



Frédéric Elie on  
ResearchGate

## Chapelet de gouttes sur un fil horizontal : instabilité de Plateau-Rayleigh

Frédéric Elie

avril 2017

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

CopyrightFrance.com

**La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.**

Abstract : Après un épisode de pluie, sur les fils d'un étendoir pour le séchage du linge, des perles de goutte d'eau, assez régulièrement espacées, s'étaient formées. Évidemment, ce n'était pas la première fois que j'observais cela, mais cette fois-ci, à partir de cette observation si banale que personne n'y attache le moindre intérêt, j'ai voulu voir une relation avec les propriétés de mouillage et de tension superficielle de liquide, sous forme de film mince, sur un support solide (fil, câble, ...).

Cette « petite » observation est l'occasion d'illustrer ce que j'ai toujours tenté de démontrer : se poser des questions sur des faits observés jugés élémentaires et quotidiens, ouvre la voie vers l'esprit de la méthode expérimentale. Se pencher, par saine curiosité scientifique, sur la moindre « peccadille » observable ouvre souvent une passerelle vers des tentatives de compréhension de la nature faisant appel à des modèles, au final, assez sophistiqués. Et l'on s'aperçoit, de proche en proche, que ce cheminement nous permet de mettre en relation les grandes bases et les concepts fondamentaux de la méthode expérimentale, à la source de toute science rationnelle ! Oui, des perles d'eau sur un fil peuvent nous mener à l'universel... Dans cette perspective, sans reprendre les idées que j'ai développées par ailleurs dans ce site, et qui sont d'ordre épistémologique, je dirais volontiers ceci : la plupart du temps, nos échanges, nos communications inter-humaines, relèvent de l'interprétation (venant de nous-même ou à propos des autres). Interpréter est souvent source de malentendus, et c'est sans doute à cause de cela que, en définitive, on peut se sentir « isolé », replié dans notre « moi ». A l'inverse, discuter et échanger sur les faits avec à la fois la rigueur expérimentale et l'ouverture qu'offre le Principe d'Objectivité, à propos des « moindres » observations, offrent la source d'une véritable relation et échange, même si les modèles théoriques font aussi appel inévitablement à de l'interprétation, pourvu que celle-ci soit maîtrisée et réfutable. Mais, en général, cette possibilité est peu appréciée car on la juge un peu « inhumaine », peu « chaleureuse », sans émotion, comme si ce qui devait être véritablement humain devait reposer exclusivement sur l'interprétation et l'émotionnel qui s'alimentent et s'amplifient mutuellement, pour le meilleur et pour le pire. Et pourtant, que d'émotions quand une observation, d'un fait même d'apparence élémentaire, entre dans le champ d'une cohérence scientifique ! J'y vois même là une source pour cultiver notre sensibilité : l'observation patiente des « petites choses », des « objets fragiles » (P-G. De Gennes) éduque à coup sûr notre faculté à ressentir et à nous émouvoir...

Mais après cette digression philosophique, qui accompagne l'esprit de tout mon site, revenons à l'observation des perles d'eau sur les fils de l'étendoir :

Spontanément, je me suis dit que ce chapelet de gouttes sur le fil pouvait se comprendre par l'instabilité de Plateau-Rayleigh, mais je me suis ravisé parce que les gouttes d'eau étaient pendantes et non

axisymétriques, comme des perles. A l'origine, l'action du poids des gouttes prend le dessus sur les effets de tension superficielle : on serait donc plutôt dans une instabilité de Rayleigh-Taylor. Pourtant, en y regardant de plus près, les distances entre gouttes, ou longueur d'onde, sont plutôt proches de celles que l'on obtiendrait en instabilité de Plateau-Rayleigh où seule la capillarité intervient. S'agit-il alors d'une instabilité initiale de Plateau-Rayleigh qui donnerait à court terme des gouttes dont la symétrie est brisée sous l'action de leurs poids, mais tout en conservant la longueur d'onde initiale ? D'autant que l'on a affaire à des câbles assez épais (3mm) ?

Aussi, j'ai cherché à reproduire l'expérience du chapelet de gouttes axisymétriques avec de l'huile d'olive sur un fil plus mince : le résultat obtenu est assez satisfaisant, les critères de longueur d'onde restant compatibles avec l'approche théorique de l'instabilité de Plateau-Rayleigh.

