Diffraction de la lumière
Mesurer un cheveu au laser par la diffraction

Frédéric Élie

27 février 2004, 27 juillet 2010

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Pour mesurer l'épaisseur d'un cheveu, il existe une méthode assez précise qui repose sur le fait qu'un rayon lumineux, suffisamment fin et directif (comme un faisceau laser) subit une diffraction lorsqu'il passe au voisinage d'un obstacle opaque. Le spot lumineux, une fois projeté sur un écran, présente en fait l'aspect d'une tâche de diffraction dont la forme et les dimensions sont directement reliées à celles de l'obstacle. Ce phénomène trouve son origine dans le comportement ondulatoire de la lumière auquel cette manip va nous permettre de nous familiariser. Autant le dire tout de suite ici: le recours à des trajets géométriques pour étudier la lumière (optique géométrique) devient insuffisant lorsque les longueurs d'onde sont du même ordre de grandeur ou plus petites que les dimensions des objets que rencontrent les faisceaux lumineux, et dans ce cas les modèles de prévision doivent employer la théorie ondulatoire…

SOMMAIRE

1 - Description de l'expérience

1-1 - Dispositif

Fixer sur un cadre un cheveu dans le sens vertical. Comme source laser on pourra utiliser un "crayon" laser comme ceux employés pour les exposés: ils émettent dans le rouge (longueur d'onde entre 0,630 et 0,680 microns). Veiller à bien fixer ce crayon de façon à ce que le rayon arrive sur le cheveu. L'écran pourra être une feuille de papier blanc fixé sur un support rigoureusement vertical.

Remarque, attention: pour obtenir les conditions de diffraction à l'infini, où la relation qui va nous permettre de déterminer l'épaisseur du cheveu est valide, il faut que l'écran soit suffisamment éloigné du cheveu. En outre, pour obtenir une tache de diffraction bien visible on a intérêt à placer l'écran assez loin de l'objet pour bénéficier d'un bon grandissement (deux à trois mètres).

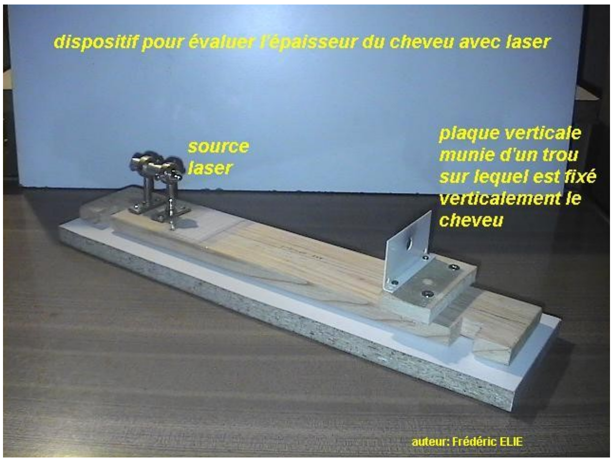
Eclairer l'échantillon avec le laser. Qu'observe-t-on sur l'écran?
Le spot lumineux est constitué d'un ensemble de taches réparties dans le sens horizontal, symétriques par rapport au point de rencontre O du rayon laser avec l'écran. Au point O on observe la tache principale, la plus étendue, puis de part et d'autre, des taches secondaires de plus en plus petites et de moins en moins brillantes lorsqu'elles sont éloignées de O.

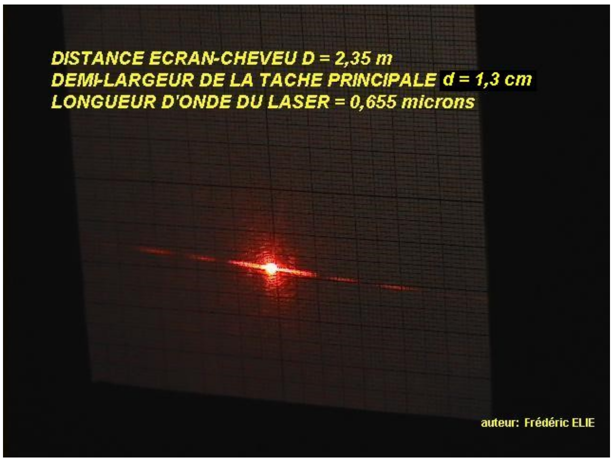
1-2 - Obtention et exploitation des observations

Noter soigneusement la distance D entre le cheveu et l'écran, ainsi que la longueur d'onde λ .
Relever sur l'écran la largeur R de la tâche principale: de façon rigoureuse, c'est le double de la distance d entre le centre O de la tache principale et le milieu de la zone obscure la séparant de la première tache secondaire (R=2d). Pour être cohérent, toutes ces données seront converties en mètre (m). Dans ce cas, la théorie montre que la relation entre l'épaisseur "a" du cheveu, et les grandeurs mesurées ci-dessus s'exprime par:

