



Frédéric Elie on
ResearchGate

Décantation et filtration: aspects hydrodynamiques

Frédéric Élie

mai 2014

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Abstract : La décantation et la filtration des liquides sont employées pour les débarrasser des phases solides en suspension. Cela peut être, par exemple, dans le but de traiter les eaux polluées avant rejet (cf. référence [7]). Les processus physiques mis en jeu permettent aussi de modéliser la formation de sédiments et le transfert de substances en suspension dans l'eau vers les fonds marins et les sols.

On se limitera dans le présent article aux aspects strictement hydrodynamiques des processus, c'est-à-dire sans tenir compte des réactions physicochimiques entre les substances (pour celles-là on se référera par exemple à [8]). Seul le transport de ces substances par l'écoulement est donc considéré.

SOMMAIRE

1 – Hydrodynamique de la décantation

2 – Filtration

Références

1 – Hydrodynamique de la décantation

Dans un effluent les particules en suspension sont:

- Soit des particules qui sédimentent séparément avec une vitesse de chute constante, donnée par la loi de Stokes (écoulement à faible nombre de Reynolds) (réf. [1], [2], [3]). C'est le cas de grains de sable qui coulent séparément dans l'eau car ils ne s'agglutinent pas les uns aux autres.
- Soit des particules qui s'agglutinent les unes aux autres le long de leur chute, formant ainsi une particule dont la masse augmente au cours du temps: il en résulte une vitesse variable au cours de la chute de ces particules dites « floconneuses ».

Le bilan des forces exercées sur ces particules est:

- a) la pesanteur;
- b) la poussée d'Archimède;
- c) la force de résistance due à la viscosité du fluide.

On se place, par hypothèse, dans la configuration d'un écoulement laminaire du fluide relativement à la particule.

La force de résistance (ou de traînée) a pour expression ([4]):

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho S U^2 \quad (1)$$

où: ρ masse volumique du fluide, S surface du maître-couple de la particule ($S = \pi D^2/4$ si la particule est une sphère de diamètre D , c'est la surface du disque formé par un grand cercle de la sphère), U vitesse relative du fluide par rapport à la particule, C_D coefficient de traînée. En régime laminaire, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds $Re = \frac{\rho U D}{\mu} < 2000$, où μ viscosité dynamique, C_D suit l'expression de Poiseuille (cas de la sphère):

$$C_D(Re) = \frac{24}{Re} \quad (2)$$

Remarque: En injectant (2) dans (1) on s'aperçoit que:

$$F_D = \frac{1}{2} \frac{24}{\rho U D} \mu \rho S U^2 = 12 \mu \pi \frac{D}{4} U$$

soit:

$$F_D = 3 \pi \mu D U \quad (3)$$

qui est la **formule de Stokes**. La démonstration de (2) est donnée en référence [5].

La poussée d'Archimède est (figure 1):

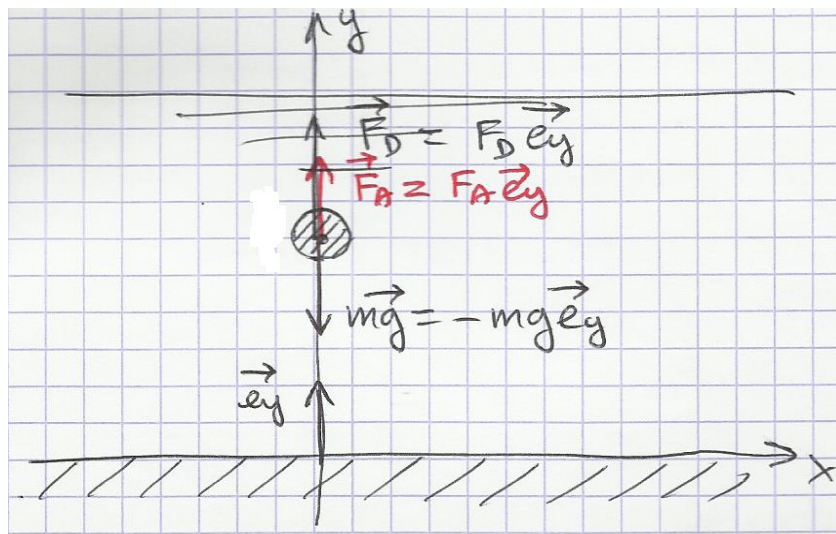


figure 1 – bilan des forces sur une particule sphérique dans l'eau

$$F_A = \rho g V = \rho g \pi \frac{D^3}{6}$$

L'équation du mouvement de la sphère est alors:

$$-m \frac{dU}{dt} = F_A + F_D - mg = \rho g \frac{\pi}{6} D^3 + 3 \pi \mu D U - \rho_s g \pi \frac{D^3}{6}$$

où ρ_s masse volumique de la particule,

$$-\rho_s \frac{\pi}{6} D^3 \frac{dU}{dt} = (\rho - \rho_s) g \frac{\pi}{6} D^3 + 3 \pi \mu D U$$

(U étant la vitesse relative de l'écoulement, - U est celle de la particule, d'où le signe « - »). La condition initiale étant $U = 0$ à $t = 0$, l'équation précédente a pour solution:

$$U(t) = (\rho - \rho_s)g \frac{D^2}{18\mu} \left[\exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_s D^2} t\right) - 1 \right] \quad (4)$$

Pour que la particule coule, il faut $F_A - mg < 0$ donc $\rho_s > \rho$, par conséquent $U(t)$ dans (4) est positive, ce qui veut dire que l'écoulement relatif va de bas en haut (donc la particule va de haut en bas).

Pour $t \rightarrow \infty$ (4) montre que cette vitesse atteint un maximum et devient constante (figure 2):

$$U_{max} = \frac{(\rho_s - \rho)g}{18\mu} D^2 \quad (5)$$

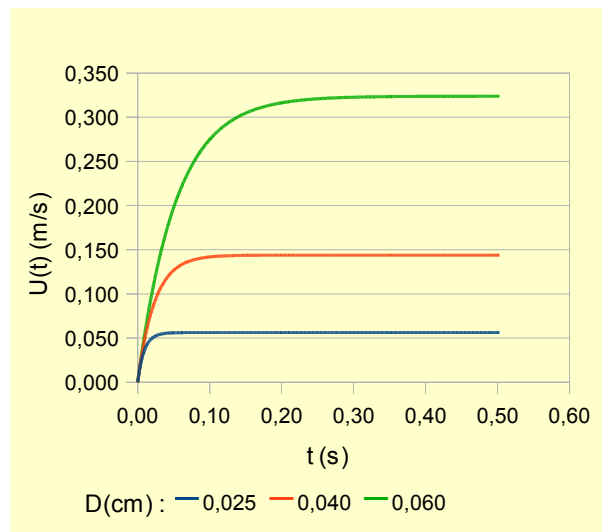


figure 2 – vitesse d'écoulement relatif autour d'une particule sphérique en chute dans l'eau, en fonction de son diamètre D (particule de silice, ou sable: $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$)

La vitesse maximale est plus faible et est atteinte au bout d'un temps plus court pour les petites particules que pour les grosses.