## SOMMAIRE

- 1 – Introduction : à la base, question de l'écoulement d'un liquide en film mince
- 2 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d'un film liquide autour d'une fibre rigide horizontale
- 3 – Croissance des perturbations et sélection d'un mode d'instabilité parmi une infinité d'autres possibles
- 4 – Manip, et comparaison avec le modèle théorique



## 1 – Introduction : à la base, question de l'écoulement d'un liquide en film mince

Qu'il s'agisse de gouttes pendantes sous un fil horizontal, ou de perles axisymétriques de liquide réparties uniformément le long d'un fil horizontal, à la base c'est la question de l'écoulement d'un liquide en film mince sur ou autour d'un fil solide horizontal qui est posée. La différence provient des contributions relatives des effets de gravité et des effets de tension de surface (capillarité), le rapport de ces effets formant le nombre sans dimension, nombre de Bond (que l'on détaillera plus loin).

Mais pourquoi un écoulement apparaît-il et conduit assez rapidement à la formation de structures périodiques le long du support (gouttes pendantes ou bien perles axisymétriques) ?

La réponse de principe est la suivante : un film liquide au contact avec une surface, avec lequel il interagit par des processus de mouillage plus ou moins importants, minimise son énergie d'interaction (condition d'équilibre stable ou métastable) ; la transition entre l'état initial (film mince homogène) et la nouvelle configuration d'équilibre (énergie d'interaction minimale) se traduit par l'apparition d'instabilités qui se manifestent par des phénomènes ondulatoires (modes de bifurcation), en l'occurrence, ici, la formation de structures régulières équidistantes par une longueur d'onde sélectionnée parmi une infinité possible d'autres (on verra plus loin en quoi consiste cette sélection) <sup>(1)</sup>.

Dans tout ce qui suit, on suppose connues les notions de tension superficielle, de longueur

1 L'évolution spontanée d'un système vers un nouvel état d'équilibre qui correspond à minimiser son énergie, lorsque le système est physiquement isolé, est une des versions quantitatives de l'énoncé du principe d'Objectivité en méthode expérimentale, dont les conséquences philosophiques et méthodologiques en science sont importantes. Voir à ce sujet :

- Mesurer et Agir – par Frédéric Élie, 24 mai 2000 (188 pages), réédité en novembre 2016, février 2017, site <http://fred.elie.free.fr>

- Méthode expérimentale - par Frédéric Élie, mars 2005, modifié le 30 décembre 2005 et mars 2009, site <http://fred.elie.free.fr>

capillaire, de dynamique des fluides visqueux, de règles de mouillage, etc. ; se référer sinon aux articles du site qui les introduisent <sup>(2)</sup>.

La photo de la figure 1 ci-après montre ce que j'ai observé sur les fils d'étendoir mouillés après un épisode pluvieux.



Figure 1 : gouttes d'eau pendantes régulièrement espacées sur les fils d'un étendoir après mouillage par la pluie : sur un fil de diamètre  $2b = 2 \text{ mm}$ , une longueur d'onde est d'environ  $\lambda = 5 \text{ à } 8 \text{ mm}$

On pourrait se dire (comme je l'ai fait) : voici un bel exemple de chapelet de gouttes d'eau qui répond à l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Malheureusement, l'instabilité observée à la figure 1 fait intervenir la gravité (le poids des gouttes) par l'intermédiaire de la longueur capillaire de l'eau  $\kappa^{-1}$  et non pas uniquement la tension superficielle comme c'est le cas en instabilité de Plateau-Rayleigh. Pour l'eau, la longueur capillaire vaut environ : 2,7 mm à 20°C. Or les gouttes sont pendantes, en-dessous de la fibre solide : par conséquent, la gravité intervient aussi et rompt le caractère axisymétrique des gouttes (perles), qui s'observe lorsque seule intervient la capillarité. Lorsque la gravité intervient, on est plutôt proche de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (qui fait l'objet d'un autre article de notre site) : les critères de sélection des modes de transition, dans cette instabilité, font intervenir directement la longueur capillaire, et l'on démontre que dans ce cas la longueur d'onde entre les gouttes devrait être de l'ordre du centimètre. Ce n'est pas ce qui est observé sur les fils de l'étendoir : d'après la figure 1, la longueur d'onde  $\lambda$  est de l'ordre de 5 mm ! Cette valeur la rapproche plutôt de celles prévues par l'instabilité de Plateau-Rayleigh où seule intervient la capillarité, à épaisseur de fibre identique. Alors, ce que montre la figure 1 pour l'eau, est-ce du Rayleigh-Taylor ou bien du Plateau-Rayleigh ?

