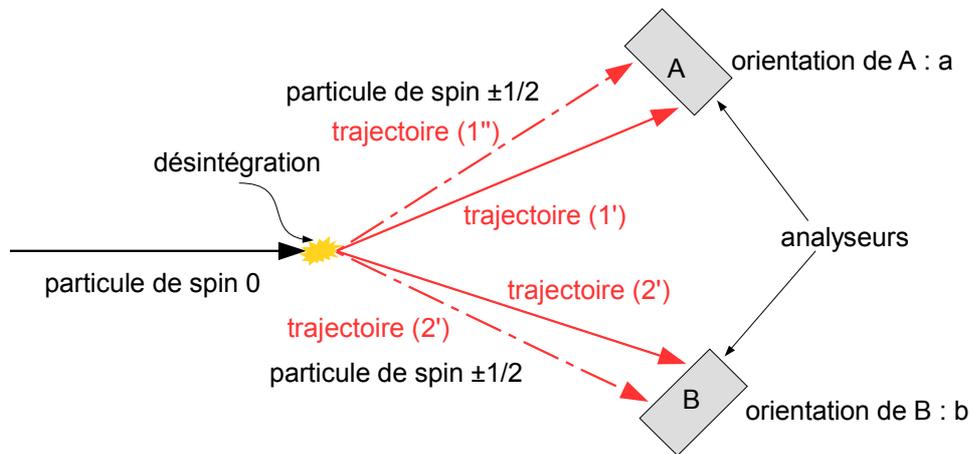


figure 8-2 : principe de détection du spin de particules issues de la désintégration d'une particule de spin 0, au moyen d'analyseurs A et B d'orientations respectives a et b

En présence d'un autre analyseur C, de résultat intermédiaire $C(a, \lambda)$, on montre que les corrélations vérifient :

$$|C(a, b) - C(a, c)| \leq 1 - \int_D B(b, \lambda) B(c, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Puisque l'on cherche un critère sur les corrélations entre $A(a)$ et $B(b)$, on montre que, pour une valeur b' de a et b où la corrélation $C(a, b)$ est totale, on a :

$$|C(a, b) - C(a, c)| \leq 2 - C(b', b) - C(b', c)$$

Si les corrélations dépendent uniquement des angles entre les axes des analyseurs A, B, C : $\theta_{BA} = b - a$, $\theta_{CB} = c - b$, $\theta_{BB'} = b - b'$, l'inégalité précédente prend la forme de l'**inégalité de Bell** :

$$|C(\theta_{BA}) - C(\theta_{BA} + \theta_{CB})| \leq 2 - C(\theta_{BB'}) - C(\theta_{CB} + \theta_{BB'}) \quad (8-22)$$

Si cette inégalité (8-22) n'est pas vérifiée par les mesures, alors les variables cachées n'interviennent pas dans le processus de formation des particules de spins opposés issues d'une particule source qui se désintègre.

C'est à partir de 1981 que la première expérience basée sur la vérification de l'inégalité de Bell a été conçue et réalisée par Alain Aspect et ses collaborateurs de l'Institut d'Optique d'Orsay (Philippe Grangier, Gérard Roger, Jean Dalibard) ; elle n'utilisait pas la désintégration d'un boson et fermions corrélés, mais l'analyse de la corrélation de photons polarisés émis par l'atome de calcium. Cette expérience montra clairement que l'inégalité de Bell n'était pas satisfaite, et donc conclut à l'absence de variables cachées (réf. [125]).

8-2-2 - Interprétation réaliste des mondes multiples (MWI « Many Worlds Interpretation ») (Hugh Everett (¹⁷)) [4], [35], [86], [87], [88], [89], dont il fut déjà question plus haut : elle confère à la fonction d'onde une réalité physique en retenant le postulat n°6 et en posant que le postulat n°5 (suppression de la superposition) est illusoire ; les états possibles appartiennent à des mondes différents, et si l'un est sélectionné lors de la mesure c'est parce que l'état du système observateur est intriqué (couplé) avec lui.

■ Dans cette interprétation, même la conscience peut être un facteur de sélection des états mesurés, avec cependant cette restriction : en théorie MWI, la conscience est un phénomène physique parmi d'autres, qui est concerné tout comme eux par le postulat 6 ; d'autres approches, reposant sur un idéalisme philosophique, font intervenir la conscience comme une entité située en dehors des lois quantiques, ou relevant d'une physique quantique modifiée qui reste à découvrir. Aussi, en théorie MWI, est-il préférable

17 Interprétation à laquelle adhèrent les physiciens David Deutsch, John Wheeler, DeWitt et Graham...

de conserver l'expression « état du système observateur » comme c'est le cas lorsqu'il s'agit du système de mesure.

■ Dans l'interprétation de l'École de Copenhague, le processus de mesure, ou d'observation, met en relation un système décrit par la physique classique – le système de mesure ou d'observation – et un système mesuré ou observé décrit, par hypothèse, par le formalisme de la physique quantique, ces deux systèmes étant donc ouverts l'un par rapport à l'autre, mais formant ensemble un système supposé fermé. Dans cette interprétation standard, la réduction de l'onde quantique (postulat 5) lors de la mesure ou de l'observation traduit la suppression de tous les états superposés sauf d'un seul, qui est l'état sélectionné.

Dans l'interprétation de Hugh Everett (1957), il en va tout autrement. La réduction de l'onde quantique n'exprime pas la disparition de la superposition des états rassemblés dans la fonction d'onde, mais traduit au contraire une sélection de l'un des états comme élément d'une branche d'histoires possibles de l'onde quantique, qui demeurent même en-dehors de toute mesure ou observation.

Ces histoires possibles continuent de suivre l'évolution déterministe régie par l'équation de Schrödinger (ou, de manière équivalente, par l'équation de l'opérateur d'évolution $U(t,t_0)$) (postulat 6) ; et elles continuent de coexister. L'une d'elles contient, parmi ses états, l'interaction associée à la mesure ou l'observation, et qui procède d'une intrication de l'objet quantique avec le système de mesure ou d'observation.

■ Cette interprétation implique alors :

- a) Le principe selon lequel la réduction de l'onde quantique est illusoire, et donc que le postulat n°5 n'est pas indispensable, parce qu'il est une conséquence du postulat n°6.
- b) L'interaction du système de mesure et de l'objet mesuré, qui est caractérisée par une intrication de leurs états, nécessite de considérer le système de mesure non plus comme un système « classique » mais comme un système relevant totalement ou en partie du formalisme quantique.
- c) Le maintien de la coexistence de branches d'histoires possibles en-dehors de toute mesure pose le principe d'existence d' « *univers multiples* » (ou multivers)⁽¹⁸⁾ en tant que chemins ou histoires possibles mutuellement indépendantes ⁽¹⁹⁾.

■ Ceci conduit à poser que le formalisme quantique doit s'appliquer à l'univers considéré comme un tout et comme seul système fermé pouvant contenir tous les chemins possibles d'évolution.

Le rôle de l'observateur, ou du système de mesure, vis-à-vis du système observé, devient ainsi relatif, en ce sens qu'il n'est pas central dans les histoires du système observé : système observateur et système observé relèvent de la même manière, et de façon équivalente, du même formalisme quantique dans leurs interactions ou intrication.

Dans cette « décentralisation » du rôle de la mesure et de l'observateur, un peu comme une « révolution copernicienne », sur le devenir des histoires des éléments de l'univers en tant qu'unique système fermé, la cosmologie quantique prend du sens sous la condition que l'on ne peut parler de l'évolution quantique de l'univers que depuis l'intérieur, puisque l'observateur et le système observé en font partie.

■ On a vu, dans l'expérience des fentes d'Young (figure 8-1), que la mesure de la trajectoire des électrons à travers l'une des fentes n°1 ou 2 détruit le caractère ondulatoire de l'état du système, ce qui se traduit par la suppression des interférences : dans ce cas, une des deux amplitudes de probabilité $|\psi_1|^2$ ou $|\psi_2|^2$, deviendrait nulle. L'existence d'une possibilité que les électrons suivent une trajectoire passant par la fente n°1, ou bien par la fente n°2, ou bien les deux fentes n°1 et n°2, équivaut à traiter l'évolution du système global en considérant celles de ses sous-systèmes (trajectoire passant par n°1, ou bien par n°2, ou bien n°1 et n°2 lequel correspond aux interférences) : la description du phénomène nécessite d'associer des probabilités aux évolutions de chaque sous-système.

Or, dans l'interprétation standard de l'École de Copenhague, ces probabilités sont liées au fait que le système est mesuré ou observé par un système extérieur (l'observateur ou le système de mesure, ou tout système qui interagit avec le système quantique) : ces probabilités associées aux histoires des sous-systèmes constituant le système global ne sont pas intrinsèques à ces sous-systèmes, c'est-à-dire

18 Attention : « multivers » ici n'est pas au sens des « univers-bulles » associés à la théorie de l'inflation cosmologique éternelle (paragraphe 5-4) (A. Linde, M. Inman...)

19 C'est pourquoi la théorie d'Everett est aussi désignée par MWI : « Many-Worlds Interpretation »). cette appellation est préférable à celle d' « univers parallèles » qui prête à confusion.

indépendantes de toute mesure. Autrement dit, dans l'interprétation standard « *il n'y a pas de mécanique quantique envisageable sans la présence d'observateur* » (Edgard Elbaz [36]), c'est-à-dire un système quantique ne se conçoit pas sans interaction avec un système extérieur.

Mais cela n'est plus admissible lorsque l'on cherche à appliquer le formalisme quantique à la cosmologie car l'univers existe et évolue avant toute observation ou mesure. C'est du moins une position épistémologique qualifiée de réaliste, comme c'est le cas pour l'interprétation réaliste des « mondes multiples » (MWI) d'Everett. Dans cette interprétation les probabilités associées aux évolutions des sous-systèmes inclus dans un système global fermé (l'univers) leur sont intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes de toute mesure ou observation.

■ **Remarque : branches d'histoires possibles** : Avant de présenter succinctement comment la théorie d'Everett interprète l'existence des trajectoires possibles d'un sous-système, rappelons comment, dans l'interprétation standard, la probabilité d'un résultat de mesure sélectionnant une de ces trajectoires possibles s'obtient comme probabilité conditionnelle (bayésienne) du passage de la particule par une trajectoire n°k et de sa position \mathbf{q} au moment de la mesure.

Pour cela on utilise l'opérateur projection d'une onde quantique (superposition d'états) sur le sous-espace propre d'une observable, vu en relation (8-14) :

$$\hat{\Pi}_k = \sum_{j=1}^{g_k} |\varphi_{k,j}\rangle\langle\varphi_{k,j}|$$

où $|\varphi_{k,j}\rangle$ sont les vecteurs du sous-espace propre de l'observable $\tilde{A}(t)$ en description de Heisenberg (cf. point 8-1-6). Par exemple, si $\tilde{A}(t)$ est l'observable position \mathbf{q} , et si $k = 1$ ou 2 selon que la trajectoire traverse la fente n°1 ou la fente n°2 dans l'expérience des fentes d'Young, on a avec des états quantiques non discrets comme c'est le cas ici :

$$\hat{\Pi}_k = \int_{D_k} |\mathbf{q}\rangle d^3\mathbf{q} \langle\mathbf{q}| \quad (8-23)$$

où D_k est le volume au voisinage de la fente n°k. Puisque (§ 8-1-5) on a :

$$\sum_k \hat{\Pi}_k = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_k \hat{\Pi}_j = \hat{\Pi}_k \delta_{jk}$$

il vient, dans l'exemple présent des deux trajectoires possibles n°1 et n°2 :

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_1 \hat{\Pi}_2 = 0$$

qui expriment la complémentarité, c'est-à-dire les événements n°1 et n°2 s'excluent mutuellement. La probabilité conditionnelle de mesurer à la position \mathbf{q} une trajectoire de la particule passant par une fente n°k ($k = 1$ ou $k = 2$) nécessite d'introduire la probabilité de détection de la particule en \mathbf{q} : elle est liée à l'opérateur $\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}$ de projection des états quantiques sur l'espace des états propres de \mathbf{q} .

Les projections des états quantiques $|\psi\rangle$ par $\hat{\Pi}_1$, $\hat{\Pi}_2$, et $\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}$ donnent les états quantiques dont l'expression normalisée est donnée par :

$$|\psi'_k(t)\rangle = \frac{\hat{\Pi}_k |\psi(t)\rangle}{|\hat{\Pi}_k |\psi(t)\rangle|} \quad k = 1, 2 \quad (8-24a)$$

où $P_k = |\hat{\Pi}_k |\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\varphi_k|\psi(t)\rangle|^2$ est la probabilité (ou densité de probabilité) de mesurer le système quantique dans un état propre de l'observable « particule traverse fente n°k », ainsi que :

$$|\psi''_{\mathbf{q}}(t)\rangle = \frac{\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}|\psi(t)\rangle}{|\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}|\psi(t)\rangle|} \quad (8-24b)$$

où $P_{\mathbf{q}} = |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle \varphi'_{\mathbf{q}}|\psi(t)\rangle|^2$ probabilité de mesurer le système quantique en \mathbf{q} ($\varphi'_{\mathbf{q}}$ sont les vecteurs propres de l'observable $\hat{\mathbf{q}}$ et φ_k ceux du projecteur).

Or il s'agit, ici, de formuler l'histoire du système quantique comme une suite de projections sur différents états propres d'observables qui évoluent avec le temps au cours du processus d'émission des particules vers des fentes d'Young et de mesure de leurs positions. On doit alors considérer l'évolution temporelle de ces projections, c'est-à-dire utiliser la description de Heisenberg. Pour chaque projecteur $\hat{\Pi}$ exprimé dans la description de Schrödinger (indépendant du temps t), désignant $\hat{\Pi}_k$ ou $\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}$, on a le projecteur exprimé dans la description de Heisenberg (relation (8-20)) :

$$\tilde{\Pi}(t) = U^+(t, t_0)\hat{\Pi}U(t, t_0)$$

soit, d'après (8-18) :

$$\tilde{\Pi}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right)\hat{\Pi}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right) \quad (8-25)$$

Soit une particule d'état quantique à l'instant initial t_0 : $|\psi(t_0)\rangle$. Soit t_1 l'instant où elle traverse l'une des fentes n°k ; en l'absence de mesure son état a évolué selon la description de Schrödinger :

$$|\psi(t_1)\rangle = U(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (8-25bis)$$

où $U(t_1, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_0)\hat{H}\right)$. Avec (8-24) la probabilité de mesurer la traversée de la fente n°k par la particule à l'instant t_1 est :

$$P_k = |\hat{\Pi}_k|\psi(t_1)\rangle|^2$$

et l'état quantique normalisé devient, en ce temps t_1 , avec (8-24a) :

$$|\psi'_k(t_1)\rangle = \frac{\hat{\Pi}_k|\psi(t_1)\rangle}{\sqrt{P_k}} \quad (8-26a)$$

Soit $t_2 > t_1$ le temps où la particule, après avoir traversé la fente n°k, atteint l'écran ; on obtient de même le nouvel état quantique :

$$|\psi'_k(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi'_k(t_1)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H}\right)\frac{\hat{\Pi}_k|\psi(t_1)\rangle}{\sqrt{P_k}} \quad (8-26b)$$

Si cette particule, qui a traversé la fente n°k (état (8-26b)) atteint l'écran à l'instant t_2 en une position \mathbf{q} , alors son état est la projection sur l'espace des vecteurs propres de $\hat{\mathbf{q}}$ (8-24b) :

$$|\psi''_{\mathbf{q}k}(t_2)\rangle = \frac{\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}|\psi'_k(t_2)\rangle}{\sqrt{P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|k)}} \quad (8-27a)$$

où $P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|k)$ est la probabilité de mesurer la particule en \mathbf{q} après qu'elle ait traversé la fente n°k : c'est une **probabilité conditionnelle** « probabilité de mesurer la particule en \mathbf{q} si elle a traversé la fente n°k », ce que l'on note ($\mathbf{q}|k$). Elle est :

$$P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|k) = |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}}|\psi'_k(t_2)\rangle|^2 \quad (8-27b)$$

Or le théorème de Bayes sur les probabilités conditionnelles exprime :

$$P(A \text{ et } B) = P(A) P(B|A)$$

que l'on traduit ainsi :

probabilité conjointe des événements A **et** B = (probabilité de l'événement A) x (**probabilité conditionnelle** événement B **si** événement A)

ce qui donne ici :

$$P(\mathbf{q} \text{ et } k) = P_k \times P_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|k)$$

qui donne, avec (8-26a) et (8-27b) :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{q} \text{ et } k) &= |\hat{\Pi}_k |\psi(t_1)\rangle|^2 |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}} |\psi'_k(t_2)\rangle|^2 \\ &= |\hat{\Pi}_k |\psi(t_1)\rangle|^2 |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}} \exp(-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H}) \frac{\hat{\Pi}_k |\psi(t_1)\rangle}{\sqrt{P_k}}|^2 \\ &= P_k \cdot |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}} \hat{\Pi}_k |\psi(t_1)\rangle|^2 \frac{1}{P_k} |\exp(-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H})|^2 \\ &= |\exp(-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H})|^2 |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}} \hat{\Pi}_k |\psi(t_1)\rangle|^2 = |U(t_2, t_1) \hat{\Pi}_{\mathbf{q}} \hat{\Pi}_k U(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle|^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (8-25bis), soit :

$$P(\mathbf{q} \text{ et } k) = |\hat{\Pi}_{\mathbf{q}} U(t_2, t_1) \hat{\Pi}_k U(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle|^2 \quad (8-28)$$

qui, en utilisant la description de Heisenberg avec (8-20) à savoir :

$$\tilde{\Pi}_{\mathbf{q}}(t_2) = U^+(t_2, t_0) \hat{\Pi}_{\mathbf{q}} U(t_2, t_0)$$

$$\tilde{\Pi}_k(t_2) = U^+(t_2, t_0) \hat{\Pi}_k U(t_2, t_0)$$

prend la forme simple :

$$P(\mathbf{q} \text{ et } k) = |\tilde{\Pi}_{\mathbf{q}}(t_2) \tilde{\Pi}_k(t_1) |\psi(t_0)\rangle|^2 \quad (8-29)$$

■ **Remarque sur la rétrocausalité** : (8-29) montre que la mesure et la probabilité de son résultat sont liées à un sous-système constitué de la particule avec son histoire. Dans l'interprétation standard de l'École de Copenhague il est admis que la mesure renseigne, a posteriori, sur l'histoire ou la trajectoire de l'objet quantique d'avant la mesure, qui sont concernées par la probabilité conjointe. Or si le système est fermé, on ne peut plus le considérer, de l'extérieur, comme constitué de sous-systèmes auxquels on peut appliquer (8-29). C'est le cas de la cosmologie quantique où l'univers doit être considéré comme un ensemble clos.

C'est pourquoi on ne peut pas, dans l'expérience des fentes d'Young, parler du passage par une fente n°k sans inclure le passage final en \mathbf{q} : $\tilde{\Pi}_k(t_1)$ n'est pas mesurable seul. Quand on oppose l'argument de la rétrocausalité (voir par ex. [109], [110], [111]) – à savoir ici « la particule évolue avant la mesure comme pour passer en \mathbf{q} » – on fait une erreur : on reconstitue un état a priori à partir de l'état a posteriori alors que celui-ci l'inclut.

Dans la théorie d'Everett toutes les histoires possibles doivent être prises en compte simultanément lorsque l'on considère un objet quantique comme non décomposable en sous-systèmes, mais comme élément indissociable d'un ensemble qui est seul système clos. Dans ce modèle, le système d'observation ou de mesure et l'objet mesuré sont sur une même branche d'histoire de l'univers : le fait que l'observateur mesure les particules passant par la fente n°k n'implique pas que la particule ne passe pas par une autre fente en suivant une autre trajectoire.

■ Il faudrait donc, d'après la théorie d'Everett, considérer toutes les branches d'histoires possibles pour un objet quantique, depuis une condition initiale jusqu'à des états correspondant à une date t_n , à travers des

états possibles intermédiaires $t_0 \leq t_i \leq t_n$, $i = 0, 1, \dots, n$. À chaque étape intermédiaire t_i les chemins conduisant aux états possibles sont repérés par w_i et correspondent aux projecteurs $\hat{\Pi}_{w_i}(t_i)$, ou ce qui revient au même, par leurs probabilités de leur mesure :

$$P_{w_i}(t_i) = |\hat{\Pi}_{w_i}|\psi(t_i)\rangle|^2$$

ou dans la description de Heisenberg :

$$P_{w_i}(t_i) = |\tilde{\Pi}_{w_i}(t_i)|\psi(t_0)\rangle|^2 \quad (8-30a)$$

vérifiant les conditions de :

- complémentarité :

$$\sum_{w_i} \tilde{\Pi}_{w_i}(t_i) = \mathbf{1} \quad (8-30b)$$

- orthogonalité :

$$\tilde{\Pi}_{w_i}(t_i)\tilde{\Pi}_{w'_i}(t_i) = \delta_{w_i w'_i} \tilde{\Pi}_{w_i}(t_i) \quad (8-30c)$$

Dans l'exemple de l'expérience des fentes d'Young, pour 2 fentes, l'ensemble des histoires possibles est représenté figure 8-3 où (8-30a) correspond à :

$i = 0 : t_0$: condition initiale :	$w_0 = 1$	mesure (supposée ne pas perturber la particule)
	$w_0 = 2$	pas de mesure
$i = 1 : t_1$: fente n°1 :	$w_1 = k = 1$	et $w_0 = 1$ mesure
	$w_1 = k = 1$	et $w_0 = 2$ pas de mesure
fente n°2 :	$w_1 = k = 2$	et $w_0 = 1$ mesure
	$w_1 = k = 2$	et $w_0 = 2$ pas de mesure
$i = 2 : t_2$: position $q_1 = q$:	$w_2 = 1$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	$w_2 = 1$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 2$ (pas de mesure)	
	$w_2 = 1$ et $w_1 = 2$ (fente 2) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	$w_2 = 1$ et $w_1 = 2$ (fente 2) et $w_0 = 2$ (pas de mesure)	
autre position q_2 :	$w_2 = 2$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	$w_2 = 2$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 2$ (pas de mesure)	
	$w_2 = 2$ et $w_1 = 2$ (fente 2) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	$w_2 = 2$ et $w_1 = 2$ (fente 2) et $w_0 = 2$ (pas de mesure)	
autre position q_3 :	$w_2 = 3$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	$w_2 = 3$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 2$ (pas de mesure)	
etc...		
autre position q_n :	$w_2 = n$ et $w_1 = 1$ (fente 1) et $w_0 = 1$ (mesure)	
	etc...	

En réitérant (8-26a) et (8-26b) aux différentes dates $t_j = t_1, t_2, \dots, t_n$ des histoires possibles, et en utilisant (8-20) pour la description de Heisenberg, à partir d'une condition initiale en t_0 , on obtient que, pour chaque histoire possible où les w_j ont différentes valeurs comprises entre 1 et n , la fonction d'onde résulte d'une chaîne de projecteurs associés aux états intermédiaires, C_w :

$$|\psi\rangle = \sum_w C_w |\psi(t_0)\rangle \quad \left| \begin{array}{l} \text{avec: } C_w = \tilde{\Pi}_{w_n}(t_n)\tilde{\Pi}_{w_{n-1}}(t_{n-1})\dots\tilde{\Pi}_{w_1}(t_1) \end{array} \right. \quad (8-31)$$

où l'indice de sommation $w = \{w_n, w_{n-1}, \dots, w_1\}$ désigne le chemin parcouru. Dans l'exemple de la figure 8-3 on a pour le chemin « mesure d'une particule passant par la fente n°2 et atteignant l'écran en q » :

$$w = \{w_1 = 2, w_2 = 1\}$$

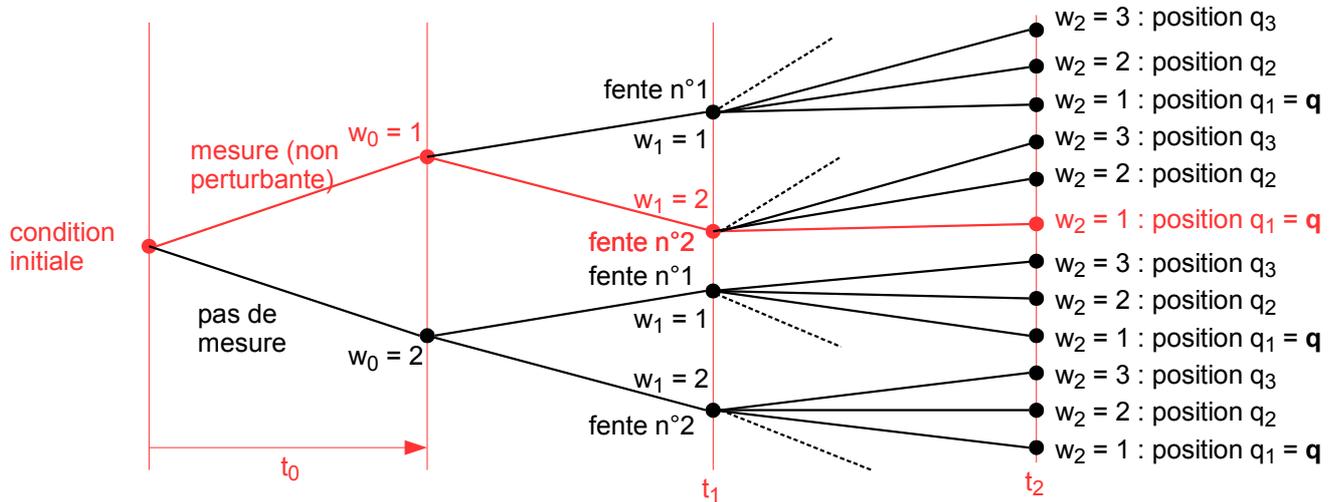


figure 8-3 : Branches d'histoires possibles dans la théorie d'Everett (MWI).
L'histoire en rouge concerne la mesure d'une particule passant par la fente n°2
et atteignant l'écran à la position q , dans l'expérience des fentes d'Young

L'indice w désigne toutes les histoires (chemins) possibles, et (8-31) signifie qu'elles sont déjà contenues dans les conditions initiales avant toute mesure. Comme signalé à la remarque plus haut sur la rétrocausalité, il ne faut pas conclure que la particule « connaît » d'avance ses futurs possibles, ou qu'il y a rétrocausalité ([107], [108], [109], [110], [111], [112], [113]). Il s'agit plutôt d'une liste des états compatibles avec l'une ou l'autre condition de mesure ou d'absence de mesure.

À partir de (8-31), on généralise (8-29) :

$$P(w) = |C_w|\psi(t_0)\rangle|^2 \quad (8-32)$$

et quantifie la probabilité de présence d'une histoire possible désignée par w , lors d'une mesure effectuée à la date t_n .

(8-32) s'écrit encore :

$$P(w) = \langle \psi(t_0) | C_w^+ C_w | \psi(t_0) \rangle \quad (8-32bis)$$

■ L'interprétation MWI présente les intérêts suivants dans les problèmes de la mesure quantique :

- Elle apporte une réponse claire aux deux problèmes n°1 et 2 énoncés au point 8-1-7.
- Elle apporte une signification physique réaliste à l'intégrale de chemin de Feynman.
- Elle résout le problème de la contrafactualité.

■ Cependant elle a les inconvénients suivants :

- Le processus de mesure n'est pas détaillé en application du postulat n°5.
- Elle n'apporte pas de critères permettant d'identifier l'instant où les projecteurs interviennent et où a lieu la subdivision d'une branche d'histoire de l'univers.
- Elle n'apporte pas de conditions sur la possibilité d'attribuer des probabilités aux branches d'histoire (postulat n°4).
- Enfin, l'idée qu'un nombre potentiellement très élevé (voire même transfini) d'univers possibles issus de branches d'histoires « parallèles » est en contradiction avec le principe épistémologique d'Ockham.

Ces objections pourraient être levées dans l'interprétation suivante des « histoires consistantes ».

8-2-3 - Interprétation par les « histoires consistantes » d'un objet quantique (Robert Griffiths, Roland Omnès, Murray Gell-Mann, James Hartle...)

Dans cette interprétation, en considérant l'existence des histoires possibles introduite par Everett, seules certaines d'entre elles doivent remplir certains critères pour avoir un sens réaliste tout en conservant l'interprétation standard.

Cette approche a été proposée par Robert B. Griffiths en 1984, et a ensuite été reprise et développée par Roland Omnès 1987 et Murray Gell-Mann en 1990 (voir par ex. [27]).

■ Dans une opération de mesure, on doit considérer une fonction d'onde globale où les états superposés sont ceux de l'objet, du dispositif de mesure et de l'environnement ; à cause des incertitudes de Heisenberg qui introduisent le caractère essentiellement probabiliste des processus, l'objet rencontre successivement plusieurs de ces états possibles, comme une succession de parcours de tronçons de trajectoires ; n'ont de sens réel que les trajectoires qui vérifient certaines conditions mathématiques dites de rationalité (fondées sur les théorèmes de Lars Hörmander et de Yuri Egorov portant sur les projecteurs), et impliquant que les histoires ou trajectoires n'interfèrent pas, pour elles seules la probabilité peut être déterminée ; les autres histoires ou trajectoires présentes dans la superposition sont exclues et irréalistes.

Si l'on fait la somme des probabilités $P(w)$ sur toutes les valeurs possibles de l'une des étapes w_k figurant dans l'ensemble des histoires possibles $w = \{w_n, \dots, w_k, \dots, w_1\}$, on écrit :

$$\sum_{w_k} P(w) = \sum_{w_k} \langle \psi(t_0) | C_{w_n \dots w_k \dots w_1}^+ C_{w_n \dots w_k \dots w_1} | \psi(t_0) \rangle$$

Or : $C_{w_n \dots w_k \dots w_1}^+ = C_{w_1 \dots w_k \dots w_n}$ d'où

$$\sum_{w_k} P(w) = \sum_{w_k} \langle \psi(t_0) | \tilde{\Pi}_{w_1} \dots \tilde{\Pi}_{w_k} \dots \tilde{\Pi}_{w_n} \tilde{\Pi}_{w_n} \dots \tilde{\Pi}_{w_k} \dots \tilde{\Pi}_{w_1} | \psi(t_0) \rangle$$

Supposons que deux branches w et w' ne peuvent pratiquement pas interférer (et donc pratiquement orthogonales), cela se traduit par la **condition de décohérence** :

$$\langle \psi(t_0) | C_{w'}^+ C_w | \psi(t_0) \rangle \approx 0 \quad \forall w'_k \neq w_k \quad (8-33)$$

où $w'_k \in w'$ et $w_k \in w$. Dans ce cas on a approximativement :

$$\begin{aligned} \sum_{w_k} P(w) &\approx \sum_{w_k, w'_k} \langle \psi(t_0) | C_{w_n \dots w'_k \dots w_1}^+ C_{w_n \dots w_k \dots w_1} | \psi(t_0) \rangle \\ &= \sum_{w_k, w'_k} \langle \psi(t_0) | \tilde{\Pi}_{w_1} \dots \tilde{\Pi}_{w'_k} \dots \tilde{\Pi}_{w_n} \tilde{\Pi}_{w_n} \dots \tilde{\Pi}_{w_k} \dots \tilde{\Pi}_{w_1} | \psi(t_0) \rangle \end{aligned}$$

(8-30c) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{w_k} P(w) &\approx \sum_{w_k, w'_k} \langle \psi(t_0) | \tilde{\Pi}_{w_1} \dots \delta_{w_k w'_k} \tilde{\Pi}_{w_k} \dots \tilde{\Pi}_{w_n} \tilde{\Pi}_{w_n} \dots \tilde{\Pi}_{w_1} | \psi(t_0) \rangle \\ &= \langle \psi(t_0) | \tilde{\Pi}_{w_1} \dots \left(\sum_{w_k} \tilde{\Pi}_{w_k} \right) \dots \tilde{\Pi}_{w_n} \tilde{\Pi}_{w_n} \dots \tilde{\Pi}_{w_1} | \psi(t_0) \rangle \end{aligned}$$

(8-30b) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{w_k} P(w) &\approx \langle \psi(t_0) | \tilde{\Pi}_{w_1} \dots \tilde{\Pi}_{w_n} \tilde{\Pi}_{w_n} \dots \tilde{\Pi}_{w_1} | \psi(t_0) \rangle \\ &= P(w_n, \dots, w_{k+1}, w_{k-1}, \dots, w_1) \end{aligned}$$

où w_k ne figure pas.

Ainsi, si deux branches des histoires possibles n'interfèrent pas pratiquement (ou s'excluent mutuellement), la somme des probabilités sur toutes les valeurs possibles correspondant à une étape w_k est égale à la probabilité de toutes les histoires où w_k n'apparaît pas (**règle de la somme des probabilités**) :

$$\sum_{w_k} P(w) \approx P(w_n, \dots, w_{k+1}, w_{k-1}, \dots, w_1) \quad (8-34)$$

Dans l'exemple de l'expérience avec deux fentes d'Young (8-34) donne :

$$\sum_{w_2} P(w_3, w_2, w_1) = P(w_3, w_1)$$

qui signifie : sur le chemin, l'histoire, où la particule est, ou n'est pas, mesurée (w_1 fixé) et où l'on observe une position sur l'écran à l'arrivée (w_3 fixé), la probabilité d'être passée par toutes les fentes possibles (w_2 variable) dépend seulement de w_3 et w_1 dès lors que les chemins passant par des valeurs différentes de w_2 ($w_2 = 1, 2$ ou 3 dans notre exemple figure 8-3) vérifient la condition de décohérence (8-33).

(8-34) implique qu'en mécanique quantique les prédictions sont possibles lorsque la superposition des états est accompagnée de la décohérence de certaines de leurs histoires, parce que l'on peut leur attribuer une probabilité.

■ **Remarques : décohérence et chat de Schrödinger** : Plus précisément la décohérence entre des branches des histoires possibles remplacerait donc la mesure telle que l'admet l'interprétation standard (réduction, postulat n°5) où les probabilités des sous-systèmes sont prises en compte. En l'occurrence, dans l'expérience des fentes d'Young, l'interaction entre une particule et la configuration de mesure pour laquelle le passage par une des fentes n°k est fixée, implique la décohérence des autres branches qui correspondent à d'autres configurations de mesure. Il devient alors possible d'attribuer une probabilité à la branche d'histoire mesurée.

Qu'il fasse l'objet d'une interprétation positiviste de l'École de Copenhague, ou réaliste d'« univers multiples » d'Everett, le formalisme de la théorie quantique offre l'intérêt, en matière d'épistémologie de la connaissance rationnelle du monde, qui est bien résumé dans [126] (Gilles Cohen-Tannoudji) : les deux constantes, de Planck h , et de Boltzmann k_B « témoignent d'une limitation de principe de la connaissance humaine : **toute connaissance a un coût**. Le temps pendant lequel il est possible de prédire l'évolution d'un système s'avère nécessairement limité. (...) Les constantes universelles h et k_B délimitent un horizon temporel, elles traduisent l'incompatibilité d'**ici** et **toujours**. (...) Cela signifierait-il que toute science est désormais impossible ? (...) La révolution des quanta a permis d'opérer un formidable retournement (...) : les limitations de principe de la connaissance sont, grâce à elle, devenues des points d'appui pour de nouvelles avancées scientifiques. (...) Puisqu'on ne peut plus faire abstraction des conditions de l'observation, il convient de les inclure dans le contenu même des concepts ⁽²⁰⁾. (...) Je propose d'utiliser la notion d'**horizon** qui [possède] la propriété d'unir « subjectif » et « objectif ». Un horizon est objectif, puisque s'il n'y avait pas le monde il n'y aurait évidemment pas d'horizon ; mais il est aussi subjectif, puisqu'il dépend de la position de l'observateur dont il est l'horizon. La ligne d'horizon sépare le monde en deux parties : celle qui se trouve du côté de l'observateur, nous pouvons l'appeler (...) domaine de l'**actualité**, celle qui est au-delà de ce monde propre, ou domaine de la **potentialité**. La ligne d'horizon apparaît fictive, virtuelle, immatérielle ; elle n'existe que par rapport à l'observateur. Elle est inaccessible, car elle fuit toujours ; elle est mobile, et son mouvement obéit à celui de l'observateur. **Elle peut se déplacer à la vitesse de la lumière ou au prix d'un simple quantum d'action.** »

Et la théorie quantique pose une certitude :

[126] : « Le monde réel est maintenant pensé comme le lieu de toutes les lignes d'horizon possibles (...). Les concepts quantiques (...) décrivent non pas « le monde réel » (...) mais ses lignes d'horizon. (...) La théorie quantique a dû renoncer à la prédictibilité probabiliste. Mais la prise en compte du

20 Note perso : et certains auteurs considèrent que, à la limite, la prise en compte des effets subjectifs, voire de la conscience, dans la connaissance restituée de manière plus ou moins directe un caractère objectif à celle-ci.

quantum d'action [a nécessité de construire] le concept d'**amplitude de probabilité** ⁽²¹⁾. (...) Une amplitude de probabilité réalise donc l'unité d'une **actualité** et d'une **potentialité** : le pôle actuel est situé dans le module, directement lié à la probabilité, qui est mesurable à l'aide d'expériences répétées, et le pôle potentiel est dans la phase, laquelle n'est pas mesurable, mais permet de faire correspondre à une probabilité donnée toute une classe d'amplitudes, potentiellement équivalentes, ne différant que par leurs phases.

(...) L'essentiel du formalisme de la théorie quantique consiste en un mode d'emploi strict des amplitudes de probabilité. La règle d'or qui le résume peut être énoncée comme suit : dans le domaine de l'indiscernabilité ⁽²²⁾, les amplitudes de probabilité sont additionnées (...), dans le domaine de la discernabilité, ce sont les probabilités que l'on ajoute. La règle d'additivité (...) des amplitudes de probabilité dans le domaine de l'indiscernabilité permet au (...) formalisme de s'adapter à la dualité onde-corpuscule qui est l'une des caractéristiques les plus déroutantes de l'univers quantique. (...) L'idée majeure (...) de l'École de Copenhague est celle de la **complémentarité** des points de vues ondulatoire et corpusculaire : c'est une même réalité quantique qui, selon les conditions de l'observation (...), révèle à l'observateur des aspects ondulatoires ou corpusculaires. »

Cette complémentarité implique des observations non classiques pour des corpuscules, telles que les interférences dans l'expérience des fentes d'Young. Or il se trouve que, dans le formalisme quantique, les amplitudes de probabilité peuvent interférer (cf. relation (8-5)) :

[126] « Quantiquement, les voies de passage d'un photon par l'un ou l'autre des deux trous sont des voies **indiscernables** (...), parce que pour savoir par quel trou est passé un photon, il faudrait faire une expérience qui coûterait au moins un quantum d'action. Les deux voies étant ainsi indiscernables, les amplitudes de probabilité qui leur correspondent doivent être additionnées (...) pour donner l'amplitude totale de probabilité d'impact d'un photon sur un point de l'écran. (...) Mais les amplitudes de probabilité peuvent aussi servir à étudier les voies discernables (...). On peut en effet imaginer et construire des dispositifs pour déceler par quel trou passent les photons, en ne comptant les impacts de photons que si l'on sait par quel trou ils sont passés. Et l'on découvre alors que les interférences disparaissent ! Cette disparition signifie que, pour des voies discernables, il faut ajouter les probabilités, sans possibilités d'interférences. »

Or, dans la théorie MWI, la mesure des voies discernables (c'est-à-dire dont les chemins sont indépendants) nécessite de manipuler les probabilités si des voies, ou branches d'histoires possibles, sont mutuellement en décohérence, comme vu plus haut.

