



Frédéric Elie on
ResearchGate

La « dent de tigre » ou la fontaine horloge

Frédéric Élie

juillet 2009

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : J'ai vu pour la première fois, à la Bambouseraie d'Anduze (Gard), une fontaine insolite appelée « dent de tigre » ou « fontaine horloge », entièrement faite de bambous. Pourquoi de tels noms ? Cette fontaine est originaire d'Indochine (Laos, Cambodge), elle avait vocation, par son bruit régulier, de faire fuir les tigres des environs des villages. Sa qualification d'« horloge » vient de ce qu'elle crée un bruit sonore, bambou contre bambou, de manière très régulière : plusieurs secondes. Un véritable métronome !

Il y a des choses étonnantes à la bambouseraie d'Anduze, fondée par le botaniste Eugène Mazel : on y trouve entre autres, une forêt de bambous hauts de plusieurs mètres, des séquoias, un fabuleux jardin Zen... et des ouvrages effectués à partir de bambous, comme une maison indochinoise, ou encore ces fontaines « dent de tigre ».

Conformément à l'esprit de mon site, il fallait m'intéresser à cette fontaine insolite et essayer de la fabriquer moi-même, et bien sûr, trouver occasion de modéliser son comportement ! C'est ce que propose cet article : espérons qu'il saura allier la poésie de cette œuvre millénaire à celle de la modélisation mathématique !

SOMMAIRE

- 1 - Description de la fontaine « dent de tigre »
- 2 - Expression simplifiée de l'égalité des moments dynamiques
- 3 - Calcul approché du temps au bout duquel la fontaine bascule
- 4 - Application pratique et courbes

1 - Description de la fontaine « dent de tigre »

Se reporter à la figure 1 :

A travers un tube de bambou vertical de diamètre D , un tube AA' plus étroit vient s'articuler autour d'un axe horizontal O (voir photo figure 2). Ce tube mobile est séparé en deux parties : une partie AB creuse et une partie BA' servant de réservoir d'eau, séparé de AB par une cloison étanche en B . L'extrémité de BA' est biseautée de manière à offrir une ouverture suffisante à l'eau coulant d'un robinet placé à la partie supérieure du grand tube vertical.

Lorsque le compartiment BA' est vide le poids de la portion AO est tel que le moment dynamique en O lui est favorable : le tube AA' est incliné en faisant un angle α avec l'horizontale et il vient en butée avec les bords de la lumière aménagée dans le tube vertical. Le centre d'inertie de AO est G .



Qu'est-ce que c'est ce truc-là ???

C'est une fontaine « dent de tigre », à ce qu'il paraît. On peut les voir à la bamboueraie d'Anduze. Bien entendu, Fred a voulu en refaire une et calculer sa périodicité. Ce n'est pas si simple, pourtant ce type de fontaine, destinée à éloigner les tigres des villages indochinois, existe depuis des temps immémoriaux !