Ni l'un ni l'autre, diraient certains, voici une réponse facile ! Mon *interprétation* (eh oui!) est alors celle-ci : le film d'eau qui s'est formé initialement sur les fils a dû fournir sur un court laps de temps des perles axisymétriques par effet d'instabilité de Plateau-Rayleigh, puis la gravité a dominé les effets capillaires d'autant que l'eau, issue de la pluie, s'est déposée sur le fil avec la force de pesanteur (et non par un mouillage sous conditions maîtrisées).

Quoi qu'il en soit, effet gravitaire ou bien capillaire, dans les deux cas on affaire au problème de l'écoulement d'un film liquide mince sur un substrat solide (fil, fibre...) soumis à un régime transitoire de recherche d'un nouvel équilibre où l'énergie doit être minimalisée.

2 Voir :

- Bulles et ballons - par Frédéric Élie, 12/06/2004, site <http://fred.elie.free.fr>
- Étalement des gouttes sur une surface plane : loi de Tanner - par Frédéric Élie, 25 mars 2017, site <http://fred.elie.free.fr>
- Effets capillaires des liquides : TP sur la longueur capillaire – par Frédéric Élie, 9 janvier 2017, site <http://fred.elie.free.fr>
- Ondes de surface des liquides - par Frédéric Élie, février 2009, site <http://fred.elie.free.fr>
- Vidange de réservoir - par Frédéric Élie, 27/02/2004, site <http://fred.elie.free.fr>

Pour toute la suite de notre article, on s'appuie sur la figure 2 qui donne la géométrie et les notations du problème.

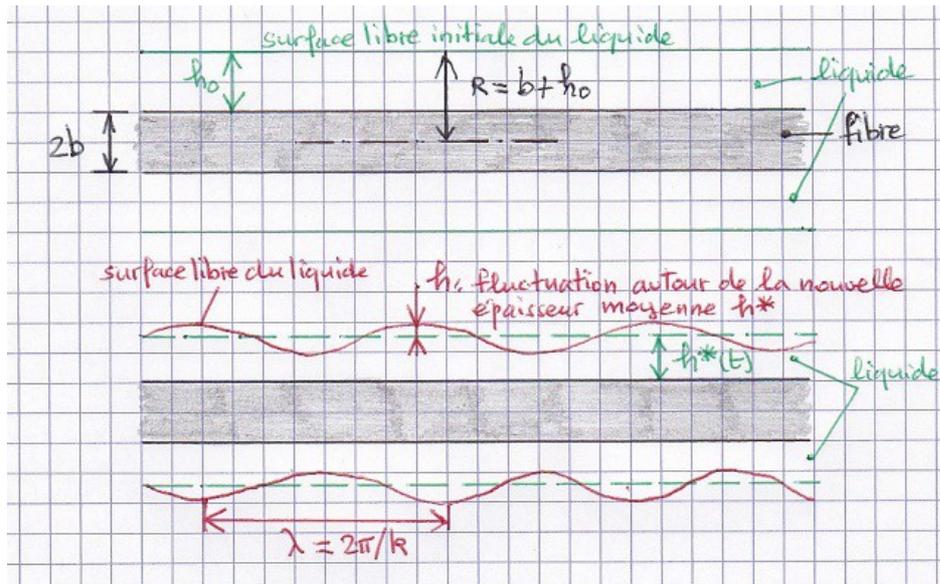


Figure 2 : notations et géométrie du problème d'écoulement d'un film mince liquide sur un fil solide

La fibre est supposée parfaitement rigide et de section circulaire, dans la direction axiale  $Ox$  ; son diamètre est  $2b$ . Sur sa surface, initialement, est disposé un film liquide, supposé parfaitement axisymétrique et de section circulaire : son épaisseur est  $h_0$ . Le rayon total fibre+film est donc  $R = b + h_0$ . C'est une donnée initiale du problème, mais difficile à fixer car  $h_0$  est difficile à mesurer puisque rapidement instable.