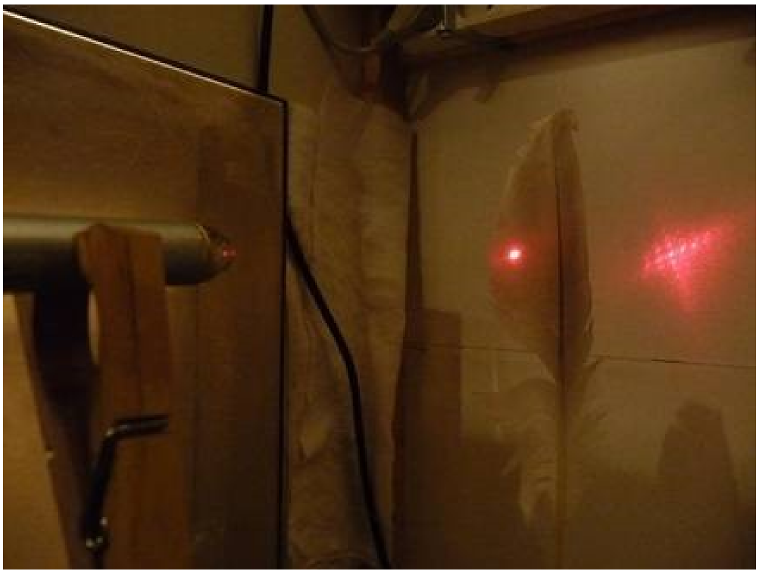
$$a = 2 \lambda D / R$$

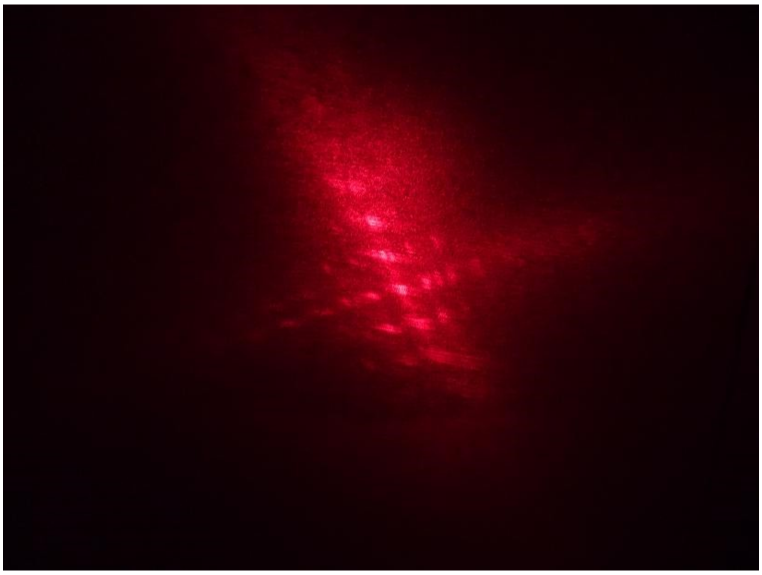
La démonstration de cette relation pourtant simple est assez compliquée (cf. ci-dessous).
Avec les données suivantes: D = 2,35 m, λ = 0,655 μ , R = 2,6 cm, on obtient l'épaisseur du cheveu a = $1{,}18.10^{-4}$ m soit 118 microns.
Ci-dessous le dispositif utilisé et la tache de diffraction obtenue:





Remarque : On obtient aussi de belles figures de diffraction avec une plume d'oiseau éclairée par un faisceau laser (photos ci-après) :