Remarque: Pour des nombres de Reynolds élevés (> 2000) la formule de Stokes (3) ne s'applique plus, donc la relation de Poiseuille (2) non plus. L'expression générale de la force de traînée (1) reste valable, mais $C_D(Re)$ est une fonction plus compliquée de Re . On doit donc réécrire l'équation du mouvement selon:

$$-m \frac{dU}{dt} = \rho g \frac{\pi}{6} D^3 + \frac{1}{8} C_D(Re) \rho \pi D^2 U^2 - \rho_s g \pi \frac{D^3}{6}$$

dont la solution est plus complexe que (4) puisque C_D dépend de U (via Re) selon une relation plus compliquée.

Remarque: Si le corps est lâché dans l'eau depuis l'extérieur la vitesse acquise dans l'eau est différente de (4): les effets d'entrée dans l'eau et l'accélération initiale doivent être pris en compte. Cette analyse a été effectuée sommairement dans [6].

Si la particule n'est pas sphérique, son coefficient de traînée C'_D est une correction du coefficient de traînée C_D de la sphère, par un facteur appelé **indice de sphéricité** ψ :

$$C'_D = \psi C_D$$

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas d'une particule unique coulant dans le liquide. Or les effluents contiennent un très grand nombre de particules solides: le mouvement de chacune d'elles est influencé par la concentration des particules dans l'effluent. Pour une concentration en volume des particules supérieure à 1% les vitesses de sédimentation doivent tenir compte de cette concentration.

Examinons déjà le comportement pour deux particules voisines descendant dans le liquide. Soient M et M' ces deux particules. Faisons les deux hypothèses suivantes (figure 3):

- Les deux particules, supposées sphériques, de diamètres D et D', ont une vitesse de chute identique lorsqu'elles sont situées à la même profondeur H: le régime étant supposé de Stokes, (5) donne:

$$(\rho_s - \rho) D^2 = (\rho'_s - \rho) D'^2$$

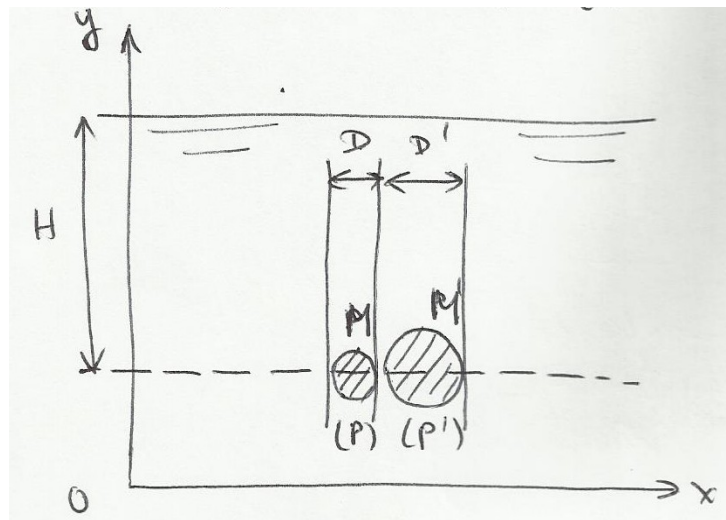


figure 3

- Les deux particules se déplacent verticalement dans des cylindres dont le diamètre est égal aux leurs: D et D'. A la profondeur H, la pression appliquée sur une particule, M par exemple, est la somme de la pression hydrostatique et des pressions des forces de pesanteur et d'Archimède:

$$P = \rho g H + \frac{m g - F_A}{S}$$

soit, S étant la surface de la base du cylindre $S = \pi D^2/4$, masse $m = \rho_s \pi D^3/6$ et force d'Archimède $F_A = \rho g \pi D^3/6$:

$$P = \rho g H + \frac{2}{3}(\rho_s - \rho) D g$$

et pour M':

$$P' = \rho g H + \frac{2}{3}(\rho'_s - \rho) D' g$$

S'il y a égalité des vitesses en H, alors on n'a pas égalité des pressions, en effet:

$$P - P' = \frac{2}{3} g [(\rho_s - \rho) D - (\rho'_s - \rho) D']$$

et comme: $(\rho_s - \rho) D = (\rho'_s - \rho) \frac{D'^2}{D}$ alors:

$$P - P' = \frac{2}{3} g (\rho'_s - \rho) D' \left(\frac{D'}{D} - 1 \right)$$

Comme $\rho'_s - \rho > 0$ on aura $P > P'$ si $D' > D$, et $P < P'$ si $D' < D$. Donc on n'a pas égalité des pressions pour deux particules de tailles différentes: à partir de H l'une sédimentera plus vite que l'autre.

L'extension de ce raisonnement heuristique à l'ensemble des particules en suspension conduit à une modification de la loi de Stokes (5) pour chacune d'elles: dans un liquide où la concentration en volume des particules en suspension est C, la vitesse de sédimentation d'une des particules de diamètre D est donnée par la formule de Stokes (5) corrigée d'un facteur K(C):

$$U_{max} = K(C) \frac{\rho_s - \rho}{18\mu} D^2 g \quad (6)$$

où l'on a supposé que les particules sont de nature identique, c'est-à-dire de même masse volumique ρ_s .