Le film liquide est ensuite soumis, spontanément, à un écoulement suivant  $Ox$  qui le fait se déformer et donner une structure périodique de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ,  $k$  étant le nombre d'onde correspondant.

Le moteur de l'écoulement est le gradient de pression suivant  $Ox$  : sur un tronçon de longueur arbitraire  $L$  une différence de pression  $\Delta p$  apparaît :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$$

ce gradient peut être dû à une force externe (gravité) ou bien de capillarité (ce qui est l'hypothèse adoptée en instabilité de Plateau-Rayleigh). L'écoulement résulte alors d'un équilibre dynamique entre le gradient de pression (ou force motrice par unité de volume  $f$ ) et les contraintes dues à la viscosité du liquide. Soit  $Oz$  la direction radiale, perpendiculaire à l'axe  $Ox$ , et  $v(z)$  le profil de vitesse de l'écoulement en fonction de la distance  $z$  à la paroi ; la contrainte due à la viscosité est alors :  $\eta \frac{\partial v}{\partial z}$  où  $\eta$  est la viscosité dynamique du liquide (en Pa.s).

L'équation de l'écoulement est issue des équations de Navier-Stokes sans les termes inertiels et en 1D :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

avec pour conditions aux limites :

- non glissement sur la paroi solide :  $z = 0 \rightarrow v(0) = 0$
- à l'interface liquide:air (surface libre) continuité de la contrainte :  $z = H = h^* + h \rightarrow$  vitesse maximale à la surface libre  $\eta \partial v(H) / \partial z = 0$ , où  $H(x)$  est l'épaisseur du film en  $x$ , c'est donc la somme algébrique de l'épaisseur moyenne  $h^*(t)$  du film et de sa fluctuation  $h(t)$ .

Soit  $V$  la vitesse moyenne du liquide, en ordre de grandeur (1) devient :

$$V \approx \frac{H^2}{3\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

Le débit, à travers une section du film, par unité de largeur (suivant Oz) du film est alors approximativement :  $Q = HV$  soit :

$$Q \approx \frac{H^3}{3\eta} \frac{\Delta p}{L} \quad \text{avec à la surface libre : } v(H) = \frac{3}{2}V$$

Comme le gradient de pression est égal à la force volumique :  $f = -\frac{\partial p}{\partial x}$  dans la direction Ox, le débit prend la forme de la **relation de Poiseuille** :

$$Q = \frac{H^3}{3\eta} f \quad (2)$$

*Preuve de (2) :*

Il faut déterminer le profil de vitesse  $v(z)$ . Pour cela (1) se réécrit :

$$\frac{1}{\eta} f = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\eta} f z + cste$$

La constante de cette première intégration est fixée par la condition de continuité de la contrainte à la surface libre, vue plus haut :

$$z = H \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(H) = 0 \rightarrow cste = -\frac{f}{\eta} H \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\eta} f (z - H)$$

Une nouvelle intégration donne :

$$v(x, z, t) = \frac{1}{\eta} f \left( \frac{1}{2} z^2 - H z \right) + cste$$

La nouvelle constante d'intégration est fixée par la condition de non glissement à la paroi, vue plus haut :  $z = 0 \rightarrow v(0) = 0 \rightarrow cste = 0$ .

On obtient donc le profil de Poiseuille pour la vitesse d'écoulement à une abscisse  $x$  du film :

$$v(x, z, t) = \frac{f}{\eta} \left( \frac{z^2}{2} - H z \right)$$

Noter que  $f$  dépend de  $x$  et que  $H$  dépend de  $x$  et de  $t$ . La vitesse moyenne sur l'épaisseur locale en  $x$  du film est alors égale à

$$V = \frac{-1}{H} \int_0^H v(x, z, t) dz$$

avec le profil  $v$  donné précédemment, cette intégrale devient :  $V = \frac{H^2 f}{3\eta}$  et le débit par unité

de largeur du film  $Q = HV$  est  $Q = \frac{H^3 f}{3\eta}$  qui est (2). A la surface libre  $v_{\max} = v(H) = 3/2 V$ .