Sur un plan épistémologique, l'introduction du concept d'« horizons » de la physique, tel que l'exprime G. Cohen-Tannoudji, présente un intérêt majeur pour la connaissance malgré l'apparente restriction qu'il semble imposer a priori, car il renforce un « devoir » de vigilance et de prudence liées à la nécessité de circonstancier de manière la moins ambiguë possible les conditions d'une observation ou d'une mesure. En effet, [126] « On commence à entrevoir comment une certaine lucidité à propos des limitations qui affectent, par principe, la connaissance, permet sans aucun paradoxe d'affiner la connaissance que nous prenons du réel. Pour penser l'au-delà de l'horizon de discernabilité, on a forgé le concept d'amplitude de probabilité. À l'aide de ce concept les physiciens peuvent, sans éliminer cet horizon, le faire bouger, et donc découvrir des propriétés insoupçonnées du monde réel. »

Comme indiqué dans [36], la décohérence des histoires possibles dans la théorie des histoires consistantes implique que l'interprétation de l'École de Copenhague est une approximation, et que les paradoxes tels que celui du chat de Schrödinger a un caractère illusoire :

[36] « L'interprétation de Copenhague est une **approximation** du cadre plus général lié aux situations de mesure quand la décohérence des configurations différentes de l'appareillage peut être idéalisée comme si elle était exacte et instantanée. Bien que les processus de mesure impliquent la décohérence, ce ne sont que des cas spéciaux d'histoires décohérentes. Des probabilités peuvent être assignées aux différentes alternatives décohérentes d'un système qu'il y ait ou non un observateur pour enregistrer ces valeurs. Cela éclaire différemment le paradoxe du chat de Schrödinger, qui a justement conduit Everett à la théorie des mondes parallèles [MWI].

Rappelons le paradoxe. Un chat est dans une enceinte fermée dans laquelle un système aléatoire

21 Note perso : cf. postulats 1 et 4. l'amplitude de probabilité est la fonction d'onde.

22 Note perso : Deux états ou deux transitions d'un système quantique sont discernables si l'observation de leur distinction coûte au moins un quantum d'action (constante de Planck h), et indiscernables dans le cas contraire.

déclenche le dégagement d'un gaz mortel. Tant que l'observateur ne regarde pas l'intérieur de l'enceinte il y a 50% de chances pour que le chat soit mort et 50% pour que le chat soit vivant. L'interprétation de Copenhague indique que c'est l'observation qui détermine la fonction d'onde du chat et sa probabilité d'existence au moment de l'observation. L'interprétation d'Everett est qu'il existe une branche d'univers dans laquelle le chat est vivant et une autre dans laquelle le chat est mort, et l'observateur vit dans un de ces univers parallèles. »

Quant à elle, la décohérence suppose que [36] « les deux histoires sont décohérées et qu'on peut assigner une probabilité (50%) à chacune des histoires même si on n'observe pas l'intérieur de la cage ⁽²³⁾. Cette interprétation semble en effet plus proche de notre sens logique et n'entraînant pas les spéculations inévitablement liées aux « mondes parallèles », non plus que les spéculations liées à la présence de l'homme dans l'univers comme élément indispensable de toute mesure et par là même de l'existence même du monde. »

Dans un article [127], T. Sakaguchi a montré précisément comment la théorie MWI éliminait le caractère paradoxal des états superposés de l'expérience fictive du « chat de Schrödinger » ; et dans [90] il apporte quelques précisions et corrections sur les interprétations erronées de la théorie MWI que certains auteurs, comme Adrian Kent [128], opposèrent à cette théorie. Pour autant, sans le concept de décohérence entre les branches d'histoires (histoires consistantes), le paradoxe des « mondes parallèles » et de la présence de l'observateur comme acteur incontournable du réel demeure dans la théorie MWI et l'interprétation standard.



■ L'interprétation des « histoires consistantes » présente plusieurs intérêts :

- a) Elle jette un pont entre l'indéterminisme quantique et le déterminisme macroscopique parce que la décohérence de l'onde est d'autant plus forte et rapide que le système « mesure + objet + environnement » nécessite un très grand nombre de variables d'état pour être décrit et que sa taille est grande ;
- b) Elle introduit naturellement la flèche du temps, et donc l'irréversibilité dans les systèmes réels ;
- c) Elle élimine le paradoxe du chat de Schrödinger qui repose sur les états superposés sans distinction de réalisme ;
- d) Elle répond aux problèmes n°1 et n°2 (point 8-1-7) ;
- e) Elle est cohérente avec l'interprétation orthodoxe de l'École de Copenhague, sans pour autant invoquer une position positiviste ;
- f) Elle élimine le paradoxe de la rétrocausalité par suite de (b) ; par suite de (a) elle confirme l'universalité du formalisme quantique dans la physique, c'est-à-dire que toute théorie physique à quelque échelle que ce soit est réductible in fine à ce formalisme (ce qui est intéressant pour le point de vue du monisme philosophique) ;
- g) Elle inspire des expériences qui permettent de retrouver des comportements quantiques avec des objets quasi-macroscopiques ou moyennant un isolement quasi complet de l'objet qui préserve la superposition (par exemple Michel Devoret et Daniel Estève du CEA Saclay...[129], [130]), ce qui est prometteur en informatique quantique...

23 Note perso : superposition des états, mais décohérence de leurs histoires.

■ En revanche la question du passage des possibles à l'unique reste ouverte, ceci malgré cette nouvelle vision de la décohérence quantique : « *Par essence la théorie quantique est probabiliste et elle ne peut envisager et décrire que des possibles. Au contraire la réalité empirique est à l'évidence unique. Comment comprendre alors, dans le cadre de la pensée quantique, qu'une expérience aboutit sur un fait unique, sans que nous comprenions comment il est sélectionné parmi tous les possibles ? C'est la question de l'actualisation ou de l'objectification, que la décohérence ne permet pas d'éliminer* » (Roland Omnès [27]).

8-2-4 - Interprétation réaliste de la décohérence de l'onde quantique (Hans-Dieter Zeh, W.H. Zurek, Serge Haroche...) : La superposition des états quantique contenue dans la fonction d'onde correspond à une réalité indépendante de l'observateur, mais l'objet observé n'étant jamais complètement isolé, ses interactions avec l'environnement entraîne la décohérence de l'onde, la suppression de la superposition des états purs, au bout d'un temps fini et non instantané ; pour en tenir compte, on a alors besoin du postulat n°5.

■ La théorie de la décohérence étudie les interactions, plus ou moins spontanées, pouvant exister entre un système quantique et son environnement, quantique ou bien macroscopique, qui peuvent avoir pour conséquence la suppression des interférences associées à la superposition des états du système quantique (voir par exemple réf. [91], [92], [93], [94], [96], [135], [136], [137]).

Les pertinences de cette interprétation sont :

- de tenter de comprendre l'émergence du monde classique à partir de la mécanique quantique ;
- de tenter de dégager la flèche du temps, c'est-à-dire le sens privilégié passé vers futur des évolutions physiques, tandis que, par le postulat n°6, les évolutions de l'onde quantique sont conservées par renversement du temps $t \rightarrow -t$.

Mais nous verrons aussi les problèmes que cette théorie semble ne pas encore résoudre.

■ On a vu (points 8-1-4, 8-2-2, 8-2-3) que dans l'expérience des fentes d'Young les interférences disparaissent lorsque la mesure est effectuée au niveau d'une des fentes n°k : d'après le postulat n°5 il y a réduction du paquet d'onde due à la mesure.

La disparition des interférences peut aussi survenir si le système quantique (par exemple la particule) interagit avec son environnement entre la traversée d'une fente et son arrivée sur l'écran : la particule et l'environnement forment un système intriqué, c'est-à-dire non séparable. La même situation se présente lorsque le système (particule) et son environnement sont mesurés globalement, ensemble. Dans ces cas-là les probabilités de résultats de mesure, les amplitudes de la fonction d'onde, sont calculées comme si la fonction d'onde était réduite conformément au postulat n°5 ; cependant, la réduction du paquet d'onde, c'est-à-dire la diagonalisation de la matrice densité de probabilité, est une traduction idéalisée d'un processus de décohérence dont la durée finie est considérée tendant vers l'infini. Dans ces cas, aussi, les relations concernant la phase de la fonction d'onde restent distribuées au niveau de l'ensemble « système + environnement », et non pas limitées au système.

■ **Remarque** : La théorie de la décohérence ne doit pas être confondue avec la théorie des histoires consistantes (point 8-2-3), où les probabilités des différents états portés par l'onde à un instant donné sont calculées à partir des probabilités de ces états à un instant passé et des probabilités conditionnelles, comme s'il y avait eu réduction du paquet d'onde (cf. relations (8-33) et (8-34)).

■ Les modèles de l'interprétation réaliste de la décohérence de l'onde quantique (encore appelée théorie de la décohérence dynamique) appliquent principalement :

■ Le principe suivant lequel la **suppression des interférences** dépend de l'environnement du système et de leurs propriétés physiques (dimensions, température, masse...), et s'effectue sur une durée supérieure à un temps caractéristique souvent très petit, permettant de l'assimiler à un processus spontané (contrairement à la réduction, dans le postulat n°5, posée comme instantanée, c'est-à-dire temps nul).

■ Le principe suivant lequel, lors de son interaction avec le système, l'environnement est couplé à des « **états préférés** » dont il supprime leurs interférences. Ces états préférés sont tels que, initialement, leur intrication avec l'environnement est très faible. Ces états préférés partagent avec l'environnement une

quantité d'information redondante relative aux interactions du système avec l'environnement, y compris celles liées au processus de mesure.

■ Le principe, ou *règle de supersélection*, suivant lequel il existe des observables qui commutent avec toutes les autres, en conséquence de quoi aucune interaction (dont celle associée à la mesure) ne peut les perturber. Par exemple, la grandeur chiralité des molécules n'est perturbée par aucune mesure et suit donc la règle de supersélection.

■ Le principe suivant lequel on peut suivre une composante de l'onde quantique au cours du temps, et donc d'utiliser le concept de *trajectoires* : une trajectoire est une succession d'états du même système en différentes localisations spatiales, mais aussi suivant différentes observables agissant sur ces successions d'états (exemple de trajectoires : figure 8-3). Ces successions d'états se traduisent par des successions de projections sur les espaces propres associés aux observables (relation (8-31)).

Dans le cas où ces états successifs sont des états préférés, les trajectoires sont une succession des états dont la matrice densité est pratiquement diagonale dans la base formée par les fonctions d'onde des états préférés. Mais ce cas n'est pas une condition nécessaire à la possibilité de suivre l'onde quantique d'un système sur une trajectoire.

■ **Remarque : Théorème d'Ehrenfest** (réf. [36]) : Si l'on procède à la mesure simultanée de deux grandeurs qui ne commutent pas (par exemple la position q et son moment conjugué quantité de mouvement p) sur un même système, et si cette mesure, par décohérence, donne des valeurs très étroites (c'est-à-dire un paquet d'onde étroitement centré), tout en respectant l'inégalité de Heisenberg, alors le système est dans un état préféré (état cohérent).

On exprime les valeurs moyennes des observables \hat{q}_i et \hat{p}_i au moyen de l'équation vue au point 8-1-6 en description de Schrödinger :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{q}_i \rangle = \frac{d q_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{q}_i, \hat{H}] \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p}_i \rangle = \frac{d p_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{p}_i, \hat{H}] \rangle = \left\langle -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i} \right\rangle$$

L'application à q_i et p_i des équations de Hamilton, en tant que grandeurs macroscopiques moyennes (voir point 8-1-2), conduit au théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} \right\rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i} \right\rangle \quad (8-35)$$

où H est l'hamiltonien en mécanique classique. Le théorème s'exprime ainsi : les mesures effectuées par un système observateur classique (macroscopique) donnent les valeurs moyennes des observables associées aux variables dynamiques (variables canoniques conjuguées) correspondantes.

Une condition nécessaire à la validité de (8-35) est que les états successifs correspondent à un paquet d'onde étroitement centré, c'est-à-dire à une largeur spatiale du domaine de mesure de la position suffisamment étendue : autrement dit, on obtiendra des corrélations classiques prévues par le formalisme hamiltonien classique à la condition que les mesures soient suffisamment grossières, et non infiniment précises. Dans le cas contraire, par exemple, déterminer exactement une position produit un paquet d'onde très étendu, délocalisé et le théorème (8-35) ne s'appliquera plus. Une précision infinie dans l'espace de configuration en mécanique classique, c'est-à-dire une mesure de Lebesgue nulle dans cet espace, correspond à un étalement non borné du paquet d'onde quantique.

Le domaine de l'espace physique sur lequel est étendu le paquet d'onde, c'est-à-dire où la cohérence est maintenue, est appelé « domaine de cohérence », et sa largeur est la « largeur de cohérence ». A l'intérieur de ce domaine les trajectoires du système sont celles des états préférés, et sont, avec une bonne

approximation, semblables à celles décrites par la mécanique classique : à ces échelles, les histoires des états préférés sont très voisines des trajectoires classiques.

■ **Densité de probabilité des états purs et des états mixtes :**

La modélisation de la décohérence dynamique traite de la quasi-diagonalisation de la matrice densité. Rappelons que la matrice densité, ou opérateur densité des états, est donnée par (rel. (8-9)) :

$$\rho_{mn} = \langle u_m | \hat{\rho} | u_n \rangle = \langle u_m | \psi \rangle \langle \psi | u_n \rangle = c_n^* c_m \quad (8-36)$$

où $|u_k\rangle$ base orthonormée, $|\psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle$ développement de la fonction d'onde dans cette base, ses coordonnées satisfaisant la condition de normalisation $\sum_k |c_k|^2 = 1$, et l'opérateur densité est pour un **état pur** :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (8-37)$$

ou bien est, pour un mélange statistique d'états (**états mixtes**) :

$$\hat{\rho} = \sum_q |\psi_q\rangle P_q \langle\psi_q| \quad (8-38)$$

où P_q sont les probabilités que les états $|\psi_q\rangle$ soient purs, et avec donc $\sum_q P_q = 1$.

Pour l'état d'un système en interaction avec un environnement, la diagonalisation, ou suppression des interférences, n'est jamais complètement réalisée, mais est une limite pratiquement atteinte au bout d'un temps devenu plus grand qu'un temps caractéristique du système et de son environnement, appelé temps de décohérence. Contrairement au postulat n°5 sur la réduction, la décohérence n'est pas obtenue spontanément ni au bout d'une durée finie.

■ **Intrication des états entre systèmes :**

■ Deux systèmes sont dans des états intriqués s'ils forment ensemble un système global dont les états sont superposés. Dans ce cas, l'information sur un des systèmes est couplée, intriquée, à celle sur l'autre système. Une telle configuration est illustrée par le paradoxe EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) (v. par ex. [22]), où le résultat d'une mesure de spin sur une des particules est couplé à l'état de spin de l'autre particule qui est intriquée avec elle ; on appelle aussi ces états intriqués des états EPR.

L'intrication est une propriété fondamentale employée en informatique quantique pour conserver les états de qu-bits lors de leur transmission. Or l'intrication est très vulnérable par les interactions que l'un des systèmes intriqués peut avoir avec l'environnement, car elles produisent la décohérence.

Le calcul des états intriqués varie selon qu'il s'agisse d'états purs ou d'états mixtes :

■ **États purs séparables, et états purs intriqués :**

Soient deux systèmes A et B qui correspondent à des espaces de Hilbert des états \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B ; l'ensemble de ces deux systèmes a alors comme espace de Hilbert des états le produit tensoriel :

$$\mathcal{H}_{A,B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

dont les vecteurs sont $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ où $|\psi\rangle_A$ et $|\psi\rangle_B$ vecteurs respectivement de \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B .

Réciproquement, un vecteur représentant un état par $|\psi\rangle$ est **séparable**, ou factorisable, si et seulement s'il peut s'écrire comme le produit tensoriel de deux états purs :

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B, \text{ avec : } |\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A \text{ et } |\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B \quad (8-39)$$

L'état pur $|\psi\rangle$ est dit **intriqué** si et seulement s'il ne peut pas vérifier (8-39).

■ **Exemple** : Deux qu-bits $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (états à deux niveaux d'un système quantique) forment une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_A \equiv \mathcal{H}_B \equiv \mathbb{C}^2$.

L'espace produit tensoriel $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ a comme base : $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, où les vecteurs de cette base sont $|00\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$, $|01\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$, etc.

Cependant, certains états dans $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sont séparables mais d'autres sont intriqués (non séparables). Ainsi :

L'état $|00\rangle + |01\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B = |0\rangle_A \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)$ est séparable puisqu'il s'écrit selon (8-39) : $|00\rangle + |01\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$, où $|\psi\rangle_A = |0\rangle_A$ et $|\psi\rangle_B = |0\rangle_B + |1\rangle_B$.

Mais l'état $|01\rangle + |10\rangle$ n'est pas séparable, car (8-39) n'est pas vérifié : il n'existe pas $|\psi\rangle_A$ et $|\psi\rangle_B$ tels que $|01\rangle + |10\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$; c'est un état pur intriqué (ou état EPR).

■ Théorème de **décomposition de Schmidt** d'un état pur séparable :

Pour tout état pur séparable $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ il existe des bases $\{|X_{A,k}\rangle\}$ de \mathcal{H}_A et $\{|X_{B,k'}\rangle\}$ de \mathcal{H}_B orthonormales ($\langle X_{A,k} | X_{B,k'} \rangle = \delta_{kk'}$) et des coefficients réels $s_k > 0$ tels que l'état pur séparable a pour décomposition :

$$|\psi\rangle = \sum_k s_k |X_{A,k}\rangle \otimes |X_{B,k}\rangle \quad (8-40)$$

où s_k sont les coefficients de Schmidt et $\{|X_{A,k}\rangle \otimes |X_{B,k}\rangle\}$ est la base de Schmidt.

■ Le théorème de décomposition de Schmidt (8-40) a pour corollaire le **critère d'intrication de Schmidt des états purs** :

On appelle nombre de Schmidt le nombre de coefficients de Schmidt non nuls ($s_k \neq 0$) de la décomposition (8-40). L'état pur $|\psi\rangle$ est intriqué si et seulement si son nombre de Schmidt est strictement supérieur à 1.

L'état pur est **maximalement intriqué** si et seulement si ses coefficients de Schmidt non nuls sont tous égaux ; on a alors un système à deux niveaux de type EPR.

■ **Intrication de formation pour deux états purs** : De la décomposition de Schmidt (8-40) d'un état pur $|\psi\rangle$ séparable en deux états selon (8-39), il vient :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{k,m} s_k s_m |X_{A,m}\rangle\langle X_{B,m}| \langle X_{A,k}| \langle X_{B,k}|$$

dont les projections sur les états A et B sont respectivement :

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho} |\psi\rangle_B \quad \text{et} \quad \hat{\rho}_B = \hat{\rho} |\psi\rangle_A$$

On définit alors l'**intrication de formation** comme étant l'entropie de Shannon de chacun des deux états A et B suivant lesquels l'état pur est séparable :

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B) = -\sum_k s_k^2 \log_2(s_k^2) \quad (8-41)$$

où $\rho_A = \text{Tr} \hat{\rho}_A$ et $\rho_B = \text{Tr} \hat{\rho}_B$.

Alors on montre que l'intrication est nulle si et seulement si $E(\psi) = 0$, et que le système est maximalement intriqué si $E(\psi) = 1$. On a ainsi, pour un état pur : $0 \leq E(\psi) \leq 1$.

Ce résultat signifie que les états quantiques purs transportent d'autant plus d'information qu'ils sont intriqués, ce qui a une application en informatique quantique.

■ **États mixtes séparables, et états mixtes intriqués** :

Soit $|\psi\rangle$ un état mixte, c'est-à-dire dont l'opérateur densité a la forme (8-38) : $\hat{\rho} = \sum_q |\psi_q\rangle P_q \langle\psi_q|$

avec $\sum_q P_q = 1$. Cet état est dit **séparable** si et seulement si :

$$\forall q, \exists |\varphi_q\rangle_A \in \mathcal{H}_A \text{ et } \exists |\varphi_q\rangle_B \in \mathcal{H}_B \text{ tels que } |\psi_q\rangle = |\varphi_q\rangle_A \otimes |\varphi_q\rangle_B \quad (8-42)$$

Si la condition (8-42) n'est pas possible, l'état mixte $|\psi\rangle$ est *intriqué*.

■ **Intrication de formation pour un état mixte** : À partir de (8-38),

$$\hat{\rho} = \sum_q |\psi_q\rangle P_q \langle \psi_q| \quad \text{avec} \quad \sum_q P_q = 1,$$

on définit l'intrication de formation $E(\rho)$ comme étant le minimum sur toutes les décompositions de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ des moyennes des intrications de formation des états purs $|\psi_q\rangle$ figurant dans ces décompositions :

$$E(\rho) = \min \left(\sum_q P_q E(\psi_q) \right) \quad (8-43)$$

■ **Théorème de William Wootters** sur le calcul des intrications de formation (réf. [133], [134]) :

En se limitant au cas de deux qu-bits, on montre que l'intrication est l'entropie binaire de la concurrence, s'exprimant différemment selon que l'intrication concerne les états purs ou bien les états mixtes :

■ Pour les états purs, l'intrication est donnée par :

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi)) \quad (8-44a)$$

où C est la **concurrence** :

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \quad (8-44b)$$

avec $|\tilde{\psi}\rangle$ transformée spin-flip de $|\psi\rangle$:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_2 |\psi^*\rangle \quad (8-44c)$$

où σ_2 est une matrice de Pauli,

et \mathcal{E} fonction **entropie binaire** définie par :

$$\mathcal{E}(C) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x) \quad (8-44d)$$

où $x = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}$. Soit une base $|u_k\rangle$, $k = 1, 2, 3, 4$, définie avec des états quantiques de Bell :

$$|u_1\rangle = \frac{1}{2}(|11\rangle + |00\rangle), \quad |u_2\rangle = \frac{i}{2}(|11\rangle - |00\rangle), \quad |u_3\rangle = \frac{i}{2}(|10\rangle + |01\rangle), \quad |u_4\rangle = \frac{1}{2}(|10\rangle - |01\rangle)$$

elle est dite « base magique » ; si $|\psi\rangle$ se décompose sur cette base, $|\psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle$, alors on montre que la concurrence (8-44b) devient :

$$C(\psi) = \left| \sum_k c_k^2 \right| \quad (8-44e)$$

L'entropie binaire a pour domaine de définition et image : $\mathcal{E}: [0,1] \rightarrow [0,1]$, et la **concurrence C est une mesure d'intrication** :

$C = 0 \rightarrow$ intrication nulle : l'état est séparable

$C = 1 \rightarrow$ l'état est maximalement intriqué.

■ Pour un état mixte :

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)) \quad (8-45a)$$

où la **concurrence** est donnée, ici, par :

$$C(\rho) = \max(0; 2\lambda_{\max} - \text{Tr} R(\rho)) \quad (8-45b)$$

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice $R(\rho)$, fonction de l'opérateur densité $\hat{\rho}$, qui s'exprime comme suit lorsque la fonction d'onde est définie dans la « base magique » $|u_k\rangle$:

$$R(\rho) = (\hat{\rho}^{1/2} \hat{\rho}^* \hat{\rho}^{1/2})^{1/2} \quad (8-45c)$$

où $\hat{\rho}^*$ s'exprime dans cette base par :

$$\hat{\rho}^* = \sum_{k,m} |u_k\rangle \langle u_m| \hat{\rho} |u_k\rangle \langle u_m|$$

On peut ré-exprimer ces résultats (8-45a,b,c) en utilisant la transformation spin-flip (8-44c) pour $\hat{\rho}$:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_2 |\psi^*\rangle \Rightarrow \tilde{\rho} = (\sigma_2 \otimes \sigma_2) \hat{\rho}^* (\sigma_2 \otimes \sigma_2) \quad (8-45d)$$

le théorème de Wootters donne alors : $E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho))$ avec :

$$R(\rho) = (\hat{\rho}^{1/2} \tilde{\rho} \hat{\rho}^{1/2})^{1/2} \quad (8-45e)$$

ce qui revient à calculer les valeurs propres de $R(\rho)$ ou de manière équivalente les racines carrées des valeurs propres de :

$$T(\rho) = \hat{\rho} \tilde{\rho} \hat{\rho}$$

■ **Décohérence dynamique :**

Dans la théorie de la décohérence dynamique (ou décohérence) la limite entre la description quantique et la description classique apparaît suivant des critères non arbitraires où intervient le concept de **système ouvert** sur son environnement.

Pour un tel système, la décohérence résulte de la très faible durée de vie de la superposition des états quantiques qui perdurerait si le système était clos. Au terme de cette durée de vie, l'un des états possibles est sélectionné (**supersélection**) et il n'y a plus superposition : ceci semble être une solution au paradoxe du chat de Schrödinger.

■ **Équation de von Neumann, équation de Redfield :**

Pour un système (S), généralement petit, couplé à un environnement (E), l'évolution est liée à la transformation des états purs en états mixtes (ou mélanges statistiques des états superposés).

Il faut donc traiter le système ouvert comme étant dans des états mixtes décrits par la matrice de densité $\hat{\rho}$ et non plus se limiter aux états quantiques purs décrits par les seules fonctions d'onde $|\psi\rangle$.

L'équation d'évolution n'est donc plus donnée par l'équation de Schrödinger mais par l'équation de Von Neumann vue en (8-1-6) dans le cas où un système est fermé et ses états sont mixtes :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (8-46)$$

Le système ouvert, noté (S), et l'environnement (E) auquel il est couplé ont pour hamiltonien et densité respectivement :

- \hat{H}_S hamiltonien de (S) à l'état libre (non couplé) ;
- $\hat{\rho}_S$ densité des états de (S) à l'état libre et à l'état mixte ;
- \hat{H}_E hamiltonien de (E) à l'état libre (non couplé) ;
- $\hat{\rho}_E$ densité des états de (E) à l'état libre et à l'état mixte ;

auxquels il faut ajouter pour l'interaction entre (S) et (E) :

- \hat{H}_I hamiltonien d'interaction entre (S) et (E) ;
- $\hat{\rho}_I$ densité des états du système total (S) \cup (E) où a lieu l'interaction ; c'est à lui que s'applique l'équation de Von Neumann (8-46) puisque (I) = (S) \cup (E) est considéré fermé (figure 8-4).

L'espace de Hilbert des états de (I) est le produit tensoriel des espaces de Hilbert des états de (S), \mathcal{H}_S , et des états de (E), \mathcal{H}_E :

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E \quad (8-47)$$

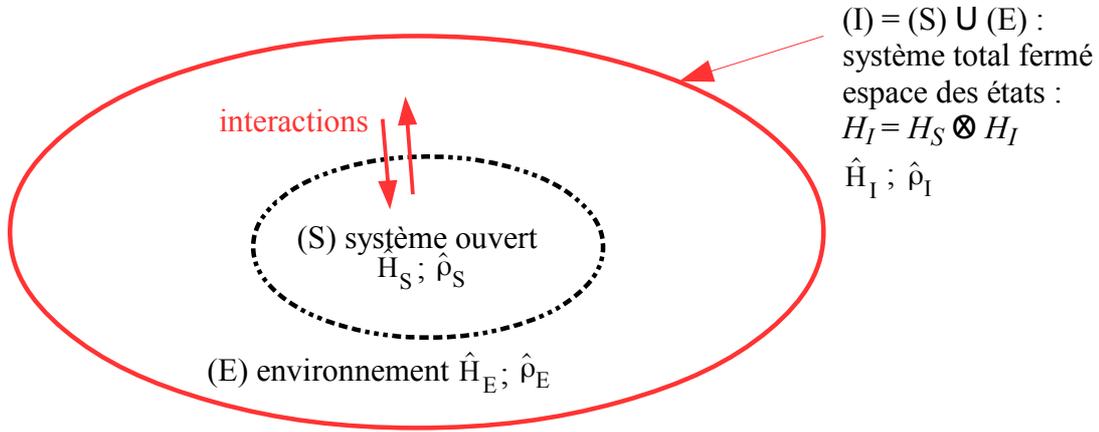


figure 8-4 : système ouvert sur son environnement (E)

L'équation de Von Neumann pour le système total fermé (I) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_I(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I(t), \hat{\rho}_I(t)] \quad \text{où} \quad \hat{\rho}_I = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E \quad (8-48)$$

L'information accessible sur l'état de (S) est contenue dans la projection de la densité des états de (I) sur les états de (E) :

$$\rho_S = \text{Tr}_E \hat{\rho}_I \quad \text{où} \quad \hat{\rho}_S = \hat{\rho}_I |\psi\rangle_E \rightarrow \rho_S = \text{Tr}(\hat{\rho}_I |\psi\rangle_E) \equiv \text{Tr}_E \hat{\rho}_I \quad (8-49)$$

qui est la trace partielle sur (E) de la densité totale de (I), et on détermine l'évolution à partir de l'équation de Von Neumann et moyennant certaines hypothèses :

■ Hypothèse n°1 : **Condition initiale** : le système (S) est découplé de son environnement (E) à l'instant initial $t = 0$, d'où :

$$\text{Tr}_E [\hat{H}_I(t), \hat{\rho}_I(0)] = 0 \quad (8-50)$$

avec, d'après (8-48) :

$$\hat{\rho}_I(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$$

■ Hypothèse n°2 : Approximation de Born (**couplage faible**) : l'hamiltonien d'interaction entre (S) et (E), \hat{H}_I est faible, d'où d'après (8-48) :

$$\hat{\rho}_I(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E(0) \quad (8-51)$$

■ Hypothèse n°3 : **Approximation de Markov** : annulation des effets de mémoire pour $\hat{\rho}_S$, ce qui pose que pour $\hat{\rho}_S(t)$ à un instant t les contributions de $\hat{\rho}_S(t')$ aux instants antérieurs $t' < t$ n'interviennent pas.

On montre alors, à partir des hypothèses n°1 et 2, que l'équation d'évolution du système (S), obtenue depuis l'équation de Von Neumann portant sur l'évolution du système total (I) (8-48), est :

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^t dt' \text{Tr}_E [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_E(0)]] \quad (8-52)$$

qui, avec l'hypothèse n°3, donne l'**équation de Redfield** (v. par ex. [92]) :

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) \approx -\int_0^t dt' \text{Tr}_E [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E(0)]] \quad (8-53)$$

L'équation (8-53), avec ses trois hypothèses ci-dessus, est valide sous la condition que le temps caractéristique d'évolution de l'environnement τ_E est très court devant celui de la première évolution du système (S) ouvert sur lui, τ_R :

$$\tau_E \ll \tau_R \quad (8-54)$$

et sous la condition que la description perturbative n'est valable que pour des échelles de temps d'évolution très limitées :

$$t \ll \frac{\hbar}{|\hat{H}_I|} \quad (8-55)$$

■ Équation de **Born-Markov** [92] : On montre que l'équation de Redfield (8-53), avec la condition (8-54), prend la forme de l'équation maîtresse de Born-Markov :

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) \approx - \int_0^\infty dt' \text{Tr}_E [\hat{H}_I(t), [\hat{H}_I(t-t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E(0)]] \quad (8-56)$$

■ **Équation de Linblad** : L'hamiltonien de l'interaction entre le système (S) et l'environnement (E) est, en description de Schrödinger (opérateurs observables indépendants du temps, point 8-1-6) :

$$\hat{H}_I = \sum_j \hat{S}_j \otimes \hat{E}_j \quad (8-57)$$

où \hat{S}_j opérateurs agissant sur (S) et \hat{E}_j opérateurs agissant sur (E), ces opérateurs étant associés à des grandeurs canoniquement conjuguées. Cette expression est cohérente avec le fait que l'espace des états du système total est le produit tensoriel de celui du système et de celui de l'environnement : $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ (8-47).

Soient e_s les valeurs propres de \hat{H}_S que l'on suppose discrètes, et $\hat{\Pi}(e_s)$ les projecteurs sur leurs espaces propres correspondants. On définit les opérateurs propres du système (S) :

$$\hat{S}_j(\omega) = \sum_{\omega=e'_s-e_s} \hat{\Pi}(e_s) \hat{S}_j \hat{\Pi}(e'_s) \quad (8-58)$$

Ce sont des opérateurs propres de (S) puisqu'ils vérifient : $[\hat{H}_S, \hat{S}_j(\omega)] = -\omega \hat{S}_j(\omega)$; il vient donc la décomposition de l'hamiltonien du système total :

$$\hat{H}_I = \sum_{j,\omega} \hat{S}_j(\omega) \otimes \hat{E}_j \quad (8-59)$$

qui donne, en description de Heisenberg (opérateurs dépendant du temps, point 8-1-6) :

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \sum_{j,\omega} e^{-i\omega t} \hat{S}_j(\omega) \otimes \hat{E}_j(t) \\ \text{avec : } \hat{E}_j(t) &= e^{iH_E t} \hat{E}_j e^{-iH_E t} \end{aligned} \right| \quad (8-60)$$

où \hat{E}_j seul, sans t, est en description de Schrödinger, et $\hat{E}_j(t)$, avec t, est en description de Heisenberg. On montre alors que l'utilisation de (8-60) dans l'équation de Born-Markov (8-56), moyennant les hypothèses n°3 ($\tau_E \ll t \ll \tau_R$) (8-54), ainsi que sur le temps caractéristique

$\tau_S \approx \frac{1}{|\omega-\omega'|}$ de transition entre deux niveaux dans (S), avec $\tau_S \ll \tau_R$, ainsi que l'**hypothèse de l'onde tournante** (oscillations rapides) $\tau_S \ll t \ll \tau_R$, donne l'équation de la **forme de Linblad** [145] :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{LS}, \hat{\rho}_S(t)] + D(\rho_S(t)) \quad \text{avec } \tau_E, \tau_S \ll \tau_R \quad (8-61)$$

décalage terme
de Lamb dissipatif

où :

$$\hat{H}_{LS}(t) = \sum_{\omega} \sum_{j,k} \sigma_{j,k}(\omega;t) \hat{S}_j^+(\omega) \hat{S}_k(\omega) \quad (8-62)$$

$$\sigma_{j,k}(\omega;t) = \frac{1}{2i}(\Gamma_{j,k}(\omega;t) - \Gamma_{k,j}^*(\omega;t)) \quad (8-63)$$

$$\Gamma_{j,k}(\omega;t) = \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle \hat{E}_j^+(t) \hat{E}_k(t-t') \rangle \quad (8-64)$$

(8-64) est la transformée de Fourier partielle de la fonction de corrélation de l'environnement. Dans (8-61) le **terme dissipatif** est :

$$D(\rho_S(t)) = \sum_{\omega} \sum_{j,k} \gamma_{j,k}(\omega;t) (\hat{S}_k(\omega) \hat{\rho}_S \hat{S}_j^+(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{S}_j^+(\omega) \hat{S}_k(\omega), \hat{\rho}_S \}) \quad (8-65)$$

où $\{, \}$ est l'anti-commutation de deux opérateurs : $\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A}$, et avec :

$$\gamma_{j,k}(\omega) = \Gamma_{j,k}(\omega;0) + \Gamma_{k,j}^*(\omega;0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle \hat{E}_j^+(t') \hat{E}_k(0) \rangle \quad (8-66)$$

Seul le terme dissipatif intervient dans la décohérence, le décalage de Lamb n'y étant pas impliqué.

■ **Exemple d'un système à 2 niveaux**, couplé à un environnement macroscopique (v. par ex. [92], [93], [95], [121]) :

Son hamiltonien est celui de Wigner-Weisskopf :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_3 + \hbar \sum_j \omega_j a_j^+ a_j + \hbar \sum_j (g_j a_j^+ \sigma_- + g_j^* a_j \sigma_+) \quad (8-67)$$

où $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i \sigma_2$ et $a_j^+ = (\omega \hat{q}_j - i \frac{\hat{p}_j}{m}) \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}$, $a_j = (\omega \hat{q}_j + i \frac{\hat{p}_j}{m}) \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}$ opérateurs respectivement de création et d'annihilation qui généralisent (4-25a) pour les opérateurs \hat{q} et \hat{p} complexes ; g_j sont les termes de couplage entre (S) et (E).

Cet hamiltonien s'applique à tout système à 2 niveaux (par exemple ayant deux états possibles de spin) couplé à un environnement macroscopique, lequel peut être modélisé comme un ensemble très large d'oscillateurs harmoniques.

On montre (cf. par ex. [92]) que l'équation de Linblad (8-61) s'exprime, à partir de cet hamiltonien, sous la forme de l'**équation de Wigner-Weisskopf**, où le décalage de Lamb a été négligé car ne contribuant pas à la décohérence :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = \gamma_0 \langle N(\omega) \rangle & \left[\sigma_+ \hat{\rho}_S(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \hat{\rho}_S(t) \} \right] \\ + \gamma_0 (1 + \langle N(\omega) \rangle) & \left[\sigma_- \hat{\rho}_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \hat{\rho}_S(t) \} \right] \end{aligned} \right| \quad (8-68)$$

où $\langle N(\omega) \rangle$ est le nombre moyen de photons à la fréquence ω pris sur l'état de l'environnement en l'instant initial $t = 0$, et avec :

$$\gamma_0 = \frac{2\pi |g|^2}{\hbar} \quad (8-69)$$

Pour deux niveaux d'états définis par des états de spin, la densité de l'état du système (S), $\hat{\rho}_S$, s'exprime avec le **vecteur de Bloch** (réf. [39]) $\sigma(t)$:

$$\langle \sigma(t) \rangle = \text{Tr}(\sigma \hat{\rho}_S(t)) = \begin{pmatrix} \langle \sigma_1 \rangle \\ \langle \sigma_2 \rangle \\ \langle \sigma_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (8-70)$$

qui est la valeur moyenne du spin dans l'état superposé : $|\psi\rangle = \lambda |0\rangle + \mu |1\rangle$ avec $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$,

où $\langle \sigma_k \rangle = \langle \varphi | \sigma_k | \varphi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_S \sigma_k)$, $k = 1, 2, 3$, et l'on a :

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{1} + \langle \sigma(t) \rangle \cdot \sigma] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3(t) \rangle) & \langle \sigma_+(t) \rangle \\ \langle \sigma_-(t) \rangle & \frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_3(t) \rangle) \end{bmatrix} \quad (8-71)$$

En utilisant (8-71) dans (8-68) on obtient le système d'équations des états de spin moyen $\langle \sigma_k(t) \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_1(t) \rangle = -\frac{\gamma_0(2\langle N(\omega) \rangle + 1)}{2} \langle \sigma_1(t) \rangle \quad (8-72a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_2(t) \rangle = -\frac{\gamma_0(2\langle N(\omega) \rangle + 1)}{2} \langle \sigma_2(t) \rangle \quad (8-72b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_3(t) \rangle = -\gamma_0(2\langle N(\omega) \rangle + 1) \langle \sigma_3(t) \rangle - \gamma_0 \quad (8-72c)$$

■ Les **éléments diagonaux** de $\hat{\rho}_S(t)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3(t) \rangle)$ et $\frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_3(t) \rangle)$ (cf. (8-71)), sont liés aux populations de l'état fondamental et de l'état excité du système (S) dû au couplage avec l'environnement (E).