La concentration est, dans ce cas, le ratio entre le volume total V_s des particules solides, de masse totale M_s , et le volume de l'effluent V:

$$V_s = \frac{M_s}{\rho_s} \rightarrow C = \frac{M_s}{\rho_s V}$$

Par exemple 100 g de sable ($M_s = 100$ g) de densité $\rho_s = 2500$ kg/m³, dans un volume d'eau + sable de 1 litre, a une concentration $C = \frac{0,100}{2500 \times 0,001} = 0,04 = 4\%$

Des formules empiriques fournissent K(C) en fonction de C, parmi elles citons la **formule de Gaudin** (tableau 1):

$$K(C) = (1 - C^{2/3})(1 - C)(1 - \frac{5}{2}C) \quad (7)$$

C	K(C) calculé par (7)	K(C) expérimental
0,00	1,00	1,00
0,0025	0,97	0,97
0,005	0,95	0,94
0,01	0,92	0,89
0,02	0,86	0,83
0,04	0,76	0,73
0,08	0,60	0,51
0,16	0,36	0,29

tableau 1 – facteur correctif de la vitesse de sédimentation

Lorsque les particules sont trop fines pour décanter rapidement, il est nécessaire de les faire s'agglomérer entre elles pour obtenir des particules plus lourdes qui tomberont plus vite.

En effet, des particules telles que les argiles fines (diamètre 0,25 micron) ont une vitesse de sédimentation de seulement 0,0000047 cm/s, autant dire qu'elles restent en suspension dans

l'eau! A ces dimensions-là, il y a aussi d'autres phénomènes qui perturbent le processus de Stokes, comme les tensions superficielles entre la particule et l'eau, les forces de Van der Waals qui favorisent la cohésion des particules, et la répulsion électrostatique qui favorisent leur dispersion.

Le procédé qui permet l'agglomération des particules fines en particules plus lourdes s'appelle **floculation**. Pour arriver à cela, il faut une concentration minimale des particules fines pour qu'elles s'agglutinent spontanément entre elles. L'expérience montre que cette concentration minimale est de l'ordre de 500 mg/L.

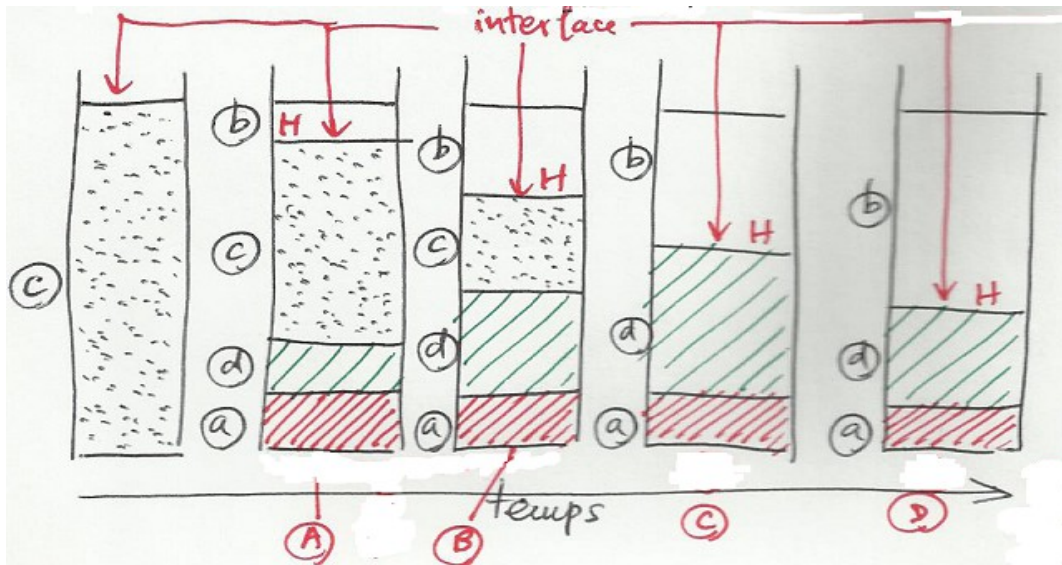


Figure 4 – phases de la décantation:

A: début de la décantation - **B**: décantation - **C**: transition - **D**: compression ou tassement

Les particules qui ont sédimenté s'accumulent au fond sous forme d'un **lit de boue**. La zone au-dessus du lit de boue est le **surageant**: c'est une zone de liquide clair. L'interface entre la zone claire et le mélange est repérée par la hauteur H . Cette hauteur diminue avec le temps par effet de sédimentation.

Une expérience, facile à faire, effectuée à l'aide d'un mélange dans une éprouvette permet de constater la formation au cours du temps de plusieurs couches stratifiées dans le mélange (figure 4).

Les courbes expérimentales, donnant l'évolution $H(t)$, établies par Kynch [9], mettent en évidence 5 états successifs du lit de boue (cf. figure 5):

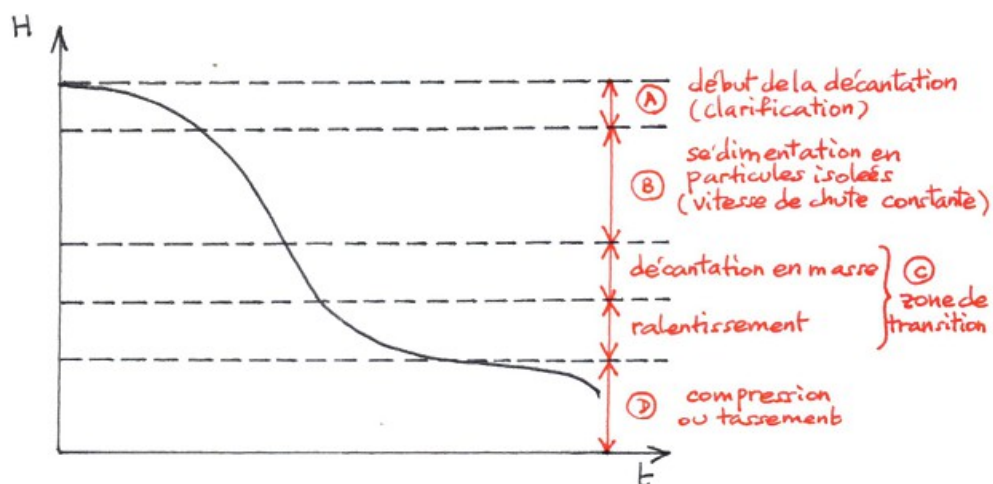


figure 5 – courbe de Kynch-Anderson (régimes de sédimentation)

A – Début de la décantation: au départ homogène, le mélange commence à se séparer en

une phase claire, située au-dessus de l'interface, et une phase concentrée. Dans cette étape, les particules en suspension ont commencé à couler, ce qui fait diminuer la concentration à la couche superficielle. La hauteur H de l'interface, initialement égale à la hauteur de la surface libre, commence à diminuer, mais de façon non linéaire au début.