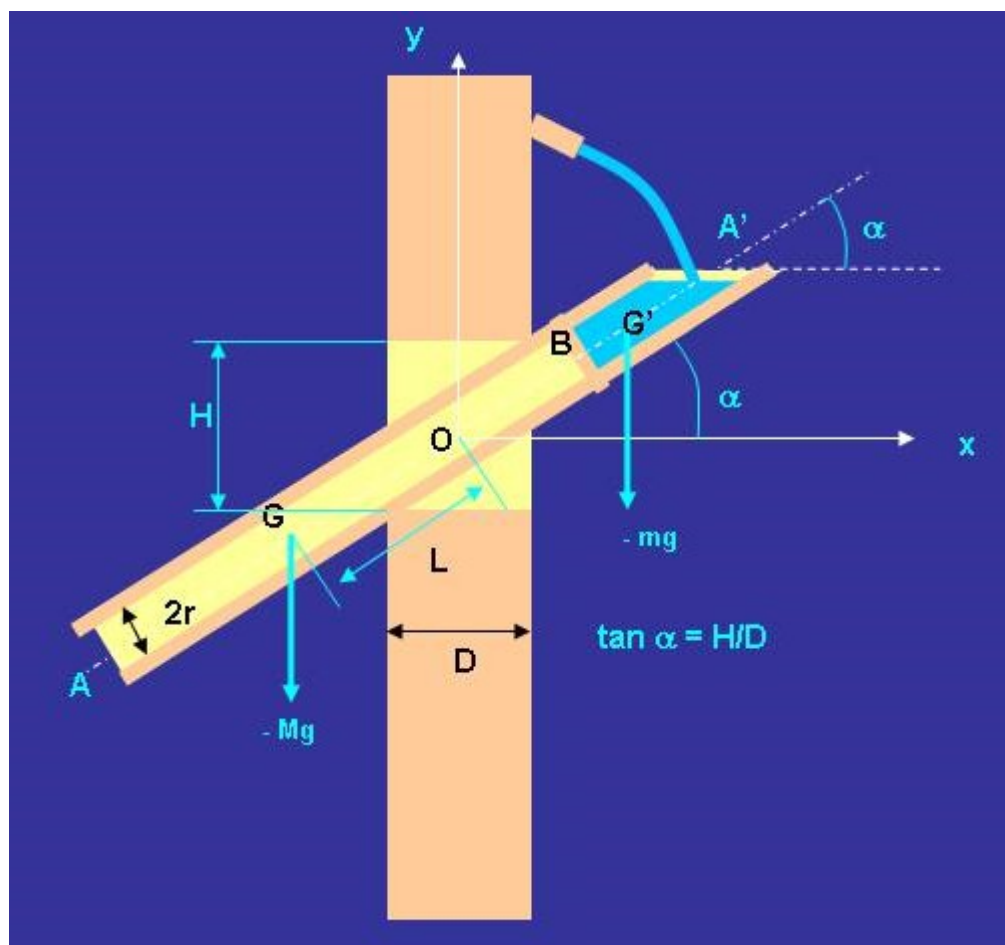
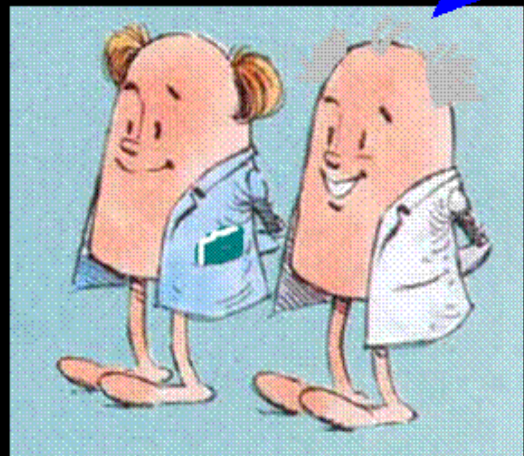


figure 1 – géométrie de la fontaine « dent de tigre »

L'eau coulant en permanence dans le compartiment BA', trois phases s'observent pour le tube mobile AA' :