Or (8-72c) montre que $\langle \sigma_3(t) \rangle$ décroît selon $\exp[-\gamma_0(2\langle N(\omega) \rangle + 1)t]$ et donc que les populations de l'état fondamental de (S), $N_f(\omega)$, et de l'état excité de (S), $N_e(\omega)$, tendent vers une valeur stationnaire respectivement égale à :

$$\left. \begin{aligned} N_f(\omega) &= \frac{\langle N(\omega) \rangle + 1}{2\langle N(\omega) \rangle + 1} \\ N_e(\omega) &= \frac{\langle N(\omega) \rangle}{2\langle N(\omega) \rangle + 1} \end{aligned} \right| \quad (8-73)$$

et l'on a $N_f > N_e$ (le fondamental est plus peuplé que l'excité), lorsque $t \rightarrow \infty$.

■ **Exemple** : Si (E) est un « bain » de photons à l'instant $t = 0$, la valeur moyenne de $N(\omega)$ est donné par la loi de Planck (T : température de (E)) :

$$\langle N(\omega) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

alors, au bout d'un temps suffisamment long, à l'équilibre thermodynamique, on a :

$$\text{pour l'état fondamental : } N_f(\omega) = \frac{\exp(\hbar\omega/k_B T)}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

$$\text{et pour l'état excité : } N_e(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

De façon générale, plus le couplage est grand ($|g|$, donc γ_0 élevés) plus cette évolution vers l'équilibre est rapide. Il en est de même lorsque l'énergie des photons $\hbar\omega$ est grande.

■ Quant aux **éléments non diagonaux** de $\hat{\rho}_S(t)$, c'est-à-dire $\langle \sigma_+(t) \rangle$ et $\langle \sigma_-(t) \rangle$, ils sont liés à la cohérence du système (S) (état de superposition). Ils tendent vers 0 lorsque t tend vers un temps caractéristique :

$$t \rightarrow \tau_{\text{déc}} = \frac{2}{\gamma_0(2\langle N(\omega) \rangle + 1)} \quad (8-74)$$

avec un taux de décroissance $1/\tau_{\text{déc}}$.

La matrice densité devient quasiment diagonale dans la base définie par l'interaction entre (S) et (E), et cette interaction supprime les effets d'interférences : c'est la **décohérence**.

Il en est de même pour un système (S) de masse élevée, en interaction avec (E), ou encore si cette interaction tend à créer des états superposés très éloignés : dans ces cas, la décohérence se produit très rapidement, ce qui explique que la superposition des états quantiques très éloignés « chat mort » et « chat vivant » est détruite, ce qui résoudrait le paradoxe du chat de Schrödinger selon la théorie de la décohérence.

■ Remarque : en **informatique quantique**, on cherche à maintenir des états de qu-bits intriqués, et donc à empêcher leur décohérence résultant de l'interaction avec leur environnement.

Sur les bases théoriques et techniques à mettre en place pour cela, voir par exemple [95], [94], [93].

■ **Temps de décohérence** (voir aussi [93], [94], [96]) :

On a vu plus haut que la décohérence a lieu non au bout d'un temps fini, mais asymptotiquement, lorsque $t \rightarrow \infty$, plus précisément lorsque t devient très grand devant $\tau_{\text{déc}}$ (8-74). Les composantes non diagonales de la matrice densité ne sont donc jamais rigoureusement nulles. D'ailleurs, le cas contraire serait incompatible avec le formalisme quantique qui prévoit l'invariance des évolutions lors des changements de base des espaces de Hilbert \mathcal{H} , tandis qu'une diagonalisation complète n'est valide que pour une base privilégiée.

À l'inverse, le principe de réduction (postulat n°5) pose que la superposition des états disparaît complètement en un temps fini, et la réduction du paquet d'onde n'équivaut pas à la diagonalisation d'une matrice densité.

La théorie de la décohérence conduit à des configurations proches de la réduction, mais ne retrouve pas celle-ci : elle n'est pas une condition nécessaire, au sens de l'implication logique, du postulat n°5 ; elle n'en est que l'approximation.

■ **Exemple de calcul de la décohérence** (voir aussi par ex. [135], [136], [137]) :

Le système (S) est un solide sphérique macroscopique de rayon R , dans un état superposé de positions \mathbf{q}_1 (état $|\psi_1\rangle$) et \mathbf{q}_2 (état $|\psi_2\rangle$, c'est-à-dire que son état quantique est :

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle \quad (8-75)$$

avec $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, et les états superposés $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont orthogonaux (ce qui traduit qu'ils ne s'influencent pas mutuellement).

La décohérence s'exprime dans une base privilégiée qui est la base propre de l'observable dont l'intrication avec l'environnement est nulle, ou du moins minimale (supersélection). Dans l'exemple, l'observable en question est la position \hat{q} : ses vecteurs propres sont $|\psi_k\rangle$, $k = 1, 2$ donc ici ce sont les vecteurs $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, ils forment une base orthonormée sur laquelle se décompose $|\psi\rangle$.

La matrice densité initiale (c'est-à-dire sans l'action de l'environnement (E)) du système (S) est, puisque l'état est pur :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

qui s'écrit à partir de (8-75) :

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= (a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle)(a_1^*\langle\psi_1| + a_2^*\langle\psi_2|) \\ &= |a_1|^2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + a_1a_2^*|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + a_2a_1^*|\psi_2\rangle\langle\psi_1| + |a_2|^2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\end{aligned}$$

soit :

$$(\rho_{mn}) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1a_2^* \\ a_2a_1^* & |a_2|^2 \end{pmatrix} \quad m, n = 1, 2 \quad (8-76)$$

Le système (S) est plongé dans un environnement (E) contenant des particules possédant une impulsion moyenne \mathbf{p} de distribution aléatoire.

Une particule libre, dans cet environnement, a donc pour fonction d'onde dépendant de sa position et de son impulsion :

$$|\varphi\rangle \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\right)$$

Après le choc avec (S), supposé élastique (i.e. \mathbf{q} ne change pas), cette particule a une nouvelle fonction d'onde qui dépend de sa nouvelle impulsion \mathbf{p}' (réf. [135]) :

$$|\varphi'\rangle \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}\right) \exp i(\delta + \alpha)$$

où :

$$\alpha = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \frac{\mathbf{p}^2 R^2 N \omega}{2\pi \hbar^2} \quad (8-77)$$

À chaque collision d'une particule de (E) avec (S) la phase de la fonction d'onde est modifiée, et au cours du temps la matrice densité devient :

$$(\rho_{mn}(t)) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1a_2^* \exp(-\alpha t) \\ a_2a_1^* \exp(-\alpha t) & |a_2|^2 \end{pmatrix} \quad (8-78)$$

qui tend vers une diagonalisation lorsque t augmente :

$$(\rho_{mn}(\infty)) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & 0 \\ 0 & |a_2|^2 \end{pmatrix} \quad (8-79)$$

ce qui exprime que les états quantiques orthogonaux $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ s'excluent mutuellement : ils ne peuvent plus être superposés et seul l'un d'eux est observable.

Cette diagonalisation est d'autant plus rapide (α grand) que :

- les positions \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 sont éloignées l'une de l'autre ;
- les particules de (E) sont rapides (\mathbf{p} grande) ;
- (S) est de grande taille (R grand) ;
- (E) a une grande population (N grand).

En général, le temps de décohérence calculé par la théorie de décohérence dépend de la grandeur du système (S) et de son environnement (Tableau 8-2) [135] :

↓ (E)	(S) →	poussière (10 ⁻³ cm)	agrégat moléculaire (10 ⁻⁵ cm)	macromolécule (10 ⁻⁶ cm)
	air	10 ⁻³⁶ s	10 ⁻³² s	10 ⁻³⁰ s
	vide artificiel (10 ⁶ molécules /cm ³)	10 ⁻²³ s	10 ⁻¹⁹ s	10 ⁻¹⁷ s
	vide parfait + rayonnement solaire	10 ⁻²¹ s	10 ⁻¹⁷ s	10 ⁻¹³ s
	vide intergalactique + rayonnement fossile CMB à 3K	10 ⁻⁶ s	10 ⁶ s (11 jours)	10 ¹² s (32000 ans)

Tableau 8-2 : temps de décohérence $\tau_{\text{déc}}$ calculé pour quelques types de système (S) et d'environnement (E)

■ **Questions non résolues par la théorie de la décohérence :**

On a vu que les interférences disparaissent pratiquement entre les états des systèmes macroscopiques. Pour autant, cela signifie-t-il que ces systèmes sont dans des états de décohérence ? Par exemple la décohérence entraîne que la mesure ne donne pas deux résultats simultanés associés à des composantes différentes de l'onde quantique. La décohérence, à elle seule, n'apporte pas de solution au problèmes n°2 de la mesure si elle ne base pas sur une interprétation appropriée de la fonction d'onde.

Par exemple, pour un appareil qui mesure différentes valeurs du spin de l'électron suivant une direction donnée, des interactions ont lieu en permanence, en différents lieux de l'espace, entre le système macroscopique et l'environnement : l'état du système total (I) « appareil + système (électron par exemple) + environnement » est décrit comme la somme de :

- a) un état lié au couplage environnement/appareil, où l'appareil est lui-même couplé à la composante +1/2 du spin suivant la direction donnée ;
- b) un état lié au couplage environnement/appareil, où l'appareil est lui-même couplé à la composante -1/2 du spin, suivant cette même direction donnée.

Dans cette approche, comment alors interpréter cette somme d'états liés au couplage dans le système total « appareil + électron + environnement » ? C'est une question de fond qui touche la théorie de la décohérence.

Or, comme on l'a signalé, le caractère linéaire de l'équation de Schrödinger implique la possibilité d'état formé d'une combinaison linéaire d'états des constituants d'un système, et pour que cela ait du sens il faut définir ce qu'est une combinaison d'états liés aux couplages entre ces constituants, donc **il faut une interprétation de la fonction d'onde.**

Une interprétation proposée par Zurek (1998) [131] et Zeh (2000) [132] s'appuie sur la décohérence telle que formulée par la théorie MWI de Everett [4] (point 8-2-3).

Cette interprétation doit retrouver une situation proche (et non identique !) à celle prévue par le postulat n°5, et ceci comme conséquence du postulat n°6. Dans la théorie de la décohérence le postulat n°5 est une approximation résultant du processus de décohérence. Celle-ci provient du principe selon lequel si un système quantique n'est pas parfaitement isolé de son environnement (ou clos), alors ses interactions avec l'environnement s'expriment par la suppression de la superposition des états.

On ne peut pas affirmer que la théorie de la décohérence permet de déduire le postulat n°5, car dans cette théorie les éléments non diagonaux de la matrice densité ne s'annulent pas spontanément mais tendent vers zéro avec le temps. Ceci est une conséquence du caractère linéaire et unitaire des évolutions des fonctions d'onde qui interdit la disparition instantanée des états superposés.

L'état obtenu après une mesure, et qui fait suite à la décohérence, n'est pas la réduction d'une superposition d'états (postulat n°5), c'est-à-dire n'est pas une sélection d'état parmi d'autres. L'état obtenu correspond à plusieurs états qui coexistent tout en n'ayant pas de corrélation.

Comme on l'a vu, la décohérence complète (diagonalisation de la matrice densité) n'est produite que lorsque le temps est infini, et donc même au-delà de la durée caractéristique $\tau_{\text{déc}}$ il subsiste dans cette matrice des termes non diagonaux, certes devenus très petits. Donc la théorie de la décohérence n'équivaut pas, dans ses principes formels, au postulat n°5, et donc conserve la validité de la superposition

résiduelle des états. Mais en pratique, celle-ci ne peut pas être mise en évidence par l'expérience, et donc la théorie arrive aux mêmes conséquences pratiques que le postulat n°5.

Il y a ainsi trois problèmes soulevés par la théorie de la décohérence :

■ **Problème de l'unicité de la mesure** : Dans le formalisme quantique les probabilités des états superposés suivent une logique conjonctive et non disjonctive : le système est dans un état $|\psi_1\rangle$ **et** un état $|\psi_2\rangle$, et non dans un état $|\psi_1\rangle$ **ou bien** un état $|\psi_2\rangle$ (problème du « ou-et » de John Bell).

■ Exemple du chat de Schrödinger : la matrice densité tend, par décohérence, vers la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui signifie « chat mort avec probabilité = 1/2 **et** chat vivant avec probabilité = 1/2 », et non vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui signifie « chat vivant avec probabilité = 1 **ou bien** chat mort avec probabilité = 1 », comme cela correspond à l'expérience. L'un des états est « choisi » sans que l'on sache ni comment ni pourquoi, et la théorie de la décohérence n'indique rien sur ce sujet (cf. problème fondamental n°2, point 8-1-7).

■ On peut comparer cette difficulté avec l'histoire suivante : un chauffeur se fait flasher par un radar routier qui indique deux valeurs simultanées et leurs probabilités, l'une 80 km/h avec probabilité 2/3, l'autre 120 km/h avec probabilité 1/3, la limitation de vitesse étant de 90 km/h sur ce tronçon de route. Le chauffeur est arrêté par un gendarme situé plus loin et qui avait reçu les valeurs du radar sur son récepteur portable. Il dit au chauffeur qu'il est en infraction parce que le radar ne pouvait se déclencher qu'au-dessus de la limitation de vitesse 90 km/h, et qu'il roulait forcément à 120 km/h. Ce à quoi le chauffeur répond : « Moi et mon véhicule suivons les lois de la mécanique quantique : **avant la mesure** par le radar, nous roulions à 80 km/h avec une probabilité 2/3, et nous roulions aussi à 120 km/h avec une probabilité 1/3, celle-ci étant toutefois plus faible, donc ne me verbalisez pas comme si j'étais à 120 km/h avec une probabilité de 1, s'il vous plaît ». Réponse du gendarme : « Dans le monde classique et réaliste où nous sommes, **pendant la mesure** vous ne pouvez pas être à la fois au-dessus et en-dessous de 90 km/h. Et comme le radar s'est déclenché, vous étiez nécessairement à 120 km/h sur une route limitée à 90 km/h. »

■ En réponse aux objections du problème de l'unicité de la mesure, les tenants de la théorie de la décohérence indiquent :

- La réalité expérimentale est compatible avec les conclusions de la théorie de la décohérence, ce qui est suffisant pour une théorie physique prédictive.
- L'exclusion mutuelle des états de (S), c'est-à-dire des informations disponibles sur le système, suite à la décohérence, entraîne que l'état prend une seule valeur et que les autres valeurs sont inaccessibles. L'unicité est une conséquence de l'exclusion mutuelle des informations, qui est dans le formalisme quantique, exclusion qui est elle-même impliquée par la décohérence.

■ **Problème de l'universalité de la décohérence** : La décohérence s'applique-t-elle systématiquement à toute configuration où le postulat n°5 intervient ? Cela pourrait ne pas être le cas si des observables supplémentaires interviennent lors de la mesure (exemple : mesures dans les chambres à bulles). Mais cela reste à vérifier.

■ **Problème des interprétations de la matrice densité** :

■ Le fait d'utiliser exclusivement la matrice densité pour prédire la décohérence peut masquer des phénomènes déterminants qui seraient négligés arbitrairement (comme la gravitation).

■ Une même matrice densité peut avoir différentes interprétations sur la réalité des états qui font l'objet d'une sélection. Par exemple, pour le chat de Schrödinger on a aussi bien :

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} |-\rangle\langle -| + \frac{1}{2} |+\rangle\langle +|$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{4} [|-\rangle + |+\rangle][\langle -| + \langle +|] + \frac{1}{4} [|-\rangle - |+\rangle][\langle -| - \langle +|]$$

où $|+\rangle = |\text{chat vivant}\rangle$ et $|-\rangle = |\text{chat mort}\rangle$, et l'on a $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$ bien qu'il y ait différents états quantiques correspondant à $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_2$, et donc des interprétations des états différentes :

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle|E-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|E+\rangle$, où $|E \pm \rangle$ signifie état où le chat est mort, ou bien est vivant, dans son interaction avec l'environnement (E), qui est l'interprétation propre à la théorie de la décohérence.
- b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(|-\rangle|+\rangle)(|E-\rangle|E+\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|-\rangle|-\rangle)(|E-\rangle|E+\rangle)$ qui ne se dégage pas de la théorie de la décohérence, mais qui est semblable à une superposition de paires de particules EPR. L'interprétation (b) est compatible avec la théorie quantique, tout comme (a), et pourtant c'est celle-ci qui, selon la théorie de la décohérence, correspondrait à la réalité expérimentale. Pourquoi ?

8-2-5 - *Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : potentiel quantique de Bohm-Hiley :*

David Bohm introduit le « potentiel quantique » qui contient toutes les informations sur une particule, ne conférant de réalité qu'aux particules et non aux ondes quantiques (ce qui élimine la fameuse dualité onde-corpuscule). Dans le formalisme de D. Bohm et Basil Hiley, le potentiel transforme la dynamique probabiliste en dynamique déterministe en réintroduisant les variables cachées soulevées par le paradoxe EPR ; il est de caractère non local (interactions à distance) et intègre l'environnement de la particule, et il s'active effectivement seulement en présence d'une particule. Cette approche, qui permet de retrouver toutes les prédictions théoriques et expérimentales de la physique quantique, est proche du « principe de Mach », et va même jusqu'à envisager une conception holographique de l'univers (D. Bohm et Jiddu Krishnamurti [29]).

■ **Potentiel quantique de D. Böhm et B. Hiley** (v. aussi réf. [29], [102], [103], [104], [138], [139], [140], [141], ainsi que [142] sur l'historique de l'évolution des idées de D. Böhm) :

■ Dans cette théorie, la description complète de l'état d'un système est fournie à la fois par deux caractéristiques : d'une part la fonction d'onde et, d'autre part, les positions de toutes les particules du système (ou coordonnées généralisées dans l'espace de configuration), ces données étant contenues dans le potentiel quantique. En conséquence, la dynamique du système est donnée par deux équations : d'une part l'équation d'évolution de Schrödinger (qui indique comment évolue la fonction d'onde, postulat n°6), d'autre part l'équation de Böhm (qui indique comment les particules sont « guidées » par l'onde) ; ces deux équations sont complètement déterministes ; seules les positions initiales du système ont une distribution aléatoire qui est décrite par la distribution de Born (postulat n°4).

Cette théorie possède les propriétés ci-après, comme nous allons le voir succinctement :

- **Propriété d'équivariance** : si la distribution initiale est donnée par la distribution de Born, alors elle continue d'être donnée par celle-ci à tout instant ultérieur. Le caractère aléatoire de la distribution initiale est dû au comportement chaotique, comme pour les systèmes dynamiques classiques (v. par ex. [116]).
- Les **positions sont les seules variables cachées** de la théorie : la mesure de toute grandeur (ou « observable »), hormis les positions, résulte d'une interaction physique entre le système (S) et son environnement (E) couramment appelé « appareil de mesure ». Cette interaction ne révèle pas des propriétés ou valeurs préexistantes du système (S), contenues dans une superposition d'états parmi lesquels il y aurait sélection. C'est pourquoi cette interaction ne peut pas être considérée comme une « mesure » : le système et l'appareil de mesure (l'environnement) sont inséparables ; seules les positions ne sont pas concernées par cette contrainte.
- **Non-localité** : En mécanique quantique la fonction d'onde est définie sur l'espace des phases (moments et coordonnées généralisés conjugués $\{\mathbf{p}; \mathbf{q}\}$) et non, par exemple, comme le champ ou l'onde électromagnétique qui est défini sur l'espace physique (ou plus généralement l'espace de configuration $\{\mathbf{q}\}$) : ce qui fait que l'onde quantique est de nature différente de toute autre onde physique. Cette différence de nature a une conséquence importante en théorie de Böhm : par exemple, si deux particules sont dans un potentiel près de l'origine à cause d'un environnement (E) (« appareil de mesure »), alors l'évolution de la fonction d'onde du système dépend du potentiel via l'équation de Schrödinger, tandis que la fonction d'onde elle-même détermine les trajectoires des deux particules via l'équation de Böhm. Il s'ensuit que la trajectoire de chacune des deux particules est affectée (indirectement) par le potentiel (environnement ou « appareil de mesure ») même si ces deux particules deviennent très éloignées de l'origine. Ceci peut expliquer la corrélation maintenue entre les deux particules formant une paire EPR, puisque les résultats de l'interaction de (S) avec (E) ne sont pas déterminés avant l'interaction : il n'y a pas

une « sélection » parmi eux ; et les corrélations totales sont maintenues par une forme de connexion entre parties distantes de l'univers, portée par la fonction d'onde et vérifiant l'équation de Böhm. Autrement dit, les corrélations sont non-locales ; exit donc les postulats n°3 et 5 sur le résultat de mesure et la réduction.

■ Pour redonner un caractère déterministe aux états quantiques, et donc soustraire l'onde quantique de sa signification essentiellement indéterministe issue de sa réduction (postulat n°5), l'idée est de lui attribuer deux équations portant sur ses composantes amplitude et phase :

$$\psi(\mathbf{q}, t) = a(\mathbf{q}, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \phi(\mathbf{q}, t)\right) \quad (8-80)$$

où $a(\mathbf{q}, t) = |\psi(\mathbf{q}, t)|$ amplitude, $\phi(\mathbf{q}, t)/\hbar$ phase (ϕ a les dimensions d'une action, J.s). L'application de l'équation de Schrödinger à (8-80), et la séparation des parties réelle et imaginaire, conduisent aux deux équations couplées :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\hbar^2 \frac{\nabla^2 a}{a} - (\nabla \phi)^2 \right) - V \quad (8-81a)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla a \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2m} a \nabla^2 \phi \quad (8-81b)$$

où $V = V(\mathbf{q})$ est le potentiel classique de l'interaction. Avec le **potentiel quantique** de Böhm-Hiley,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 a}{a} \quad (8-82)$$

(8-81a) devient l'**équation de Böhm** :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left[\frac{1}{2m} (\nabla \phi)^2 + V \right] + Q = 0 \quad (8-83)$$

Lorsque l'on fait tendre $\hbar \rightarrow 0$ (c'est-à-dire si l'on s'éloigne des échelles quantiques), le potentiel quantique $Q \rightarrow 0$, et (8-83) tend vers l'équation classique de Hamilton-Jacobi :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{avec l'hamiltonien} \quad H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = V + \frac{(\nabla S)^2}{2m} \quad (8-84)$$

où $\phi \rightarrow S/\hbar$ (S étant l'action). Alors (8-81a) montre que l'énergie totale est la somme des énergies cinétiques, $-(\nabla S)^2/2m$, et potentielles V et Q .

Le potentiel quantique Q dépend de la forme de l'amplitude, qui oscille beaucoup, et non de l'amplitude même, a , et donc de la distance : en conséquence Q génère des effets avec un caractère de non-localité.

Le potentiel quantique peut ainsi être à l'origine des interférences observées dans l'expérience des fentes d'Young ; il porte les caractères physiques et géométriques du processus d'observation et des interactions entre le système observé et son environnement, tels que : les masses, les vitesses des particules, la position et la forme des fentes qu'elles traversent, etc. Par le potentiel quantique l'espace, lieu des positions en tant que seules variables cachées, n'est plus un support inerte pour les expériences et les mesures, mais il apporte les contraintes aux expériences, ou aux interactions entre le système (S) et l'environnement (E) (« appareil de mesure ») [36]. L'espace, et plus généralement l'espace-temps (\mathbf{q}, t) influence les processus d'interaction (S)-(E) via le potentiel quantique.

■ **Courant de probabilité** (v. aussi [102], [104], [141]) :

À partir de (8-81b) on montre que l'amplitude de l'onde quantique $\rho(\mathbf{q}, t) = |\psi|^2 = a^2$ et la vitesse de la particule \mathbf{v} vérifient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{q}, t) \mathbf{v}) = 0 \quad (8-85)$$

qui exprime la conservation du flux d'un fluide de densité ρ et de vitesse \mathbf{v} , comme cela se rencontre en hydrodynamique. Cela se justifie puisque $\phi(\mathbf{q},t)$ est assimilé à l'action S de Jacobi, et compte tenu de la relation de transformation canonique de Hamilton-Jacobi $\mathbf{p} = \nabla S = m\mathbf{v}$, soit :

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla\phi(\mathbf{q},t)}{m} = \dot{\mathbf{q}} \quad (8-86)$$

D'où la nouvelle interprétation de l'amplitude de l'onde quantique : c'est la densité d'un fluide dont le flux est conservatif, $\rho(\mathbf{q},t) = |\psi(\mathbf{q},t)|^2$, tandis que pour l'interprétation de l'école de Copenhague c'est une densité de probabilité de présence d'une ou des particules.

Dans la théorie de Böhm, l'amplitude de l'onde quantique est donc celle d'une onde physique, « matérielle », et non d'une onde abstraite comme intermédiaire mathématique. Cependant, comme cette amplitude correspond à la densité de probabilité de présence d'une ou plusieurs particules, véhiculée par l'**onde pilote** $\psi(\mathbf{q},t)$, elle continue de satisfaire la condition de normalisation à l'unité dans tout l'espace à chaque instant t :

$$\int \rho(\mathbf{q},t)d\mathbf{q} = \int |\psi(\mathbf{q},t)|^2 d\mathbf{q} = 1 \quad (8-87)$$

Le vecteur $\mathbf{J} = \rho(\mathbf{q},t)\mathbf{v}$ qui intervient dans (8-85) est donc interprété comme un **courant de probabilité** de présence, mais où, contrairement à l'interprétation standard de l'École de Copenhague, la vitesse \mathbf{v} est celle des particules donnée par (8-86). On doit donc s'attendre à ce que le courant de probabilité, et par suite la vitesse des particules, dépendent seulement de l'onde pilote. En effet, à partir de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{q},t)+V(\mathbf{q})\psi(\mathbf{q},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{q},t)$$

on obtient :

$$i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

d'où :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = 0$$

qui est (8-85) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\mathbf{q},t) + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8-88a)$$

et avec le courant de probabilité :

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (8-88b)$$

et la vitesse des particules, dont la trajectoire est « pilotée » par l'onde ψ via le potentiel quantique dont les effets sont non-locaux :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*}{\psi^*\psi} \quad (8-88c)$$

■ Conséquences interprétées pour une paire de particules EPR, ou pour l'expérience des fentes d'Young (v. aussi par ex. [102]) :

- L'onde, solution de l'équation de Schrödinger, est physiquement réelle, autant que la ou les particules qui suivent des trajectoires déterminées selon (8-88c), via le potentiel quantique Q . Ce potentiel quantique ne s'annule pas même aux très grandes distances, puisqu'il s'exprime par la forme de l'amplitude de l'onde (8-82) et non par l'amplitude elle-même, et ceci même si l'amplitude devient négligeable. En effet (8-82) implique que Q n'est pas modifié lorsque ψ , et donc son amplitude $|\psi|$, est multipliée par une constante. Il y a donc interaction à distance via le potentiel quantique entre deux particules formant ensemble une paire EPR, car par le potentiel quantique les deux particules ne sont pas séparables.

- Le potentiel quantique contient toute l'information concernant la structure de l'espace. Par exemple, dans l'expérience des fentes d'Young, Q détient l'information sur l'ouverture ou la fermeture d'une des

fentes ou des deux. L'information est répartie à chaque trajectoire que peuvent suivre les particules, qui dépend de l'état d'ouverture ou de fermeture des fentes (B.J. Hiley [143]).

- Ainsi le potentiel quantique a un rôle fondamental dans la téléportation des états EPR, processus recherché en informatique quantique et qu'il s'agit de protéger des perturbations dues aux interactions entre les particules formant des qu-bits et leur environnement.
- La figure 8-5 montre la forme du potentiel quantique pour les particules traversant les deux fentes lors de l'expérience des fentes d'Young, calculée selon la théorie de Böhm, ainsi que l'allure des trajectoires pour une particule traversant ces fentes (réf. [144]).

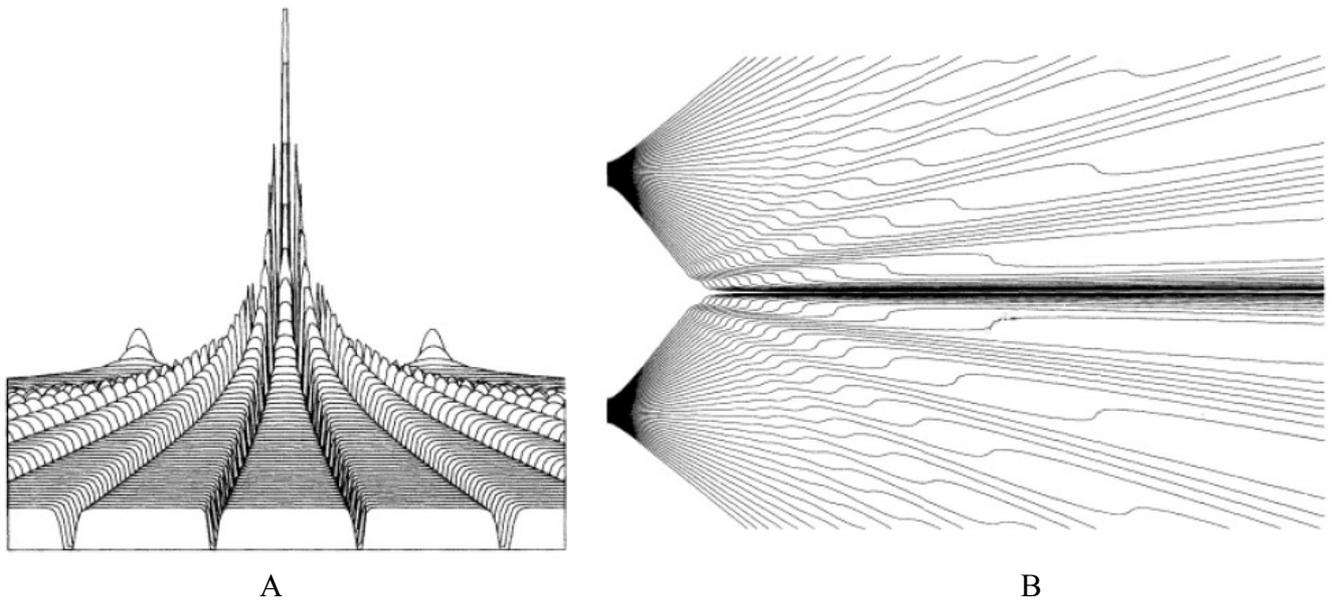


figure 8-5 : A – potentiel quantique calculé après les fentes doubles

B – trajectoires pour une particule traversant les fentes doubles ; le recouvrement des trajectoires est situé au milieu (réf. [144], fig.1)

■ **Questions non résolues et problèmes soulevés** par la théorie de Böhm (v. par ex. [146]) :

- Bien que cette théorie propose un caractère fortement non-local du potentiel quantique, et de ses effets sur les trajectoires suivies par les particules, que l'on traite de manière probabiliste, il se trouve que cette théorie n'est possible que dans un référentiel particulier d'inertie, puisque la vitesse y est déterminée par la fonction d'onde. On ne peut donc pas la rendre compatible avec la relativité restreinte d'Einstein. Une réponse possible à cette objection, proposée par J. Oppenheim, est que les fluctuations de l'espace conditionnent cette vitesse et donc le référentiel, et, de plus justifient le choix de la position \mathbf{q} comme unique variable cachée.
- Comment la théorie de Böhm peut-elle être étendue à la théorie quantique des champs (QFT) comme le permet la théorie standard de l'École de Copenhague ? (voir par ex. [104], [151]).
- Pourquoi la position est-elle, de manière préférée, la variable cachée, qui est la seule grandeur dont la valeur préexiste avant toute mesure, les autres grandeurs donnant une valeur sélectionnée par la mesure comme c'est le cas dans la théorie standard ?
- L'hypothèse du potentiel quantique est une hypothèse « ad hoc », mise en place pour correspondre aux résultats expérimentaux de la mécanique quantique standard, en particulier le choix de la phase $\phi = \hbar S$ qui détermine la forme de Q et la relation entre la vitesse et les fonctions d'onde (onde pilote) selon (8-88c).
- L'interaction à distance, non-locale, est en contradiction avec le principe que la vitesse de la lumière ne peut être dépassée par aucune transformation ou transmission d'information. Théories proposant des réponses, voir par ex. réf. [147], [148], [149], [150], et sur la théorie bohémienne en espace-temps courbe [152].

■ **Effet Aharonov-Böhm** : Comme déjà souligné au point 8-1-4 et à la relation (8-5), c'est la phase qui a un rôle déterminant dans l'interférence des ondes quantiques, par exemple lors de l'expérience des fentes d'Young. Pour des ondes physiques, telles que les ondes électromagnétiques, c'est aussi le cas : deux ondes \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 dont les phases sont décalées atteignent un même point après avoir suivi des chemins

optiques différents, et en ce point l'onde totale reçue présente des interférences correspondant au dernier terme de :

$$|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*)$$

terme d'interférence

Dans la théorie quantique standard, c'est la même chose puisque la densité de probabilité de l'ensemble de deux ondes quantiques ψ_1 et ψ_2 présente un terme d'interférence :

$$\rho(\mathbf{q},t) = \rho_1(\mathbf{q},t) + \rho_2(\mathbf{q},t) + 2 \operatorname{Re}(\psi_1(\mathbf{q},t)\psi_2^*(\mathbf{q},t))$$

terme d'interférence

pourtant, dans cette interprétation, l'onde quantique n'a pas, a priori, un caractère physique.

Cependant, on peut agir physiquement sur les interférences quantiques comme le montre l'expérience de l'effet Aharonov-Böhm (figure 8-6) : dans un dispositif du type fentes d'Young, où les particules émises ont une charge électrique, on applique un champ magnétique H produit par le passage d'un courant électrique dans un solénoïde, de manière très localisée, loin des fentes et des trajectoires susceptibles d'être suivies par les particules. Le champ magnétique appliqué produit un déphasage supplémentaire à celui obtenu sans le champ, et responsable de l'interférence :

$$\frac{1}{\hbar}(\phi_2 - \phi_1) = -\frac{e}{\hbar c} \Phi = -\frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

où $\Phi = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ est le flux du champ magnétique dans le solénoïde. Les franges d'interférence sont décalées, et leur déplacement peut être supprimé en modifiant le champ magnétique (par action sur le courant dans le solénoïde) de façon à obtenir un déphasage $e\Phi/\hbar c = 2\pi n$, ce qui donne $\exp(i\phi/\hbar) = 1$.

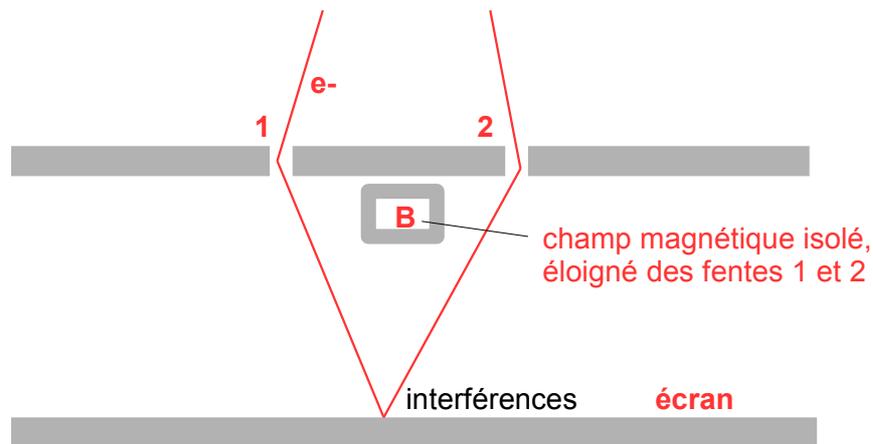


figure 8-6 : figure d'interférences de deux faisceaux d'électrons, dans une expérience de fentes d'Young, modifiée par la présence d'un champ magnétique séparé des trajectoires classiques des électrons

Bien que le champ magnétique soit séparé des trajectoires classiques des particules chargées, les ondes quantiques de celles-ci produisent une interférence qui peut se déplacer selon la valeur de ce champ. Tout se passe comme si le champ était étendu jusqu'aux particules traversant les fentes, donc comme si l'information sur la présence de ce champ dans l'espace était disponible via le potentiel quantique : celui-ci informerait les particules sur la structure physique de l'espace occupé par le système de mesure, au-delà de la portée des interactions électromagnétiques entre le champ magnétique et les particules chargées. Ainsi, le potentiel quantique serait porteur et transmetteur d'information.

■ Comparaison de la théorie de Böhm-Hiley et de la théorie standard de l'École de Copenhague : En conclusion de ce qui précède, les différences entre l'interprétation de l'École de Copenhague et la théorie de Böhm sont résumées au tableau 8-3 :

<i>Propriétés, processus ou grandeurs concernés</i>	<i>Interprétation standard de l'École de Copenhague</i>	<i>Théorie de Böhm</i>
1 - Fonction d'onde	Outil mathématique, abstrait, rassemblant toute l'information sur les états d'un système quantique	La fonction d'onde décrit une onde réelle qui détermine, par sa phase, la position et la vitesse des particules ⁽²⁴⁾
2 - Mesure des grandeurs observables	Les observables (opérateurs associés aux grandeurs) n'ont pas de valeurs préexistantes à la mesure ; c'est le processus de mesure qui détermine la valeur de l'observable de manière totalement aléatoire, parmi les valeurs possibles superposées. Ceci concerne toutes les grandeurs, y compris position et vitesse.	Contrairement aux autres grandeurs, seules les observables positions et vitesses des particules ont une valeur préexistante à la mesure et indépendante d'elle. Pour les autres grandeurs, la situation est la même que dans l'interprétation de Copenhague.
3 - Trajectoire des particules	Ne correspond pas à une réalité physique	La trajectoire possède un caractère réel, en vertu même de l'alinéa 2 ci-dessus.
4 - Principe d'incertitude de Heisenberg $\Delta a \Delta b \geq \hbar/2$	Pour deux observables A et B, dont les valeurs mesurées sont a et b, et conjuguées, il y a indétermination sur les valeurs mesurées ensemble ; ceci est une conséquence de la non-commutation des observables A et B.	Les observables A et B possèdent en réalité des valeurs précises a et b, mais ont une dispersion statistique entre plusieurs systèmes quantiques.
5 - Grandeurs spin, moment cinétique et énergie	Ne présentent pas de particularités par rapport aux autres observables, et à ce titre sont concernées par l'alinéa 2 ci-dessus	Tout comme les autres observables différentes de la position et de la vitesse, les observables spin, moment cinétique et énergie sont associées à la fonction d'onde et non à la particule elle-même ; il s'ensuit que ces grandeurs sont affectées par le processus de mesure, qui dépend directement de l'appareil de mesure, et plus généralement de la structure de l'espace de l'environnement du système quantique.
6 – Réduction du paquet d'onde (postulat n°5)	La réduction est posée comme un principe fondamental de la mesure	Le caractère déterministe des équations d'évolution est incompatible avec une réduction du paquet d'onde, par conséquent une valeur d'observable est déterminée à chaque instant ; le caractère statistique de la mesure provient uniquement des incertitudes sur la fonction d'onde initiale.
7 – Deux grandes familles de particules : bosons et fermions	Selon la valeur du spin, les particules peuvent être soit des bosons suivant la statistique de Bose-Einstein (particules indiscernables), soit des fermions suivant la statistique de Fermi-Dirac (particules discernables)	Toutes les particules sont discernables ; elles peuvent cependant se manifester indiscernables, donc suivant la statistique de Bose-Einstein, à cause du caractère non-local des interactions portées par le potentiel quantique.