B – Sédimentation en particules séparées: la hauteur H diminue linéairement avec le temps (la courbe est assimilable à un segment de droite): la vitesse de chute est constante car les particules chutent isolément et le phénomène peut être décrit par la relation (6). Dans cette phase, la concentration C n'est pas encore suffisamment importante pour provoquer la floculation.

C – Zone de transition, qui se subdivise en deux sous-étapes:

- **Décantation en masse** (ou « sédimentation troublée »): dans la phase mélangée, du fait de la diminution de H , et donc du volume du mélange, la concentration devient suffisamment élevée pour que les particules interagissent hydrodynamiquement pendant leurs chutes: la floculation commence à se produire, les particules grossissent et deviennent plus lourdes.
- **Ralentissement:** les particules, devenues plus volumineuses, se freinent mutuellement entraînant donc un ralentissement de la diminution de H .

D – Phase de compression (ou tassement): les particules solides agglomérées acquièrent un poids suffisant pour exercer une compression du milieu. Les particules se compactent et la concentration devient d'autant plus élevée. Il n'y a plus décantation mais tassement.

Pour expliquer ces comportements, tout au moins dans la partie linéaire (B) et la zone de décantation en masse (première partie de (C)), on peut faire appel à **la théorie des flux** initialement introduite par **Coe et Cleverger** (1916) et développée par Kynch (1952):

Si l'on considère une couche horizontale du décanteur, d'épaisseur élémentaire dy , le bilan de quantité de matière solide est égal aux variations du flux de matière dans l'espace (figure 6). En effet, soit dV_s le volume élémentaire des particules solides dans la couche. Leur masse totale est donc:

$$dm_s = \rho_s dV_s$$

Le volume de la couche étant dV , on a: $dV_s = \delta C dV$ où δC est la concentration en volume des particules solides dans le mélange pour la couche dy considérée, et comme $dV = S dy$ (S surface de la face horizontale de la couche), il vient: $dm_s = \rho_s S dy \delta C$

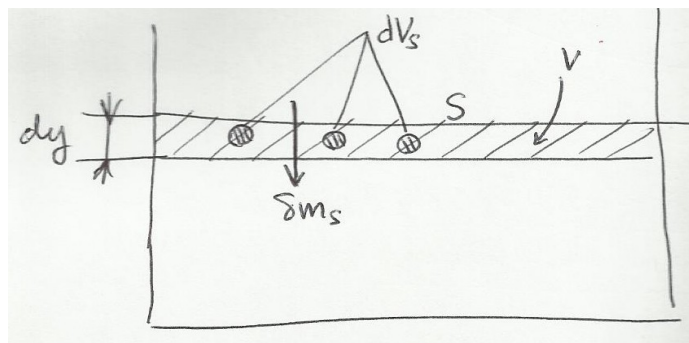


figure 6

Par ailleurs, soit $\delta \Phi$ la vitesse avec laquelle les particules solides transitent dans la couche: c'est par définition le flux. La quantité de matière solide traverse la couche pendant le temps dt , elle est donc égale à:

$$dm_s = \rho_s S \delta \Phi dt$$

En égalant les deux expressions de dm_s il vient donc:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (8)$$

Attention: Φ ne doit pas être confondu avec la vitesse de sédimentation U , car le flux caractérise le mouvement collectif de particules à travers une couche du mélange. En revanche, la théorie du flux postule que le transfert des solides est directement proportionnel à leur concentration dans le mélange à la position considérée, ainsi qu'à la vitesse de sédimentation:

$$\Phi(m/s) = CU \quad (9)$$

L'équation (8) conduit alors à:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{d\Phi}{dC} \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

La quantité $-d\Phi/dC$ est la vitesse de propagation de la concentration dans le mélange, notée U' , d'où:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U' \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Cherchons dans le plan (y,t) les points d'égale concentration C ; en ces points on a:

$$C(y,t) = cste \rightarrow dC(y,t) = 0 = \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

soit encore, d'après (10):

$$\frac{\partial C}{\partial y} (dy - U' dt) = 0$$

Les points iso-concentration sont donc situés sur une droite, puisque C est constant et donc U' l'est aussi:

$$y = y_0 + U' t \quad (11)$$

La relation (11) s'énonce ainsi: le plan horizontal où la concentration est C se déplace dans le mélange à la vitesse U' , la concentration en tous les points de ce plan restant la même C . On est donc dans la phase linéaire de la courbe de Kynch-Anderson (figure 5).

L'intérêt de cette **méthode de Kynch** est que, moyennant certaines hypothèses, on peut estimer la concentration C dans la partie du mélange comprise entre l'interface de hauteur H et le fond où la compression a lieu.

Pour cela on admet que la vitesse de propagation de la concentration, U' , décroît lorsque la concentration C augmente, du moins jusqu'à une valeur critique C_K à laquelle correspond le flux critique Φ_K au-delà duquel il y a compression: ce fait est expérimentalement vérifié.

Par exemple, pour l'eau boueuse, une concentration en masse passant de 1 g/L à 4 g/L conduit à une diminution de la vitesse de sédimentation U' de 6 m/h à 1,8 m/h. On a ainsi $\frac{dU'}{dC} < 0$ et

donc: $\frac{dy}{dC} = \frac{dU'}{dC} t < 0$: la hauteur du plan horizontal diminue, donc la hauteur du lit de boue (couche située entre la zone de clarification et la zone de compression) diminue quand la concentration dans ce lit augmente.

Soit dn le nombre de particules solides contenues dans une colonne du mélange, de section S et d'épaisseur dy ; soit dM_s la masse totale des particules dans ce volume élémentaire de la couche, et m_s la masse individuelle d'une particule, alors:

$$dn = \frac{dM_s}{m_s}$$

Or: $dM_s = \rho_s C dV = \rho_s C(y) S dy$ d'où: $dn(y) = \frac{\rho_s S}{m_s} C(y) dy$. Considérons une couche dans le lit de boue, dont la face supérieure coïncide avec celle du lit de boue, donc de hauteur H, et dont la face inférieure est à la hauteur y_0 (donc l'épaisseur de cette couche est $H - y_0$). Les particules qui traversent cette couche, et qui proviennent de la zone de clarification, entrent dans la couche à la hauteur H, et en ressortent à la hauteur y_0 . D'après ce qui précède, le nombre total de particules qui traversent cette couche en y_0 est relié à la hauteur H du lit de boue par:

$$n(y_0) = \frac{\rho_s S}{m_s} \int_{y_0}^H C(y) dy$$

Comme les particules sédimentent dans cette couche à la vitesse U et que l'interface se déplace à la vitesse U', on a:

$$dy = U' dt + U dt$$

et par suite:

$$n(y_0) = \frac{\rho_s S}{m_s} C(y_0) (U + U') t$$

que l'on réécrit:

$$N = \frac{m_s}{\rho_s S} n(y_0) = C(y_0) (U' + U) t$$

Avec (11) et la relation précédente il vient:

$$y + \frac{dy}{dt} t = (U' + U) t = \frac{N}{C} \quad (12)$$

U' étant constante pour $C = C(y_0)$ fixée, les droites de Kynch (11) sont parallèles entre elles et sont aussi parallèles à la droite passant par l'origine O ($y=0, t=0$) du plan (y,t) (on note que la pente de (11) est positive). Cette droite passant par l'origine coupe la courbe de Kynch-Anderson H(t) en B (figure 7).