*CQFD pour (2).*

## 2 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d'un film liquide autour d'une fibre rigide horizontale

Dans l'instabilité de Plateau-Rayleigh, l'axisymétrie des structures périodiques le long de la fibre est conservée. A partir d'une configuration initiale où le film recouvre la fibre de manière homogène, des ondulations se forment assez rapidement, croissent et cessent sous forme d'un chapelet de gouttelettes, ou perles <sup>(3)</sup>. Bien sûr, il existe des conditions qui permettent cette évolution (critère de sélection des modes d'ondulation) que nous allons présenter : selon les forces en présence et la géométrie, on n'obtient pas nécessairement une instabilité sous formes d'ondulations avec des perles axisymétriques.

Dans la configuration de structures périodiques sous forme de perles (axisymétriques, donc) il y a autant de liquide au-dessus qu'en-dessous de la fibre rigide. Cette situation est très différente de celle de l'instabilité de Rayleigh-Taylor où les gouttes sont pendantes tout en conservant une structure horizontale 2D périodique. Examinons alors les conditions où l'une ou l'autre des configurations est privilégiée.

Pour cela, on considère la forme de la pression dans le film liquide : c'est la somme de la pression hydrostatique (due à la pesanteur, donc) et de la pression de Laplace (due aux forces capillaires) :

$$p = \rho g R + \frac{\gamma}{R}$$

avec  $R = b + h_0$  et  $\gamma$  tension superficielle du liquide (en N/m).  $\rho$  est la masse volumique du liquide et  $g$  l'accélération de la pesanteur. L'importance relative de la contribution des forces de pesanteur et de capillarité est évaluée par le **nombre de Bond** :

$$Bo = \frac{\rho g R}{\gamma / R} = \frac{\rho g}{\gamma} R^2 = \left( \frac{R}{\kappa^{-1}} \right)^2 \quad (3)$$

où  $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$  est la longueur capillaire.

Lorsque  $Bo \ll 1$ , la gravité devient négligeable devant les forces capillaires : cela arrive lorsque  $R$  est petit (fibre très mince) et/ou lorsque la tension superficielle  $\gamma$  du liquide est élevée. Dans ce cas, le seul moteur de l'instabilité est la tension superficielle du liquide.

Au cours du temps la surface libre du liquide se déforme : de son épaisseur initiale  $h_0$ , la nouvelle épaisseur moyenne est  $h^*(t)$  au bout d'un temps  $t$ . Si  $h(t)$  est la fluctuation de l'épaisseur du film autour de l'épaisseur moyenne  $h^*$ , alors l'épaisseur du film en l'abscisse  $x$  et au temps  $t$  prend la forme ondulatoire :

$$H(x, t) = h^*(t) + h(t) \cos k x \quad (4)$$

On suppose que le volume du liquide se conserve, sur une longueur correspondant à la longueur d'onde, entre l'état initial où l'épaisseur était  $h_0$  et l'état à l'instant  $t$  où l'épaisseur moyenne du film est  $h^*(t)$ . Avec cette hypothèse, on montre ci-après que l'épaisseur moyenne du film à l'instant  $t$  est reliée à la fluctuation  $h(t)$  par :

$$h^* = h_0 - \frac{h^2(t)}{4R} \quad (5)$$

*Preuve de (5) :*

Volume du liquide sur un tronçon de film de longueur  $L$ , à l'état initial :

---

3 J. Plateau : Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires – Gauthier-Villars, 1873

$$U = 4\pi(R^2 - b^2)L = 4\pi((b + h_0)^2 - b^2)L$$

ce volume se conserve dans le même tronçon de longueur L à l'instant t où l'épaisseur du film est devenue H(t) :

$$U = \int_0^L 4\pi((b + H)^2 - b^2) dx = \int_0^L 4\pi(H^2 + 2bH) dx$$

en remplaçant H par (4) :

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L 4\pi((h^* + h \cos kx)^2 + 2b(h^* + h \cos kx)) dx \\ &= 4\pi h^{*2}L + 4\pi h^2 \frac{1}{2k} (kL + \sin kL \cos kL) + 8\pi h^* h \frac{1}{k} \sin kL + 8\pi b h^* L + 8\pi b h \frac{1}{k} \sin kL \end{aligned}$$

comme on se place sur une longueur d'onde,  $L = n\lambda = n2\pi/k$  (n entier quelconque)  $\rightarrow \sin kL = 0$  et l'expression précédente se simplifie en :

$$U = 4\pi(h^{*2} + \frac{1}{2}h^2 + 2bh^*)\lambda$$

qui est aussi égale à  $U = 4\pi(R^2 - b^2)\lambda$ . L'égalité des deux expressions conduit alors à :

$$h^{*2} + \frac{1}{2}h^2 + 2bh^* = R^2 - b^2$$

soit :  $h^* = h_0 - \frac{h^2}{4R}$  qui est (5).