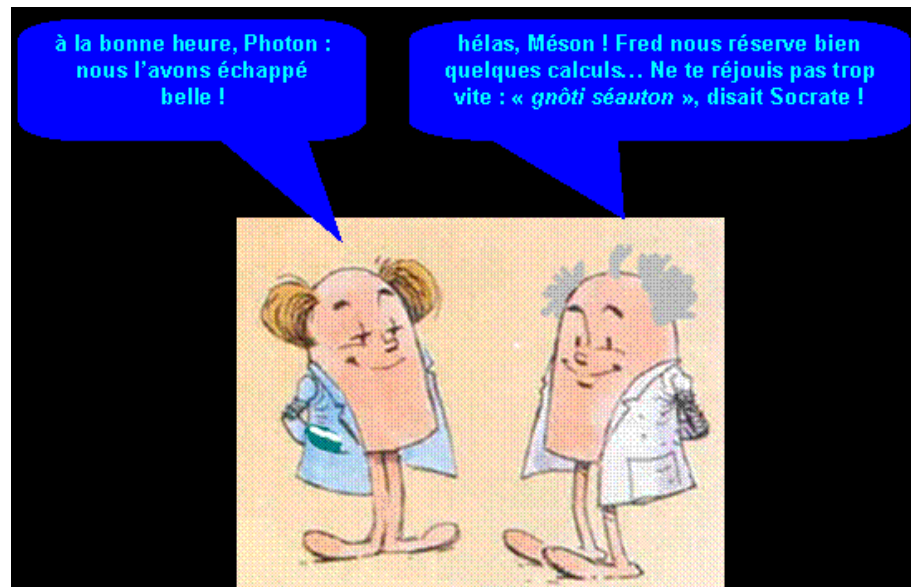
- Jusqu'à une hauteur d'eau maximale, qu'il convient de déterminer par la suite, dans le compartiment BA', le moment dynamique de la portion AO par rapport à l'axe de rotation O est supérieur à celui de la portion OA'. Celui-ci augmente avec l'augmentation du volume d'eau dans le compartiment BA' et tant qu'il reste inférieur au moment dynamique de AO le tube mobile reste en butée avec un angle α avec l'horizontale.
- Quand la quantité d'eau dans le compartiment BA' est suffisante, le moment dynamique de OA' l'emporte sur celui de AO : le tube bascule alors et le compartiment BA' se vide de l'eau.
- L'eau ayant quitté le compartiment BA', le moment dynamique redevient en faveur de AO et le tube rebascule (A s'abaisse). Puis le cycle recommence.



*figure 2 – fontaine dent de tigre en action à la bambouseraie d'Anduze :
lorsque le compartiment situé au bout du tube articulé est suffisamment rempli, le tube bascule*

Dans ce qui suit, nous cherchons à déterminer la période de ce mouvement. Plus précisément, nous voulons savoir quel est le temps au bout duquel l'équilibre des moments dynamiques a lieu, à partir du moment où l'eau s'écoule dans le compartiment OA' initialement vide. La

période complète est égale à la somme de ce temps et de celui nécessaire à la vidange du tube et à sa remontée, mais ces deux dernières durées ne seront pas prises en compte dans les calculs (c'est d'ailleurs très difficile !). On se contentera du temps au bout duquel le moment dynamique total de AA' s'annule, ce qui n'est déjà pas si simple !



Pour connaître le moment dynamique total du tube AA', et sa condition de nullité (équilibre), nous avons besoin de déterminer la position des centres d'inertie G de la portion AO et G' de la portion OA'.

Pour cela, on suppose que :

- le centre d'inertie G de AO est connu et imposé et se confond avec celui d'un contrepoids situé dans le tube de masse M. Le bras de levier est de longueur $L = GO$. Nous avons donc : $\mathbf{OG} = -L \cos \alpha \mathbf{i} - L \sin \alpha \mathbf{j}$, où les vecteurs unitaires $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont portés par les axes Ox et Oy respectivement.
- le centre d'inertie G' de OA' se confond avec celui du volume d'eau contenu dans le compartiment BA', ses coordonnées sont

$$\mathbf{OG}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Le moment dynamique total en O de AA' est :

$$\Gamma_O(AA') = \mathbf{OG} \times M\mathbf{g} + \mathbf{OG}' \times m\mathbf{g} = (LM \cos \alpha - xm) g\mathbf{k}$$

où le vecteur unitaire $\mathbf{k}$ est porté par l'axe Oz, perpendiculaire à Oxy, de façon à former avec lui un trièdre orthonormé direct. Ce moment s'annule lorsque :

$$LM \cos \alpha = xm \quad (1)$$

Dans ce problème, L et M sont imposées. Pour poursuivre sa résolution, nous adoptons deux hypothèses :