Entre l'instant $t = 0$ où $y = H$ repéré par le point A, et l'instant correspondant au point B, la concentration est uniforme et le **régime est linéaire**. Ensuite la concentration augmente et U et U' diminuent: on est dans la **phase de transition** qui précède la phase du **flux critique** où la décantation s'arrête (point C); à partir du point critique C, la concentration, et donc la hauteur y, deviennent constantes. La phase de transition est comprise entre B et C sur la courbe.

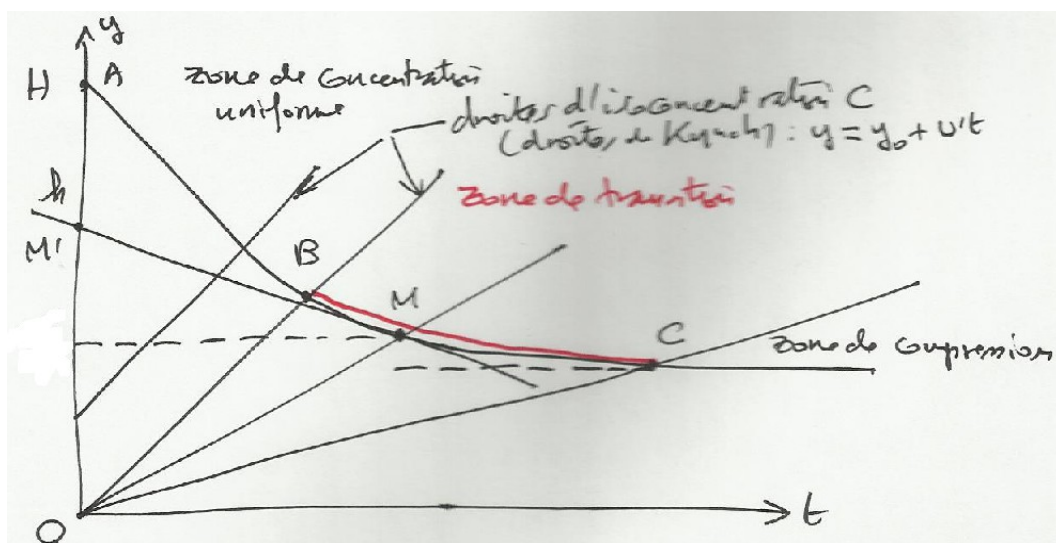


Figure 7 – détermination graphique de la concentration en zone de transition (méthode de Kynch)

Soit C_K la concentration au point critique C: la hauteur de l'interface correspondante (hauteur de la couche de tassement) est y_C . La conservation de la matière solide implique alors:

$$y_C C_K = H C_0$$

où C_0 est la concentration initiale du mélange avant décantation, et H la hauteur initiale de l'interface (hauteur initiale du lit de boue). Il résulte alors de (12) que la concentration en un point quelconque M de la zone de transition BC peut être évaluée: la tangente en M coupe l'axe Oy en un point M' tel que:

$$OM' = y - t \frac{dy}{dt} = \frac{N}{C} = \frac{H C_0}{C}$$

d'où:

$$C = \frac{H}{OM'}, C_0 = \frac{H}{h} C_0 \quad (13)$$

où h est la cote de M' obtenue graphiquement.

Il suffit donc de connaître au départ la concentration initiale de la boue dans l'effluent, ainsi que la hauteur de l'interface initiale entre la zone de clarification et le lit de boue, puis, après obtention de la courbe de sédimentation (courbe de Kynch-Anderson, figure 5), déduire par la méthode graphique de Kynch la concentration dans la couche de transition.

Lorsque le point M est obtenu après 30 minutes de décantation, la masse décantée est m_{30} . L'ordonnée de M, y_{30} , permet de déduire le volume de boue décantée V_{S30} :

$$V_{S30} = C_{30} V = C_0 \frac{H}{h_{30}} V = \frac{M_{S30}}{\rho_S V} V = \frac{M_{S30}}{\rho_S}$$

$$I_M = \frac{V}{M_{S30}} = \frac{C_{30}}{\rho_S} = \frac{h_{30}}{\rho_S C_0 H} \quad (14)$$

I_M est l'**indice de Mohlman** qui permet d'évaluer le degré de qualité de la décantation des boues. Une bonne décantabilité correspond à $50 < I_M < 100 \text{ cm}^3/\text{g}$.

Il est intéressant de remarquer que la vitesse de sédimentation U' conditionne directement le dimensionnement d'un décanteur. Si celui-ci a pour section de surface S et si sa profondeur est L (plus exactement la surface libre du mélange est à la cote L par rapport au fond du décanteur) alors la durée de sédimentation est en moyenne: $T = L/U$, et la durée de séjour dans le bac est le rapport du volume du décanteur V et du débit volumique des effluents: $T' = V/Q = LS/Q$. Pour assurer un flux continu ces deux durées doivent être les mêmes: $T = T'$, d'où la condition $S = Q/U$.

Ainsi, seule intervient la surface de la section du décanteur S : elle est dimensionnée par la vitesse de sédimentation U , que l'on peut donc connaître par la méthode de Kynch.

2 – Filtration

Lorsqu'un mélange constitué d'une phase liquide et de particules solides en suspension (phase solide) traverse un filtre, une partie des particules solides est retenue par le filtre: c'est la filtration. Les causes de la rétention des particules solides par le filtre sont d'ordre physicochimiques [7], [8].

En général la fixation des particules solides sur le milieu filtrant résulte des forces de type Van der Waals (intermoléculaires). Nous ne les traiterons pas ici, et nous considérerons seulement le processus hydrodynamique.