Tableau 8-3 : résumé des différences entre la théorie standard et la théorie de Böhm-Hiley

24 Le caractère objectif et réel de l'onde bohmiennne sera néanmoins remise en question par D. Böhm lui-même en 1952 (v. par ex. [142], [146]).

8-2-6 - Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : Interprétation réaliste de la disparition de la superposition des états causée par des perturbations non linéaires de l'équation d'onde (Schrödinger) contenant des paramètres cachés (théorie de Ghirardi-Rimini-Weber ou GRW) ; dans le même ordre d'idée, les perturbations seraient apportées par la gravitation (théorie de Roger Penrose).

■ **Théorie GRW, ou théorie de l'effondrement spontané** (décohérence) [97], [98], [99], [154], [155] :

Selon cette théorie, pour une particule seule, l'effondrement est probabiliste et non certain. Pour des systèmes de particules, l'effondrement est statistiquement régulier.

Pour une particule seule, l'effondrement spontané a lieu au bout d'un temps très long : plusieurs centaines de millions d'années.

Dans la théorie GRW, l'absence de rôle particulier de la mesure dans l'effondrement, et la rareté de celui-ci, font que la théorie reste compatible avec l'intrication. Le processus de mesure conduit néanmoins à la décohérence de l'état quantique de la particule observée parce que celle-ci devient intriquée à un nombre très élevé de particules de l'environnement constitué par le système de mesure.

GRW propose donc une théorie quantique sans observateurs. Elle est déclinée en :

- GRW utilisant la densité (GRWm)
- GRW utilisant le « flash » (GRWf)

■ **Différences avec la théorie standard** : GRW met en jeu des opérateurs différents, une loi du formalisme indique quels opérateurs sont associés à une mesure donnée, et non a priori comme dans la théorie standard.

Il y a une limite de la connaissance sur un système : certaines quantités, pourtant bien définies, ne peuvent jamais être mesurables.

L'effondrement a lieu en des temps aléatoires et non définis par avance, c'est-à-dire il a lieu en des temps liés à l'expérience.

GRW utilise les modèles statistiques physiques, mais tandis que ces modèles permettent classiquement de prédire le comportement macroscopique d'un système à partir de ses composants microscopiques, dans GRW ils permettent de prédire la nature quantique du comportement d'un système. C'est une conséquence du fait que l'équation d'évolution de Schrödinger est remplacée par une équation non linéaire et stochastique qui décrit conduit à la réduction de l'état quantique qui arrive au système.

Dans GRW un système évolue selon l'équation de Schrödinger au cours du temps sauf au temps de réduction : en ce temps, pourquoi et comment a lieu la réduction ? En réponse, GRW pose que cet effondrement survient selon un processus probabiliste de Poisson : il concerne le nombre d'occurrences d'événement d'un type donné dans un intervalle de temps τ . La distribution de probabilité de l'événement suit la loi de Poisson : la probabilité que le nombre d'événements, n , sur la durée τ , soit égal à une valeur m , est égale à :

$$p(n=m) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} \exp(-\lambda \tau) \quad (8-89)$$

où λ est la valeur moyenne de la distribution (i.e. nombre moyen d'événements par unité de temps). D'après GRW, $\lambda = 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ serait une nouvelle constante fondamentale. Par exemple, dans 1 mole de particules (10^{23} particules) on aurait 10^7 occurrences de l'événement par seconde.

L'effondrement transforme l'état du système en un autre état selon un algorithme probabiliste portant, de manière privilégiée, sur la localisation (comme dans la théorie de Böhm (point 8-2-5). Soit $|\psi_S\rangle$ un état du système (S) avant l'effondrement. Celui-ci survient à une particule $n^{\circ}k$ faisant partie de (S), et à la suite de l'effondrement le nouvel état de (S) est :

$$|\psi_S^{\text{eff}}\rangle = \frac{L_{k,0}|\psi_S\rangle}{\|L_{k,0}|\psi_S\rangle\|} \quad (8-90)$$

$L_{k,0}$ est l'opérateur localisation ou position, qui n'est pas nécessairement \hat{q} comme en théorie standard, mais a la forme gaussienne centrée autour de la position 0, de distribution : $p_k(0) = \|L_{k,0}|\psi_S\rangle\|^2$; la largeur de distribution gaussienne $\sigma \sim 10^{-7} \text{ m}$ serait une autre nouvelle constante fondamentale. Les

valeurs de λ et σ rendent la théorie GRW compatible, expérimentalement, avec la mécanique quantique standard.

$|\psi_S\rangle$ est le produit tensoriel des états des N particules du système (S), et si N est élevé l'effondrement survenu pour la particule n°k change l'état de (S) en un état hautement localisé : tous les termes, excepté un, sont supprimés, ce qui résoudreait le problème de la mesure (cf. point 8-1-7).

Un système macroscopique subit 10^7 effondrements/s et donc les états superposés sont supprimés quasiment instantanément.

Un système microscopique, en revanche, rencontre un effondrement spontané rare et donc sa nature quantique demeure longtemps.

■ **Conséquences :**

- Contrairement à la mécanique quantique standard, GRW nécessite que, pour des particules identiques, les fonctions d'onde ne soient pas exclusivement symétriques (comme pour les bosons) ou anti-symétriques (comme pour les fermions) aux temps de l'effondrement.
- Dans GRW l'équation d'évolution au niveau du système (S) porte sur la matrice densité, et non sur la fonction d'onde elle-même. L'équation maîtresse pour la matrice densité $\hat{\rho}$ est du type équation de Linblad (cf. (8-61)) :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \lambda \sum_{k=1}^N \int d^3\mathbf{q} \Lambda_k^{1/2}(\mathbf{q}) \hat{\rho} \Lambda_k^{1/2}(\mathbf{q}) - N\lambda \hat{\rho} \quad (8-91)$$

évolution unitaire écart à l'évolution unitaire : transformation des états purs en états mélangés

$\hat{\rho}$ correspond à la distribution de probabilité de la fonction d'onde $\psi(t)$ d'évolution aléatoire selon GRW depuis un état initial $\psi(t_0)$. $\lambda > 0$ est une constante, considérée comme fondamentale $\lambda = 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ comme vu plus haut; $N\lambda$ est le taux de distribution exponentielle des durées ΔT_j réparties aléatoirement entre deux effondrements n°j-1 et n°j. Les opérateurs $\Lambda_k(\mathbf{q})$ sont des **opérateurs taux d'effondrement**, selon le processus de « saut » GRW dans l'espace de Hilbert pour un système constitué de N particules de fonction d'onde $\psi = \psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ (où $\mathbf{q}_k \in \mathbf{R}^3$ et $k = 1, \dots, N$) depuis la position de la particule n°k, en une position \mathbf{q} quelconque ; ces opérateurs ont l'expression gaussienne :

$$\Lambda_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\hat{\mathbf{q}}_k - \mathbf{q})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (8-92)$$

où $\hat{\mathbf{q}}_k$ opérateur position de la particule n°k, σ largeur de distribution gaussienne, considérée comme nouvelle constante fondamentale $\sigma \sim 10^{-7} \text{ m}$, comme vu plus haut. L'écart à l'évolution unitaire est ainsi un « phénomène » où la fonction d'onde est multipliée par une gaussienne localisée, spatialement, menant à l'effondrement de la fonction d'onde, et dont l'occurrence dans le temps suit une distribution de Poisson.

Pour rappel, l'évolution unitaire est décrite par l'opérateur unitaire $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t)$ (cf. (8-18)), associé à l'hamiltonien pour N particules (sans spin) :

$$\hat{H} = -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$$

On montre l'algorithme suivant lequel surviennent aléatoirement les effondrements successifs n°I_j aux temps T_j aux positions centrales \mathbf{q}_{Ij} de la gaussienne. Pour le premier effondrement n°j = 1, qui survient à T₁ au centre aléatoire \mathbf{q}_{I1} , la fonction d'onde du système se transforme en :

$$\psi_{T1} \rightarrow \psi_{T1}^{\text{eff}} = \frac{\Lambda_{I1}^{1/2}(\mathbf{q}_{I1}) \psi_{T1}}{\|\Lambda_{I1}^{1/2}(\mathbf{q}_{I1}) \psi_{T1}\|} \quad (8-93)$$

où ψ_{T_1} est la fonction d'onde sur la durée ΔT_1 qui précède juste l'effondrement n° $j = 1$: $0 \leq t \leq \Delta T_1 = T_1$. Comme les effondrements affectent progressivement les états superposés de chacune des N particules du système, leur numéro de repérage I_j est prélevé de manière aléatoire parmi l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Le centre d'effondrement n° $j = 1$, \mathbf{q}_{I_1} , est prélevé aléatoirement avec une distribution de probabilité conditionnelle portant sur la largeur $d\mathbf{q}_{I_1}$ autour de \mathbf{q}_{I_1} :

$$P(\text{largeur } d\mathbf{q}_{I_1} \text{ autour de } \mathbf{q}_{I_1} \mid \text{si effondrement n° } I_1 \text{ lorsque fonction d'onde avant lui est } \psi_{T_1}) = \langle \psi_{T_1} | \Lambda_{I_1}(\mathbf{q}_{I_1}) | \psi_{T_1} \rangle d\mathbf{q}_{I_1} = \|\Lambda_{I_1}^{1/2}(\mathbf{q}_{I_1}) \psi_{T_1}\|^2 d\mathbf{q}_{I_1}$$

et on réitère le raisonnement aux effondrements suivants : $\psi_{T_1}^{\text{eff}}$ évolue jusqu'au temps où survient l'effondrement n° $j = 2$, centré en \mathbf{q}_{I_2} , $T_2 = T_1 + \Delta T_2$, et devient $\psi_{T_2}^{\text{eff}}$ à l'effondrement, et ainsi de suite. Au bout d'un temps $t > t_0$, $n \leq N$ effondrements survenus aux temps $t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < t$ aux centres $\mathbf{q}_{I_1}, \mathbf{q}_{I_2}, \dots, \mathbf{q}_{I_n}$ donnent la fonction d'onde aléatoire :

$$\psi_t = \frac{L(t_0, t, n) \psi_{t_0}}{\|L(t_0, t, n) \psi_{t_0}\|} \quad (8-94a)$$

où l'opérateur associé à ces n effondrements successifs sur l'intervalle de temps (t_0, t) est :

$$L(t_0, t, n) = \lambda^{n/2} \exp\left(-\frac{N\lambda(t-t_0)}{2}\right) \times U(t-T_n) \Lambda_{I_n}^{1/2}(\mathbf{q}_{I_n}) \cdot U(T_n-T_{n-1}) \Lambda_{I_{n-1}}^{1/2}(\mathbf{q}_{I_{n-1}}) \cdot U(T_{n-1}-T_{n-2}) \Lambda_{I_{n-2}}^{1/2}(\mathbf{q}_{I_{n-2}}) \dots \Lambda_{I_1}^{1/2}(\mathbf{q}_{I_1}) U(T_1-t_0) \quad (8-94b)$$

NB : en l'absence d'effondrements, on retrouve bien la fonction d'onde « non effondrée », au temps $t > t_0$, par l'évolution unitaire : $\psi_t = U(t-t_0) \psi_{t_0}$.

Cependant, il faut noter que toute fonction d'onde initiale peut résulter d'effondrements antérieurs, de lieux et de temporalité également aléatoires.

• Contrairement à la réduction selon Von Neumann en mécanique quantique standard, l'effondrement des états superposés, en GRW, ne conduit pas à un état propre correspondant à une position exacte, mais à un état certes très étroit autour d'une position, mais jamais complètement précise (figure 8-7) (problème dit « tails problem » [98]).

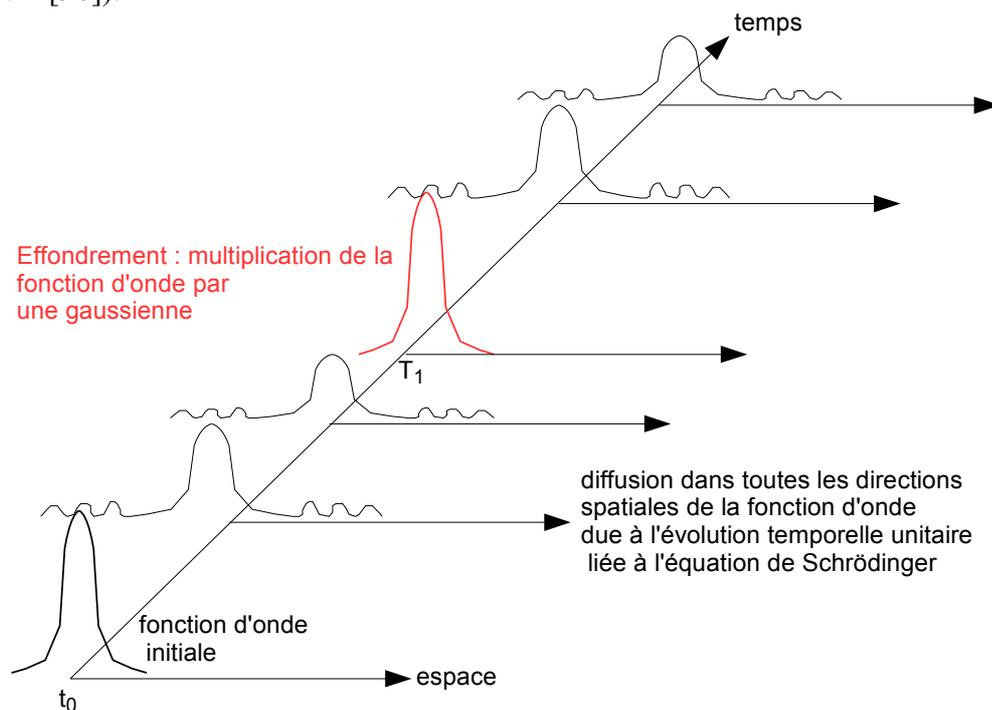


figure 8-7a

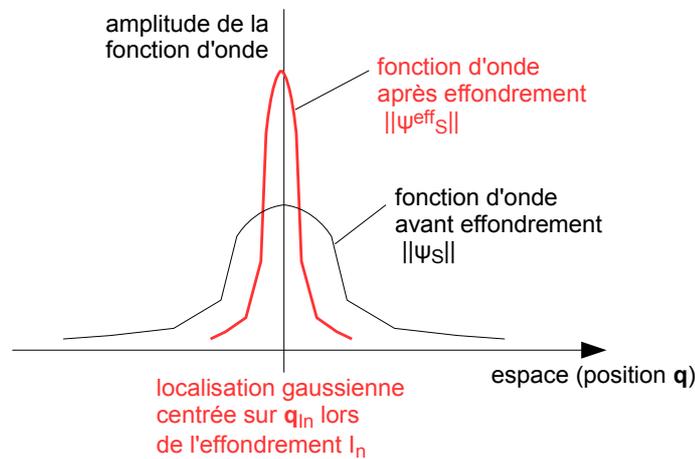


figure 8-7b

figure 8-7 : Effondrement de la superposition des états quantiques selon la théorie GRW

8-7a : la fonction d'onde est très centrée spatialement à l'instant initial ; conformément à l'évolution unitaire liée à l'équation de Schrödinger, elle diffuse dans toutes les directions de l'espace ; l'effondrement qui survient en des temps qui suivent une distribution de Poisson (8-89), se traduit par le produit de la fonction d'onde avec une distribution spatiale gaussienne (opérateurs Λ_k , (8-92)). Et le processus recommence jusqu'au prochain effondrement.

8-7b : Dans la théorie GRW, pour une particule isolée, la fonction d'onde évolue normalement en diffusant dans toutes les directions spatiales, conformément à l'évolution unitaire ; mais à chaque période d'environ 100 millions d'années, l'effondrement résulte d'une interaction gaussienne de l'amplitude de la fonction d'onde, qui a pour effet un centrage très serré autour d'une position spatiale \mathbf{q} (d'après [158])

Par exemple, pour un système de N particules distinctes aux positions \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, N$, la fonction d'onde $\psi_S(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k, \dots, \mathbf{q}_N)$ devient, après effondrement concernant une particule $n^\circ k$ à la position \mathbf{q} :

$$\psi_{S,k}^{\text{eff}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k, \dots, \mathbf{q}_N; \mathbf{q}) = \psi_S(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k, \dots, \mathbf{q}_N) G(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}) \quad (8-95a)$$

où G est une fonction gaussienne :

$$G(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}) = K \exp\left(-\frac{(\mathbf{q}_k - \mathbf{q})^2}{2d^2}\right) \quad (8-95b)$$

où d représente la précision de la localisation, K est une constante telle que la densité de probabilité soit normée à l'unité dans tout l'espace :

$$\int P(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 1$$

Il s'ensuit que la nouvelle fonction d'onde $\psi_{S,k}^{\text{eff}}$ après effondrement en $n^\circ k$ n'est plus normalisée, contrairement à la mécanique quantique standard.

Pour ce qui concerne le temps où se produit l'effondrement, nous avons vu qu'il suit la distribution de Poisson.

Pour des discussions détaillées, voir par exemple [97], [100].

■ **Théorie de l'effondrement causé par la structure gravitationnelle de la géométrie de l'espace-temps** (théorie de Penrose et Diósi, [156], [157]) :

Selon la théorie de Penrose, plus exactement de Lajos Diósi et Roger Penrose (**théorie DP**), l'effondrement de la superposition des états quantiques provient de la structure géométrique de l'espace-temps, par les effets que la gravitation induit sur l'évolution issue de l'équation de Schrödinger. Nous verrons très schématiquement que, d'après cette théorie, le caractère non calculable au sens de Turing [190], c'est-à-dire non algorithmique, de l'effondrement est exploité pour certaines théories sur la

conscience, fondées sur les phénomènes quantiques des condensats de Fröhlich dans les microtubules neuronaux (théories de Penrose, Hameroff, Fröhlich). Une introduction à ces approches, très accessible, se trouve dans le livre de Penrose [158].

■ **Théorie DP** : D'après cette théorie, si les branches représentant les différents états superposés et leurs évolutions, induisent des courbures géométriques de l'espace-temps différentes, alors cette superposition ne peut plus se maintenir. L'effondrement, et sa durée, dépend de la masse volumique des particules et est un processus aléatoire qui serait lié à la diffusion du mouvement des particules ; si celles-ci ont une charge la diffusion s'accompagne d'un rayonnement qui, bien que faible, est expérimentalement détectable. Plus la masse du système est élevée, plus grande est la différence entre les structures d'espace-temps des branches, et plus rapide est le processus d'effondrement de la fonction d'onde. Prenons l'exemple d'une particule sphérique de masse m et de rayon a (cf. [158]), figure 8-8. Son énergie (gravitationnelle) est de l'ordre de :

$$E = \frac{G m^2}{a}$$

(G : constante de gravitation, $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$). Si cette particule est dans une superposition de deux états quantiques, alors elle est formée de deux exemplaires de sphère situés chacun dans un état différent. Lorsque ces états correspondent à des positions différentes des deux exemplaires, ceux-ci sont spatialement séparés et l'énergie de cette séparation, supposée seulement gravitationnelle, est E . Le temps de réduction (effondrement de la superposition dû à la séparation) est de l'ordre de :

$$\tau \sim \frac{\hbar}{E}$$

et puisque la masse est $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \mu$ (μ : masse volumique), il vient en ordre de grandeur :

$$\tau = \frac{9}{16 \pi^2} \frac{\hbar}{G} \frac{1}{\mu^2 a^5} \quad (8-96)$$

La théorie de Diósi-Penrose propose ainsi de démontrer pourquoi les objets quantiques subsistent dans des états superposés : tant que ces états sont dans des métriques d'espace-temps similaires, cette superposition reste possible. Si au bout d'un certain temps (temps de réduction ou d'effondrement τ) ces métriques changent entre les états superposés, alors le système bascule dans l'un des états (réduction). Or le temps de réduction étant très long pour des objets microscopiques isolés, ils restent apparemment constamment dans des états superposés si aucune interaction externe (mesure, interaction avec l'environnement) ne vient provoquer la réduction (plus exactement la décohérence, cf. point 8-2-4).

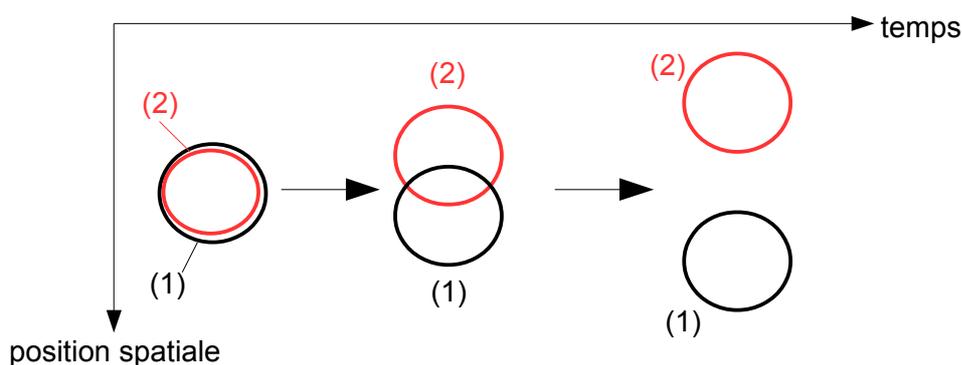


figure 8-8 (d'après [158]) : séparation de deux exemplaires d'une même particule sphérique correspondant à des états superposés (1) et (2). L'énergie nécessaire à cette séparation est E et le temps de réduction (basculement de la particule dans l'un des états (1) ou bien (2)) est de l'ordre de $\tau \sim \hbar/E$

Les résultats obtenus à partir de ces critères de réduction sont compatibles avec les observations de systèmes quantiques « simples » : dans l'exemple d'un nucléon, où le rayon « a » est de l'ordre du rayon

d'action de l'interaction forte, soit $a \sim 10^{-15}$ m, on obtient τ de l'ordre de au moins 10^7 années. Ainsi, les objets quantiques isolés produisent des effets d'interférence que l'on peut observer.

■ Plus précisément l'énergie associée à la séparation spatiale des états superposés, $E = \Delta E_{DP}$, dans le modèle de Diósi-Penrose (DP) de l'effondrement de la fonction d'onde lié aux effets gravitationnels, est une mesure de la largeur de la superposition distribuée entre les différentes configurations gravitationnelles (figure 8-9). Pour le cas simple d'un système dont le centre de masse est dans une superposition de deux états séparés par une distance a , ΔE_{DP} est :

$$\Delta E_{DP}(a) = -8\pi G \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mu(\mathbf{r})(\mu(\mathbf{r}'+\mathbf{a})-\mu(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (8-97)$$

Pour éviter les situations de divergence arrivant pour une masse ponctuelle, Diósi propose de réécrire la densité de masse en tenant compte de celle de l'onde quantique :

$$\mu(\mathbf{r}) = m |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

L'équation maîtresse du modèle DP conduit à la prévision de l'effondrement et à celle d'une diffusion universelle de type brownien pour chaque constituant du système ; elle est du type de Linblad où intervient la matrice densité (cf. (8-61)) :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] - \frac{4\pi G}{\hbar} \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [\hat{\mu}(\mathbf{r}'), [\hat{\mu}(\mathbf{r}), \hat{\rho}(t)]] \quad (8-98)$$

où $\hat{\mu}(\mathbf{r}) = \sum_k \mu_k(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}_k)$ est l'opérateur densité de masse du système (S) de particules, avec $\mu_k(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}_k)$ opérateur densité de masse de la particule n°k centrée à la position $\hat{\mathbf{r}}_k$ considérée comme opérateur position. Si, par exemple, une particule libre a un opérateur impulsion (ou plus largement moment conjugué) $\hat{\mathbf{p}}$, sa contribution au moment moyen est nulle

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathbf{p}}\rho) = 0 \quad (8-99)$$

tandis que $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$ n'est pas nulle et augmente avec le temps : ce que l'on appelle la *diffusion*.

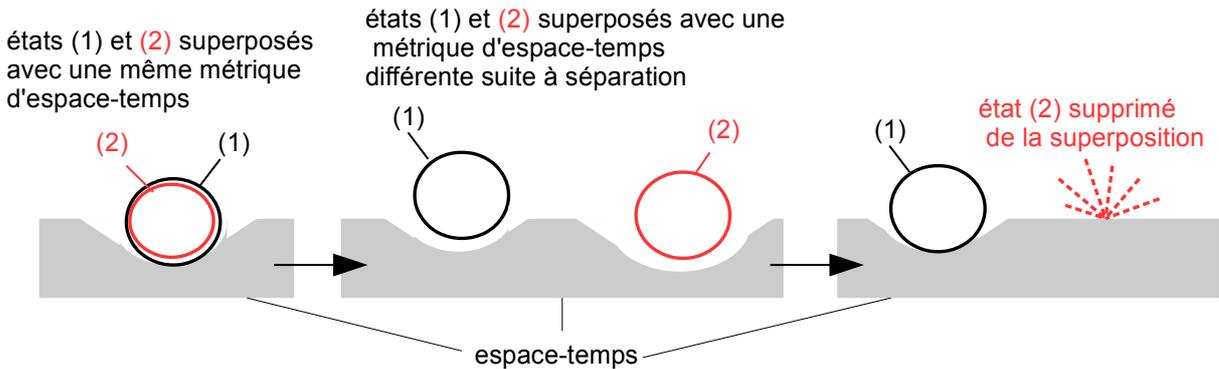


figure 8-9 : Modèle de Diósi-Penrose (DP) de l'effondrement de la superposition des états quantiques dû aux effets gravitationnels (courbures de l'espace-temps)

Si les particules ont une charge, la diffusion s'accompagne d'un rayonnement dont le spectre dépend de la configuration du système (en particulier dans le domaine des rayons X). Pour un système d'atomes, on montre que le taux d'émission de photons Γ_t vérifie (cf. [157]) :

$$\frac{d\Gamma_t}{d\omega} = \frac{2}{3} \frac{G e^2 N^2 N_a}{\pi^{3/2} \epsilon_0 c^3 a^3 \omega} \quad (8-100)$$

où N_a est le nombre total d'atomes du système, N^2 est un facteur prenant en compte la dépendance au numéro atomique N , $\omega = 2\pi f$ avec f fréquence. Sur cette base, l'expérience pour détecter la diffusion peut être conduite, bien que l'émission dans ce cas soit faible, et sous condition d'un environnement à très faible bruit. La diffusion conduit à un accroissement de la température jusqu'à une température d'équilibre, bien que la théorie DP prévoit plutôt un accroissement régulier.

Des expériences pour confronter les prévisions DP avec les mesures de diffusion via le rayonnement de particules chargées ont été conduites par S. Donadi et al [157] dans le labo souterrain du Gran Sasso, Italie. Le système mesuré est le rayonnement X et γ émis par les protons d'un cristal de germanium. Or, tandis que la théorie DP prévoyait plusieurs dizaines de milliers de photons, la mesure donna un peu moins de 600 photons dus à la radioactivité naturelle ambiante. De plus, la théorie DP prévoyait un rayon d'effondrement $a \sim 10^{-12}$ m, tandis que les mesures conduisent à 10^{-11} m.

En conclusion, la théorie DP en l'état n'a pas encore reçu de confirmation (ni de réfutation) expérimentale par suite des limites auxquelles ont été confrontées les mesures.

■ **Remarques sur le lien entre le caractère non Turing-calculable de la conscience et celui de l'effondrement spontané** de l'onde quantique d'un système important de particules selon la théorie DP [159] (théorie de la « *réduction objective orchestrée* » **Orch-OR**) :

J'ai évoqué plus haut la nature non-calculable de la conscience avancée par Penrose. Cette idée fait partie de la famille des théories spéculatives de la conscience qui considèrent que celle-ci a un lien avec la physique quantique (comme celle de John Eccles [160] mais elle lui est foncièrement différente). Je rappelle que ce type de théories va à l'encontre des théories connexionnistes comme celles d'Edelman et qui font appel dans les fondements à des formalismes traitant des systèmes complexes et auto-organisationnels [33].

Par " non-calculable " Penrose signifie que la conscience, en tant que processus ressenti et subjectif, ne peut être réductible à un processus algorithmique formel du type « machine de Turing » [190] [172] [174] (ce qui contredit l'idée d'Edelman sur l'éventualité de construire un jour des robots conscients... !) Pour cela, non seulement Penrose s'appuie sur le principe de consistance de Gödel sur un plan logique formel, mais encore, sur un plan physique, il cherche à introduire une physique non-algorithmique dans les processus supposés de la conscience. En résumé sa thèse procéderait en deux étapes [158] :

- Étape 1 : le système nerveux, voire l'organisme dans son ensemble, peut être le siège de phénomènes quantiques si, comme il l'estime à partir des travaux de Herbert Fröhlich [162] (qui semblerait démontrer l'existence d'une onde de cohérence quantique biologique avec des rayonnements hyperfréquences à la fréquence de quelques centaines de GHz dans le système nerveux ?), les microtubules qui composent les cytosquelettes des neurones et/ou des cellules sont le siège d'une cohérence quantique (à la façon des condensats de Bose-Einstein, donc pouvant un jour être traités comme des sources laser ou hologrammiques comme la lumière cohérente...).

- Étape 2 : pour que lors des interactions avec l'extérieur (perception par exemple) la réduction de ces ondes quantiques cohérentes (décohérence) soit un processus non-calculable, donc caractéristique de la conscience, il faut lui associer un phénomène physique non réductible à un algorithme : le passage de l'onde quantique cohérente à un état réduit (projection des états possibles portés par l'onde sur l'un d'eux, suite à une interaction avec un autre système) serait lié à la courbure de l'espace-temps au voisinage du système due à ses effets gravitationnels conformément à la relativité générale d'Einstein. Ainsi Penrose admet que les ondes quantiques représentent une superposition d'états possibles porteurs d'énergie capable de modifier la topologie du vide, selon un tenseur de courbure qu'il reste à découvrir. Mais il estime que tant que deux états possibles sont associés à des topologies très voisines il n'y a pas de réduction de l'onde en un état observable. Dans ce cas le temps de décohérence est très long à l'échelle des observations humaines car les états quantiques intriqués sont alors très stables. L'ordre de grandeur du temps de décohérence a été évalué, il est d'autant plus grand que la densité r et la taille a du système sont faibles (relation (8-96)). Cette relation donne des résultats numériques qui restent compatibles avec les données d'observations de la mécanique quantique standard... La nature non-calculable de la réduction des ondes quantiques ainsi « expliquée », donc de la conscience, proviendrait du caractère non-linéaire du changement de la topologie gravitationnelle (comme le prévoit d'ailleurs la relativité), la séparation des états engendre une énergie qui à son tour vient modifier la topologie gravitationnelle de l'espace-temps et ainsi de suite. En outre on déduirait de cette théorie que la conscience est

potentiellement existante dans tout être vivant cellulaire !

Mais, comme on l'a vu, la théorie DP n'a pas (encore) reçu de validation ou de réfutation expérimentale. De plus, pour ce qui concerne la présence d'une conscience due au caractère non Turing-calculable de l'effondrement spontané de l'onde quantique dans les condensats de H. Fröhlich dans les microtubules (voir par ex. [162], [163]), la température du rayonnement associé à la diffusion serait trop élevée et incompatible avec ce qui peut se produire dans les systèmes vivants [164].

La conscience émergerait de la possibilité du maintien de la cohérence quantique des condensats de Fröhlich dans les microtubules (S. Hameroff [163]), suivie de l'effondrement de leur onde quantique selon le processus DP, que favoriserait la petite taille et la structure spiralée des microtubules (diamètre 25 nm) composées de molécules de tubuline sous formes allongée ou contractée.

Mais la théorie Orch-OR n'est pas la seule à pouvoir être utilisée pour « expliquer » la conscience à partir des propriétés quantiques. On peut mentionner, de manière non exhaustive :

- La dynamique quantique du cerveau (Quantum Brain Dynamics, **QBD**) introduite par W. Freeman et G. Vitiello [166], [167], [168], selon laquelle le champ cortical, aux propriétés quantiques, proviendrait des dipôles électriques que forment les molécules d'eau (sachant que l'eau représente 70% de la masse du cerveau humain). Le champ cortical interagirait avec les réseaux de neurones, et les contrôlerait, par l'intermédiaire des filaments d'actine dans les membranes cellulaires et les dendrites (prolongements du corps cellulaire des neurones).
- La cohérence quantique dans les canaux ioniques neuronaux, introduite par Gustav Bernroider, 2005 [170], [171]. Cette cohérence quantique peut se maintenir suffisamment longtemps dans ces canaux, pour ensuite, après effondrement de la superposition, intervenir dans les processus neurobiologiques. Les canaux ioniques neuronaux ont un rôle déterminant dans les processus d'information cérébraux ; ils assurent la régulation du potentiel électrique de part et d'autre de la membrane des axones (fibres nerveuses véhiculant les signaux électriques du corps cellulaire des neurones vers les synapses, où les transmissions inter-neurales ont lieu).
- Etc. Pour aller plus loin, dans une synthèse et les discussions sur les modèles quantiques de la conscience et de l'esprit, voir par ex. [169].

Pour en revenir à la théorie Orch-OR de Penrose et Hameroff, on part du principe que l'on ne peut pas invoquer les processus d'émergence dans les systèmes complexes (tels les systèmes neuronaux) pour expliquer l'existence de la conscience : il faut aussi introduire la nature quantique des processus neuronaux dans les microtubules. Ces processus nécessitent que les microtubules puissent commuter très rapidement différents états, avec une vitesse compatible avec les temps caractéristiques des processus neurophysiologiques. Or les expériences menées sur les microtubules montrent qu'il y a incompatibilité, et même que la durée de vie des évolutions cohérentes des états des microtubules est longue par rapport aux échelles de temps de commutation que requiert la théorie Orch-OR [164].

Initialement, il a été montré qu'un ensemble d'oscillateurs peut former un condensat de type Bose-Einstein (où les composants du condensat sont statistiquement indiscernables) par l'activation de modes basses fréquences sous l'action d'une énergie extérieure (Fröhlich, 1968) (figure 8-10). Les condensats de Fröhlich sont classés en 3 types :

- Faibles condensats : effets importants sur la cinétique chimique.
- Forts condensats : une part très importante de l'énergie incidente est focalisée sur un seul mode de vibration de l'ensemble des oscillateurs.
- Condensats cohérents : l'énergie incidente est récupérée par un seul état quantique. Ces condensats cohérents nécessitent une énergie très importante, incompatible avec un environnement biologique. Il s'ensuit que ce processus d'effondrement en un seul état quantique, qui joue un rôle fondamental dans la théorie Orch-OR de Hameroff-Penrose pour la nature non Turing-calculable de la conscience, n'est pas compatible avec une conscience dans un système biologiquement vivant [161], [164].

Il reste que les faibles condensats, qui ont des effets importants sur la cinétique chimique, notamment des enzymes, peuvent être obtenus avec une énergie d'origine biochimique ou bien externe issue de rayonnement micro-onde de l'ordre de 8 GHz, agissant sur la résonance dans les microtubules [161], [164], ce qui offre des perspectives intéressantes en médecine (Pokorny, 2004 [165]).

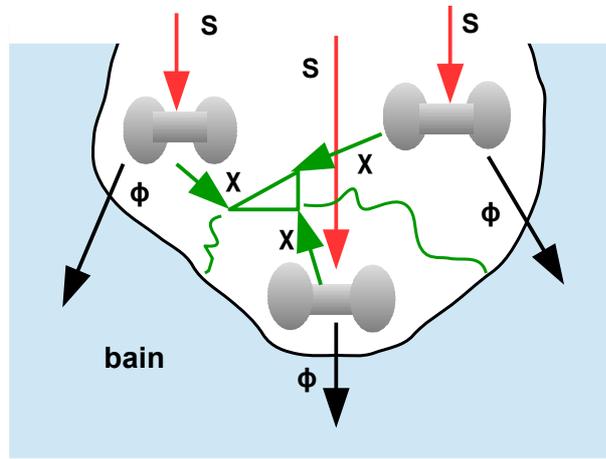


figure 8-10 : modèle de Fröhlich d'un système piloté constitué de $Z = 3$ oscillateurs connecté à un bain thermique. En rouge, l'énergie incidente arrive aux oscillateurs avec un taux « s » ; en bleu, la perte d'énergie dans le bain par les oscillateurs est à un taux ϕ ; en vert, l'énergie non perdue dans le système est redistribuée en interne avec un taux χ (d'après [161])

Dans le modèle de Fröhlich, le système, connecté à un environnement formant un bain thermique à la température T , est composé de Z oscillateurs couplés dont le mouvement collectif oscille avec une superposition de fréquences ω_k ($1 \leq k \leq Z$), de fréquence moyenne ω_0 et de fréquence minimale ω_1 (par définition attribuée à l'oscillateur $n^{\circ}k = 1$). Le mouvement collectif est alimenté par une énergie incidente avec un taux « s » par unité de temps, et dont une partie est dissipée dans le bain thermique environnant avec un taux ϕ qui représente le gain énergétique par rapport à la température $T = 0$ K. Une autre partie de l'énergie est redistribuée entre les oscillateurs et le milieu interne avec un taux χ . Le nombre moyen de quanta d'excitation du mode collectif $n^{\circ}k$, n_k , fonction de la température T du bain thermique, est donné par la distribution de Planck :

$$n_k(T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_k}{k_B T} - 1\right)} \quad (8-101)$$

(où k_B constante de Boltzmann). L'état stationnaire du système est obtenu dans les domaines de haute température, $T \gg \hbar\omega_k/k_B$, et correspond à un nombre total N_s de quanta du système d'oscillateurs de nombres n_{ks} en mode stationnaire

$$N_s = \sum_{k=1}^Z n_{ks} \quad (8-102)$$

plus grand que celui correspondant à un équilibre thermique avec le bain à une température T

$$N(T) = \sum_{k=1}^Z n_k(T) \quad (8-103)$$

soit un accroissement du nombre de quanta collectif par rapport à l'équilibre thermique à température T :

$$N_s - N(T) = Z \frac{s}{\phi} \frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \quad (8-104)$$

où la fréquence du mode stationnaire est $\bar{\omega} \gg \omega_1$. La quasi-totalité des quanta correspondant à l'état stationnaire activent le mode de plus basse fréquence. Ces conditions caractérisent les forts condensats de Fröhlich évoqués plus haut. Mais, comme énoncé plus haut, pour ce type de condensats une source d'énergie importante est requise pour obtenir un mode particulier de vibration dans un système complexe

biologique, ce qui semble incompatible [161].