- *Hypothèse 1* : les masses sont concentrées en G' pour la portion OA' (on néglige la masse du tube de bambou devant celle de l'eau dans le compartiment BA') et en G pour la portion AO (la masse du tube AO est négligeable devant celle du contrepoids, placé en G). Il faut donc calculer x en fonction de α . Le problème étant de révolution autour de AA', G et G' sont situés dans le plan xOy, on peut donc les déterminer comme les barycentres des surfaces AGO et OBA'. G' est obtenu en décomposant la surface du tronçon BA' ainsi : le rectangle EE'F'F et le triangle rectangle E' NF' (figure 3).
- *Hypothèse 2* : lors de l'égalité des moments dynamiques, le compartiment BA' est en eau de

telle sorte que le rectangle EE'F'F est rempli d'eau. Donc E'NF' est connu et le rectangle EE'F'F est variable en fonction de l'arrivée de l'eau dans le réservoir.

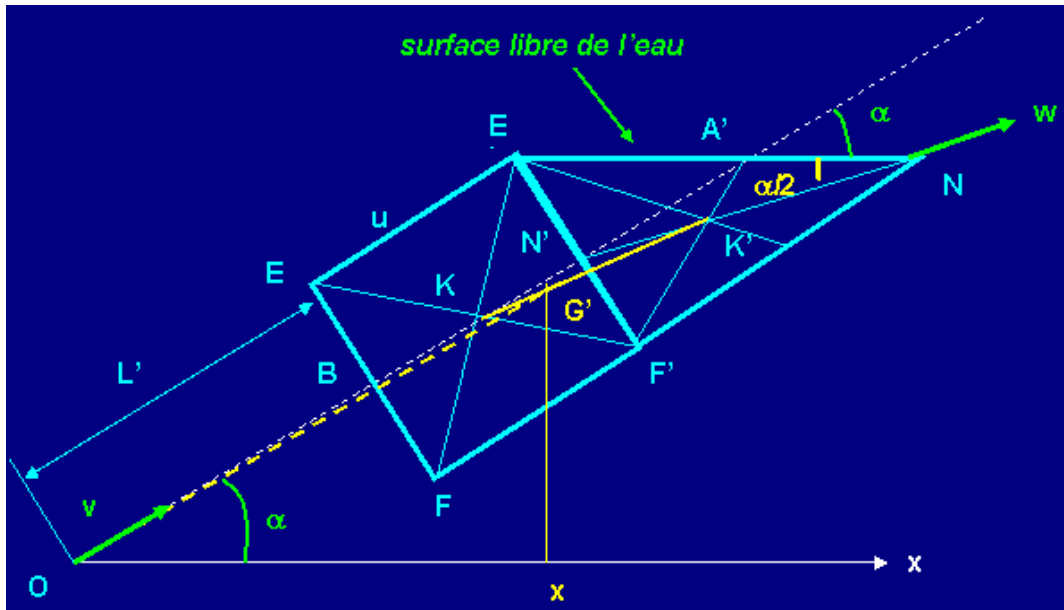


figure 3 – géométrie de la surface libre de l'eau dans le compartiment BA' (v et w sont les vecteurs unitaires portés par l'axe AA' du tube et la médiane N'N passant par le centre d'inertie K' du triangle E'NF')

2 - Expression simplifiée de l'égalité des moments dynamiques

Déterminons les centres d'inertie G et G' en employant les deux hypothèses précédentes.

G est supposé connu par hypothèse, comme indiqué auparavant.