*CQFD pour (5).*

D'un point de vue énergétique, l'énergie de surface libre modulée sur une longueur d'onde est :

$$E(H) = \int_0^\lambda 2\pi(b + H)\gamma ds$$

où ds est l'élément d'arc de la surface suivant Ox :

$$ds \approx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dH}{dx}\right)^2\right) dx$$

Or l'énergie de surface libre du cylindre liquide initial sur une longueur d'onde est :

$$E(h_0) = 2\pi(b + h_0)\gamma\lambda$$

La variation d'énergie entre l'état initial et la nouvelle surface libre, donc entre  $t=0$  et  $t$ , est alors :

$$\Delta E = E(H) - E(h_0)$$

soit :

$$\Delta E \approx \frac{1}{4}\gamma \frac{h^2}{R} 2\pi\lambda(k^2 R^2 - 1) \quad (6)$$

La relation (6) montre alors que l'énergie diminue ( $\Delta E < 0$ ), donc évolution vers une nouvelle stabilité, si :  $k^2 R^2 - 1 < 0$ , soit :

$$\lambda > 2\pi R \quad (7)$$

autrement dit, la plus petite longueur d'onde correspondant à une instabilité est  $\lambda_m = 2\pi R$ . (7) est la **condition de Plateau** pour l'apparition des modes d'instabilité du film.

### 3 – Croissance des perturbations et sélection d'un mode d'instabilité parmi une infinité d'autres possibles

la condition (7) laisserait conclure que, dès lors qu'une onde a une longueur d'onde supérieure au périmètre du film liquide, elle peut être observée ; mais alors, dans ce cas, une infinité d'ondes devrait l'être. Ce n'est pas ce qui est observé : il n'y a pas de superposition infinie (ou du moins en grand nombre) de modes de propagation des instabilités ; cette superposition ne permettrait pas d'observer un arrangement périodique et régulier des structures liquides.

On doit donc se demander comment, d'une infinité de modes possibles, un seul puisse être observable, donc sélectionné ?

Pour répondre à cette question, il nous faut d'abord déterminer la vitesse de croissance des perturbations depuis l'état d'équilibre instable initial. Nous allons montrer ci-après que, à partir des relations déjà vues (4), (5), (2), ainsi que la condition de conservation du débit entre  $x$  et  $x+dx$  :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8)$$

et la courbure du film liquide :

$$C(x) = \frac{1}{b+H} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (9)$$

la vitesse de croissance de la perturbation  $dh/dt$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = h \frac{\gamma h_0^3}{3\eta b^2} k^2 (1 - k^2 b^2) \quad (10)$$

puis nous utiliserons cette relation (10) pour tirer un critère de développement de l'instabilité, et de sélection d'un mode de sa propagation.

*Preuve de (10) :*

La force volumique est  $\mathbf{f} = \mathbf{grad} p$  où l'on avait posé  $p = \gamma/R$  pour les forces de capillarité, on l'avait fait pour introduire le nombre de Bond. En fait, c'était pour comparer les forces de gravité et capillaires en ordre de grandeur, en se fondant sur le diamètre de l'ensemble film liquide + fibre. Mais, pour être plus exact, il faut remplacer  $1/R$  par la courbure locale du film, en tenant compte de ses convexités. C'est pourquoi la pression de Laplace, due à la tension de surface, doit plutôt s'écrire :  $p = \gamma C(x)$  où  $C(x)$  est la courbure donnée par (9) :

$$f = \frac{dp}{dx} = \gamma \frac{dC}{dx} = \gamma \left[ -\frac{1}{(b+H)^2} \frac{dH}{dx} - \frac{d^3 H}{dx^3} \right]$$

De (2) on tire donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{H^2}{\eta} f \frac{dH}{dx} + \frac{H^3}{3\eta} \frac{df}{dx}$$

et de (5) et (2) il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dh^*}{dt} + \frac{dh}{dt} \cos kx = -\frac{h}{2R} \frac{dh}{dt} + \frac{dh}{dt} \cos kx = \frac{dh}{dt} \left( \cos kx - \frac{h}{2R} \right)$$