Dans la théorie Orch-OR de Hameroff-Penrose la superposition des états quantiques est produite dans les microtubules (rappel : treillis cylindriques de protéines du cytosquelette des neurones cérébraux). Le couplage des microtubules avec un niveau de signal dans les synapses peut conduire à des processus de calcul quantique (comme des qu-bits) grâce à la structure en treillis qui permet, de manière intermittente, un isolement des états quantiques vis-à-vis de l'environnement. Le facteur qui entraîne la réduction (ici, l'effondrement) des états quantiques superposés ne provient pas de l'interaction du système avec l'environnement (comme dans le modèle de décohérence, point 8-2-4) ; il est de caractère objectif car l'effondrement de l'onde quantique résulte des modifications de la géométrie de l'espace-temps (effets gravitationnels) associée à chaque état superposé comme décrit dans la théorie DP.

Un tel processus n'est pas calculable au sens de Turing (c'est-à-dire non reproductible par un algorithme suivant la « machine de Turing », [172], [173], [174], [190]), et peut donc expliquer les processus conscients dans le système nerveux. Or, la viabilité de la théorie Orch-OR requiert deux conditions :

- a) La possibilité qu'existent des états quantiques superposés dans les structures microtubules, et donc qu'il y ait isolement entre eux et l'environnement biologique.
- b) L'effondrement de la superposition quantique, produit de manière intermittente, dû uniquement aux effets gravitationnels de la structure espace-temps sous-jacente.

La condition (a) est confrontée à la difficulté suivante : environnement généralement chaud et bruit thermique pouvant générer la décohérence bien avant l'effondrement exclusivement causé par les effets gravitationnels. Cette difficulté peut être écartée si les états quantiques dans les microtubules remplissent certaines conditions.

Dans la condition (b) l'effondrement (réduction objective -OR) provient exclusivement de la géométrie gravitationnelle de l'espace-temps, sous l'hypothèse que sa courbure locale équivaut à une masse. Il s'ensuit, dans la théorie DP, que les superpositions quantiques, et donc les déplacements de la masse du système par rapport à elle-même, équivalent à des courbures différentes simultanées de l'espace-temps dans des directions opposées (figure 8-8), formant ainsi des « bulles » instables, et pour lesquelles au-delà d'un certain seuil d'instabilité il y a réduction de ces états superposés en un seul. Le temps de réduction (c'est-à-dire ici, d'effondrement), $\tau = \hbar/E$ est alors exprimé par (8-96) ; il est d'autant plus court que la densité et/ou la taille du système sont grandes. Par exemple, pour un objet de masse 1 kg et de taille plusieurs décimètres on a $\tau \sim 10^{-37}$ s, tandis que pour un atome complètement isolé, l'effondrement -OR gravitationnel spontané est à $\tau \sim 10^6$ années.

Le modèle est numériquement compatible avec l'observation des processus neurophysiologiques si l'on a en ordre de grandeur $10 \text{ ms} \leq \tau \leq 500 \text{ ms}$, sachant que à $\tau \sim 25 \text{ ms}$ on observe les ondes cérébrales de fréquence 40 Hz, que à $\tau \sim 100 \text{ ms}$ correspondent les ondes électroencéphalogrammes EEG, ou encore que à $\tau \sim 500 \text{ ms}$ correspondent les perceptions sensorielles. Avec ces ordres de grandeur, la réduction -OR spontanée peut concerner des masses de l'ordre de 10^{-9} gramme, ce qui est compatible avec les constituants des microtubules. S'agissant de la condition (a) ci-dessus, très schématiquement, la structure d'un microtubule contribue à la possibilité d'être satisfaite (figure 8-12). Le « calcul » quantique dont les tubulines (protéines des microtubules) sont le siège est illustré à la figure 8-13.

Le processus de superposition et de réduction objective -OR, avec état conscient comme état de sortie, au cours du temps τ , sont schématisés à la figure 8-14.

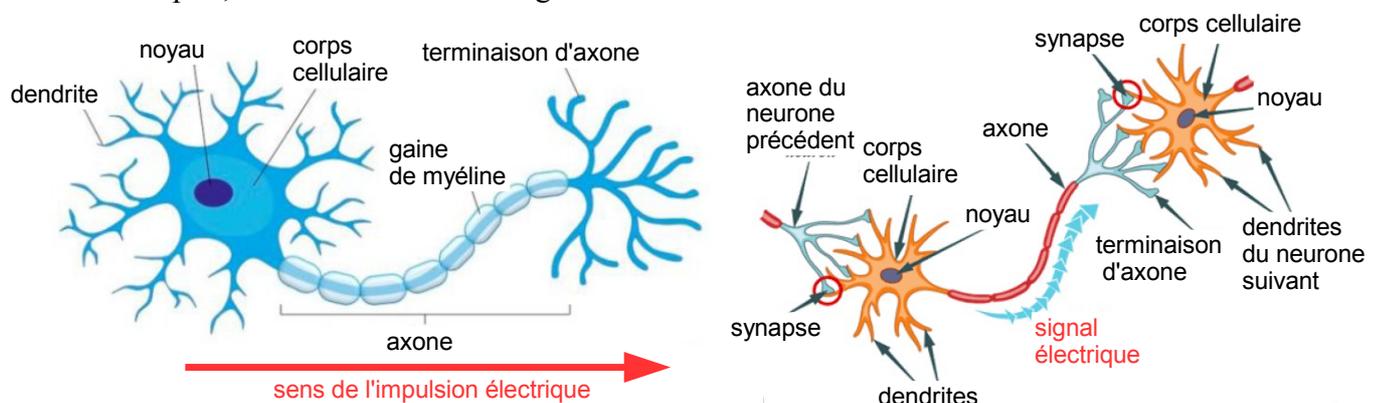


figure 8-11 : structure neuronale (à g.) et transmission entre neurones (à d.)

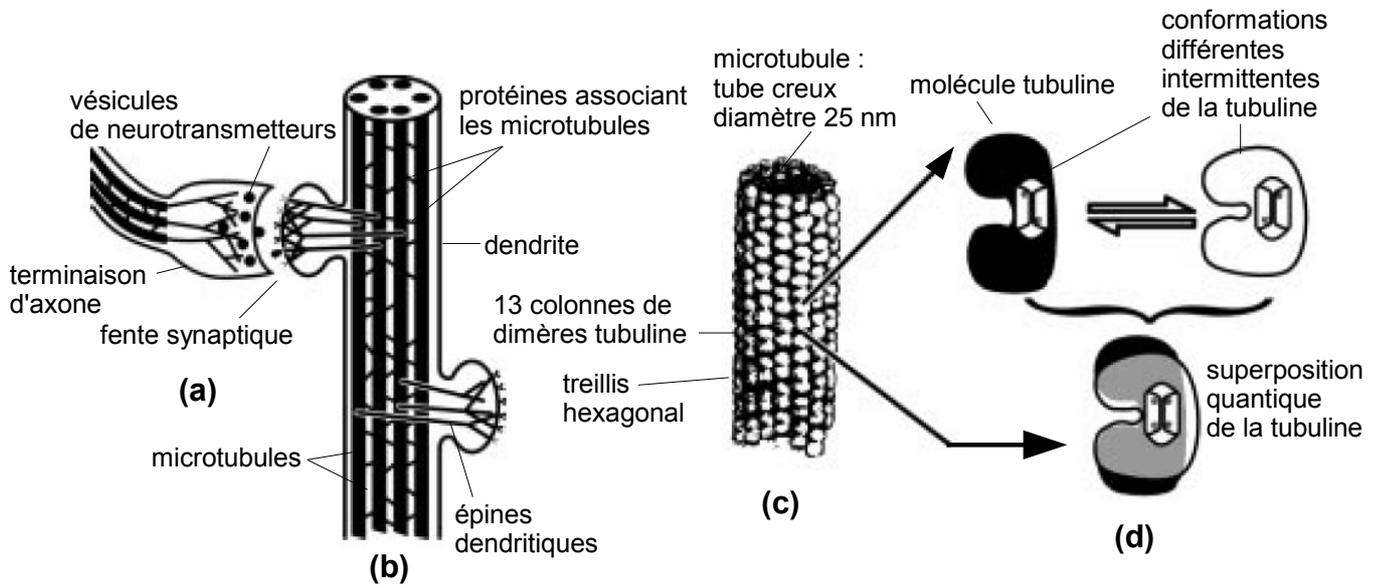


figure 8-12 : Connexion synaptique entre neurones et états des tubulines des microtubules constituant les dendrites (réf. [163]).

- (a) La terminaison de l'axone du neurone précédent libère des vésicules de neurotransmetteurs dans la fente synaptique, qui sont reçues par les épines dendritiques du neurone suivant post-synaptique.
- (b) Épines dendritiques situées sur la dendrite du neurone post-synaptique. Les microtubules dans la dendrite sont reliés entre eux par des protéines.
- (c) Le microtubule est un tube en treillis hexagonal creux de diamètre 25 nm, avec 13 colonnes de dimères tubuline.
- (d) Chaque molécule de tubuline peut basculer entre deux configurations, ou bien être dans deux états superposés.

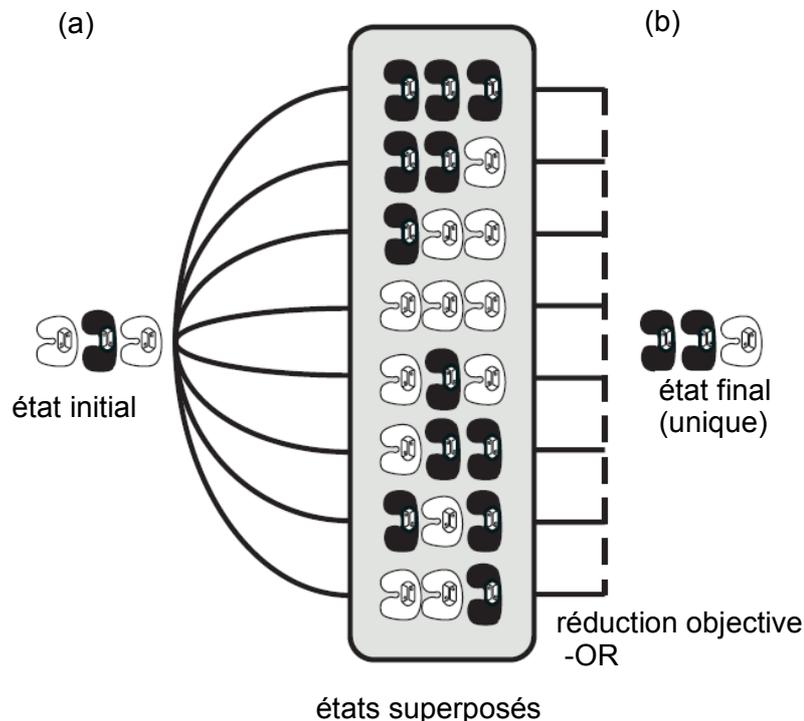


figure 8-13 : Représentation d'un calcul quantique impliquant 3 tubulines (réf. [163]) :

- (a) Le système des 3 tubulines est dans un état initial classique. S'il est totalement isolé de son environnement, il entre dans une superposition quantique d'états qui coexistent simultanément.
- (b) Lorsque la réduction objective -OR se produit, un état classique final est sélectionné, devenant à son tour un état initial pour un calcul quantique suivant, et le cycle recommence.

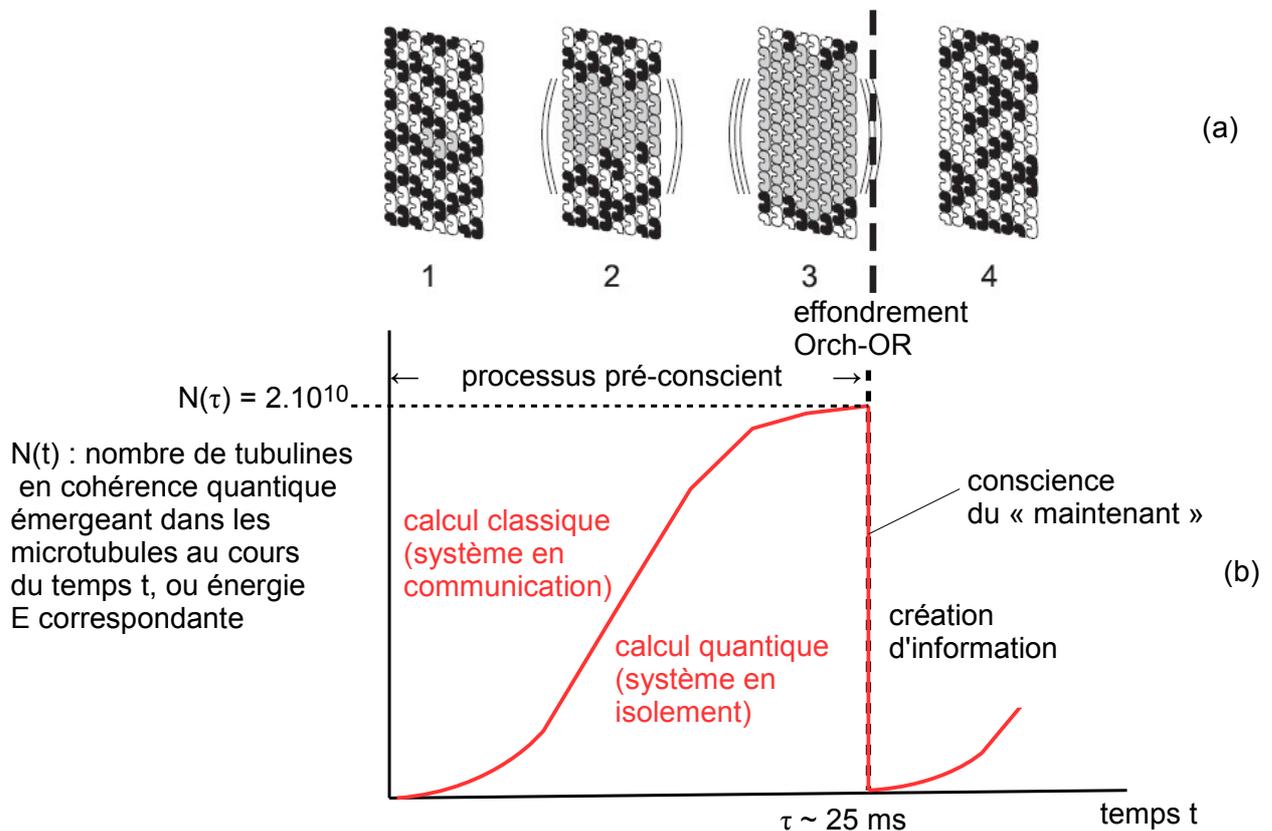


figure 8-14 : événement d'effondrements Orch-OR dans les microtubules (réf. [163])

(a) À l'étape 1 le calcul classique dans le microtubule conduit progressivement à l'émergence de superpositions quantiques cohérentes des états des tubulines. Aux étapes 2 et 3 certaines tubulines entrent dans un calcul quantique du type de celui présenté à la fig. 8-13. À l'étape 3 les tubulines qui sont encore en états superposés rencontrent le seuil à partir duquel les effets gravitationnels provoquent l'effondrement Orch-OR (théorie DP). À partir de cette étape et à l'étape 4, la transition vers un événement conscient émerge (« conscience du maintenant »). Les états des tubulines à l'étape 4 qui ne sont pas sélectionnés lors de l'effondrement évoluent dans un calcul classique et participent à la régulation de la fonction neuronale. (b) Évolution du nombre de tubulines en cohérence quantique, émergeant dans le microtubule. Dans la zone située au-dessous de la courbe la masse totale (ou l'énergie E) concernée par la superposition est reliée au temps d'effondrement τ selon $E = \hbar/\tau$. Pour chaque période $\tau = 25$ ms (correspondant à des oscillations 40 Hz), le nombre de tubulines impliquées dans l'effondrement est $N(\tau) = 2.10^{10}$.

8-2-7 - Interprétation modifiant les postulats de la physique quantique : Mécanique stochastique de Nelson (ou mouvement brownien universel)

Voir aussi réf. [36], [175], [176], [177], [178], [179]

- Cette théorie de Nelson, qui propose une autre interprétation « réaliste » de la fonction d'onde, repose sur deux **hypothèses de base** :
 - Toute particule de masse m suit un mouvement brownien dont le coefficient de diffusion η est indépendant du milieu dans lequel elle évolue, et qui dépend seulement de la masse m :

$$\eta = \frac{\hbar}{2m} \quad (8-105)$$

La trajectoire des particules est classique mais aléatoire, elle est décrite par la mécanique stochastique. Elle est continue mais non dérivable (figure 8-15).

• La fonction d'onde est de nature différente de celle de la mécanique quantique standard. Elle représente l'amplitude de probabilité des processus inévitablement aléatoires, compte tenu du caractère aléatoire de la trajectoire où ils interviennent sur les particules. Les grandeurs liées à ces processus – les observables – sont les valeurs moyennes des grandeurs classiques distribuées sur les trajectoires aléatoires des particules.

La densité de probabilité des processus, $\rho(\mathbf{x},t)$ vérifie la condition de normalisation dans tout l'espace à chaque instant :

$$\int \rho(\mathbf{x},t) d^3 \mathbf{x} = 1 \quad (8-106a)$$

et sur l'ensemble des configurations spatiales de la particule, à chaque instant t , la moyenne d'une grandeur observable A , qui y est prise, est définie par :

$$\langle A(t) \rangle = \int A \rho(\mathbf{x},t) d^3 \mathbf{x} \quad (8-106b)$$

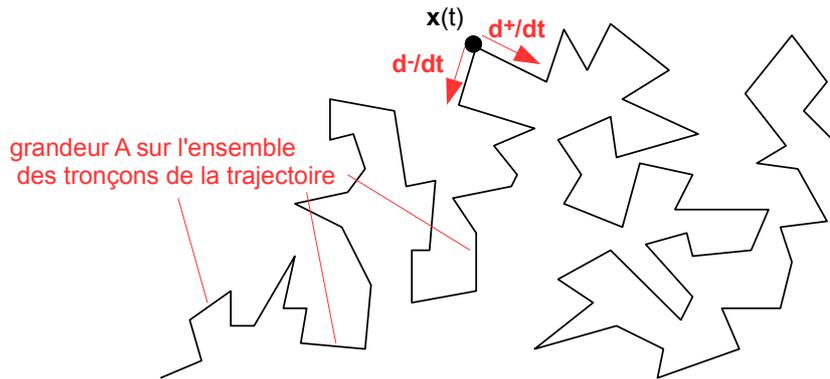


figure 8-15 : trajectoire stochastique d'une particule, où la position $\mathbf{x}(t)$ est continue mais pas différentiable

■ Équations directrices de la dynamique stochastique :

La position \mathbf{x} de la particule est une variable aléatoire, et son évolution $\mathbf{x}(t)$ au cours du temps, sous forme de trajectoire suivant un mouvement brownien, est une fonction continue mais non différentiable (figure 8-15). Il s'ensuit que, à chaque instant t , la dérivation de $\mathbf{x}(t)$ par rapport à t prend une valeur « à gauche » (ou arrière) et « à droite » (ou avant) qui ne sont pas nécessairement égales ; on définit ainsi la dérivée « avant » (d^+/dt) et la dérivée « arrière » (d^-/dt) à chaque instant t , par :

$$\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}(t),t) = \frac{d^\pm}{dt} \mathbf{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \left\langle \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \right\rangle \quad (8-107)$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne et $h \rightarrow 0^\pm$ l'évolution de h vers 0 par valeurs supérieures 0^+ et valeurs inférieures 0^- . \mathbf{v}^\pm est la vitesse moyenne « avant » (+) ou « arrière (-) de la particule. Pour l'application des relations de la dynamique classique au mouvement stochastique, les définitions suivantes sont introduites :

• vitesse moyenne courante : $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)$ (8-108a)

• vitesse osmotique : $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)$ (8-108b)

De (8-107), et compte tenu de (8-108), on introduit les différentielles :

$$d_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(d^+ + d^-)$$

$$d_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(d^+ - d^-)$$

On définit la **vitesse moyenne complexe**, à l'aide de ces différentielles, par :

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v} - i\mathbf{u} = \frac{d_{\mathbf{v}}}{dt} \mathbf{x}(t) - i \frac{d_{\mathbf{u}}}{dt} \mathbf{x}(t) = \frac{d_{\mathbf{v}} - i d_{\mathbf{u}}}{dt} \mathbf{x}(t) = \frac{D}{dt} \mathbf{x}(t) \quad (8-109)$$

où $D = d_{\mathbf{v}} - i d_{\mathbf{u}}$ est la différentielle complexe. L'**accélération moyenne complexe** $\Gamma(t)$ est la dérivée complexe de cette vitesse $\mathbf{w}(t)$ par rapport au temps :

$$\Gamma(t) = \frac{D\mathbf{w}(t)}{dt} = \boldsymbol{\gamma}(t) + i\text{Im}\Gamma(t) \quad (8-110)$$

où $\boldsymbol{\gamma}(t) = \frac{1}{2} \frac{d^+ \mathbf{v}^- + d^- \mathbf{v}^+}{dt} = \text{Re}\Gamma(t)$ est l'accélération classique concernée par la loi de Newton

$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}(t)$ pour une particule de masse m à laquelle s'applique une force \mathbf{F} . Dans la théorie de la mécanique stochastique de Nelson, la loi de Newton est généralisée avec l'accélération moyenne complexe par la loi de Newton-Nelson :

$$\mathbf{F} = m\Gamma = m \frac{D\mathbf{w}(t)}{dt} \quad (8-111)$$

qui se réduit à la loi de Newton si $\text{Im}\Gamma(t) = 0$, c'est-à-dire si l'accélération moyenne correspondant à la vitesse osmotique est nulle.

La différentielle classique de $\mathbf{x}(t)$ peut s'exprimer avec soit la vitesse moyenne « avant » \mathbf{v}^+ , soit la vitesse moyenne « arrière » \mathbf{v}^- , et une fonction aléatoire « avant » ξ^+ ou bien « arrière » ξ^- :

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}^+(\mathbf{x}(t), t) dt + d\xi^+(t) = \mathbf{v}^-(\mathbf{x}(t), t) dt + d\xi^-(t) \quad (8-112a)$$

que l'on résume par :

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}^{\pm}(\mathbf{x}(t), t) dt + d\xi^{\pm}(t) \quad (8-112b)$$

Si les trajectoires des particules suivent un processus stochastique de Markov-Wiener, on montre que leurs parties aléatoires de (8-112), $d\xi_k^{\pm}$ ont une distribution gaussienne, de valeur moyenne nulle, sont indépendantes entre elles, et que :

$$\langle d\xi_k^{\pm}, d\xi_j^{\pm} \rangle = \pm 2\eta \delta_{kj} dt \quad (8-113)$$

où η est le coefficient de diffusion stochastique. Dans ce cas la densité de probabilité vérifie l'**équation de continuité « hydrodynamique » de Fokker-Planck** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}^{\pm} \rho) \pm \eta \nabla^2 \rho \quad (8-114)$$

d'où l'on déduit :

- l'équation de continuité qui fait intervenir seulement la vitesse moyenne courante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) \quad (8-115)$$

- l'équation sur la vitesse osmotique :

$$-\nabla \cdot (\mathbf{u} \rho) + \eta \nabla^2 \rho = 0 \quad (8-116)$$

et l'ensemble des deux équations (8-115) et (8-116) peut être regroupé en l'équation de continuité faisant intervenir seulement la vitesse moyenne complexe :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{w} \rho) + i\eta \nabla^2 \rho \quad (8-117)$$

Solution de (8-116) :

$$\mathbf{u} = \frac{2\eta}{C} \nabla R \quad (8-118a)$$

où C est une constante dont on verra qu'elle est égale à \hbar si l'équation de Fokker-Planck est montrée équivalente à l'équation de Schrödinger, et où :

$$R = \frac{C}{2} \ln \rho \quad (8-118b)$$

De (8-114) et (8-118a) on déduit l'*équation directrice de la vitesse osmotique* :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \eta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (8-119)$$

qui équivaut, compte tenu de (8-118b), à :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla R - \frac{C}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (8-120)$$

On a donc un état stationnaire, c'est-à-dire une densité de probabilité ρ , ou R , indépendante du temps, si et seulement si la vitesse moyenne courante est $\mathbf{v} = 0$. De façon générale, et par similitude avec (8-118a), la vitesse moyenne courante s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{v} = \frac{2\eta}{C} \nabla S \quad (8-121)$$

ce qui donne, à partir de (8-120) :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{2\eta}{C} \nabla R \cdot \nabla S - \eta \nabla^2 S \quad (8-121bis)$$

On montre que, à l'ordre 2 du développement de Taylor de la différentielle de \mathbf{v}^\pm , l'*équation directrice de la vitesse moyenne courante* est :

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8-122)$$

Si la force \mathbf{F} dérive d'un potentiel scalaire V , $\mathbf{F} = -\nabla V$, alors on obtient l'*équation directrice de S* :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{C}{2\eta m} V + \frac{\eta}{C} ((\nabla R)^2 - (\nabla S)^2) + \eta \nabla^2 R \quad (8-123)$$

Si V est un potentiel d'interaction réel, alors les équations directrices (8-119) et (8-122), toujours dans le cas d'un processus de diffusion stochastique de Markov-Wiener, s'écrivent sous une forme similaire à la loi de Newton où la vitesse est la vitesse moyenne complexe \mathbf{w} (8-109) :

$$m \frac{D\mathbf{w}}{dt} = -\nabla V = \frac{D\mathbf{P}}{dt} \quad (8-124a)$$

où \mathbf{P} est le moment conjugué complexe $\mathbf{P} = m \mathbf{w} = -\frac{2im\eta}{C} \nabla(R + iS)$ (8-124b)

■ *Fonction d'onde et son équation d'évolution* :

En définissant la *fonction d'onde* par :

$$\Psi = \exp\left(\frac{1}{C}(R + iS)\right) \quad (8-125)$$

son amplitude vérifie d'après (8-118b) :

$$|\Psi|^2 = \exp \frac{2R}{C} = \rho \quad (8-126)$$

donc elle est liée à la densité de probabilité. Sa phase est $\varphi = \frac{S}{C}$, et donc $\Psi = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi)$.
(8-124b) donne :

$$\hat{\mathbf{P}}\Psi = -2im\eta\nabla\Psi \quad (8-127a)$$

introduisant ainsi un **principe de correspondance** entre la grandeur impulsion \mathbf{P} et l'opérateur observable agissant sur la fonction d'onde :

$$\hat{\mathbf{P}} = -2im\eta\nabla \quad (8-127b)$$

Ce principe de correspondance est identique à celui de la mécanique quantique $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$ si le coefficient de diffusion stochastique est :

$$\eta = \frac{\hbar}{2m} \quad (\text{cf. (8-105)})$$

il dépend seulement de la masse, et lui est inversement proportionnel ; et la phase est donc : $\varphi = \frac{S}{\hbar}$.

■ Courant de probabilité :

De manière similaire à (8-88b), on définit :

$$\mathbf{J} = \frac{\eta}{i\hbar} (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) = \rho\mathbf{v} \quad (8-128)$$

où \mathbf{v} est définie en (8-121). Il représente le transport de la densité de probabilité des états stochastiques avec la vitesse moyenne courante. De l'équation de Fokker-Planck (8-114) il vient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \quad (8-129)$$

qui est similaire à (8-88a).

Des équations directrices (8-123) et (8-121bis), et compte tenu de (8-105), on montre l'équation d'onde :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (8-130)$$

avec :

$$\Psi = \sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{S}{\hbar}\right) \quad \text{et} \quad |\Psi|^2 = \rho \quad (8-131)$$

(8-130) équivaut à l'équation de Schrödinger, mais elle est ici l'équation maîtresse du mouvement brownien, de coefficient de diffusion stochastique $\eta = \hbar/2m$, d'une particule de masse m dans un potentiel d'interaction V .

■ Domaine de validité possible de la théorie de Nelson :

La théorie de Nelson maintient, par construction, le caractère corpusculaire des particules, et donc concerne les fermions : les bosons, qui sont ici exclusivement les vecteurs des interactions fondamentales, n'entrent pas dans le formalisme et sont uniquement considérés comme des entités d'échange entre les particules élémentaires.

Par exemple, il n'est pas possible dans la théorie de formaliser l'existence de systèmes bosoniques formés à partir d'associations particulières de fermions satisfaisant la statistique d'indiscernabilité de Bose-Einstein (tels les condensats...).

La théorie considère la caractère ondulatoire uniquement pour la probabilité d'observer une propriété dans le cadre du mouvement brownien des particules concernées par cette propriété ; la probabilité est ainsi directement liée à la fonction d'onde Ψ du mouvement brownien, définie par (8-131). Ψ peut être soit non locale (dépendant de l'ensemble des particules), soit locale (limitée à l'échelle de l'ordre ou plus petite que la longueur de De Broglie $\lambda = \hbar/mc$).

■ Propriété continue et non différentiable des trajectoires dans la théorie de Nelson, ainsi que des *propagateurs des fonctions d'onde dans l'espace-temps représentés par les intégrales de chemin de Feynman en mécanique quantique* :

On se place dans l'espace de configuration $\{\mathbf{q}\}$, qui est l'espace des variables coordonnées généralisées instantanées du système dans l'espace.

La fonction d'onde est la projection de l'état du système quantique sur l'espace de configuration utilisé par l'observateur, donc elle est liée à l'observateur.

Rappel : la description de Schrödinger (cf. point 8-1-6) est utilisée pour le système quantique en considérant l'état $|a(t)\rangle$ variable avec le temps et les observables \hat{A} indépendantes du temps. La description de Heisenberg est utilisée pour l'observateur, avec la fonction d'onde position $|\mathbf{q}\rangle$ fixe et les opérateurs liés à l'observateur qui dépendent du temps $\hat{A}(t)$, et les états $|\tilde{a}\rangle$ invariables avec t . Les opérateurs observables dans ces deux descriptions \hat{A} et \hat{A} sont reliés par (8-20).

On a donc en description de Schrödinger :

• Pour l'état $|a,t\rangle$ du système quantique :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a,t\rangle = \hat{H}(t) |a,t\rangle$$

• Pour l'observateur : $|\mathbf{q}\rangle$ fixe, fonction d'onde projection de $|a,t\rangle$ sur l'espace de configuration $\{\mathbf{q}\}$:

$$\Psi_a(\mathbf{q}, t) = \langle \mathbf{q} | a, t \rangle$$

(8-19) donne : équation de Schrödinger dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(\mathbf{q}, t) = \hat{H}(t) \Psi_a(\mathbf{q}, t) \quad (8-132a)$$

et en description de Heisenberg :

• pour l'état du système quantique : $|\tilde{a}\rangle$ fixe

• pour l'observateur $|\mathbf{q}, t\rangle$ variable, fonction d'onde projection de $|\tilde{a}\rangle$ sur l'espace de configuration avec \mathbf{q} variable :

$$\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) = \langle \mathbf{q}, t | \tilde{a} \rangle$$

et d'évolution de $\Psi_a(\mathbf{q}, t)$:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{q}, t | = \langle \mathbf{q}, t | \hat{H}(t)$$

soit, équation de Schrödinger :

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) = \hat{H}(t) \tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) \quad (8-132b)$$

Les solutions de (8-132a) et (8-132b) sont reliées par le renversement du temps $t \rightarrow -t$:

$$\langle \mathbf{q} | a, t \rangle = \langle \mathbf{q}(-t) | \tilde{a} \rangle \quad \text{soit :} \quad \Psi_a(\mathbf{q}, t) = \tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, -t) \quad (8-132c)$$

Considérons un observateur évoluant dans le temps ($|\mathbf{q}, t\rangle$ variable) observant un état quantique $|\tilde{a}\rangle$ par définition fixe : on est donc dans la description de Heisenberg. La fonction d'onde à l'instant initial t_0 est :

$$\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}_0, t_0) = \langle \mathbf{q}_0, t_0 | \tilde{a} \rangle$$

et à un instant t :

$$\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) = \langle \mathbf{q}, t | \tilde{a} \rangle$$

Entre ces deux instants la fonction d'onde $\tilde{\Psi}_a$ évolue de $\langle \mathbf{q}_0, t_0 |$ à $\langle \mathbf{q}, t |$ par un propagateur $G(\mathbf{q}, t ; \mathbf{q}_0, t_0)$ qui joue le rôle d'une fonction de Green :

$$\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) = \int G(\mathbf{q}, t ; \mathbf{q}_0, t_0) \tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}_0, t_0) d\mathbf{q}_0 \quad \left| \quad (8-133) \right.$$

avec: $G(\mathbf{q}, t ; \mathbf{q}_0, t_0) = \langle \mathbf{q}, t | \tilde{a} \rangle \langle \tilde{a} | \mathbf{q}_0, t_0 \rangle = \tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t) \tilde{\Psi}_a^*(\mathbf{q}_0, t_0) = \langle \mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0 \rangle$

puisque l'on a la relation de fermeture : $|\tilde{a}\rangle\langle\tilde{a}| = \mathbf{1}$.

(8-133) exprime la propriété de **non-séparabilité** en mécanique quantique : la fonction d'onde pour l'observateur en (\mathbf{q}, t) est déduite des fonctions d'ondes à un instant initial t_0 , définies en tous points de l'espace (\mathbf{q}_0) .

Si \hat{H} ne dépend du temps, on obtient à partir des équations (8-132) :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \langle \mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0 \rangle = \langle \mathbf{q} | \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right) | \mathbf{q}_0 \rangle \quad (8-134)$$

(cf. (8-18)). (8-133) montre aussi que la connaissance de l'état lié à l'observateur en un instant t , $\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}, t)$ nécessite celle du propagateur $G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0)$ et celle d'un état lié à l'observateur $\tilde{\Psi}_a(\mathbf{q}_0, t_0)$ en un instant initial t_0 .

■ On montre que le propagateur d'une **particule libre** de masse m est :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp\left[\frac{i m (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2}{2 \hbar (t-t_0)}\right] \quad (8-135)$$

et que celui d'un **oscillateur harmonique** de masse m et de fréquence $\omega/2\pi$ est :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega(t-t_0))}} \exp\left[\frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega(t-t_0)} ((\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}_0^2) \cos \omega(t-t_0) - 2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_0)\right] \quad (8-136)$$

Pour une **particule libre**, et un intervalle de temps très petit $(t-t_0)$, (8-135) devient :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2 (t-t_0)\right] \quad (8-137)$$

où $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ est la vitesse. (8-137) est donc le propagateur de la fonction d'onde d'une particule libre en déplacement infinitésimal dans l'espace ($\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}} dt$) et le temps ($t = t_0 + dt$), où intervient son énergie cinétique $1/2 m \dot{\mathbf{q}}^2$ multipliée par la durée $(t-t_0)$, ce qui donne une action.

■ D'après le **principe de Feynman** le propagateur peut se décomposer en propagateurs entre états intermédiaires en nombre aussi grand que l'on veut, cette décomposition correspondant aux intégrales de chemins obtenues par la discrétisation de l'évolution du système quantique observé. Pour un chemin constitué de n états intermédiaires successifs (\mathbf{q}_k, t_k) , ($0 \leq k \leq n$), cela donne, à partir de (8-133), (8-134), (8-135) et (8-137) :

$$\langle \mathbf{q}, t | \mathbf{q}_0, t_0 \rangle = \int \langle \mathbf{q}, t | \mathbf{q}_{n-1}, t_{n-1} \rangle d\mathbf{q}_{n-1} \langle \mathbf{q}_{n-1}, t_{n-1} | \mathbf{q}_{n-2}, t_{n-2} \rangle \dots d\mathbf{q}_1 \langle \mathbf{q}_1, t_1 | \mathbf{q}_0, t_0 \rangle \quad (8-138)$$

avec, pour 2 états consécutifs $n^\circ k+1$ et k :

$$\langle \mathbf{q}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{q}_k, t_k \rangle = \langle \mathbf{q}_{k+1} | \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t_{k+1}-t_k)H\right) | \mathbf{q}_k \rangle \quad (8-139)$$

■ Pour une particule évoluant sous un potentiel V , (8-139) est remplacé par sa projection dans l'espace des phases $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ (\mathbf{p} : impulsion généralisée) :

$$\langle \mathbf{q}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{q}_k, t_k \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_k}{2\pi \hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(t_{k+1}-t_k)\left[\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{q}_{k+1}-\mathbf{q}_k}{t_{k+1}-t_k} - H\left(\mathbf{p}_k, \frac{\mathbf{q}_{k+1}+\mathbf{q}_k}{2}\right)\right]\right) \quad (8-140)$$

et en utilisant (8-140) dans (8-138), on obtient pour le chemin total des états d'une particule soumise à un potentiel, de (\mathbf{q}_0, t_0) à (\mathbf{q}, t) :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t_{k+1} - t_k \rightarrow 0}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{d\mathbf{p}_k}{2\pi\hbar} \times \int \prod_{k=1}^n d\mathbf{q}_k \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{i(t_{k+1} - t_k)}{\hbar} \left(\frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k}{t_{k+1} - t_k} \mathbf{p}_k - H(\mathbf{p}_k, \frac{\mathbf{q}_{k+1} + \mathbf{q}_k}{2}) \right) \right]$$

avec $t_{k+1} - t_k = \varepsilon \rightarrow 0$, on obtient finalement :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \int_{\mathbf{q}_0, t_0}^{\mathbf{q}, t} D\mathbf{q}(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{q}(t))\right] \quad (8-141a)$$

où :

$$D\mathbf{q}(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_n \quad (8-141b)$$

et $S(\mathbf{q})$ est l'action hamiltonienne $S = \int L dt$, L est le lagrangien.

■ ■ Exemple : *effet de la gravitation sur l'intégrale de chemin* de Feynman en mécanique quantique (voir par exemple [181], [180], [182], et [183] sur l'expérience dite COW de Collela, Overhauser, Werner) :

Tandis que, en mécanique classique, le mouvement d'une particule isolée, sous l'action d'un champ gravitationnel \mathbf{g} est indépendant de sa masse m , en mécanique quantique le propagateur la fait intervenir (cf. éq. (8-141)). En effet, de (8-140) on montre que pour une particule en chute libre, suivant $\mathbf{q} = \mathbf{z}$, parallèle à \mathbf{g} , on a :

$$\langle \mathbf{q}_k, t_k | \mathbf{q}_{k-1}, t_{k-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_k - t_{k-1})}} \exp \left[i \frac{m}{\hbar} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - g z \right) dt \right]$$

L'effet de la gravitation sur le mouvement de particules a été observé sur des neutrons thermiques émis par une même source, et séparés par un dispositif en un faisceau parallèle à la gravitation, et un faisceau qui lui est perpendiculaire ; ces deux faisceaux se rejoignent ensuite, via des réflecteurs, en un détecteur. Celui-ci montre un phénomène d'interférences causé par un déphasage entre les fonctions d'onde des neutrons ayant suivi l'un ou l'autre de ces faisceaux, lorsque les réflecteurs sont dans un même plan vertical, donc parallèle à la gravitation.