Pour déterminer G' reportons-nous à la figure 3. G' est obtenu en décomposant la surface EFNE'E en rectangle EE'F'F et triangle E'NF'. Soit S la surface du rectangle EE'F'F, elle vaut :

$$S = EF \times EE'$$

Selon l'hypothèse 2, $EE' = u$ est l'inconnue du problème, liée au remplissage du réservoir par l'eau, quant à EF on a :

$$EF = 2r$$

par conséquent :

$$S = 2ru \quad (2a)$$

La surface du triangle E'F'N, rectangle en F', est :

$$S' = E'F' \times F'N / 2$$

Comme $E'F' = EF = 2r$ et $F'N = E'F' / \tan \alpha = 2r / \tan \alpha$, il vient :

$$S' = 2r^2 / \tan \alpha \quad (2b)$$

La surface totale de la section du réservoir passant par le plan xOy, EFNE'E, est donc :

$$S + S' = 2ru + \frac{2r^2}{\tan \alpha} \quad (2c)$$

Le centre d'inertie du réservoir étant supposé contenu dans cette section, sa position dans le

référentiel Oxy est donnée par :

$$(S + S')\mathbf{OG}' = S\mathbf{OK} + S'\mathbf{OK}' \quad (3)$$

où K et K' sont les centres d'inertie respectivement du rectangle EFF'E et du triangle E'F'N.

• Détermination de K :

De $\mathbf{OK} = \mathbf{OB} + \mathbf{BK}$, avec $\mathbf{OB} = L'\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ vecteur unitaire porté par OB), et $\mathbf{BK} = \mathbf{EE}'/2 = (u/2)\mathbf{v}$ (puisque le barycentre d'un rectangle est le point concourant de ses diagonales), il vient :

$$\mathbf{OK} = (L' + \frac{u}{2})\mathbf{v} \quad (4)$$

• Détermination de K' :

On utilise : $\mathbf{OK}' = \mathbf{ON}' + \mathbf{N'K}'$.

On a :

$$\mathbf{ON}' = \mathbf{OB} + \mathbf{BN}' = L'\mathbf{v} + 2\mathbf{BK} = (L' + u)\mathbf{v} \text{ (puisque } \mathbf{BN}' = 2\mathbf{BK})$$

$$\mathbf{N'K}' = \mathbf{N'N} - \mathbf{K'N}$$

avec :

$$\mathbf{N'N} = F'N \mathbf{w}/\cos(\alpha/2)$$

($\mathbf{w}$: vecteur unitaire porté par la médiane N'N du triangle). Mais $F'N = E'F'/\tan\alpha$ et $E'F' = 2r$, d'où :

$$\mathbf{N'N} = 2r\mathbf{w}/(\tan\alpha \cos(\alpha/2))$$

Le barycentre K' d'un triangle est le point concourant de ses médianes. Sa distance au sommet N est donnée par les formules du triangle :

$$NK' = \sqrt{\frac{E'N^2 + NF'^2}{2} - \frac{E'F'^2}{4}}$$

or on a :

$$E'N = E'F'/\sin\alpha = 2r/\sin\alpha$$

$$NF' = 2r/\tan\alpha$$

$$E'F' = 2r$$

d'où :

$$NK' = 2r \sqrt{\frac{1 + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}}$$

On en déduit le vecteur $\mathbf{N'K}'$ (attention aux orientations!):

$$\mathbf{N'K}' = \left(\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}\tan\alpha} - 2r \sqrt{\frac{1 + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}} \right) \mathbf{w}$$

Finalement la position de K' est donnée par :

$$\mathbf{OK}' = (L' + u)\mathbf{v} + \left(\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}\tan\alpha} - 2r \sqrt{\frac{1 + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}} \right) \mathbf{w} \quad (5)$$

Des relations (2a), (2b), (2c), (3), (4) et (5) on tire la position $\mathbf{OG}'$ du centre d'inertie du réservoir :

$$\left(2ru + \frac{2r^2}{\tan \alpha}\right) \mathbf{OG}' = 2ru\left(L' + \frac{u}{2}\right) \mathbf{v} + \frac{2r^2}{\tan \alpha} \left[(L' + u) \mathbf{v} + 2r \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \tan \alpha} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{4}} \right) \mathbf{w} \right] \quad (6)$$