Si le mélange à filtrer est situé au-dessus d'un milieu filtrant, il s'écoule vers lui avec une vitesse d'écoulement U (figure 8) ⁽¹⁾.

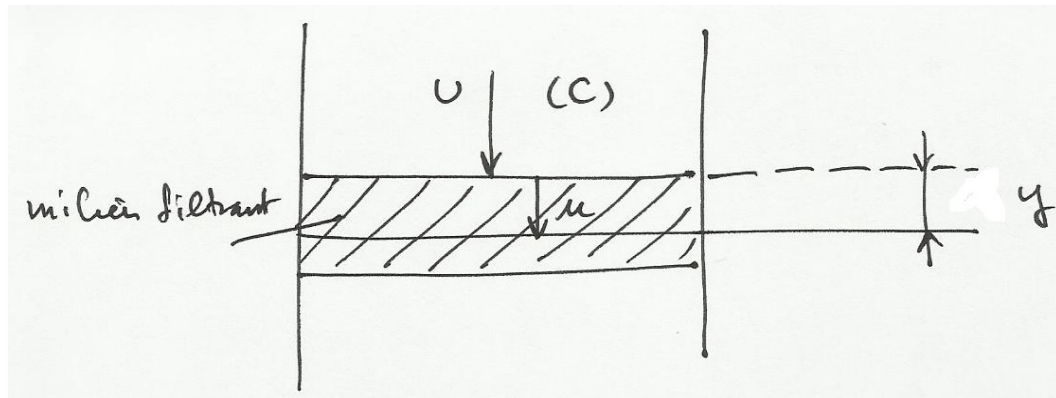


figure 8

Quand une particule, transportée à la vitesse U , rencontre le milieu filtrant, une fois à l'intérieur de lui sa vitesse change et devient ce que l'on appelle la **vitesse interstitielle** u . Si f est la **porosité du filtre**, u est définie par:

$$u = \frac{U}{f} \quad (15)$$

Quand les particules progressent dans le milieu filtrant, une partie d'entre elles s'accumulent pour former un dépôt accumulé de masse q par unité de volume du filtre (q en kg/m^3), de masse volumique ρ (en kg/m^3), et la vitesse interstitielle devient:

$$u = \frac{U}{f - \frac{q}{\rho}} \quad (16)$$

Le piégeage des particules solides dans le filtre, donc l'augmentation du dépôt q , entraîne une clarification du mélange, c'est-à-dire une diminution de la concentration en masse C (kg/m^3) des particules solides dans le mélange ⁽²⁾. Or le dépôt augmente avec la distance (y) parcourue par le mélange dans le filtre. On admet donc que la quantité de matière solide en suspension qui a disparu dans le mélange liquide est proportionnelle à la concentration locale (**équation d'Ison**):

$$\frac{dC}{dy} = -\lambda C \quad (17)$$

λ : **coefficient de filtration** (en m^{-1}). (17) s'intègre immédiatement en:

$$C(y) = C_0 e^{-\lambda y} \quad (18)$$

C_0 est la concentration de la phase solide du mélange à l'interface mélange/filtre (c'est-à-dire pour $y = 0$).

mais l'équation d'Ison suppose un coefficient de filtration homogène. En réalité, la capacité du filtre à retenir les particules dépend du nombre de particules déjà piégées dans le filtre, donc du dépôt q , et celui-ci transforme le filtre homogène en filtre hétérogène.

Dans une couche du filtre d'épaisseur élémentaire dy , et de surface S , le bilan de matière pendant le temps dt , pour un flux de mélange de débit volumique Q fait intervenir l'accroissement du dépôt:

1 Cette fois-ci, la notation U ne représente pas la vitesse de sédimentation du paragraphe 1 ! c'est la vitesse d'écoulement.

2 Là aussi ne pas confondre l'actuel C avec celui du paragraphe 1 où il désignait la concentration en volume des particules; ici, C est la concentration en masse.

$$dm = CQdt = (C + dC)Qdt + dqSdy \rightarrow dCQdt + dqSdy = 0$$

Or: $dC = \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial t} dt$ et $Q = US$ d'où:

$$\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial t} \frac{1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} + \frac{1}{U} \frac{dq}{dt} = 0$$

Or dy/dt est la vitesse interstitielle (u): $u = \frac{dy}{dt}$ qui est donnée par (16), d'où:

$$-\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{U} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\rho f - q}{\rho U} \frac{\partial C}{\partial t}$$

La quantité $\frac{\rho f - q}{\rho} \frac{\partial C}{\partial t} = \left(f - \frac{q}{\rho}\right) \frac{\partial C}{\partial t}$ est la variation, pendant le temps dt , de la quantité de particules solides en suspension dans le mélange lorsque le dépôt a augmenté de dq dans le filtre avec une vitesse dq/dt . Or la formation du dépôt est plus rapide que l'écoulement du mélange et donc de la clarification représentée par $\left(f - \frac{q}{\rho}\right) \frac{\partial C}{\partial t}$: celle-ci est donc négligeable devant $\frac{\partial q}{\partial t}$. L'équation précédente se simplifie alors en:

$$-\frac{\partial C}{\partial y} \approx \frac{1}{U} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (19)$$

On a donc le système (19) et (17) pour caractériser la dynamique de la filtration. Pour le résoudre, il faut une relation entre λ et q pour un filtre devenu hétérogène par la progression du dépôt. Un modèle général proposé par Ives [12] est:

$$\lambda(q) = \lambda_0 \left(1 + A \frac{q}{f\rho}\right)^\alpha \left(1 - \frac{q}{f\rho}\right)^\beta \left(1 - \frac{q}{q_F}\right)^\gamma$$

où A , α , β , γ sont déterminées de manière empirique. Cette relation s'interprète de la manière suivante:

- Les deux premiers facteurs (termes d'exposants α et β) décrivent l'influence de la surface du filtre.

- Le troisième facteur (terme d'exposant γ) tient compte de la vitesse interstitielle (u); q_F est la valeur finale du dépôt.

Dans le modèle proposé par Maroudas, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, l'expression précédente se réduit à:

$$\lambda(q) = \lambda_0 \left(1 - \frac{q}{q_F}\right) \quad (20)$$

Selon ce modèle, λ dépend linéairement du dépôt et le filtre arrête son pouvoir filtrant lorsque le dépôt final q_F est atteint, ou **filtre saturé** ($\lambda = 0$ quand $q = q_F$).