■ ■ On montre que l'utilisation des intégrales de chemin (8-133) conduit à l'équation de Schrödinger dépendant du temps (réf. [175]) mais que celle-ci est une approximation au premier ordre du résultat obtenu avec le propagateur :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2(t - t_0)} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2 - (t - t_0) V\left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}_0}{2}, t\right) \right)$$

■ ■ *Intervention de l'action hamiltonienne classique dans les propagateurs :*

Le principe de moindre action $\delta S = 0$ appliqué à l'action hamiltonienne classique $S = \int_{t_0}^t L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$

donne les équations de Lagrange pour la dynamique classique du système. Dans ce modèle, il y a donc un seul chemin dans l'espace des phases $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ qui décrit l'évolution du système.

Ce n'est pas le cas en dynamique quantique : les fonctions d'onde associées aux états du système, et notamment par leurs phases, entraînent que le système peut parcourir des chemins différents que regroupe le propagateur, comme indiqué dans (8-141) :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = A \sum_{\text{chemins}} \exp i\varphi(\mathbf{q}, t)$$

où A regroupe les amplitudes de probabilité des chemins. Or de l'expression ci-dessus, on doit retrouver le principe de moindre action lorsque l'on fait $\hbar \rightarrow 0$, ce qui amène à poser pour les phases : $\varphi(\mathbf{q}, t) = S(\mathbf{q}, t)/\hbar$ et donc :

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = A \sum_{\text{chemins}} \exp \frac{i}{\hbar} S(\mathbf{q}, t) \quad (8-142)$$

En effet, lorsque $\hbar \rightarrow 0$, la phase $\varphi(\mathbf{q}, t)$ devient très grande et le propagateur oscille fortement : les contributions des différents chemins sont alors non individualisables, et seules subsistent celles pour lesquelles l'action est stationnaire, ce qui correspond à la limite classique.

■ ■ **Propriétés éventuellement fractales** des chemins des états quantiques décrits par les propagateurs :

Les chemins élémentaires qui interviennent dans les intégrales de chemin, donc dans les propagateurs, reliant un état initial et un état final, peuvent être décrits comme des courbes fractales (cf. par ex. [36]), et les trajectoires dans la mécanique stochastique de Nelson en sont une forme particulière dans laquelle la position $\mathbf{x} = \mathbf{q}(t)$ joue un rôle primordial.

Une **courbe fractale** est, comme ces chemins mentionnés ci-dessus, une courbe continue (ou pas) non-différentiable, où chaque élément est approché par un segment élémentaire, qui est obtenue par une suite infinie d'opérations répétitives sur chaque segment élémentaire obtenu à l'étape précédente. Ces opérations ont pour effet d'accroître la longueur totale de la courbe d'un facteur prédéfini ([116],[184]).

Dans le cas général, les figures fractales peuvent être discontinues, et formées par d'autres éléments que des segments. Tandis que les espaces vectoriels sont de dimension entière (1 pour une ligne, 2 pour une surface, 3 pour un volume spatial, etc.), les structures fractales ont pour dimension la **dimension de Hausdorff-Besicovitch** qui est un nombre réel. Cette dimension est définie comme suit :

■ ■ ■ Un ensemble de points dans un espace vectoriel de dimension n est recouvert par des hypercubes, sous-ensembles de cet espace, de côté ε , appelé résolution de la discrétisation, pouvant devenir aussi petit que l'on veut. Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal d'hypercubes nécessaires à ce recouvrement. On conçoit que si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors le nombre d'hypercubes $N(\varepsilon)$ devient très grand, et la figure obtenue n'est plus une hypersurface en tant que sous-ensemble de l'espace vectoriel : elle possède une dimension D inférieure à la dimension n de l'espace vectoriel : $D \leq n$.

Pour une valeur finie de ε , le nombre d'hypercubes du recouvrement, de dimension D, et de taille V (V peut être un volume, une surface, une longueur...) est :

$$N(\varepsilon) = \frac{\text{taille du recouvrement}}{\text{taille de chaque hypercube}} = \frac{V}{\varepsilon^D} = V\varepsilon^{-D} \quad (8-143)$$

Cette expression (8-143) se retrouve dans les **cas classiques** tels que :

- l'ensemble est un point unique : $N(\varepsilon) = 1 \rightarrow D(\varepsilon) = 0$ qui est la dimension d'un point ;
- l'ensemble est formé de points d'un segment de droite de longueur $L = V$, et les segments élémentaires du recouvrement sont de longueur ε : $N(\varepsilon) = L/\varepsilon = L\varepsilon^{-1} \rightarrow D(\varepsilon) = 1$ qui est la dimension d'un segment ;
- l'ensemble est formé de points d'une surface d'aire $L = S$, et les carrés de surface élémentaire du recouvrement, de côté ε , sont d'aire ε^2 : $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2 = S\varepsilon^{-2} \rightarrow D(\varepsilon) = 2$ qui est la dimension d'une surface.

Dans ces situations classiques, une homothétie de rapport h appliquée à une figure appartenant à un espace de dimension n, et de taille initiale V, entraîne que la taille est multipliée par h^n :

$$V(h) = h^n V$$

d'où :

$$\frac{V(h)}{V} = N(\varepsilon) = h^n = h^D$$

puisque ici, dans les cas classiques, $D = n$ (figure 8-16).

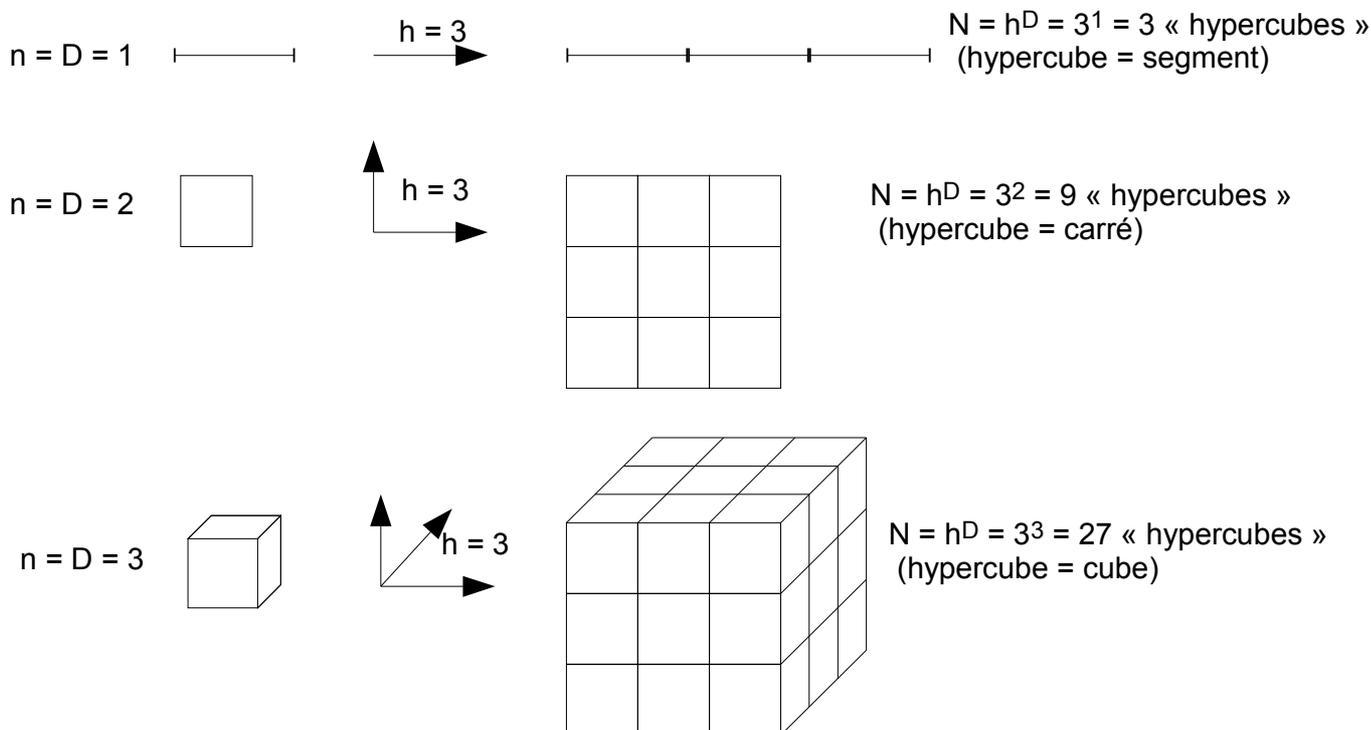


figure 8-16 : Génération d'objets par homothétie $h = 3$ appliquée à chacune des dimensions d'un « hypercube » élémentaire initial dans un espace de dimension $n = D$

la relation ci-dessus s'écrit encore : $n = D = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln h}$. Si $\varepsilon = 1/h$ désigne la longueur d'un côté élémentaire initial, l'homothétie de rapport h le fait entrer h fois dans la nouvelle longueur d'un côté de la figure transformée par cette homothétie, c'est-à-dire :

$$n = D(\varepsilon) = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

qui est (8-143) avec $V = 1$ volume de la figure transformée pris comme unité.

■■■ Dans le cas de figures fractales, qui peuvent être continues (telles les courbes fractales) ou discontinues (comme par exemple l'ensemble triadique de Cantor), obtenues par itérations d'opérations sur les « hypercubes » d'une étape précédente, et donnant une variation de « volume » d'un facteur $N(\varepsilon)\varepsilon$ correspondant à un nombre d'éléments $N(\varepsilon)$, les considérations précédentes sur la dimension de la figure s'appliquent et ne prennent sens que sous la condition que les côtés ε des « hypercubes » tendent vers 0, ou, ce qui revient au même, que le nombre d'itérations tende vers l'infini. On a donc la **dimension de Hausdorff-Besicovitch** :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (8-144)$$

D est indépendante de ε et est différente de la dimension n de l'espace vectoriel auquel appartiennent les « hypercubes » élémentaires initiaux : $D < n$, et D est un nombre réel.

La structure d'une figure fractale a la propriété d'**invariance d'échelle** : à une étape $n^{\circ}j$ de l'itération, la structure et les rapports de forme entre ses éléments sont identiques à ceux de l'étape $n^{\circ}j-1$; la structure interne de la figure fractale se retrouve à toutes les échelles, c'est-à-dire pour chaque étape d'itération des opérations de construction.

Le formalisme mathématique des structures fractales est souvent utilisé dans les théories du chaos, de la turbulence, des systèmes complexes..., en particulier dans les propriétés des « attracteurs étranges », dans l'espace des phases, vers lesquels convergent des évolutions de systèmes complexes non linéaires ou chaotiques, selon leur sensibilité aux conditions initiales de leurs états.

Exemples :

• **Ensemble triadique de Cantor** (figure 8-17) :

A l'étape n°0 on a un segment de droite de longueur 1, [0 , 1].

A l'étape n°1 on divise en 3 parties égales ce segment et on enlève le segment situé au milieu : on obtient 2 segments pleins [0, 1/3] et [2/3, 1], l'espace au milieu étant [1/3 , 2/3], soit à cette étape un nombre d'éléments de « côté » $\varepsilon = 1/3$ égal à $N(1/3) = 2$.

A l'étape n°2 on divise de nouveau en 3 parties égales les 2 segments pleins obtenus à l'étape n°1 et on réitère le retrait du segment du milieu : on a donc au total 4 segments pleins [0, 1/9], [2/9, 3/9], [6/9, 7/9], [8/9, 1] et donc de « côté » $\varepsilon = 1/9 = (1/3)^2$ d'où $N(1/9) = 4 = 2^2$.

Et ainsi de suite, pour une étape n°m on a :

$$\varepsilon(m) = \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad \text{et} \quad N(\varepsilon) = 2^m$$

(8-144) donne la dimension de l'objet fractal obtenu ($1/\varepsilon = h$ est le rapport d'homothétie) :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^m)}{\ln(3^m)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309298\dots$$

qui est comprise entre 0 et $n = 1$ (dimension de l'espace vectoriel auquel appartient le segment) et est un nombre irrationnel.

itérations

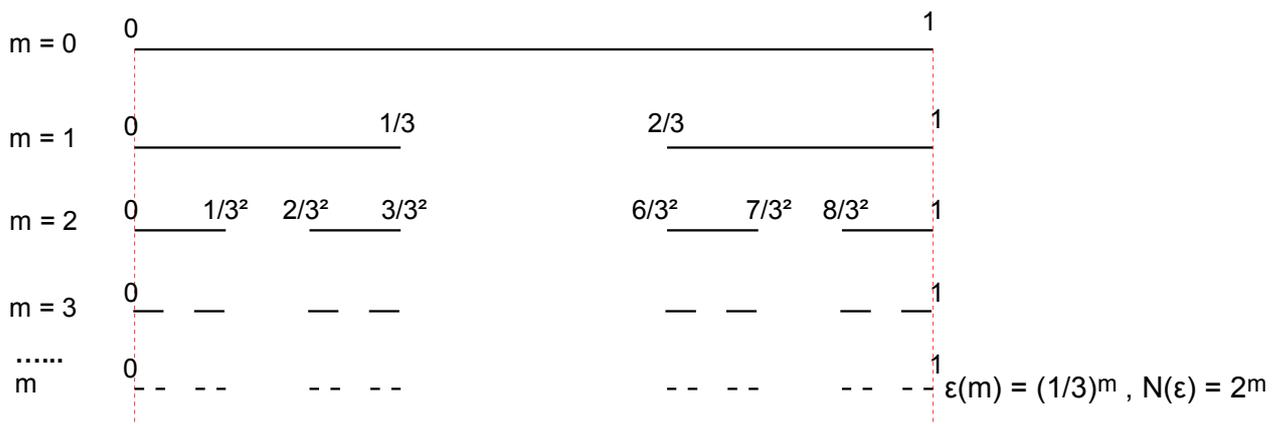


figure 8-17 : construction de l'ensemble triadique de Cantor

• **Courbe de Koch**, ou du flocon de neige (figure 8-18) :

Étape 0 : on a un segment de droite de longueur 1, [0 , 1].

Étape 1 : on divise en 3 parties égales ce segment (les « hypercubes » élémentaires initiaux). Sur le segment central on construit un triangle équilatéral ayant ce segment pour base. On obtient 2 segments [0, 1/3] et [2/3, 1], et 2 segments de longueur 1/3 formant les côtés du triangle équilatéral ; donc, à cette étape n°1, on a $N = 4$ éléments (segments) de « côté » $\varepsilon = 1/3$: $N(\varepsilon) = N(1/3) = 4$. La longueur totale de l'objet est alors : $\ell = N\varepsilon = 4/3$.

Étape 2 : à chacun des 4 segments obtenus à l'étape n°1, on applique le même procédé, ce qui donne : « côté » de chaque élément $\varepsilon = 1/3^2$ et $N(\varepsilon) = N(1/3^2) = 4^2 = 16$. Longueur totale : $\ell = N\varepsilon = (4/3)^2 = 16/9$.

Étape 3 : à chacun des 16 segments obtenus à l'étape n°2, on applique le même procédé, ce qui donne : « côté » de chaque élément $\varepsilon = 1/3^3 = 1/27$, $N(\varepsilon) = N(1/3^3) = N(1/27) = 4^3 = 64$; longueur totale des lignes continues obtenues $\ell = N\varepsilon = (4/3)^3 = 64/27$.

Et ainsi de suite. Pour une étape n°m on a :

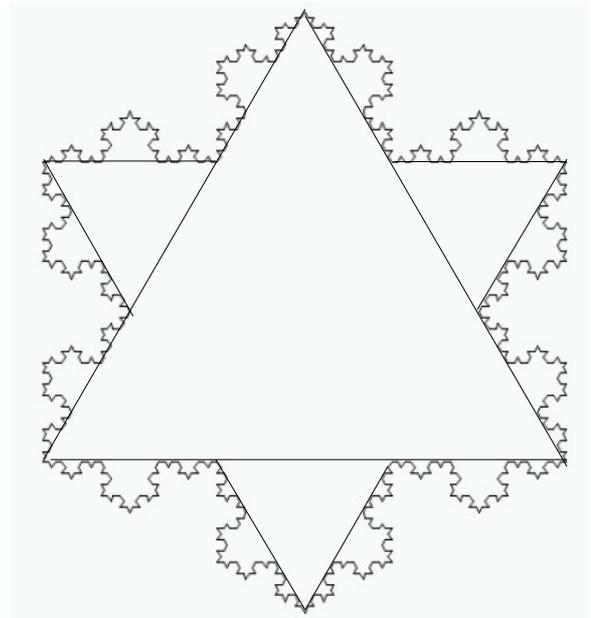
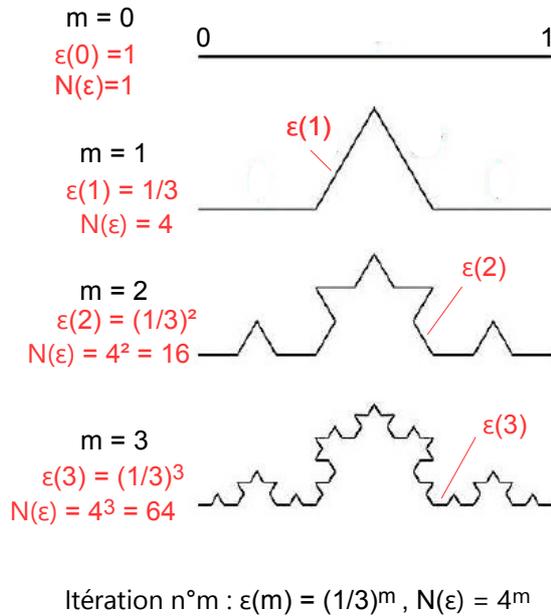
$$\varepsilon(m) = \left(\frac{1}{3}\right)^m \quad \text{et} \quad N(\varepsilon) = 4^m$$

d'où la dimension de l'objet fractal ($1/\varepsilon = h$ est le rapport d'homothétie), donnée par (8-144) :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^m)}{\ln(3^m)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,261859507\dots$$

et donc D est un nombre irrationnel et $1 < D < 2$. Longueur totale $\ell = (4/3)^m = +\infty$ lorsque $m \rightarrow +\infty$: la longueur de la courbe de Koch est infinie bien que contenue dans un domaine limité du plan.

Si le procédé ci-dessus est appliqué à 3 segments initiaux formant un triangle équilatéral, les conclusions sont les mêmes, mais la figure fractale est fermée bien que de longueur infinie : c'est le « flocon de neige » de Koch.



Premières itérations $m = 0, 1, 2, 3$ du flocon de neige de Koch

figure 8-18 : construction de la courbe de Koch ou du flocon de neige aux premières itérations

■■■ Lors d'une évolution d'une particule de masse m suivant un chemin quantique modélisé par les intégrales de chemin, et selon le modèle de Nelson, la **longueur fractale** correspond à une série d'itérations paramétrées par ε :

$$L_f(\varepsilon) = \frac{\text{chemin quantique parcouru } (q_0, t_0) \rightarrow (q, t)}{\text{longueur de la trajectoire à l'étape } \varepsilon} = \frac{q(\varepsilon)}{\ell(\varepsilon)}$$

De : $\ell(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon = \varepsilon^{-D} \cdot \varepsilon = \varepsilon^{1-D}$, il vient :

$$L_f(\varepsilon) = q(\varepsilon)\varepsilon^{D-1} \quad (8-145)$$

où $q(\varepsilon)$ satisfait la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\langle \Delta q \rangle \langle \Delta p \rangle \sim \frac{\hbar}{2}$$

avec $\langle \Delta p \rangle = m \langle \frac{\varepsilon}{\Delta t} \rangle$ est la quantité de mouvement moyenne, où ε correspond ici aux « côtés » des chemins intermédiaires. Si le chemin quantique parcouru moyen correspond à une succession de n discrétisations correspondant à des longueurs intermédiaires Δq sur un temps Δt , on a :

$$\langle q \rangle = n \langle \Delta q \rangle \quad \text{où} \quad n = \frac{t-t_0}{\Delta t}$$

et compte tenu de la relation d'incertitude de Heisenberg, on a :

$$\langle \Delta q \rangle \sim \frac{\hbar}{2 \langle \Delta p \rangle} = \frac{\hbar}{2m} \langle \frac{\Delta t}{\varepsilon} \rangle = \frac{\hbar}{2m n} \frac{t-t_0}{\langle \varepsilon \rangle}$$

D'où la longueur fractale moyenne donnée par (8-145) :

$$\langle L_f \rangle = \langle q \rangle \varepsilon^{D-1} = \frac{\hbar}{2m} \frac{t-t_0}{\langle \varepsilon \rangle} \langle \varepsilon \rangle^{D-1} = \frac{\hbar}{2m} (t-t_0) \langle \varepsilon \rangle^{D-2} \quad (8-146)$$

La longueur fractale est indépendante de ε si $D = 2$: en conséquence, le chemin quantique suivi par une particule évoluant selon le processus stochastique de Nelson est une courbe fractale de dimension 2, c'est-à-dire contenue dans un même plan à toute étape de discrétisation.

8-2-8 - *Interprétation idéaliste de la disparition de la superposition des états par l'intervention de la conscience*

■ Dans cette interprétation, on considère que, puisque les résultats d'une observation ou d'une mesure sont in fine obtenus par des êtres conscients (l'être humain par exemple), alors le problème de la mesure est directement lié à une interaction du système quantique et du système observateur conscient. Dans l'exemple du « chat de Schrödinger », tant que l'observateur, système conscient, n'a pas regardé la boîte contenant le malheureux félin, il n'y a aucune raison de penser a priori que la superposition des états soit supprimée au profit de l'un ou l'autre des états conformément au postulat n°6 : ce serait lors de l'observation par un système conscient que se produirait la réduction de l'onde quantique conformément au postulat n°5.

C'est la conscience, considérée ici comme relevant d'un domaine non physique, qui produit l'effondrement de la fonction d'onde lors de l'observation ou de la mesure. Non seulement l'univers n'est donc pas connaissable en soi, indépendamment de l'observateur conscient (approche philosophique de type « idéaliste », proche de l'idéalisme kantien), mais de plus, l'observation modifie sa réalité par l'entremise de la sélection des états. Cette interprétation est cohérente sous la condition fondamentale que la conscience, agissant sur les états physiques, et la réalité physique appartiennent à des fondements ontologiques différents, sous peine, sinon, de décrire la conscience comme dérivant de processus physiques et donc comme étant un système quantique, certes complexe, en interaction avec un autre système quantique observé, revenant par cela au conflit entre les postulats 6 et 5. Autrement dit, la mise en cohérence de ces deux postulats se fait ici au prix du dualisme philosophique, par l'introduction de composantes non physiques, avec le risque de dérive que cela peut entraîner en pseudo-science.

Cette interprétation est celle, entre autres, de John von Neumann, Eugene Wigner, Henry Stapp, Fritz London, Edmond Bauer...

■ Si cette interprétation a la faculté de répondre aux problèmes n°1 et n°2 cités au point 8-1-7, elle présente néanmoins l'inconvénient d'introduire un dualisme épistémologique : un monde de la physique et un monde de la conscience, tous deux ontologiquement séparés, reliés uniquement par la réduction de l'onde quantique, dont le mécanisme n'est pas explicité.

Par ailleurs, puisque l'observation avec conscience modifie la réalité, qu'en était-il de l'univers avant l'existence de la conscience, ou même l'apparition de la vie ? A moins que, comme le suggère David Bohm ([29], [146]...), la conscience soit quelque chose d'universelle, d'intemporelle ou immanente en toute chose de l'univers à divers degrés d'intensité ?...

■ De plus, dans l'hypothèse de l'existence des cerveaux de Boltzmann (BB) supposés dotés de conscience, l'observation de l'univers par eux, en tant qu'interaction produisant la réduction des ondes quantiques, aurait pour effet de modifier l'univers, tout comme nos « observations » humaines. Non seulement les données sur l'univers seraient fortement « *observer-dependent* » (cf. point 5-5-5, v. par ex. [59]), mais de plus, une « compétition » au niveau de la réalité quantique pourrait être instaurée entre les modifications

engendrées par les BB et celles par les humains (problème du « darwinisme quantique », voir ci-après) (v. par ex. [101], [84]).

Avec l'hypothèse des BB jointe à l'interprétation idéaliste de la mécanique quantique, une conséquence serait que l'univers tel que nous l'observons ne serait pas nécessairement unique, mais inclus dans un univers plus global comme ensemble d'univers résultant des interactions entre les systèmes conscients des BB et les systèmes quantiques (v. par ex. [28]). Et ce que nous observons aujourd'hui du cosmos aux époques primordiales qui suivent le Big Bang (rayonnement fossile, courbure, accélération de l'expansion, etc.), se présente à nous comme résultant d'une interaction entre les structures quantiques du cosmos avec notre conscience, non à cette époque primordiale (puisque nous n'existons pas), mais actuellement : ceci conduirait à la conclusion dramatique que ce que nous observons du cosmos ne serait qu'une tromperie actuelle, une illusion, de ce qu'il fut au début et que nous ne pourrions jamais connaître !

■ Notons aussi le problème suivant posé par l'interprétation idéaliste : les appareils de mesure peuvent relever des observations et des mesures, même en l'absence d'observateur conscient au moment où ils le font. Faut-il alors considérer que le résultat définitif et réel n'est obtenu que lorsque l'observateur conscient prend connaissance des relevés, et que c'est cette action qui réagit sur la réduction de l'onde quantique du système observé, même si le processus de mesure par l'appareil est terminé ? Dans l'affirmative, cela voudrait dire que la conscience de l'observateur a un effet rétroactif sur la réduction de l'onde quantique du système observé, à travers le processus et le système de mesure, et donc que sa conscience se retrouve agissante jusqu'aux appareils de mesure ; et si elle peut agir ainsi à travers eux, alors on peut supposer qu'elle le peut à travers tout élément ou système de l'univers. Dans ce cas on retrouve l'approche de D. Bohm et Krishnamurti sur l'immanence et l'universalité d'une conscience qui serait donc forcément partagée entre tous. Mais alors, dans ce cas, les BB seraient également concernés.

■ **Remarque : darwinisme quantique**

L'interaction entre les cerveaux de Boltzmann, en tant qu'observateurs, et leur environnement cosmique fait intervenir le concept de « darwinisme quantique » créé par W.H. Zurek [25]. Invoquant des principes fondamentaux d'invariance ou de conservation de l'information, et de minimalité dans les processus d'évolution, selon moi, complètement compatibles avec le principe de non finalisme universel qui est l'un des piliers des principes fondateurs rationnels, le darwinisme quantique explique que la décohérence de l'onde quantique, due à l'interaction du système et de son environnement, s'effectue dans le sens qui privilégie l'invariance de l'environnement. Les fluctuations du vide quantique qui conduisent à l'émergence de systèmes réels capables d'interagir avec l'environnement cosmologique peuvent alors produire, par des chaînes de décohérences de l'onde quantique de ces systèmes, des entités qui sont sélectionnées par l'environnement parce qu'elles sont favorables à sa conservation ou son invariance. Lorsque l'émergence d'une conscience dans ces systèmes résulte de cette sélection, on a des cerveaux de Boltzmann. Ce ne sont pas des cerveaux comme ceux des humains, ils désignent des structures issues des fluctuations du vide, suffisamment organisées pour qu'une conscience y soit émergée, laquelle, par son rôle d'observateur, interagit avec l'univers jusqu'à pouvoir le modifier localement (toujours selon l'interprétation n°8 ci-dessus si on l'adopte). Ces cerveaux de Boltzmann seront pérennes tant que ces modifications restent compatibles avec les critères d'invariance, de conservation, de minimalité, etc. concernant l'ensemble « environnement + observateur ».

■ ■ **Remarque** : pour information, le darwinisme quantique entre dans le cadre plus général, en épistémologie, du « darwinisme universel » (v. par exemple Campbell [31]) selon lequel les grands domaines d'évolutions dans la nature (y compris la nature humaine) peuvent se comprendre à partir d'axiomes, ou « algorithmes d'évolution », toujours en vertu des principes fondamentaux de non finalisme universel a priori et d'objectivité, et qui posent :

- 1°) La variation d'une forme ou d'une structure donnée s'effectue par mutation ou recombinaison, en termes d'une ou plusieurs propriétés qui sont conservées. Elle n'est pas nécessairement aléatoire.
- 2°) La sélection retient les résultats issus de cette variation qui sont les mieux adaptés pour permettre la pérennité de ce qui doit rester conservé (invariant) ; les autres sont éliminés par l'environnement.
- 3°) Les fonctions des résultats retenus font l'objet d'une transmission, pour conservation, des caractères favorables à la pérennité (critère d'hérédité).

Par exemple, Jacques Monod a considéré, chez les systèmes vivants, que l'invariant qui doit être conservé

lors des évolutions qui répondent aux sollicitations de l'environnement, est le gène [32]. Dans le même ordre d'idée, Gerald Edelman [33] développa la thèse du darwinisme neuronal pour expliquer le développement du système nerveux, du système cognitif et l'émergence de la conscience. Bien d'autres domaines se réfèrent aujourd'hui au darwinisme universel, que ce soit en sciences humaines, économiques, intelligence artificielle (robotique), sciences morales et politiques, etc. Voir une synthèse philosophique, métaphysique et épistémologique en [34].

■ Qu'il y ait un ou plusieurs cerveaux de Boltzmann, contemporains de nous ou dans un futur très lointain, par le darwinisme quantique ils sont en « concurrence » entre eux et avec l'homme : les influences que leurs observations ou interactions dues à la conscience produisent sur l'univers entraîneraient en interactions. Dans certaines zones de l'univers ces interactions peuvent donner des aspects de l'univers très différents de ceux que nous connaissons aujourd'hui et ils sont évolutifs car les interactions entre observations sont continues. Par nature, ces zones ne nous sont pas accessibles directement ; certains physiciens les considèrent même comme des univers parallèles dans lesquels les états quantiques non sélectionnés dans notre univers lors de la réduction de l'onde quantique, seraient réalisés.

Avec le temps et l'expansion de l'univers, supposée illimitée, le vide deviendrait plus en plus vaste et serait siège de fluctuations quantiques de plus en plus nombreuses donnant des cerveaux de Boltzmann supplémentaires. Alors, à long terme, une modification de l'univers pourrait avoir lieu suite au darwinisme quantique, il serait très différent de celui que nous étudions et observons, et pourrait remplacer le nôtre.

■ ■ **Remarque** : l'expansion illimitée n'est qu'une hypothèse ; l'énergie sombre pourrait au contraire s'éteindre, le physicien Don N. Page a même calculé que cette extinction pourrait avoir lieu dans 20 milliards d'années [35].

Si des cerveaux de Boltzmann existent déjà aujourd'hui, nous ne savons pas à quoi ils ressemblent, et de par leurs propriétés étrangères à ce que nous connaissons mais néanmoins issues des comportements quantiques, ils pourraient se manifester parmi nous. Ce scénario digne de la science fiction n'aurait cependant rien de surnaturel au sens où ce sont toujours les lois de la physique quantique qui le sous-tendent : ne nous emballons pas, ce ne seraient pas des anges, ni forcément des êtres qui nous voudraient du bien, ils pourraient même nous considérer comme des observateurs concurrents qui font obstacles à leur conservation et qui perturbent l'univers qu'ils auraient contribué à modifier !

■ Pour ma part, sauf preuve du contraire, je n'accepte pas le dualisme, comme je le dis depuis le début. S'agissant des cerveaux de Boltzmann, susceptibles d'agir sur le réel par leur conscience, il est clair que cette hypothèse n'est acceptable que dans le cadre de l'interprétation ci-dessus. Selon moi, l'hypothèse des cerveaux de Boltzmann ne s'accorde pas avec les autres interprétations méta-théoriques de la physique quantique. Évidemment, cela ne contredit pas l'interaction observation-observé exprimée par l'effondrement de l'onde quantique (qu'il soit réduction ou bien décohérence), mais elle ne s'explique pas obligatoirement par la conscience et encore moins par des cerveaux de Boltzmann par définition dotés de conscience.

Par ailleurs, il existe des arguments contre l'hypothèse des cerveaux de Boltzmann : l'astronome Sean M. Carroll [30], par exemple, montre que, même si la probabilité d'obtenir des cerveaux humains au terme de toute une évolution de l'univers est nettement plus faible que celle d'obtenir des cerveaux de Boltzmann par fluctuations du vide dès le début, l'hypothèse de leur existence est une croyance qui se détruit elle-même. En effet, aucune expérience ne permet de tester sa réfutabilité puisque les lois physiques que les cerveaux de Boltzmann utiliseraient correspondent à celles d'un univers qu'ils ont contribué à modifier, lois qui sont nécessairement validées par les expériences qui forment les souvenirs dans ces cerveaux ; or il n'y a pas de souvenir puisque l'émergence des cerveaux de Boltzmann ne résulte pas d'une histoire, d'une évolution, mais provient de fluctuations. Et donc, pour eux, la flèche du temps n'existerait pas.

8-3 – Proposition d'une interprétation perso : la décohérence de l'onde quantique comme réalisation du principe de négligeabilité

■ Comment se fait-il que, dans la nature, il soit possible de négliger une quantité transfinie de données et de processus pour considérer expérimentalement un processus isolé de ceux-là, possibilité qui permet de

dégager des lois d'invariance ? C'est le principe de négligeabilité, un parmi les principes de la méthode expérimentale [9].

On considère alors l'hypothèse suivante : dans un système quantique la concrétisation du principe de négligeabilité fait partie même du processus de mesure ; elle se traduit par le fait qu'un ensemble superposé d'états peut être négligé au profit d'un état qui est retenu. C'est l'environnement observateur/observé, ou système/observé qui conditionne la façon dont est sélectionné le processus non négligeable. Cette sélection est telle que l'évolution du système observé fait l'objet d'une invariance qui exprime le principe d'objectivité : ainsi, l'épistémologie de la méthode expérimentale est partie intégrante des phénomènes et contribue à leur réalisation.

Une description qui exploite l'invariance qui traduit l'objectivité d'un phénomène ou système, ou qui traduit les conditions pour l'en extraire, conduit à l'emploi de l'outil mathématique. La présence ontologique de la négligeabilité dans l'univers et ses constituants entraîne alors la pertinence de l'outil mathématique pour modéliser le réel, sans qu'il soit besoin d'invoquer ni le dualisme « monde idéal (mathématique) – monde physique », ni la coïncidence fortuite de l'intelligence humaine avec les faits du monde physique.

Ainsi, il est classique de considérer la pertinence de l'outil mathématique pour modéliser le réel, selon deux grandes approches :

- Position réaliste (ou platonicienne) : les mathématiques sont les éléments du réel ontologique, le réel observable en étant une projection. Elles sont indépendantes de l'esprit humain.
- Position nominaliste (ou positiviste) : l'esprit humain ne peut comprendre le monde que selon son expérience tirée de l'évolution. Les mathématiques sont un outil cognitif plus ou moins performant là où la part du réel sélectionnée par l'esprit correspond aux catégories de cet outil cognitif.

■ Face à ces approches je propose :

Les mathématiques décrivent le réel parce que celui-ci contient dans ses fondements :

- L'objectivité, que formalisent les invariances (Principe d'Objectivité PO).
- La négligeabilité, qui exige d'identifier le domaine de pertinence par la réfutabilité (Principe de Négligeabilité PN).

Ces catégories ne sont pas préexistantes dans l'esprit humain, comme résultats de son évolution. PN et PO conduisent à l'abstraction. Si c'était le cas, elles auraient conduit le champ de connaissance à ce qui se limite strictement à ce qui est nécessaire directement à l'homme pour sa survie biologique. Par exemple, la mécanique quantique et les mathématiques qui la structurent ne sont pas dans l'histoire évolutionniste une évidence macroscopique pertinente pour la survie.

Ces catégories sous-tendent le réel en tant que Principes Fondateurs, le structurent de façon à ce que sa continuité moniste (et non réductionniste !) coexiste avec la possibilité de le partitionner par des catégories isolables et négligeables selon le niveau d'échelle (Principe d'Émergence PE). Ce ne sont pas les mathématiques qui forment le réel, elles restent un outil cognitif, mais elles sont pertinentes là où les deux principes fondateurs s'appliquent, c'est-à-dire partout !

■ D'où l'*hypothèse à creuser* :

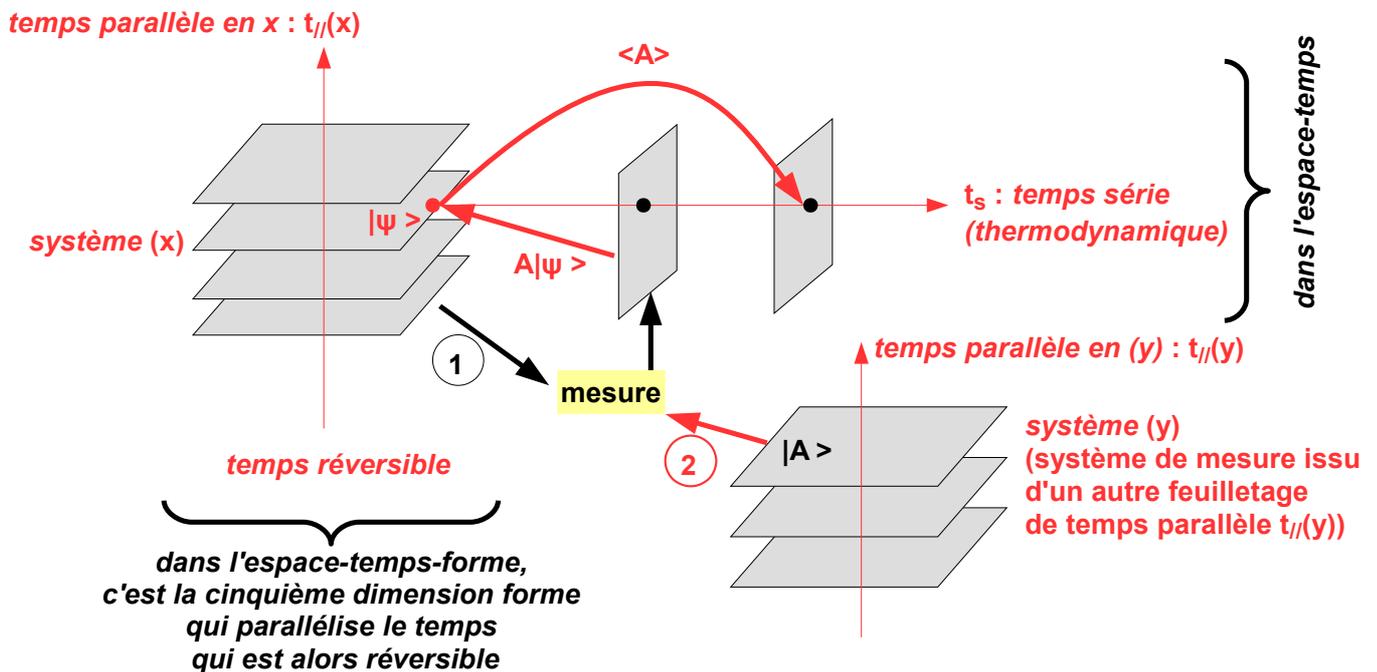
Considérant la projection d'un état « observé » en mécanique quantique parmi tous les états superposés, on peut se demander :

Cette projection par la « mesure » serait-elle le processus physique de la négligeabilité à l'échelle et selon la configuration d'invariance du système ? La négligeabilité virtualise les autres états (au sens de la théorie des « straton de F. Elie » [106]) sur un domaine d'espace-temps qui n'est pas a priori indéfini et figé. Ainsi les Principes Fondateurs auraient un correspondant pour leur réalisation.