D'après l'égalité des moments (1) seules les projections sur Ox interviennent, il nous suffit donc de projeter (6) sur Ox :

- $\mathbf{OG}'|_{Ox} = x$
- $\mathbf{v}|_{Ox} = \cos \alpha$
- $\mathbf{w}|_{Ox} = \cos(\alpha/2)$

D'où l'abscisse x du centre d'inertie de la branche OA' :

$$x = \frac{\cos \alpha}{u + \frac{r}{\tan \alpha}} \left[u\left(L' + \frac{u}{2}\right) + \frac{r}{\tan \alpha} (L' + u) + 2r^2 \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\cos(\alpha/2) \tan \alpha} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{4}} \right) \right] \quad (7)$$

La condition d'égalité des moments dynamiques (1) donne alors comme condition sur u :

$$LM = \frac{m}{u + \frac{r}{\tan \alpha}} \left[u\left(L' + \frac{u}{2}\right) + \frac{r}{\tan \alpha} (L' + u) + 2r^2 \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\cos(\alpha/2) \tan \alpha} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{4}} \right) \right] \quad (8)$$

Remarque importante : la masse d'eau m ajoutée est liée à l'inconnue u par l'intermédiaire du volume d'eau V dans le réservoir en un instant t. En effet, si Q est le débit volumique on a $V(t) = Qt$ et $m = \rho V(t) = \rho Qt$ (ρ est la masse volumique de l'eau, 1000 kg/m^3), et la longueur u est reliée au volume de la façon suivante :

- volume du cylindre dont la surface génératrice est EFF'E' : $\pi r^2 u$
- volume du demi-cylindre dont la section longitudinale est E'F'N : c'est la moitié du volume du cylindre de hauteur F'N et de diamètre E'F', soit donc $\frac{1}{2} \pi r^2 F'N = \pi r^3 / \tan \alpha$

D'où :

$$V(u) = \pi r^2 u + \frac{\pi r^3}{\tan \alpha} \quad (8\text{bis})$$

En exprimant m avec cette expression de V(u), la condition (8) devient finalement :

$$\frac{LM}{\rho} \left(u + \frac{r}{\tan \alpha} \right) = \left(\pi r^2 u + \frac{\pi r^3}{\tan \alpha} \right) \left[u\left(L' + \frac{u}{2}\right) + \frac{r}{\tan \alpha} (L' + u) + 2r^2 \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\cos(\alpha/2) \tan \alpha} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{4}} \right) \right] \quad (9)$$

C'est une équation du troisième degré en u.

Pour déterminer le temps t au bout duquel l'équilibre des branches AO et OA' de la fontaine se réalise, il faut résoudre (9), ce qui fournit V par (8bis), et par suite $t = V/Q$.

3 - Calcul approché du temps au bout duquel la fontaine bascule

Avant de chercher à résoudre (9), voyons d'abord les cas des valeurs extrêmes de l'angle α :

- $\alpha = 0$: on a $1/\tan \alpha = \infty$, il y a indétermination sur u et donc sur V. C'est normal, car nous sortons des limites de nos hypothèses : dans nos calculs on a toujours supposé que le cylindre

EFF'E' était plein d'eau ($u > 0$), or à l'horizontale ($\alpha = 0$) cette situation n'est pas réalisable.

• $\alpha = \pi/2$: on a $1/\tan\alpha = 0$ et $1/\sin\alpha = 1$. La condition (9) se réduit alors à une équation du second degré en u :

$$u^2 + 2L'u - 2\left(0,7r^2 + \frac{LM}{\pi r^2 \rho}\right) = 0$$

dont le discriminant réduit est

$$\delta = L'^2 + 2\left(\frac{LM}{\pi r^2 \rho} + 0,7r^2\right)$$

et est toujours positif : il existe donc toujours une racine positive. Ceci n'est physiquement pas acceptable : avec AOA' verticale ($\alpha = \pi/2$), les centres d'inertie G et G' sont alignés sur la même verticale, le bras de levier est nul et la fontaine ne peut pas basculer. Là encore, nous sommes sortis des limites des hypothèses du calcul : la portion E'F'N est toujours supposée triangulaire, ce qui n'est plus le cas en situation verticale.