Compte tenu de (20), les équations (17) et (19) donnent alors:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial y} &= \lambda_0 \left(1 - \frac{q}{q_F}\right) C \\ -\frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{1}{U} \frac{\partial q}{\partial t} \end{aligned}$$

qui s'intègrent en:

$$\begin{aligned} C(y, t) &= \frac{C_0}{1 + e^{-t/\tau} (e^{\lambda_0 y} - 1)} \\ q(y, t) &= \frac{q_F (1 - e^{-t/\tau})}{1 + e^{-t/\tau} (e^{\lambda_0 y} - 1)} \end{aligned} \quad (21)$$

où:

$$\tau = \frac{q_F}{\lambda_0 U C_0} \quad (22)$$

Les relations (21) donnent l'évolution de la concentration dans le mélange au-dessus du filtre quand il a traversé le filtre sur une distance (y), et l'évolution du dépôt lorsque le mélange a parcouru le filtre sur cette même distance (y) pendant le temps t.

τ , donné par (22), joue le rôle d'une constante de temps, ou temps caractéristique de la réponse de la concentration ou du dépôt lorsque le mélange a parcouru la distance (y) dans le filtre.

Pour une distance de parcours dans le filtre donnée (y), (21) fournit deux courbes d'évolution de C et de q en fonction du temps, ou **courbes de turbidité** (figure 9).

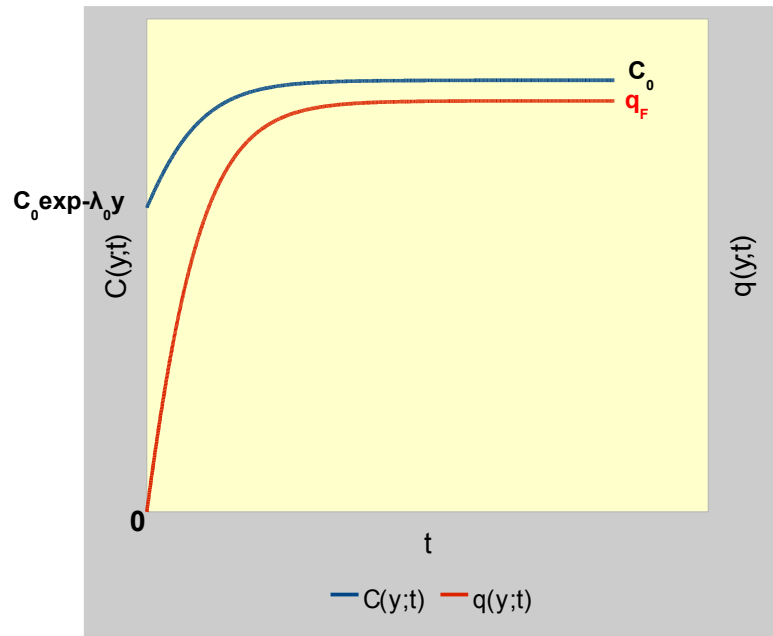


figure 9 – évolution de la concentration dans le mélange, et du dépôt filtré, pour une distance de filtration donnée (y), éq. (21) (courbes de turbidité)

A une valeur donnée C de la concentration dans le mélange, correspond une valeur de l'épaisseur de filtration (y) (autrement dit, quand on mesure la concentration C à l'instant t, on déduit que le mélange a parcouru dans le filtre la distance y):

$$y = \frac{1}{\lambda_0} \ln \left[\frac{C_0 - C}{C} e^{t/\tau} + 1 \right]$$

C étant fixée, la vitesse interstitielle (vitesse d'enfoncement du front de filtration) qui lui correspond en ce moment est:

$$u = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\lambda_0 \tau} \frac{e^{t/\tau}}{e^{t/\tau} + \frac{C}{C_0 - C}}$$

quand $t \rightarrow \infty$, u tend vers la valeur limite: $u_{\max} = \frac{1}{\lambda_0 \tau} \frac{C}{C_0 - C}$

Comme en final $C \ll C_0$, il vient:

$$u_{\max} \approx \frac{U C_0}{q_F} \quad (23)$$

qui donne l'ordre de grandeur de la vitesse de filtration.

Lorsque l'on doit prendre en compte les **pertes de charge** dans le filtre, considéré comme un milieu granulaire, on emploie la **loi de Darcy**: la variation de la charge spécifique sur une longueur (y) de l'écoulement, $H_s = y + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g}$, est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement:

$$\frac{\partial H_s}{\partial y} = K U \quad (24)$$

(α est un coefficient qui tient compte du profil de vitesse dans le milieu à travers lequel le liquide s'écoule. On a $1 \leq \alpha \leq 2$, et $\alpha = 1$ quand le profil est plan). K est le **coefficient de Darcy**. Mais en **régime laminaire**, les pertes de charge agissent sur la variation de la charge spécifique selon la formule:

$$\frac{\partial H_s}{\partial y} = \frac{\alpha}{Re} \frac{1}{D} \frac{u^2}{2g} \quad (25)$$

Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la section considérée, $u = U/f$ est la vitesse interstitielle, et D la dimension caractéristique de l'écoulement.

Or un milieu poreux, comme un filtre, est l'ensemble des grains et des vides qui les séparent. La taille caractéristique D du milieu poreux est alors défini comme le rapport du volume des vides et de la surface des vides:

$$D = \frac{\text{volume des vides entre les grains}}{\text{surface des vides entre les grains}}$$

Soit W la surface par unité de volume des vides: on l'appelle surface spécifique du milieu granulaire. Par ailleurs, le volume des vides est caractérisé par la porosité f , on a donc: $D = f/W$. Finalement le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le milieu poreux est:

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{\rho U}{\mu W}$$

(μ et ρ : viscosité dynamique et masse volumique du liquide). De (24) et (25) on tire alors la **formule de Kozeny** pour les pertes de charge en milieu poreux:

$$\frac{\partial H_s}{\partial y} = \frac{\alpha \mu}{2 \rho g} \frac{W^2}{f^3} U = K U \quad (26)$$

d'où le coefficient de Darcy:

$$K = \frac{\alpha \mu}{2 \rho g} \frac{W^2}{f^3} \quad (27)$$

En toute rigueur (27) donne K pour une filtration dont les pertes de charge sont indépendantes du dépôt q qui se forme progressivement dans le filtre. Dans cette situation idéale, (26) montre que H_s varie linéairement avec la distance parcourue par le fluide dans le filtre:

$$H_s = K U y \quad (26 \text{ bis})$$

Or Dégremont [13] a montré expérimentalement que K dépend du dépôt q selon la relation:

$$K(q) = K_0 \frac{1 + (a-1) \frac{q}{q_F}}{1 - \frac{q}{q_F}} \quad (28)$$

Le nombre « a » est déterminé empiriquement. K_0 correspond au cas du filtre idéal, sans dépôt ($q = 0$), donné par (27). Or on a vu en (21) que q/q_F varie en fonction du temps t:

$$\frac{q}{q_F} = \frac{(1 - e^{-t/\tau})}{1 + e^{-t/\tau} (e^{\lambda_0 y} - 1)} \quad (29)$$