La mécanique quantique nous dit qu'après une mesure on est certain (probabilité = 1) de ne pas pouvoir mesurer les autres états possibles. La probabilité porte sur notre ignorance de ce qui nous échappe après une mesure. Si l'on mesure un électron dans la fente 1 avec une probabilité = 1 (réduction de l'onde), cela indique que l'on est certain de ne rien savoir de l'électron pour son état dans la fente 2. Il n'y a pas rétrocausalité, mais sanction par la mesure sur ce que nous nous privons de connaître. Avant la mesure, les états 1 et 2 sont intriqués, donc l'impossibilité de connaître un état ou l'autre n'est pas encore établie. C'est pourquoi une grandeur, c'est-à-dire une sélection de possibilité de connaître par la mesure est l'action d'un opérateur sur des états intriqués, objectifs, qui conduit à en déclarer notre (im)possibilité de

connaître, mais qui ne détruit pas ces états dans la réalité objective.

Tout se passe comme si les états intriqués sont des états parallèles, c'est-à-dire où le temps est parallèle, tandis que dans l'univers de l'observateur les états deviennent série, c'est-à-dire où le temps est série : la mesure, interaction temps série avec le système dans ses états temps parallèle, place un des états dans le temps série, mais les états demeurent dans le temps parallèle (figure 8-19).



① Si le système de mesure est issu de ce feuilletage de temps parallèle $t_{//}(x)$

② Si le système de mesure est issu d'un feuilletage de temps parallèle $t_{//}(y)$

figure 8-19 : interprétation de la décohérence de l'onde quantique, avec les concepts de temps parallèle et temps série (cf. [105])

Le concept de temps parallèle a besoin d'une géométrie de dimension 5, et non plus de celle d'espace-temps à 4 dimensions : la cinquième dimension n'est ni spatiale ni temporelle, elle est la « forme » [105]. Dans l'espace géométrique où intervient la dimension « forme » (F), si l'on applique le formalisme canonique de la mécanique, la grandeur canoniquement conjuguée de la forme est l'information (I), tout comme la grandeur conjuguée de la position est le moment généralisé, ou celle du temps est l'hamiltonien (énergie). Avec ce formalisme et cette correspondance on obtient des dynamiques différentes de celles obtenues dans l'espace-temps classique ou relativiste.

À partir des questions que pose ce modèle, on pourrait peut-être comprendre pourquoi les théories qui introduisent plusieurs dimensions (comme les cordes) se heurtent à des difficultés lorsque ces dimensions sont de même catégorie (dimensions d'espace supplémentaires en l'occurrence), et que la ou les dimensions supplémentaires doivent relever d'une catégorie autre que celle de l'espace-temps. Si cela s'avère exact, alors on peut aussi comprendre pourquoi le modèle de Kaluza-Klein, qui introduit une quatrième dimension d'espace à celles d'espace-temps de la relativité semble être seulement une approximation.

Comment intervient le concept d'invariant dans le schéma de sélection d'un état depuis son temps parallèle ?

On suppose que toutes les interactions possibles entre les systèmes parallèles x et y, (x,y), conservent la même quantité d'information : $I = I_{max}(1-R)$ (R est la « redondance », elle intervient dans la diminution de l'entropie). Entre les deux temps parallèles, qui correspondent chacun à un feuilletage de l'espace-temps, et même, selon moi, de l'espace-temps-forme) il existe un écart : $t_{//}(y) = t_{//}(x) + \delta t$ avec

$\delta t > 0$ ou $\delta t < 0$. Pour chacun des feuilletages, donc pour chaque temps parallèle $t//$, les constantes de causalité de F. Maleval (c : vitesse de la lumière dans le vide, K_x grandeur associée à une catégorie physique (x))(25)

$$@_x = \frac{K_x}{c^{n_x}} \quad (8-147)$$

(réf. [153]) sont conservées, donc dans le déploiement temps série t_s , les interactions compatibles qui conservent la quantité d'information I sont celles qui font intervenir les constantes de la causalité q_x , donc on a une relation $I = f(q_x)$. Dans le monde physique tel qu'on le connaît aujourd'hui, l'ordre n_x est un entier qui n'excède pas 2 : $n_x = 0, 1, \text{ ou } 2$.

■ **La négligeabilité et l'histoire d'un système sont liées.** Deux systèmes A et B peuvent être décrits, en termes d'invariance, par des grandeurs g_A et g_B dont certaines, g_{AN} et g_{BN} sont négligeables lorsque A et B sont isolés, n'interagissent pas. Tant que A et B sont isolés, leurs cheminements sont mutuellement indépendants et font intervenir les grandeurs complémentaires de g_{AN} et g_{BN} : $g_{A\bar{N}}$ et $g_{B\bar{N}}$. En revanche, lorsque A et B peuvent interagir, g_{AN} et g_{BN} ne sont plus négligeables et doivent être compris dans l'histoire du nouveau système formé à partir de A et B : l'intégration de ces grandeurs contribue à une nouvelle histoire, un cheminement du système « AUB » qui n'est pas qu'une simple réunion d'ensembles, mais fait apparaître de nouveaux comportements qualitativement et quantitativement différents de ceux des situations d'isolement : c'est l'émergence de propriétés et de cheminements nouveaux. Le système émergent est décrit par des relations $f(g_{AN}, g_{BN}, g_{A\bar{N}}, g_{B\bar{N}})$ dont les quantités d'information sont différentes de celles du cas isolé. Au minimum, elles sont conservées si l'ensemble formé de A et B et ensuite AUB est strictement isolé, ou bien elles donnent une quantité d'information qui diminue (ce que traduit l'accroissement de l'entropie). Si ces ensembles sont ouverts sur l'environnement, ils peuvent donner une quantité d'information croissante (néguentropie) par apport de variété issu de l'environnement (la redondance R) et agissant sur les relations f ; auquel cas l'entropie d'univers (extérieur + AUB) augmente.

■ ■ Par exemple, si deux particules de propriétés M_A et M_B (leurs moments par exemple) lorsqu'elles sont isolées, entrent en interaction, le moment du nouveau système s'écrira :

$$M_{AUB} = M_A + M_B + g_{AB}f(M_A, M_B)$$

comme on l'écrit en mécanique quantique, où $f(M_A, M_B) = f(g_{AN}, g_{BN}, g_{A\bar{N}}, g_{B\bar{N}})$. Sinon on aurait simplement $M_{AUB} = M_A + M_B$, seulement valide si la constante de couplage g_{AB} est négligeable.

En ce qui concerne l'interprétation de la mesure quantique, on pourrait alors supposer que l'onde quantique qui porte la superposition des états est considérée comme l'état du système dont les composantes A_1, A_2, \dots , sont sans interaction parce que certaines de leurs grandeurs internes g_{AN1}, g_{AN2}, \dots sont négligeables. La mesure serait alors une interaction entre l'onde A et le système de mesure B qui supprimerait la négligeabilité de certaines g_{ANk} par suite d'un couplage entre A et B. Cette interaction a un étalement dans le temps non nul et conduit à une sélection de l'un des états de la superposition A_n :

$$A_n \text{ mesuré} = f(B, g_{A1}, g_{A2}, \dots, g_{An}, \dots, \text{interactions entre les } A_k, \dots, t)$$

qui peut « expliquer » la rétrocausalité : le changement du mode de mesure (par exemple dans les fentes d'Young on passe de l'observation avec 2 ouvertures à un dispositif d'observation à l'une des deux ouvertures), change le mode de couplage f entre non seulement B et les A_k mais aussi des interactions entre les A_k .

■ ■ Image simpliste : la sphère du Loto. Tant que la trappe est fermée les boules numérotées se mélangent et tous les numéros sont équiprobables. Deux cas se présentent :

a) la trappe reste ouverte longtemps, c'est l'analogie avec les deux fentes simultanées : alors les boules tombent successivement, analogie d'une interférence des états possibles devenus sélectionnés ;

25 Par exemple, on a pour les catégories liées aux grandeurs de Planck, pour $n_x = 0, 1, \text{ et } 2$ (cf. [153]) :

$$@_x = m_p L_P / c^0 = \hbar / c^1 = G m_p^2 / c^2$$

où m_p , L_P sont la masse et la longueur de Planck : $L_P = (\hbar G / 2\pi c^3)^{1/2}$, $m_p = (\hbar c / 2\pi G)^{1/2}$, et l'on montre que $@_x = q_p / 10^7$, où $q_p = (2\hbar c \epsilon_0)^{1/2}$ (ϵ_0 est la permittivité du vide). Ainsi pour $n_x = 0, 1, 2$ on a respectivement $K_0 = m_p L_P$, $K_1 = \hbar$, $K_2 = G m_p^2$.

b) la trappe, dont le diamètre est toujours adapté à la taille des boules pour qu'une seule puisse tomber – ce qui correspond à l'opérateur de mesure d'une grandeur à sélectionner – reste ouverte un court instant, suffisamment cependant pour qu'une boule ait le temps de sortir de la sphère ; ce diamètre et cette durée participent au couplage du dispositif et des boules qui, d'ailleurs, interagissent différemment entre elles à cause de cette ouverture, car le fait qu'une boule soit en train de s'immobiliser pour sortir change leur dynamique, par un freinage ou une déviation par exemple. On ne va pas dire, comme en rétrocausalité que la boule numéro tant savait qu'elle allait sortir !

■ **Autre point sur la négligeabilité. Éthique cette fois** : tous nos raisonnements et nos perceptions, qui inspirent nos décisions, se fondent sur le fait de négliger certaines choses et d'en privilégier d'autres. On ne peut certes pas tenir compte de tout simultanément, mais la position éthique à laquelle nous invite le principe de négligeabilité, l'un des Principes Fondateurs, est de rester toujours prudent et humble :

- humilité de reconnaître et d'être conscient que nous ignorons ou négligeons plus ou moins volontairement des choses et des êtres ;
- prudence qui consiste à identifier les limites de validité de ce que nous retenons, et si possible les critères de leurs mises à l'épreuve, évitant ainsi l'extension abusive de nos modèles et jugements au-delà de ces limites.

Cette disposition éthique conduit au concept axiologique de dignité, en ce sens que, pour un système vivant, tel qu'une personne, a un cheminement dont les composants et les conditions procèdent d'éléments qui peuvent paraître négligeables au regard des autres personnes. Quand on cherche à agir sur lui, est-on alors sûrs et conscients de cette part de négligeabilité, est-elle légitime et avérée ?

9 – Problème du temps : relation entre le temps quantique et le temps macroscopique ; flèche du temps

9-1 - L'origine quantique de la flèche du temps

Lorsque deux particules (des atomes par exemple), formant ensemble un système complètement isolé, entrent en collision, celle-ci est mécaniquement réversible. Si le système isolé est constitué d'un grand nombre de particules qui entrent en collision, alors il évolue vers une configuration des états des particules correspondant à une distribution statistique d'autant plus homogène que le nombre de particules est grand: au bout d'un temps fini la probabilité pour que chaque particule soit entrée en collision avec toutes les autres tend vers l'unité. Autrement dit, les configurations où seul un nombre restreint de particules entrent en collision avec un nombre également restreint de particules sont très peu probables: la séparation de l'état du système en configurations d'états particuliers et concernant un nombre restreint de particules ne peut pas avoir lieu au bout d'un temps fini et relativement court. C'est ce qu'exprime le Second Principe de la Thermodynamique, dans cet exemple: l'entropie d'un système isolé est liée au complexion (la probabilité d'une configuration d'états du système, voir relation (1-1)) et l'évolution du système s'accompagne par une augmentation de l'entropie. Le Second Principe correspond à la perte d'information qui accompagne l'évolution du système fermé, qui ne permet plus une description déterministe précise des états du système, mais nécessite de recourir à une description statistique : l'entropie, qui correspond à une quantité d'information, augmente parce que la quantité d'information disponible pour décrire le système diminue. L'information perdue ne peut pas être récupérée: pour un système fermé qui a évolué jusqu'à une valeur maximale de l'entropie, on ne peut pas, depuis son état final, remonter à son état initial avec une description déterministe précise; elle ne pourra qu'être statistique (v. par ex. [189]).

Si le système est ouvert sur son environnement, s'il n'est pas isolé, son entropie peut diminuer localement mais celle de l'ensemble "système + environnement" augmentera, du moins si cet ensemble est lui-même fermé.

Le Second Principe de la Thermodynamique s'applique à un système isolé : son évolution, à travers les successions d'entropie et de négentropie, conduit à l'état d'équilibre ultime où les états deviennent statistiquement indiscernables. Si donc l'univers, qui contient les systèmes vivants nécessairement ouverts sur lui, est isolé et fermé, alors ce sera le cas : l'état d'équilibre thermodynamique ultime où les micro-

états sont indiscernables sera un état de chaos, voire de mort, bien que, dans certaines conditions où le système est très sensible aux conditions initiales, les processus chaotiques peuvent induire un ordre [116], voire une auto-organisation [3].

Si en revanche, l'univers n'est pas un système fermé, mais un système ouvert, dans un ensemble contenant d'autres réalités, peut-être un multivers, alors ce ne sera pas le cas. Peut-être alors il sera possible de connaître ou expérimenter une vie en communication avec cet ensemble, probablement sous des conditions éthiques, cognitives, voire spirituelles bien définies. Mais ceci est une toute autre histoire ! Rien ne nous permet d'affirmer aujourd'hui si l'univers cosmologique est un système fermé ou bien ouvert...

Si le système fait l'objet d'une observation ou d'une mesure, par lesquelles on cherche à reconstituer les états précis de ses constituants, en remontant jusqu'à son état initial, et par conséquent à obtenir une quantité d'information élevée sur le système, alors le système n'est plus isolé mais en interaction avec l'extérieur (le système de mesure ou l'observateur) : le processus de mesure ou d'observation apporte une quantité d'information et l'ensemble "système + observateur", s'il est fermé, évolue selon une entropie globale croissante tandis que le système, alors soumis à des états contraints, évolue au cours de ce processus de manière négentropique (diminution de son entropie). Sous l'aspect thermodynamique, le processus de mesure, qui consiste à déterminer avec une forte quantité d'information les états précis composant la configuration du système, produit une quantité d'énergie dissipée qui conduit à un accroissement d'entropie globale.

Pour un système macroscopique isolé fermé, la direction du temps est orientée, elle correspond à l'évolution d'entropie croissante : on parle de flèche du temps entropique ou thermodynamique suivant laquelle l'évolution est irréversible.

Aux échelles d'espace-temps microscopiques, et même quantiques, le système isolé commence son évolution par un état, ou une configuration d'états élémentaires de ses constituants, qui ne sont pas dirigés par une orientation privilégiée, en l'occurrence entropique : la flèche du temps thermodynamique ne s'impose pas tant que les constituants, disons les particules du système, n'entrent pas en collision. Dans cette phase initiale, généralement très courte, le temps est réversible. Dans la phase qui suit, les collisions entre particules transforment l'énergie, tout en la conservant (système isolé), en énergie dissipative (en l'occurrence en quantité de chaleur) : l'entropie commence alors à augmenter parce que la quantité d'information requise pour décrire avec une précision déterministe les micro-états du système se perd progressivement.

Aux échelles quantiques, bien avant l'instant où se produisent les premières dissipations, il peut se produire les premières décohérences quantiques consécutives aux interactions quantiques entre chaque particule et leur environnement, y compris les autres particules, ces interactions n'étant pas dissipatives. Or la décohérence est un processus irréversible, comme on l'a vu au chapitre 8 : elle supprime l'intrication entre les particules. Le temps de décohérence est d'autant plus court que leur nombre est élevé ou que leur masse est grande. C'est pourquoi dans les systèmes macroscopiques les états quantiques intriqués sont très rarement observables, et donc que le comportement de ces systèmes est classique.

Puisque la décohérence se produit beaucoup plus rapidement que les interactions dissipatives entre constituants, la direction du temps irréversible trouve son origine dans les échelles quantiques et non dans les échelles de dissipation thermodynamique.

Mais dans les deux cas, l'irréversibilité correspond à une perte d'information affectant la possibilité de description précise et déterministe des micro-états et de leur configuration dans le système. Pour les systèmes quantiques, cette perte est relative à la suppression des états superposés au profit d'un seul, et pour les systèmes macroscopiques cette perte est d'origine dissipative. La flèche du temps serait donc d'origine primordiale quantique.

Il peut être intéressant d'essayer de décrire les relations entre les quantités d'information et la décohérence des états quantiques, en utilisant une cinquième dimension qui serait de nature différente de celles de l'espace-temps à 4 dimensions (voir paragraphe 8-3). Avec cette dimension, dite de "forme", dont la grandeur dynamique conjuguée serait l'information, la partition du temps de la physique en un temps réversible (temps parallèle) et un temps irréversible (flèche du temps, ou temps série) la question de la décohérence pourrait être examinée. La théorie ONE propose une piste où l'espace contenant un temps réversible (parallèle) est mis en relation avec l'espace contenant un temps thermodynamique (série), et la

dynamique des systèmes est complétée par celle qui inclut les variables canoniquement conjuguées "forme"/"information" [105].

■ **Remarque :**

Lorsqu'on écrit les équations de la MQ le temps et l'espace choisis sont encore ceux du monde macroscopique, parce que ces équations proviennent de l'analogie de l'optique valable dans ce monde macroscopique. Or ces temps et espace sont par conséquent irréversibles alors qu'on les emploie dans des modèles réversibles, sans dissipation. Ils peuvent être utilisés pour calculer la décohérence mais ils ne permettent pas de traiter la perte d'information dans un système quantique. Il faut donc :

- réécrire la MQ avec un espace-temps correspondant à son échelle ;
- établir comment évaluer la quantité d'information d'un système quantique et son évolution, à l'instar de ce qui se fait en théorie de l'information dans le monde macro (voir en 9-2 ci-dessous quelques notions sur le concept d'information) ;
- déduire les conditions de perdre ou de retrouver l'information dans les systèmes quantiques lors de leurs interactions qui conduisent généralement à la décohérence de leurs ondes quantiques ;
- à partir des liens qu'il faudra établir entre les espaces quantiques et l'espace macro, déduire les impacts sur la réversibilité ou l'irréversibilité dans le monde macro des pertes ou recouvrements de l'info, c'est-à-dire la 2e phase du processus (cf. figure 8-19 plus haut) :

1 - système quantique → perte d'information par décohérence → système macroscopique
→ 2 - gain d'information par action sur le temps quantique (possible s'il y a un lien entre les deux temps)

On aurait ainsi:

- Echelle quantique : temps parallèle → quantité d'information conservée → réversibilité
 - échelle classique : temps série → quantité d'information globale diminuée → entropie augmente (second principe) → irréversibilité
 - décohérence quantique → passage du temps parallèle au temps série → émergence de la flèche du temps dans l'univers classique
- (Piste possible : théorie ONE point 5.9 [105] et « théorie des straton de F. Élie » [106]).

9-2 – Notes sur l'irréversibilité, l'entropie, l'information, la complexité

■ **Ordre, complexité, auto-organisation :**

Dans [3] Henri Atlan évoque l'importance du bruit apporté par le milieu extérieur sur l'auto-organisation du système ouvert sur lui ; le bruit peut être source d'apport de variété qui contribue à une évolution néguentropique du système. Cette possibilité intervient plus généralement dans les modèles qui déduisent l'existence de structures organisées, munies d'un ordre élevé, à partir d'évolutions dynamiques chaotiques ([116],[189]...). Ce processus est un cheminement du système à travers des états où sa complexité s'accroît (donc augmentation de la quantité d'information, néguentropie), de manière irréversible. Cela est dû au fait qu'il y a convergence des attracteurs dans l'espace des phases ([185],[186],[116]...), ces attracteurs devenant confinés dans des limites conditionnées par les effets dissipatifs. Ceux-ci finissent par causer des bifurcations d'un état à un autre conduisant à des configurations plus dynamiquement stables [3], et donc finalement avec une entropie augmentée.

Cette situation ne contredit pas le Second Principe pour l'ensemble « système ouvert » + « son environnement », supposé fermé isolé, puisque l'évolution néguentropique de la phase primordiale, marquée d'apport de variété et de processus chaotique causant une auto-organisation du système, est suivie d'une évolution entropique de la phase terminale aboutissant à un équilibre stable et de moindre quantité d'information.

Dans ces situations de cheminement chaotique vers l'ordre, on note deux caractères importants :

- l'irréversibilité de l'évolution vers plus de complexité ;
- le rôle de la redondance R associée à l'apport de variété, qui consiste à réduire les contraintes du système (plus de flexibilité adaptative), R contribuant à la quantité d'information totale du système ouvert sur son extérieur :

$$I = I_{\max}(1-R) \quad \left| \quad (9-1) \right.$$

$$\frac{dI}{dt} = I_{\max} \left(-\frac{dR}{dt} \right) + (1-R) \frac{dI_{\max}}{dt}$$

<----(a)----> <----(b)---->

- terme (a) de (9-1) : diminution de la redondance R par les bruits ($dR/dt < 0$) d'où augmentation de la quantité d'information (a) > 0
- terme (b) de (9-1) : diminution de la quantité d'information maxi transmise du système à l'observateur ou le milieu extérieur ($dI_{\max}/dt < 0$) d'où diminution de la quantité d'information (b) < 0 .

Il y a **auto-organisation** si et seulement si $dI/dt > 0$, jusqu'à un temps limite t_M : il y a accroissement de la complexité par diminution de R (phase de croissance et d'adaptation). Au-delà de ce temps, $t > t_M$, la quantité d'information totale diminue $dI/dt < 0$: la complexité diminue par les effets aléatoires sur les structures du système, ces effets ne pouvant plus être compensés par la redondance R ; c'est la phase de vieillissement du système.

La quantité d'information est une mesure de l'ordre du système, c'est-à-dire le nombre de configurations des états des différents constituants du système, ou complexion, et l'entropie est directement reliée à la quantité d'information. Si l'entropie est élevée, $\Delta S > 0$, le nombre de configurations est grand, les états que peuvent prendre les constituants du système sont en nombre élevé : il y a peu de contraintes dans le système qui « obligerait » les constituants à se trouver dans un nombre restreint d'états. Par exemple, dans une cavité fermée contenant un gaz, les molécules qui le composent ne sont pas confinées dans des états, des lieux privilégiés dans la cavité ; elles peuvent occuper tout son volume et, ce faisant, entrer en collision avec la grande majorité des molécules. Si l'entropie diminue, $\Delta S < 0$, le nombre de configurations est petit : le système est contraint, ses constituants ne peuvent pas prendre le maximum d'états possibles.

Or, l'observation et la mesure d'un système (S) placent celui-ci dans des états contraints donc l'entropie du système interne $\Delta S_i < 0$, tandis que l'entropie de l'ensemble système et environnement (E) (comprenant par exemple le dispositif d'observation ou de mesure) augmente s'il est isolé :

$$\Delta S ((S) U (E)) = \Delta S_i + \Delta S_E > 0$$

Les bruits agissent sur la redondance dans le système observé, mais l'observateur n'est pas le système qui reçoit les bruits, sauf s'il s'agit d'un sujet qui, lors du processus d'observation, se perçoit lui-même, comme c'est le cas pour un être conscient ([3],[191]).

On montre que, sous certaines conditions sur la redondance, un système peut évoluer, plus exactement bifurquer, vers l'auto-organisation et l'auto-programmation par le bruit, c'est-à-dire l'émergence des structures et des propriétés nouvelles (complexité par le bruit) [3]. La bifurcation est le franchissement d'un seuil de complexité au-delà duquel l'auto-organisation devient possible sous l'action des agents aléatoires. L'émergence des propriétés nouvelles s'effectue à partir d'interactions entre structures simples.

■ **Quantité d'information de Shannon et ergodicité :**

Pour une grandeur « x » pouvant être mesurée dans différents états « i » d'un système, c'est-à-dire pouvant prendre différentes valeurs x_i , la quantité d'information est définie par la formule de Shannon :

$$I(x) = -\sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad (9-2)$$

où $p(x_i)$ est la probabilité que x ait la valeur x_i dans l'état n°i. $I(x)$ augmente quand p diminue ; ceci signifie que la survenue d'un événement nous apporte d'autant plus d'information (I grande) qu'il est imprévu (p faible). Si nous savions avec certitude que cet événement devait se produire, sa survenue ne nous apprendrait rien de plus.

Il est possible de mesurer le caractère prévu ou imprévu a priori de cet événement quand on peut connaître sa probabilité de survenue : l'information apportée par cet événement est d'autant plus grande

que sa probabilité de survenue est faible.



L'évolution vers les structures chaotiques est liée à la dissipation d'énergie, contribuant à l'augmentation d'entropie, et aux processus d'organisation (accroissement de l'ordre) qui surviennent pourtant malgré cette dissipation. L'application du Second Principe est vérifié ici selon :

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_E > 0 \text{ avec } \Delta S_i < 0 \text{ (néguentropique)}$$

On montre aussi qu'un système ouvert, sous certaines conditions initiales et/ou contraintes, aboutit à des états attracteurs ([185],[186],[116]), souvent de structure fractale (cf. 8-2-7, et [187],[188],[116]), en suivant des trajectoires chaotiques dans son espace de représentation (par exemple l'espace des phases $\{q;p\}$). Lorsque l'attracteur est dans un état d'ordre (système contraint donc nécessitant plus d'information pour sa description), l'évolution est néguentropique, donc il produit le « pompage » de la néguentropie d'univers localement.

Vient alors la question suivante : Le Second Principe pose que le système fermé évolue spontanément vers des configurations où ses constituants élémentaires (selon l'échelle d'observation considérée) sont dans une distribution d'états la plus homogène. Or, connaître en détails chacun de ces états nécessite une quantité d'information énorme, donc on devrait avoir plutôt $dI/dt > 0$. Le paradoxe est levé par le **théorème ergodique** [192] : au bout d'un certain temps fini, tous les constituants sont passés par tous les états possibles compatibles avec les limites du système. Par conséquent la quantité d'information entre eux est la même, et la connaissance moyenne sur le système requiert un nombre minimal de symboles (« atomes » ou bits d'information) même si chaque constituant, en sa structure interne, peut être en soi complexe. Pour un système ouvert, le théorème ergodique n'est plus systématique, et les changements d'états des constituants peuvent être tributaires de leurs interactions avec l'extérieur : dans ce cas la quantité d'information nécessaire pour décrire leurs états peut devenir grande.

Dans tout ce qui précède, et dans ce paragraphe 9-2, lorsque l'on parle d'information, il s'agit plus exactement d'**information objective** : par définition, elle concerne la rareté du symbole ou de l'état, sans s'intéresser à sa signification ou à son utilité. C'est une grandeur absolue, qui est la même pour tout observateur. Elle est différente de l'**information subjective**, qui est la signification ou l'utilité attribuée par le destinataire, ou par l'observateur (²⁶), et qui, par conséquent peut être affectée d'**intentionnalité** (cf. [24] par ex.).

■ Voie de communication de l'information [194] :

Toute quantité d'information sur un système est transmise par une voie, qu'il s'agisse d'une voie représentée par les interactions spontanées entre le système et son extérieur, ou d'une voie créée spécifiquement à des fins d'intentions. Cela suppose qu'il y ait un observateur destinataire du signal porteur de l'information, lequel destinataire peut être un autre système.

Lors de la transmission les informations sur les contraintes internes du système sont aussi transportées,

26 J'ai proposé dans [193] une tentative d'explication du passage de l'information objective à l'information signifiante (ou subjective), en lien avec un modèle sur les systèmes et processus conscients figurant dans [105],[191].

mais elles peuvent être affectées, à la source ou bien à la réception, par l'équivocation et par l'ambiguïté.

■ Si l'on considère deux grandeurs x et y dans les états du système (S), la **contrainte interne** du système relativement à ces deux grandeurs mesure le degré d'interdépendance entre elles dans les différents états $n^{\circ i}$ de probabilité $p(x_i)$, pour les valeurs prises par x , et $n^{\circ j}$ de probabilité $p(y_j)$ pour les valeurs prises par y :

$$T(x,y) = I(x) + I(y) - I(x,y) \quad (9-3)$$

où $I(x)$, $I(y)$ sont définies par (9-2), et $I(x,y)$ est l'**incertitude** simultanée sur x et y , qui fait intervenir les probabilités conditionnelles sur x connaissant y , et sur y connaissant x :

$$I(x,y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j) \quad (9-4)$$

avec les probabilités conditionnelles $p(y_j | x_i)$:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j | x_i) \quad (9-5)$$

Dans (9-3), si l'état $n^{\circ j}$ est conditionnée par l'état $n^{\circ i}$, c'est-à-dire si ces états sont respectivement réception et source l'un de l'autre, alors les quantités $I(x)$ et $I(y)$ représentent respectivement l'incertitude :

- sur la source, quantité d'information du message d'entrée : $I(x) = -\sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i)$;
- sur la réception, quantité d'information du message de sortie : $I(y) = -\sum_j p(y_j) \log_2 p(y_j)$

d'où pour l'incertitude totale :

$$I(x,y) = I(x) + I(y|x) = I(y) + I(x|y) \quad (9-6)$$

$I(y|x)$ et $I(x|y)$ sont les incertitudes moyennes sur la grandeur y (respectivement x) quand x est connue (respectivement quand y est connue). Ce sont, par définition, l'équivocation et l'ambiguïté :

$$I(y|x) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j) + \sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad (9-7a)$$

$$I(x|y) = -\sum_{j,i} p(y_j, x_i) \log_2 p(y_j, x_i) + \sum_j p(y_j) \log_2 p(y_j) \quad (9-7b)$$

$I(y|x)$ est l'**ambiguïté** : quantité d'information de sortie quand l'entrée est déterminée.

$I(x|y)$ est l'**équivocation** : quantité d'information de l'entrée quand la sortie est déterminée.

Lorsqu'une donnée x permet de prédire à coup sûr une donnée y , alors l'équivocation est nulle : $I(x|y) = 0$.

Finalement, on a pour les contraintes internes :

$$T(x,y) = T(y,x) = I(x) - I(x|y) = I(y) - I(y|x) \quad (9-8)$$

$T(x,y)$ mesure le gain en certitude sur y quand x est connue, et réciproquement : elle traduit alors la dépendance entre x et y .

■ **Voie de communication généralisée, capacité d'une voie** [194] :

■■ Par l'intervention des probabilités conditionnelles, une voie de communication au sens large n'est pas réduite à un support physique de transmission, mais existe chaque fois que les grandeurs x et y sont reliées par une matrice de probabilité conditionnelle ou de corrélation, qui peut signifier une influence commune des deux grandeurs par une autre grandeur z (existence d'une causalité commune, ou de « variable cachée »).

Ambiguïté et équivocation sont attribuées au bruit (perturbations aléatoires). Plus généralement elles proviennent de notre **ignorance** des relations exactes entre x et y (27). Une recherche plus poussée sur x et

27 Ignorance qui peut d'ailleurs être sans conséquence lorsque les données transmises sont dans les conditions où il est pertinent d'appliquer le principe de négligeabilité (cf. point 8-3, et [105]). Mais attention, tandis que la négligeabilité est

y ferait diminuer $I(x|y)$. Le bruit est assimilé à cette ignorance, car les effets sont les mêmes : l'un et l'autre perturbent l'exactitude des données transmises.

■■■ Capacité d'une voie :

La capacité d'une voie est, par définition, la valeur maximale de contrainte interne prise sur toutes les sources possibles qui émettent sur la voie :

$$C = \max_{\substack{\text{[toutes sources} \\ \text{possibles émettant} \\ \text{sur la voie]}}} T(x,y) \quad (9-9)$$

Autrement dit, la capacité C est la quantité d'information maximale par symbole émis que peut transmettre la voie, quelle que soit la quantité d'information I du message à transmettre.

■■■ Redondance R dans un message transmis par une voie de communication :

Pour corriger les erreurs de transmission, on utilise des symboles supplémentaires ajoutés aux symboles indépendants du message, suivant des messages répétés. Ce sont la redondance R dans le message d'entrée. Les symboles supplémentaires entraînent donc une diminution de la quantité d'information par symbole :

$$R = 1 - I/I_{\max}$$

où I_{\max} est ici la quantité d'information du message transmis sans correction d'erreurs (en absence de redondance).

■■■ Théorème de Shannon de la voie avec bruit (v. [194],[3]...) :

Si la quantité d'information transmise par la voie est plus petite que la capacité de celle-ci, $I < C$, on peut toujours trouver un code d'erreurs (la redondance R) tel que l'équivocation $I(x|y)$ soit réduite. La redondance R doit être d'autant plus grande que l'équivocation $I(x|y)$ est importante.

Soit x le message, représentant la grandeur correspondante, sans redondance, de quantité d'information $I(x)$. Soit x^* ce message, représentant la même grandeur correspondante, avec redondance, de quantité d'information $I(x^*)$. Alors si $I(x) < C$ la redondance entraîne que le message transmis a pour quantité d'information après effet du bruit, $I(x^*)$, telle que :

$$I(x) < I(x^*) - I(x^*|y) < C \quad (9-10)$$

D'où la signification de la capacité C de la voie : C fixe une limite à la quantité d'information qu'une voie avec bruit peut transmettre sans erreur au moyen d'une redondance :

$$C = \max T(x,y) = [I(x) + I(y) - I(x,y)] = \max (I(x) - I(x|y)) \geq I(x^*) - I(x^*|y) \geq I(x,y) \quad (9-11)$$

■ *Transmission dans une voie suivant un processus de Markov :*

La quantité d'information conditionnelle est, selon (9-5) et (9-7) :

$$I(y|x) = -\sum_{i,j} p(x_i) p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i)$$

Si la transmission suit un processus de Markov, c'est-à-dire la probabilité $p(y_j|x_i)$ que le système est dans l'état $n^{\circ}j$ au temps (t) s'il est dans l'état $n^{\circ}i$ au temps $(t-1)$ (l'état à un instant ne dépend statistiquement que de l'état de l'instant immédiatement précédent, et non de toute l'histoire des états antérieurs), alors la quantité d'information d'un message dans ce processus vérifie l'inégalité :

$$I_M(y|x) = -\sum_{i,j} p(x_i) p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i) \leq I(x) = -\sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad (9-12)$$

Interprétation de (9-12) : l'interdépendance des symboles dans un message selon le processus de Markov

nécessaire dans le processus de connaissance comme système d'information avec bruit [3], et facilite l'approche holistique de la connaissance d'un système aux échelles où elle est pertinente, elle doit être contrôlée par le principe de réfutabilité de K. Popper ([24],[159],[105]).

entraîne une diminution de la quantité d'information moyenne par symbole. La redondance est dans ce cas :

$$R_M = 1 - I_M/I_{\max}$$

■ ■ **Variété d'un système** [3] :

On appelle variété « v » (ou son logarithme de base 2, $V = \log_2 v$) d'un système le nombre d'éléments reconnaissables dans ce système. Dans ce système, la régulation de la transmission de l'information nécessite une condition sur la variété (ou *loi d'Ashby* sur la variété indispensable) :

En présence d'un ensemble de perturbations $\{D\}$, le système répond par un ensemble d'états, les réponses $\{R\}$. La combinaison de ces perturbations et réponses donne un ensemble d'états possibles $\{Z\}$ formé des couples de perturbations et de réponses. Dans l'hypothèse d'un nombre fini de celles-ci, on a :

$$\{D\} = \{d_1, \dots, d_n\} ; \{R\} = \{r_1, \dots, r_m\} ; \{Z\} = \{D\} \times \{R\} = \{(d_i, r_j)\}$$

on a donc $\text{Card } \{Z\} = nm$ états possibles. Soit v_R, v_D, v_Z les variétés de $\{R\}, \{D\}, \{Z\}$ (nombres de symboles différents reconnaissables). Alors parmi les nm états, il existe un sous-ensemble $\{Z_a\}$ de $\{Z\}$ d'éléments acceptables du point de vue des attentes de la transmission (ce qui est une approche marquée d'intentionnalité), $\{Z_a\} \subset \{Z\}$. Alors, on montre que pour obtenir ces états acceptables il faut un minimum de variétés d'états possibles tel que (loi d'Ashby) :

$$\min v_Z = \frac{v_D}{v_R} \quad \text{ou encore : } \min V_Z = \min \log_2 v_Z = \log_2 v_D - \log_2 v_R = V_D - V_R \quad (9-13)$$

Interprétation de la loi d'Ashby : la quantité d'erreurs dues au bruit que l'on peut empêcher en sortie est limitée par la quantité d'information maximale (ou $\max v_Z$ variété maximale) qui peut être transmise par la voie de correction.

10 - Conclusion

Dans ce texte nous avons eu l'occasion de joindre entre eux plusieurs domaines scientifiques : la cosmologie, la physique quantique, les processus stochastiques, la théorie de l'information. Certains sujets et discussions ont même conduit aux frontières épistémologiques et cognitives avec les questions d'émergence de systèmes complexes, de la conscience, des liens éventuels entre une réalité objective et la perception ou l'observation consciente.

Cette rencontre interdisciplinaire, qui n'est qu'une ébauche de la présentation des théories qu'elle évoque, se justifie par la nature complexe de la problématique des cerveaux de Boltzmann (BB). Celle-ci, on l'a vu, met en avant au moins trois axes principaux :

- 1°) La question, initialisée par L. Boltzmann, sur l'entropie de l'univers observable.
- 2°) L'existence de structures physiques pouvant émerger des fluctuations quantiques du vide.
- 3°) La possibilité éventuelle de ces structures de modifier au moins localement la réalité physique, voire une partie de l'univers, par leurs interactions avec celles-ci, ces interactions pouvant consister en observation ou mesure entrant dans la description quantique.

Ces axes ouvrent d'autres questions :

- Celles relatives au 1°) : l'univers suit le Second Principe de la thermodynamique, et donc son entropie devrait être élevée, s'il est un système fermé et isolé.

Or ces notions de fermeture et d'isolement relativement à un environnement englobant restent, semble-t-il, encore floues : on a évoqué l'existence d'un multivers comme ensemble contenant une quantité d'univers-bulles pouvant résulter d'une inflation cosmologique éternelle.

Si tel est le cas, le caractère fermé de notre univers signifierait l'absence totale de relation ou d'interaction entre notre univers et les autres univers-bulles.

Si, en revanche, sans forcément invoquer l'existence du multivers, l'univers observable tel qu'on le connaît aujourd'hui est immergé dans un système plus « vaste », disons un super-univers, il est soit isolé au sein

de ce super-univers, soit ouvert sur lui, auquel cas son entropie ne doit pas nécessairement augmenter. Dans ce dernier cas, cela « expliquerait » que l'univers observable présente une structure relativement « organisée ».