De (4) on obtient :

$$\frac{dH}{dx} = -k h \sin kx, \quad \frac{d^2H}{dx^2} = -k^2 h \cos kx, \quad \frac{d^3H}{dx^3} = k^3 h \sin kx, \quad \frac{d^4H}{dx^4} = k^4 h \cos kx$$

De l'expression donnant  $f = dp/dx$  vue plus haut, on a :

$$\frac{df}{dx} = \gamma \left[ \frac{2}{(b+H)^3} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 - \frac{1}{(b+H)^2} \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{d^4H}{dx^4} \right]$$

par conséquent :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{H^2}{\eta} \gamma \left[ \frac{1}{(b+H)^2} \frac{dH}{dx} + \frac{d^3H}{dx^3} \right] \frac{dH}{dx} + \frac{H^3}{3\eta} \gamma \left[ \frac{2}{(b+H)^3} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 - \frac{1}{(b+H)^2} \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{d^4H}{dx^4} \right]$$

La perturbation est examinée sur une longueur d'onde  $x = \lambda$ , ce qui est suffisant puisqu'elle se reproduit suivant une périodicité spatiale. Les expressions précédentes se simplifient alors :

Pour  $x = \lambda$ , on a :  $\sin kx = 0$ ,  $\cos kx = 1$ ,  $dH/dx = 0$ ,  $d^2H/dx^2 = -k^2h$ ,  $d^3H/dx^3 = 0$ ,  $d^4H/dx^4 = k^4h$ , ainsi que :

$$\frac{df}{dx}(x=\lambda) = \gamma \left[ \frac{k^2 h}{(b+H)^2} - k^4 h \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x=\lambda) = \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{dh}{dt}$$

d'où :  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x=\lambda) = \frac{\gamma H^3}{3\eta} \left[ \frac{1}{(b+H)^2} k^2 h - k^4 h \right]$  ; comme en  $x = \lambda$ , on a, d'après (4) :

$$H(x=\lambda) = h^* + h \cos kx(x=\lambda) = h^* + h = h_0 - \frac{h^2}{4R} + h$$

alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x=\lambda) = \frac{\partial H}{\partial t}(x=\lambda) \rightarrow \frac{\gamma H^3}{3\eta} k^2 h \left( \frac{1}{(b+H)^2} - k^2 \right) = \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{dh}{dt}$$

Avec les approximations :  $h/R \ll 1$ ,  $H/b \ll 1$ ,  $h/h_0 \ll 1$ , l'équation précédente se simplifie en :

$$\frac{dh}{dt} = h \frac{\gamma h_0^3}{3\eta b^2} k^2 (1 - k^2 b^2)$$

qui est (10).

CQFD pour (10).

On déduit de (10) le critère de développement de l'instabilité :  $dh/dt > 0$  si

$$k b < 1 \quad (11)$$

qui est (7), avec  $k = 2\pi/\lambda < 1/R = 1/(h_0+b) \approx 1/b$  puisque  $h_0/b \ll 1$ .

Parmi tous les modes possibles vérifiant (11), un seul est sélectionné pour lequel le temps caractéristique de développement de l'instabilité est minimal. En effet, (10) s'écrit aussi :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h}{T}$$

où, par identification, le temps caractéristique de développement de l'instabilité (ou constante de temps) est :

$$T = \frac{3\eta b^2}{\gamma h_0^3} \frac{1}{k^2(1-k^2b^2)} \quad (12)$$

Le mode sélectionné sera celui pour lequel T est minimal, soit :  $dT/dk = 0 \rightarrow$

$$\frac{d}{dk} \left[ \frac{1}{k^2(1-k^2b^2)} \right] = 0$$

dont la solution est  $bk = \frac{1}{\sqrt{2}}$  soit pour une longueur d'onde égale à :

$$\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{2}b \quad (13)$$

Cette longueur d'onde est unique et ne dépend que du diamètre de la fibre, d'où la régularité de structures sous forme de perles.

A cette longueur d'onde correspond dans (12) la durée de développement de l'instabilité : en remplaçant (13) dans (12) on obtient :

$$T_{\min} = 12 \frac{\eta b^4}{\gamma h_0^3} \quad (14)$$

L'instabilité se développe d'autant plus rapidement que le liquide est peu visqueux, très mouillant, et que le film initial est épais et la fibre mince.