On doit donc s'attendre à ce que notre modèle ne soit valable que loin de ces extrêmes, aux environs de $\alpha = \pi/4$.

Dans ce cas, en choisissant de plus que le réservoir soit à l'extrémité du tube AOA' (donc loin de l'axe de rotation O), la portion de longueur u peut être supposée négligeable devant la distance $L' = OB$. Cette hypothèse $u \ll L$ permet de simplifier (9) qui se transforme en équation du second degré en u :

$$\begin{array}{l} \text{avec:} \\ u^2 + Bu + C = 0 \\ B = \frac{2r}{\tan\alpha} - \frac{LM}{\pi r^2 L' \rho} \\ C = \frac{r^2}{L' \tan\alpha} \left(\frac{L'}{\tan\alpha} + r F(\alpha) \right) - \frac{LM}{\pi r L' \rho \tan\alpha} \end{array} \quad (10)$$

et où l'on a posé :

$$F(\alpha) = 2 \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin\alpha} \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} \tan\alpha} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{4}} \right) \quad (11)$$

Les solutions existent si $B^2 > 4C$, et la racine positive est

$$u = \frac{\sqrt{B^2 - 4C} - B}{2} \quad (12)$$

Le temps au bout duquel la fontaine bascule est alors :

$$t = \frac{1}{Q} \left[\frac{\pi r^2}{2} (\sqrt{B^2 - 4C} - B) + \frac{\pi r^3}{\tan\alpha} \right] \quad (13)$$

4 - Application pratique et courbes

Sur la photo de la figure 4 ci-après, voici la fontaine que j'ai fabriquée. Elle fonctionne à l'aide d'une pompe immergée délivrant un débit de 500 litres/heure ($Q = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$) et une hauteur d'eau de 80 cm (soit une pression de 0,08 bar), ce qui correspond à une puissance de

pompe de $W = 1,112$ watts. Ceci est suffisant pourvu de ne pas placer le robinet d'alimentation du réservoir au-delà d'une hauteur de 80 cm de la pompe et de bien veiller à ce que la pompe reste immergée, ce qui est assuré si l'eau du réservoir retombe bien dans le bac d'eau où se trouve la pompe, afin de bien avoir un circuit fermé.



figure 4 – montage provisoire pour tester la fontaine et la position relative de la pompe et du robinet supérieur. Les photos montrent une phase où le tube mobile bascule

La fontaine réalisée a les caractéristiques suivantes :

- longueur $L = AO$ (distance entre le contrepoids, enfoui dans le tube, et l'axe de rotation O) : 30 cm
- distance $L' = OB$ (distance entre l'axe de rotation et le fond du réservoir) : 10 cm
- masse du tronçon AO (supposée concentrée en A) : $M = 500g$
- diamètre utile du tube mobile : $2r = 3$ cm
- débit $Q = 0,5 \text{ m}^3/h$
- angle $\alpha = 45^\circ$

Les calculs ont été effectués à partir de (10), (12) et (13), en examinant l'influence du contrepoids M et de la longueur L (figure 5).