Mais, même dans cette hypothèse, il faut se demander s'il existe une composante de l'univers, non complètement ou pas du tout observée, dont la structure désorganisée ne contribuerait pas à l'augmentation d'entropie de l'univers, même si celui-ci présente un aspect observable de faible entropie. Par exemple, il pourrait s'agir de la « matière noire » ou bien de l' « énergie noire » en cosmologie quantique. Donc, déjà sur cet axe, il n'y a encore rien d'évident.

- Celles relatives au 2°) : les structures physiques émergeant des fluctuations quantiques du vide pourraient devenir suffisamment « complexes » - concept restant à définir formellement aux échelles quantiques – à condition que durant le temps d'existence des composants virtuels, ceux-ci acquièrent une énergie et une stabilité suffisantes, et que le passage à l'état réel conserve cette complexité.

Qu'en est-il aussi du rôle éventuel de la structure géométrique relativiste de l'espace-temps sur ces fluctuations ?

- Celles relatives au 3°) : elles sont pleinement liées à la véracité de l'interprétation du formalisme quantique, en particulier celle touchant le problème de la mesure (point 8-1-7).

Au paragraphe 8-2, on a vu de manière non exhaustive différentes interprétations dont celle qui propose le rôle de la conscience du système observateur sur le résultat de la mesure, plus exactement de la réduction ou bien de l'effondrement de la fonction d'onde regroupant les états superposés du système observé. Cette approche, qui procède d'une épistémologie idéaliste, pourrait apporter les arguments justifiant que l'observation consciente de l'univers conduit à sa modification ; en conséquence de quoi, qu'il s'agisse d'une conscience humaine ou bien d'une conscience d'un système type cerveau de Boltzmann, leur observation de l'univers agit sur lui et entraîne que ce que nous observons ou connaissons de l'univers peut changer et être constamment remis en cause.

Cela peut aussi soulever la question du darwinisme quantique où ces influences entreraient dans une « compétition » évolutionniste. Quand bien même cette perspective s'avérerait pertinente, il faudrait d'abord se demander en vertu de quelle recherche d'invariance une telle compétition aurait-elle lieu ?

Par exemple, dans le darwinisme biologique, cette invariance est supposée être la conservation de l'espèce, plus précisément du génome, avec néanmoins ses évolutions, ses bifurcations consécutives au bruit [32].

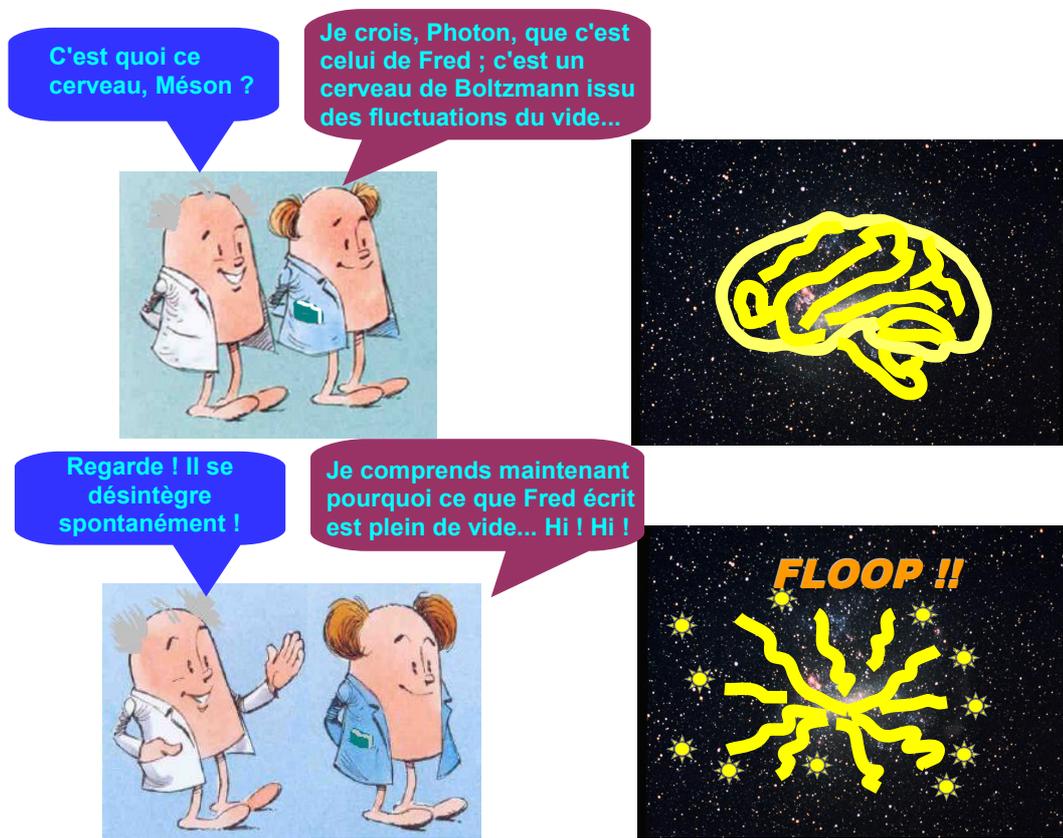
Mais s'agissant des cerveaux de Boltzmann, s'ils existent, peut-on invoquer une telle invariance, sinon quelle est-elle ? Question demeurant ouverte, si tant est qu'elle ait un sens.

Par ailleurs, le concept même de conscience reste un problème épistémologique encore ouvert, sur lequel d'innombrables tentatives philosophiques, neuroscientifiques, et même quantiques (comme par exemple la théorie DP ou d'Hameroff-Penrose-Fröhlich, point 8-2-6, dont l'application aux BB ne semble pas évidente) n'ont pas apporté de réponses définitives répondant au critère de réfutabilité de K. Popper. J'ai moi-même décrit succinctement une proposition au paragraphe 8-3, qui vaut ce qu'elle vaut.

A ce jour, le formalisme quantique tel qu'interprété selon l'École de Copenhague (interprétation standard), sans plus de question existentielle, semble fonctionner et intéressant pour les problèmes de la physique et l'informatique quantique.

C'est, certes, sur un plan épistémologique peut-être décevant. Mais ce qui serait encore plus décevant c'est d'imaginer à tous prix que les causalités ultimes, si elles existent, qui justifieraient les postulats de la physique quantique, ainsi que l'existence de cerveaux de Boltzmann, cessent de satisfaire l'indécidabilité de K. Gödel : comment la physique quantique puiserait-elle dans son seul formalisme un critère de véracité de ce qui justifie ce qui fonctionne dans cette théorie, hormis la cohérence des résultats expérimentaux avec ce que prédit le formalisme ?

Le fait que tous ces sujets restent ouverts est en soi intéressant, pour ne pas dire passionnant, tout en nous plaçant dans une saine position d'humilité, qui sied au véritable esprit scientifique.



Références

- [1] Andreas Albrecht and Lorenzo Sorbo : Can the universe afford inflation? Physical Review D, vol. 70, n 6, septembre 2004
- [2] Henri Atlan : Entre le cristal et la fumée, essai sur l'organisation du vivant - éd. Seuil, 1979
- [3] Henri Atlan : L'organisation biologique et la théorie de l'information – Seuil 2006
- [4] Hugh Everett, Reviews of Modern Physics, 29, 1957, p.454
- [5] David Madore : Un peu de métaphysique (principe anthropique, fine-tuning, cerveaux de Boltzmann, simulations, et pourquoi nous sommes là), 5 novembre 2015
<http://www.madore.org/~david/weblog/d.2015-11-05.2334.html>
- [6] Thomas Boisson : Que sont les cerveaux de Boltzmann ? - 25 février 2019, © 2019 Trust My Science
- [7] Inman, Mason : Spooks in space - August 2007, New Scientist; 8/18/2007, Vol. 195 Issue 2617, p26
- [8] Roderich Tumulka : A Relativistic Version of the Ghirardi–Rimini–Weber Model, Journal of Statistical Physics, November 2006, Volume 125, Issue 4, pp 821–840
- [9] Frédéric Élie : Réflexions sur la méthode expérimentale – site <http://fred.elie.free.fr>, mars 2005, modifié le 30 décembre 2005 et mars 2009
- [10] S. Perlmutter et al, The Supernova Cosmology Project : Measurements of Ω and Λ from 42 highredshift supernovae, accepted for publication in The Astrophysical Journal, 1999
- [11] Adam G. Riess et al : Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, To Appear in the Astronomical Journal, 1998

- [12] Planck Collaboration : Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics*, July 18, 2018, © ESO 2018
- [13] Frédéric Élie : Le vide quantique et ses fluctuations, site <http://fred.elie.free.fr>, avril 2021
- [14] Frédéric Élie : Le fond diffus cosmologique (CMB), site <http://fred.elie.free.fr>, février 2021
- [15] Bertrand Duplantier: Introduction à l'effet Casimir, séminaire Poincaré (Paris, 9 mars 2002), publié dans (: en) Bertrand Duplantier et Vincent Rivasseau, *Poincaré Seminar* (Paris, 9 mars 2002) : vacuum energy renormalization, Basel Boston, Birkhäuser Verlag, 2003
- [16] Wikipedia : Fond diffus cosmologique, Contenu soumis à la licence CC-BY-SA 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.fr>) Source : Article Fond diffus cosmologique de Wikipédia en français (http://fr.wikipedia.org/wiki/Fond_diffus_cosmologique), version du 18 juin 2019
- [17] J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan : Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background, *Nature* 425 (2003) 593, consultable en arXiv:astro-ph/0310253v1
- [18] Marc Lachièze-Rey : Initiation à la cosmologie, 2004, Dunod
- [19] W.-M. Yao et al : Review of Particle Physics, 2006, Particle Data Group
- [20] Sabine Rouboudin: L'ambition des "physiques védiques" illustrée par deux références. 2015. <hal-01456918>
- [21] Edgard Gunzig: Que faisiez-vous avant le Big-bang ?, Paris, O. Jacob, coll. « Sciences », 2008
- [22] Philippe Cristofari, Frédéric Élie, Colette Garaventa : Interprétation de la physique quantique : la physique quantique est-elle une théorie complète ? Site <http://fred.elie.free.fr> , juin 1980
- [23] Huw Price et Ken Wharton : La rétrocausalité : une solution pour dissiper les fantômes quantiques qui aurait échappé à Einstein ? In C. Bouton et P. Huneman (dir.), *Temps de la nature et nature du temps*, CNRS éditions, 2018. Traduit de l'anglais par Thomas Boyer-Kassem
- [24] Frédéric Élie : Mesurer et Agir – Site <http://fred.elie.free.fr> , 24 mai 2000
- [25] Wojciech Hubert Zurek : Quantum Darwinism, *Nature Physics*, vol. 5, pp. 181-188 (2009) arXiv:0903.5082v1 [quant-ph]
- [26] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu & Franck Laloe : *Mécanique quantique*, tome 1, Hermann, 1973
- [27] Roland Omnès : Les racines quantiques du monde classique, *Pour la Science* n°290, 01/12/2001
- [28] Henri Duthu : Penser le monde en partant du quantique, site www.reseau-regain.net, onglet Vus d'Ailleurs, mis en ligne 02/2017
- [29] David Bohm et Jiddu Krishnamurti : *Le temps aboli : Dialogues* [« The Ending of Time »], Éditions du Rocher, 1989, 416 p.
- [30] Sean M. Carroll : Why Boltzmann Brains Are Bad, 2 feb. 2017, *Current Controversies in Philosophy of Science*, eds. Shamik Dasgupta and Brad Weslake, consultable sur arXiv:1702.00850v1 [hep-th]

- [31] John Campbell (2010) : Quantum Darwinism as a Darwinian process, arXiv:1001.0745 (<https://arxiv.org/abs/1001.0745>) [physics.gen-ph (<https://arxiv.org/archive/physics/gen-ph>)]
- [32] Jacques Monod : Le hasard et la nécessité, essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne - éd. Seuil, 1970
- [33] Gerald M. Edelman : Biologie de la conscience, éd. Odile Jacob, mai 2000
- [34] M. von Sydow (2013) : Darwinian Metaphysics, In A. Runehov & L. Oviedo (Eds.). Encyclopedia of Sciences and Religions. Heidelberg, New York: Springer Science
- [35] Don N. Page : Observational consequences of many-worlds quantum theory, arXiv:quant-ph/9904004v2, 3 mai 1999
- [36] Edgard Elbaz : Quantique, Ellipses, 1995
- [37] A. Messiah : Mécanique quantique, tome 2, Dunod, 1964
- [38] Patrick Peter et Jean-Philippe Uzan : Cosmologie primordiale, Belin, 2005
- [39] Frédéric Élie : Quaternions et rotations en mécanique quantique, site <http://fred.elie.free.fr>, juin 2020
- [40] Frédéric Élie : Spineurs et algèbre vectorielle en physique quantique : application à l'équation de Dirac, site <http://fred.elie.free.fr>, octobre 2017
- [41] Richard Feynman : Leçons sur la gravitation (1995), éd. Odile Jacob, 2001
- [42] Jean-Pierre Luminet : L'écume de l'espace-temps, éd. Odile Jacob, octobre 2020
- [43] Stephen Hawking, Roger Penrose : La nature de l'espace et du temps, présentation de Marc Lachièze-Rey, éd. Gallimard, 1997
- [44] Leonard Susskind : Trous Noirs, Robert Laffont, 2008
- [45] S. Hawking : L'univers dans une coquille de noix, Odile Jacob, 2001
- [46] Frédéric Élie : Liaison hydrogène et autres liaisons chimiques - site <http://fred.elie.free.fr>, août 2004
- [47] Max Tegmark : Parallel Universes. Science and Ultimate Reality : From Quantum to Cosmos, honoring John Wheeler's 90th birthday, J.D. Barrow, P.C.W. Davies & C.L. Harper eds., Cambridge University Press (2003)
- [48] Pedro Bordalo : Cordes et champs antisymétriques dans les espaces-temps courbes. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2004. Français. NNT : tel-0008396
- [49] Jean-Yves Ollitrault : Introduction à la théorie quantique des champs. Magistère inter-universitaire de la physique 2e année, année universitaire 2004-2005. Site <http://ipht.cea.fr>
- [50] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, Yaron Oz : Large N field theories, string theory and gravity. Physics Reports, vol.323, issues 3-4, january 2000, p. 183-386
- [51] Juan Maldacena : The large N limit of superconformal field theories and supergravity. Adv. Theor. Math. Phys. 2 : 231-252, 1998, Int. J. Theor. Phys. 38 : 1113-1133.

- [52] Juan Maldacena : TASI 2003 Lectures on AdS/CFT. Cours donné à l'école d'été TASI
- [53] S. Hawking and Thomas Hertog : A smooth exit from eternal inflation ? JHEP04 (2018) 147, published for SISSA by SPRINGER (27 avril 2018)
- [54] J. Hartle and S. Hawking : Wave function of the Universe. Phys. Rev. D28, 2960-2975 (1983)
- [55] T. Hertog and J. Hartle : Holographic no-boundary measure. JHEP 1205,095 (2012),1111.6090
- [56] Abdennacer Hamdi. Potentiel de mesure des couplages du boson de Higgs avec une expérience Électron-Positron. Étude de calorimètre à haute granularité. Physique des Hautes Énergies – Expérience [hep-ex]. 2015. dumas-01228238
- [57] Fedor Bezrukov and Mikhail Shaposhnikov, Why should we care about the top quark Yukawa coupling ?, CERN, CH-1211 Genève 23, Switzerland, (2014) [<http://arxiv.org/abs/1411.1923v1>].
- [58] Giuseppe Degrassi, Stefano Di Vita, Joan Elias-Mirò, José R. Espinosa, Gian F. Giudice, Gino Isidori and Alessandro Strumia, Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO, (2013) [<http://arxiv.org/pdf/1205.6497.pdf>].
- [59] J. Richard Gott III : Boltzmann Brains, I'd rather see than be one. ArXiv 0802 0233 [gr-qc], 2 Feb 2008.
- [60] Gibbons, G. W., & Hawking, S. W., Phys. Lett. 78B, 430 (1978)
- [61] Gott, J. R., & Li, L-X., Phys. Rev. D., 58, 3501 (1998), astro-ph/9712344
- [62] A.D. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology (Harwood, Chur, Switzerland, 1990) [arXiv:hep-th/0503203]
- [63] S. Tomonaga : On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. Prog. Theor. Phys. 1,27, 1946
- [64] J. Schwinger : Quantum Electrodynamics, 1. A Covariant Formulation. Phys. Rev. 74,1439, 1948
- [65] Guy Chanfray, Gérard Smadja : Les particules et leurs symétries. éd. Masson, Paris, 1996
- [66] C. Wetterich : Cosmology and the fate of dilatation symmetry. Nucl. Phys. B 302,668, 1988
- [67] P. Binétruy : Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence. Phys. Rev. D 60,063502, 1999
- [68] A. Albrecht and C. Skordis : Phenomenology of a realistic accelerating universe using only Planck-scale physics. Phys. Rev. Lett. 84,2076, 2000
- [69] J-P. Uzan : Cosmological scaling solutions of non-minimally coupled scalar fields. Phys. Rev. D 59,123510, 1999
- [70] N. Bartolo and M. Pietroni : Scalar-tensor gravity and quintessence. Phys. Rev. D 61,023518, 2000
- [71] M. Gasperini, F. Piazza and G. Veneziano : Quintessence as a run-away dilaton. Phys. Rev. D 65,023528, 2002
- [72] M. Peloso and E. Poppitz : Quintessence from shape moduli. Phys. Rev. D 68,125009, 2003

- [73] M. Bucher and D. Spergel : Is a dark matter a solid ? Phys. Rev. D,60, 043505, 1999
- [74] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov and P. Steinhardt : Essentials of K-essence. Phys. Rev. D 63,103510, 2001
- [75] C. Armendáriz-Picón, T. Damour and V. Mukhanov : K-inflation. Phys. Lett. B 458,209, 1999
- [76] A. Sen : Rolling tachyon. JHEP 0204,048, 2002
- [77] R. Gregory, A. Rubakov and S. Sibiryakov : Opening up extra-dimensions at ultra-large scales. Phys. Rev. Lett. 84,5928, 2000
- [78] T. Damour, I. Kogan and A. Papazoglou : Non-linear bigravity and cosmic acceleration. Phys. Rev. D 66,104025, 2002
- [79] Raphael Bousso, Roni Harnik, Graham D. Kribs, and Gilad Perez : Predicting the Cosmological Constant from the Causal Entropic Principle. Preprint typeset in JHEP style - Hyper Version, arXiv : hep-th/0702115, 15 Sept. 2007
- [80] Andrei Linde and Mahdiyar Noorbala : Measure Problem for Eternal and Non-Eternal Inflation. arXiv:1006.2170v2 [hep-th] 11 Aug 2010
- [81] Andrei Linde : Sinks in the Landscape, Boltzmann Brains, and the Cosmological Constant Problem. ArXiv:hep-th/0611043v3 28 Jan 2007
- [82] Andrei Linde, Vitaly Vanchurin, and Sergei Winitzki : Stationary Measure in the Multiverse. arXiv:0812.0005 [hep-th]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0812.0005>. JCAP 0901:031,2009, submitted [v1] 1 Dec 2008
- [83] Don N. Page : Is Our Universe Likely to Decay within 20 Billion Years ? arXiv:hep-th/0610079. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0610079>. Phys.Rev.D78:063535,2008. [v1] 9 Oct 2006, [v2] 8 Aug 2008
- [84] Henry Blumenfeld, « John Bell, de la philosophie naturelle à la physique », Bibnum [En ligne], Physique, mis en ligne le 01 janvier 2012. URL : <http://journals.openedition.org/bibnum/833>
- [85] Daniel Fortier : La physique quantique : un voyage au coeur de la réalité. Copyright Daniel Fortier 2009. Tous droits réservés. Conférences données devant les Sceptiques du Québec, le 13 février 2007 et le 13 septembre 2007. http://www.sceptiques.qc.ca/assets/docs/Charest_Fortier.pdf
- [86] Louis Marchildon : Multiplicity in Everett's interpretation of quantum mechanics. arXiv:1504.04835 [quant-ph] ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.1504.04835>. [v2] 8 Oct 2015
- [87] David Wallace : Worlds in the Everett Interpretation. arXiv:quant-ph/0103092 ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0103092>. Studies in the History and Philosophy of Modern Physics 33 (2002) pp. 637-661
- [88] Aurélien Barrau : Peut-on tester les univers parallèles ? Publié sur CNRS Le journal (<https://lejournal.cnrs.fr>) 3 septembre 2015. URL source: <https://lejournal.cnrs.fr/billets/peut-tester-les-univers-paralleles>
- [89] Aurélien Barrau : Testing the Everett Interpretation of Quantum Mechanics with Cosmology. arXiv:1412.7352 [gr-qc] ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.7352>. Elec. J. Theoretical Phys. 12, 33

[90] Toshifumi Sakaguchi : Against « *Against Many-Worlds Interpretations* » by A. Kent. arXiv:gr-qc/9704039 ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/9704039>. [v1] 15 Apr 1997

[91] Guido Bacciagaluppi. Une solution par la physique ? La décohérence. Soazig Le Bihan. Précis de philosophie de la physique, Vuibert, pp.53-75, 2013. halshs-00996281

[92] Sylvain Vogelsberger : Décohérence et Intrication quantique. Master 2 de Physique, ENS Lyon Avril/Juillet 2008

[93] Olivier Landon-Cardinal : Évolution des systèmes quantiques ouverts : décohérence et informatique quantique. Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.) en physique, Université de Montréal, août 2009

[94] Olivier Landon-Cardinal, Richard MacKenzie : Decoherence suppression via environment preparation. arXiv:0908.0958 [quant-ph] ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.0908.0958>. Phys. Rev. A 80, 062319 (2009), [v1] 6 Aug 2009

[95] Michel Le Bellac : Existe-t-il une frontière classique/quantique ? Reflets de la Physique n°13, 2009 ; Article disponible sur le site : <http://refletsdelaphysique.fr> ou: <http://dx.doi.org/10.1051/refdp/2009002>

[96] Laurent Sacco : Des chercheurs font grandir des chats de Schrödinger de lumière pour étudier la décohérence. Source : <https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/physique-chercheurs-font-grandir-chats-schrodingerlumiere-etudier-decoherence-16882/> , Futura Sciences, 2017

[97] Giancarlo Ghirardi : Collapse Theories. Stanford Encyclopedia of Philosophy, Copyright © 2016 ; <https://plato.stanford.edu/entries/qm-collapse/>

[98] Roman Frigg : GRW Theory (Ghirardi, Rimini, Weber Model of Quantum Mechanics). In : Daniel Greenberger, Brigitte Falkenburg, Klaus Hentschel and Friedel Weinert (eds.) : Compendium of Quantum Physics : Concepts, Experiments, History and Philosophy. Heidelberg and Berlin : Springer, 2009, 266-270

[99] Sheldon Goldstein, Roderich Tumulka, Nino Zanghi : The Quantum Formalism and the GRW Formalism. arXiv:0710.0885 [quant-ph] ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.0710.0885>. Journal of Statistical Physics 149: 142-201 (2012)

[100] William Marshall, Christoph Simon, Roger Penrose, Dik Bouwmeester : Towards quantum superpositions of a mirror. arXiv:quant-ph/0210001 ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0210001>. Phys. Rev. Lett. 91, 130401 (2003)

[101] Reinhold A. Bertlmann : Real or not real that is the question... Eur. Phys. J. H ; <https://doi.org/10.1140/epjh/e2020-10022-x>. Published online 14 September 2020

[102] Christian Knobloch, a0846069 : Bohmian Mechanics. For the seminar: 'Ausgewählte Probleme der Quantenmechanik' Faculty of Physics, University of Vienna, WS 2011/2012

[103] James Clement van Pelt : The Essential David Bohm. Review Of Sophia Journal, 4 Sep 2003. Consultable sur : <https://www.researchgate.net/publication/248137688>

[104] Michael Esfeld : La théorie de Bohm. Sciences et avenir hors série. Le paradoxe du chat de Schrödinger, No. 148 Octobre /Novembre 2006, p. 71

- [105] Frédéric Élie : Ébauche d'une théorie sur le rapport entre l'esprit et le réel: « théorie ONE » (Objectivité, Négligeabilité, Émergence) - site <http://fred.elie.free.fr>, 12 février 2011, édité en octobre 2015, version mai 2019
- [106] Frédéric Élie : Essais sur une Théorie des Stratons – site <http://fred.elie.free.fr>, 10 octobre 1984, édité en octobre 2015 et mai 2016
- [107] Matthew Leifer : The reality of the quantum state from Kochen-Specker contextuality. EmQM15 23/10/2015
- [108] M. S. Leifer : Is the quantum state real? A review of ψ -ontology theorems. March 10, 2014. Website: <http://mattleifer.info>
- [109] Matthew S. Leifer, Matthew F. Pusey : Is a time symmetric interpretation of quantum theory possible without retrocausality ? arXiv: 1607.07871v2 [quant-ph] 10 May 2017
- [110] Huw Price : Does Time-Symmetry Imply Retrocausality? How the Quantum World Says "Maybe". arXiv:1002.0906 [quant-ph] ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.1002.0906>. Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 43(2012), 75-83
- [111] Huw Price et Ken Wharton : La rétrocausalité : une solution pour dissiper les fantômes quantiques qui aurait échappé à Einstein ? In C. Bouton et P. Huneman (dir.), Temps de la nature et nature du temps, CNRS éditions, 2018. Traduit de l'anglais par Thomas Boyer-Kassem.
- [112] K.B. Wharton : Lagrangian-Only Quantum Theory. arXiv:1301.7012v1 [quant-ph] 29 Jan 2013
- [113] Yakir Aharonov, Eyal Y. Gruss : Two-time interpretation of quantum mechanics. arXiv:quant-ph/0507269 ; <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0507269>. [v1] 28 Jul 2005
- [114] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, Phys. Rev. D15, 2738 (1977)
- [115] Penata Kallosh, Andrei Linde, Shamit Lachru, Sandip Trivedi : De Sitter vacua in String Theory. ArXiv.org (<https://arxiv.org/pdf/hep-th/0301240>), 2003
- [116] Pierre Bergé, Yves Pomeau, Christian Vidal : L'ordre dans le chaos ; vers une approche déterministe de la turbulence. Hermann, 1998
- [117] S. R. Coleman and F. De Luccia, "Gravitational Effects On And Of Vacuum Decay," Phys. Rev. D 21, 3305 (1980)
- [118] Frédéric Élie : Suites de Cauchy et théorème du point fixe de Banach - site <http://fred.elie.free.fr>, novembre 2012
- [119] Walter Appel : Mathématiques pour la physique, et les physiciens. H&K Éditions, Paris, 2005
- [120] Charlier Alphonse, Bérard Alain, Charlier Marie-France: Mécanique analytique, éd. Marketing, 1989
- [121] Michel Le Bellac : Introduction à l'information quantique. Collection « Échelles », éditions Belin 2005
- [122] J. S. Bell, Physics Physique Fizika 1, 195-200 (1964) doi: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195

- [123] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. 23, 880-884 (1969)
doi:10.1103/PhysRevLett.23.880
- [124] S. P. Sorella : Comments on the Bell-Clauser-Horne-Shimony-Holt inequality. arXiv:2301.02245
[quant-ph] 22 jan. 2023
- [125] Alain Aspect. Expériences basées sur les inégalités de Bell. Journal de Physique Colloques, 1981, 42 (C2), pp.C2-63-C2-80. 10.1051/jphyscol:1981203. jpa-00220689
- [126] Gilles Cohen-Tannoudji : Les constantes universelles - Hachette 1998
- [127] Toshifumi Sakaguchi : Why we don't see the Schrödinger's cat state? arXiv:quant-ph/9506042, 3 Jul 1995
- [128] Adrian Kent : Against Many-Worlds Interpretations. Int. J. Mod. Phys. A 5 1745-1762 (1990)
(publié aussi sur arXiv:gr-qc/9703089v1 31 Mar 1997)
- [129] Michel H. Devoret, John M. Martinis, Daniel Estève, John Clarke: Macroscopic quantum mechanics experiments. Helvetica Physica Acta, Vol.61 (1988) 622-635
- [130] Antoine Tilloy : L'ordinateur quantique ne se résume pas à une course aux qubits. Propos recueillis par Sean Bailly, 25 mai 2022, Pour la Science n°536
- [131] Zurek, W.H. (1998) : Decoherence, Einselection, and the Existential Interpretation (The Rough Guide). Philosophical Transactions of the Royal Society of London A 356, 1793-1820. Disponible sur arXiv.org/abs/quant-ph/9805065
- [132] Zeh, H.D. (2000) : The Problem of Conscious Observation in Quantum Mechanical Description. Foundations of Physics Letters 13, 221-233. Disponible sur arXiv.org/abs/quant-ph/9908094
- [133] William K. Wootters: Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. Phys. Rev. Lett. 80, 2245 – Published 9 March 1998
- [134] Scott Hill, William K. Wootters : Entanglement of a Pair of Quantum Bits. Phys.Rev.Lett.78:5022-5025,1997. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.5022>. Disponible sur arXiv:quant-ph/9703041
- [135] E. Joos, H.D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, K. Kupsch, I.O. Stamatescu ; Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory, Springer-Verlag (1996). Deuxième édition (2003)
- [136] Hans Dieter Zeh ; Roots and Fruits of Decoherence, séminaire Poincaré (Paris -19 novembre 2005). Disponible sur arXiv : quant-ph/0512078 (<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0512078>)
- [137] Wojciech H. Zurek ; Decoherence and the Transition from Quantum to Classical-Revisited, séminaire Poincaré (Paris - 19 novembre 2005). Disponible sur <http://www.bourbaphy.fr/zurek.pdf>
- [138] Albert Dechambre : La liberté du physicien – Lectures de Comprendre la physique quantique de Jean Bricmont - Complément au Concept scientifique du libre arbitre. Disponible sur le site : <https://www.researchgate.net/publication/349959131>, Mars 2021
- [139] Jean Bricmont : Comprendre la physique quantique. éd. Odile Jacob, 2020
- [140] David Bohm, « A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables", II », Physical Review, vol. 85, 1952, p. 180–193

- [141] D. Bohm, B. J. Hiley: On the intuitive understanding of nonlocality as implied by quantum theory. *Foundations of Physics*, Volume 5, Number 1, pp. 93-109, 1975, DOI: 10.1007/BF01100319
- [142] B. J. Hiley: Some remarks on the evolution of Bohm's proposals for an alternative to quantum mechanics. Sur: http://www.bbk.ac.uk/tpru/BasilHiley/History_of_Bohm_s_QT.pdf , 30 January 2010
- [143] B.J. Hiley, “Active Information and Teleportation”, *Epistemological and Experimental Perspectives on Quantum Physics*, eds. D. Greenberger et al. 113-126, Kluwer, Netherlands, 1999
- [144] D. J. Bohm and B. J. Hiley, “The de Broglie Pilot Wave Theory and the Further Development of New Insights Arising Out of It”, *Foundation of Physics*, Vol. 12, No. 10, 1982
- [145] Daniel Manzano : A short introduction to the Lindblad Master Equation. arXiv:1906.04478v3 [quant-ph] 5 Feb 2020
- [146] Sheldon Goldstein : Bohmian Mechanics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Copyright © 2006
- [147] H. Nikolic : Bohmian particle trajectories in relativistic bosonic quantum field theory. *Found.Phys.Lett.*17:363-380,2004 ; arXiv:quant-ph/0208185
- [148] H. Nikolic : Bohmian particle trajectories in relativistic fermionic quantum field theory. *Found.Phys.Lett.*18:123-138,2005 ; arXiv:quant-ph/0302152
- [149] P. Ghose, A. S. Majumdar, S. Guha, J. Sau : Bohmian trajectories for photons. arXiv:quant-ph/0102071v2 11 Oct 2001
- [150] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, Travis Norsen, Ward Struyve, Nino Zanghi : Can Bohmian mechanics be made relativistic? *Proc. R. Soc. A* 470, 20130699 (2014); arXiv:1307.1714 [quant-ph]
- [151] H. Nikolic : QFT as pilot-wave theory of particle creation and destruction. *Int.J.Mod.Phys.A*25:1477-1505,2010; arXiv:0904.2287 [hep-th]
- [152] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, James Taylor, Roderich Tumulka, Nino Zanghi : Quantum Mechanics in Multiply-Connected Spaces. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007) 2997-3031 ; arXiv:quant-ph/0506173
- [153] Francis Maleval : *Ontological Math*][Physics mirror between Noether and Planck. 2020 hal-02391730
- [154] Ghirardi, G.C., Rimini, A., and Weber, T. (1985) : A Model for a Unified Quantum Description of Macroscopic and Microscopic Systems. *Quantum Probability and Applications*, L. Accardi et al. (eds), Springer, Berlin.
- [155] Ghirardi, G.C., Rimini, A., and Weber, T. (1986) : Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Physical Review D.* 34: 470.
- [156] R. Penrose : Wavefunction Collapse As a Real Gravitational Effect. In A. Fokas, T.W.B. Kibble, A. Grigoriou, B. Zegarlinski (editors), *Mathematical Physics 2000*, pp. 266–282. London: Imperial College Press (2000)
- [157] Sandro Donadi, Kristian Piscicchia, Catalina Curceanu, Lajos Diósi, Matthias Laubenstein, Angelo Bassi : Underground test of gravity-related wave function collapse. arXiv:2111.13490v1 [quant-ph] 26 Nov 2021

- [158] Roger Penrose: Les ombres de l'esprit; à la recherche d'une science de la conscience. © 1995, InterEditions, Paris, pour la traduction française (éd. Originale: 1994, Oxford University Press)
- [159] Frédéric Élie : Méthode expérimentale et OVNI. Site fred.elie.free.fr, novembre 2003
- [160] Eccles John C. : Comment la conscience contrôle le cerveau - éd. Arthème Fayard, 1997
- [161] Jeffrey R. Reimers, Laura K. McKemmish, Ross H. McKenzie, Alan E. Mark, and Noel S. Hush : Weak, strong, and coherent regimes of Fröhlich condensation and their applications to terahertz medicine and quantum consciousness. PNAS, March 17, 2009, vol. 106, no. 11, 4219–4224 ; www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.0806273106
- [162] Herbert Fröhlich, 1968. Long range coherence and energy storage in biological systems. Int. J. Quantum Chemistry 2, 641-649
- [163] Stuart Hameroff : Quantum computation in brain microtubules? The Penrose-Hameroff Orch- OR model of consciousness. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A (1998) 356, 1869-1896
- [164] Laura K. McKemmish, Jeffrey R. Reimers, Ross H. McKenzie, Alan E. Mark, and Noel S. Hush : Penrose-Hameroff orchestrated objective-reduction proposal for human consciousness is not biologically feasible. Physical Review E 80, 021912 (2009)
- [165] Pokorny, J. (2004): Excitation of vibrations in microtubules in living cells. Bioelectrochemistry 63:321-326
- [166] Freeman, W., & Vitiello, G. 2005. Nonlinear brain dynamics as macroscopic manifestation of underlying many-body field dynamics. arXiv:q-bio/ 0511037v1
- [167] Asim Islam : Many-Body Quantum Field Models for Nonlinear Brain Dynamics. Journal of Cognitive Science 21-3:385-428, 2020.
Disponible sur ResearchGate <https://www.researchgate.net/publication/344703844>
- [168] Walter J. Freeman and Giuseppe Vitiello : The dissipative quantum model of brain and laboratory observations. Electr. J. Theor. Phys. 4, N. 15 (2007) 1-18
- [169] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_mind
- [170] Sisir Roy, Rodolfo Llinás : Relevance of quantum mechanics on some aspects of ion channel function. ScienceDirect, C. R. Biologies 332 (2009) 517–522
- [171] G. Bernroider, S. Roy : Quantum entanglement of K⁺ ions, multiple channel states, and the role of noise in the brain, SPIE 5841 (2005) 205–213
- [172] Turing, Alan M. : Computing Machinery and Intelligence. Mind 59 (236) : 433-460. Trad. 1995 "*Les ordinateurs et l'intelligence*" in *La machine de Turing*. Paris: Seuil, 133-175
- [173] Nick Bostrom : Super intelligence. Dunod, 2017, pour la traduction française. Edition originale publiée en 2014 (Grande Bretagne) par Oxford University Press sous le titre "*Superintelligence, Paths, Dangers, Strategies*"
- [174] Rachid Guerraoui, Lê Nguyễn Hoàng : Turing à la plage, l'intelligence artificielle dans un transat. Dunod, 2020

- [175] Edward Nelson : Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics. Physical Review, Volume 150, number 4 (28 october 1966), 1079-1085
- [176] Wei-An Zheng et Paul-André Meyer: Quelques résultats de « mécanique stochastique ». Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 223-244. Numdam <http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__223_0>. © Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984
- [177] Folkert Kuipers : Stochastic Mechanics and the Unification of Quantum Mechanics with Brownian Motion. SpringerBriefs in Physics, Springer (2023), sur arXiv:2301.05467v3 [quant-ph] 3 Jun 2023
- [178] Mark Davidson : A Dynamical Theory of Markovian Diffusion. Physics 96A (1979) 465–489. © North-Holland Publishing Co. Disponible sur arXiv:quant-ph/0110050v1
- [179] Wikipedia (en) : Stochastic Quantum Mechanics. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stochastic_quantum_mechanics&oldid=1193591500
- [180] Propagation d'une particule dans un champ de pesanteur.
Lien: <http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france/1992-93/15-12-92/15-12-92.pdf>
- [181] Daniel M. Greenberger and Albert W. Overhauser : The Role of Gravity in Quantum Theory. Scientific American 242, 54, © 1980 SCIENTIFIC AMERICAN, INC
- [182] Pascal Szriftgiser : Cavité gravitationnelle et optique atomique temporelle. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1996. Français. NNT : . tel-00011912
- [183] Nick Huggett, Niels Linnemann, Mike D. Schneider : Quantum gravity in a laboratory? arXiv:2205.09013v1 [quant-ph] 18 May 2022
- [184] B. B. Mandelbrot : Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Flammarion, Paris (1975)
- [185] Dobrijevic Michel et Billebaud Françoise : Introduction à la théorie des systèmes ; applications au système Terre – Dunod, juillet 2023
- [186] Cotsaftis Michel : comportement et contrôle des systèmes complexes - Diderot éd. 1997
- [187] Alex Bellos : Alex et la magie des nombres, Un nouveau voyage au pays des mathématiques – Flammarion 2019, Champs
- [188] Hervé Lehning : Toutes les mathématiques du monde – Flammarion 2017, Champs
- [189] Prigogine Ilya : Les lois du chaos - Flammarion, 1994
- [190] Turing Alan, Girard Jean-Yves: La machine de Turing – éditions du Seuil 1995
- [191] Frédéric Élie : Temps série, temps parallèle et... conscience - site <http://fred.elie.free.fr>, juillet 2011
- [192] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet: Physique statistique – Hermann 2001
- [193] Frédéric Élie : Du processus physique au signifiant, La signification émerge-t-elle des processus physiques et biologiques ? - site <http://fred.elie.free.fr>, édité sur le site en octobre 2015
- [194] Spataru Alexandru: Fondements de la théorie de la transmission de l'information – Presses Polytechniques Romandes 1987