En remplaçant $K(q)$ par (28), et compte tenu de (29), (26) est l'équation différentielle:

$$\frac{\partial H_s}{\partial y} = K_0 U \left[1 + a (e^{t/\tau} - 1) e^{-\lambda_0 y} \right]$$

qui s'intègre, à t fixé, en:

$$H_s(y, t) = K_0 U y - \frac{a}{\lambda_0} K_0 U (e^{t/\tau} - 1) e^{-\lambda_0 y} + C(t)$$

où la constante d'intégration $C(t)$ est une fonction du temps seul, que l'on détermine avec la condition aux limites:

$$y=0 : H_s(0, t) = K_0 U \quad \rightarrow \quad C(t) = \frac{a}{\lambda_0} K_0 U (e^{t/\tau} - 1)$$

d'où finalement:

$$H_s(y, t) = K_0 U \left[y + \frac{a}{\lambda_0} (e^{t/\tau} - 1) (1 - e^{-\lambda_0 y}) \right] \quad (30)$$

Pour des filtres très épais, où les distances (y) parcourues sont très grandes ($y \gg 1$), (30) est une droite asymptotique en (y), dont la pente $K_0 U$ est parallèle à la droite donnée par (26) correspondant au filtre idéal; pour $y = 0$ on a $H_s(0, t) = 0$ (il n'y a pas de perte de charge juste à l'interface du filtre, évidemment!). Le prolongement de la droite asymptotique coupe l'axe des ordonnées en $H_s = K_0 U \left(1 + \frac{a}{\lambda_0} (\exp t/\tau - 1) \right)$.

On obtient alors l'allure de la courbe $H_s(y, t)$ en fonction de (y), pour un temps donné t, à la figure 10. Ce comportement a été confirmé expérimentalement.

Ainsi le filtre avec dépôt se comporte, à tout instant t, comme un filtre idéal (relation (26 bis)) pour des épaisseurs élevées du milieu poreux. Cela se comprend si l'on considère que, dans un filtre très épais, les dépôts s'accumulent statistiquement plus vers le fond du filtre, donc à une zone très éloignée de l'interface mélange/filtre: le mélange parcourt alors dans le milieu poreux une zone où les pertes de charge ne sont pratiquement pas affectées par le dépôt.

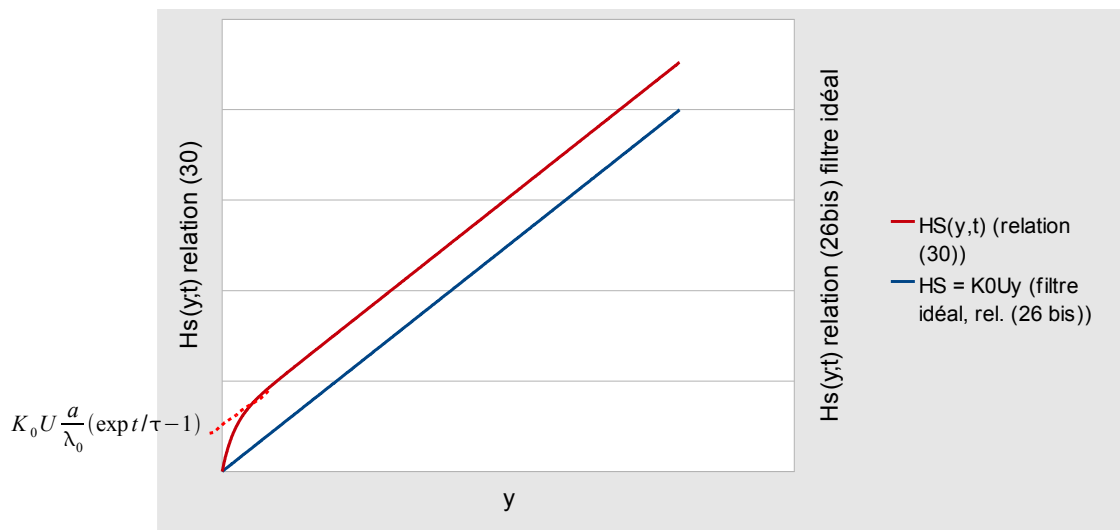


figure 10 – perte de charge dans un filtre idéal (relation (26 bis))
et dans un filtre avec dépôt (relation (30))

Références:

- [1] Michel Rieutord: *Une introduction à la dynamique des fluides* – Masson, 1997
- [2] Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc petit: *Hydrodynamique physique* – EDP Sciences, CNRS, 2001
- [3] L. Landau, E. Lifchitz: *Mécanique des fluides* – 3e édition française traduit du russe, Mir – Ellipses, 1994
- [4] Frédéric Élie: *Sphère en suspension dans un jet d'air vertical* – site <http://fred.elie.free.fr>, mai 2014
- [5] Frédéric Élie: *Anémomètre à coupelles élémentaire* – site <http://fred.elie.free.fr>, avril 2014
- [6] Frédéric Élie: « Plouf ! » ou étude de l'entrée d'un corps dans l'eau – site <http://fred.elie.free.fr>, mai 2010
- [7] Jean-Claude Boeglin: *Traitement physicochimiques de la pollution insoluble* – Techniques de l'Ingénieur n°G 1 270
- [8] Christelle Wisniewski: *Le traitement des effluents liquides, les procédés physicochimiques* – UFR des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques, Univ. Montpellier 1, Master Bioproduits et Maîtrise des procédés de transformation, 2009-2010
- [9] G. J. Kynch: Trans. Faraday Society, 1952, Vol. 48, pp. 166-176
- [10] B. Fitch: AIChE Journal, 1979, Vol. 25, n°6, pp. 913-930
- [11] B. Fitch: AIChE Journal, 1983, Vol. 29, n°6, pp. 940-947
- [12] Ives: *Théorie de la filtration* – Congrès de l'Association Internationale des Distributeurs d'Eau, 1969, Vienne
- [13] Dégremont: *Mémento technique de l'eau*, 1972