Exemple :  $h_0 = 10 \mu\text{m} \rightarrow T_{\min} =$  quelques dizaines de secondes.

#### 4 – Manip, et comparaison avec le modèle théorique

D'abord, revenons à l'observation des gouttes pesantes sur le fil de l'étendoir (figure 1). Le critère de sélection du mode (13) est-il vérifié, sachant que le diamètre des fils est  $2b = 2 \text{ mm}$  ? La longueur d'onde devrait alors être :  $\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{2} \times 1(\text{mm}) = 9 \text{ mm}$ , or on a observé une longueur d'onde d'environ 5 à 8 mm. Vues les erreurs de mesure et les irrégularités du support fibre (propreté, fil légèrement incurvé...) le constat pourrait être proche de l'instabilité de Plateau-Rayleigh.

On vérifie alors quand même si la longueur d'onde observée correspond à une instabilité de Rayleigh-Taylor ? Si c'est le cas, on montre que le critère de sélection du mode est, cette fois :

$$\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{2} \kappa^{-1} ; \text{ pour l'eau, la longueur capillaire est d'environ } \kappa^{-1} = 2,7 \text{ mm, donc}$$

$$\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{2} \times 2,7(\text{mm}) = 2,4 \text{ cm}, \text{ valeur encore plus grande que celle observée.}$$

La quasi régularité des gouttes pendantes observées pourrait alors être en grande partie due à l'instabilité de Plateau-Rayleigh ; on peut se demander si, juste après le moment de formation du chapelet de perles axisymétriques, le poids des gouttes n'est pas responsable de la rupture de la symétrie axiale, tandis que la longueur d'onde du mode d'instabilité de Plateau-Rayleigh serait maintenue pendant cette phase. A voir...

D'après (14) le temps de formation de la perturbation est inversement proportionnel à la tension superficielle  $\gamma$ . Donc si le liquide qui forme le film est obtenu par un mélange avec un surfactant, son  $\gamma$  diminue (effet du surfactant), donc on peut s'attendre à ce que les structures périodiques

soient longues à se former et que, l'évaporation aidant, il n'y ait plus suffisamment de liquide pour cela. De plus, un  $\gamma$  faible conduit à un nombre de Bond grand, donc à une contribution importante de la pesanteur. C'est ce que nous avons voulu voir dans cette 2e manip, en employant de l'eau savonneuse (figure 3). En effet, on n'observe pas grand chose : peu ou pas de régularité, très peu de gouttes ou de perles accrochées !



Figure 3 : essai de formation d'un chapelet de perles d'eau savonneuse : le dispositif employé est un fil en acier reposant sur les bords d'un récipient ; l'eau savonneuse est versée délicatement sur toute la longueur du fil (4).

Troisième et dernière observation : le liquide est de l'huile d'olive. Comme à la figure 3, on verse délicatement sur un fil d'acier reposant sur les bords d'un récipient l'huile d'olive sur toute la longueur : on observe d'assez belles perles régulières, de longueur d'onde 5 à 7 mm (fig.4).



Figure 4 : formation de perles axisymétriques avec de l'huile d'olive

Avec pour le fil  $b = 1$  mm, la relation (13) donnerait, comme longueur d'onde minimale sélectionnée,  $\lambda = 9$  mm en instabilité de Plateau-Rayleigh. En ordre de grandeur c'est assez satisfaisant avec ce qui est observé, compte tenu des irrégularités de la manip.

S'il s'agissait d'une instabilité où la pesanteur intervient, sachant que pour l'huile d'olive la longueur capillaire est  $\kappa^{-1} = 1,9$  mm, on devrait avoir selon le critère de Plateau-Rayleigh :

$$\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt{2} \times 1,9(\text{mm}) = 1,7\text{ cm} \quad \text{ce qui est loin d'être le cas.}$$

On peut donc estimer que, avec l'huile d'olive, nous avons pu former un chapelet de perles axisymétriques proche du mode d'instabilité de Plateau-Rayleigh.

4 On n'a pas procédé au trempage du fil dans le liquide, car le simple fait de retirer le fil entraîne les gouttes vers le bas, et beaucoup d'entre elles se détachent de la fibre.