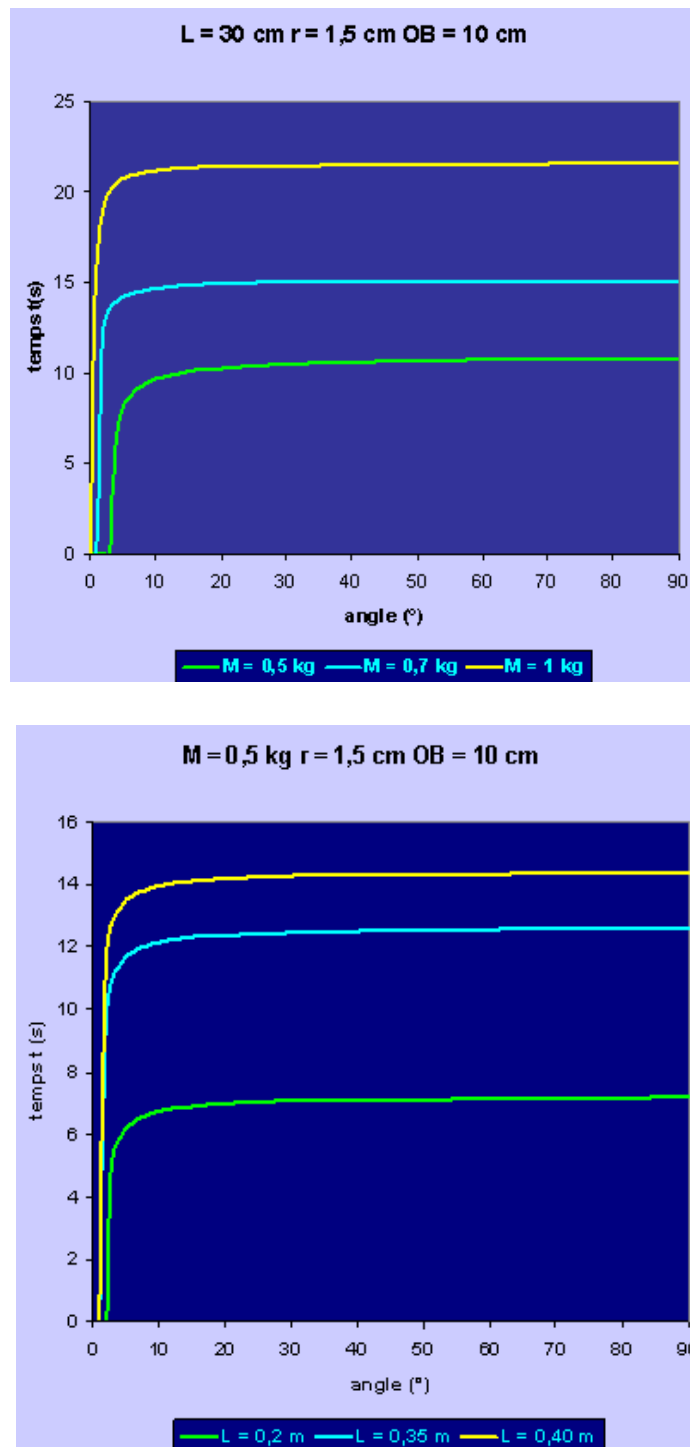


figure 5 – calculs théoriques du temps de bascule de la fontaine « dent de tigre » en fonction de l'inclinaison initiale du tube mobile.

En haut : effet de la masse du contrepoids, en-bas : effet de la longueur L . On s'aperçoit que le temps est pratiquement indépendant de l'angle, mais est très sensible au contrepoids et à L : il augmente lorsque le contrepoids est lourd, et lorsque la longueur côté contrepoids est grande (dans les deux cas il faut plus de temps pour obtenir l'égalité des moments qui varie dans le même sens que ML).

On rappelle aussi que les courbes sont fausses près de l'horizontale et de la verticale.

Notre fontaine est dans la configuration de gauche de la figure 5, cas $M = 0.5 \text{ kg}$. Le temps de bascule mesuré est de l'ordre de 10 secondes, ce qui correspond bien à la courbe théorique pour l'angle 45° utilisé.

Ainsi, avec la réalisation définitive (figure 6), pratiquement toutes les 10 secondes la fontaine fait « toc », lorsque le tube cogne la fenêtre après sa remontée....



figure 6 – fontaine définitive

... Relaxant, non ?



Moi, je ne trouve pas ça relaxant ! ça m'empêche de faire la sieste, et en plus ça ne sert à rien !!!