1-3 - Remarque importante: notion de courbe d'étalonnage

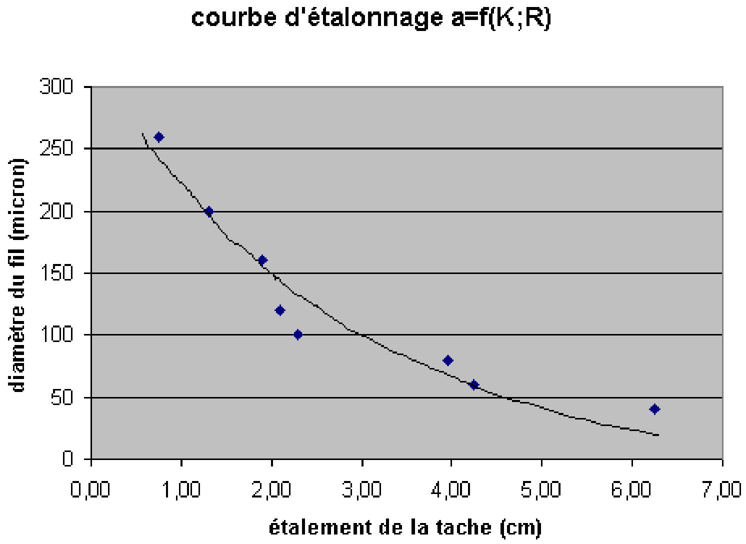
Remarquez que l'obtention de l'épaisseur a du cheveu nécessite chaque fois de mesurer la distance D et la longueur d'onde du laser λ . Cela peut donner l'impression que la valeur de l'épaisseur du cheveu est tributaire de cette configuration de manière exclusive. Les valeurs D et λ sont des données fixées du dispositif expérimental et pour un dispositif choisi elles déterminent une constante K = 2 λ D : ce qu'il est important de noter ici c'est que, pour un dispositif fixé, la taille de l'obstacle est inversement proportionnel à la largeur R mesurée (un petit obstacle génère une tache d'autant plus étalée). Si l'on veut s'affranchir de l'impression que je viens d'évoquer, donc si l'on veut que notre dispositif soit utilisable pour toute autre épaisseur d'obstacle, on a intérêt à établir une *courbe d'étalonnage*. Son tracé s'obtient, pour K fixé mais pas nécessaire à connaître, par une loi:

$$a = f_K (R)$$

expression où la fonction f_K dépend du dispositif (donc ici définie par $y = f_K(x) = K/x$). Il suffit alors de repérer la valeur mesurée R sur la courbe d'étalonnage et de lire directement l'épaisseur cherchée a.

J'ai établi la courbe d'étalonnage en utilisant des fils de diamètres différents et chaque fois j'ai relevé la largeur R de la tache principale, le tableau et la courbe sont les suivants:

a (diamètre du fil en microns)	40	60	80	100	120	160	200	260
R (largeur de la tache centrale en cm)	6,25	4,25	3,95	2,30	2,10	1,90	1,30	0,75



2 - Démonstration théorique des lois de diffraction pour des obstacles rectangulaires et circulaires

2-1 - Théorie formelle

Le phénomène de diffraction peut être compris sur la base des deux principes suivants:

- Lorsqu'une portion de surface d'un objet est frappée par un pinceau lumineux issu d'une source d'origine (appelée source primaire), elle devient à son tour une source de lumière (appelée source secondaire): c'est le principe d'Huygens-Fresnel. Comme une source de lumière n'est jamais ponctuelle mais présente une extension de surface finie, on peut la décomposer en une multitude de sources élémentaires réparties sur la surface et occupant sur celle-ci des positions différentes. En un point donné de la surface d'un objet, l'onde lumineuse résulte donc de la contribution de l'ensemble des points sources élémentaires constitutives de la source de lumière, et l'objet en question est la somme des sources secondaires qui la constituent et qui reçoivent chacune les rayons de lumière issus de tous les points sources de la source primaire.

- Les rayons lumineux issus de deux sources différentes atteignent un même point d'une surface donnée après avoir parcouru des chemins optiques différents: cela entraîne qu'en ce point les rayons arrivent avec une différence de marche directement liée aux positions relatives des deux sources primaires. Comme on se place dans le domaine de l'optique ondulatoire, les rayons lumineux sont représentés par des ondes sinusoïdales de fréquence égales à c/λ (c: vitesse de la lumière dans le milieu considéré) et décalées entre elles par un déphasage. On montre qu'en un point où convergent deux rayons issus de deux sources différentes, le déphasage φ est directement relié à la différence de marche Δ entre les deux sources et à la longueur d'onde λ

$$\varphi = 2\pi\,\Delta/\lambda$$

Or selon les valeurs du déphasage, donc selon les différences de marche entre les sources,

l'onde sinusoïdale au point de la surface de l'obstacle considéré peut être d'amplitude minimale (franges sombres) ou maximale (franges brillantes). C'est le phénomène d'interférence.
Exploités ensemble ces deux principes permettent de comprendre et de prédire les phénomènes de diffraction: sur un écran (E) situé très loin d'un obstacle (S) qui reçoit un faisceau lumineux issu d'une source primaire (S_0), l'intensité des ondes lumineuses reçues résulte de l'interférence des ondes émises par les différentes sources secondaires constitutives de (S). Cette intensité va donc dépendre des coordonnées des points sur l'écran (E) ainsi que de leurs positions relatives par rapport aux points des sources secondaires de (S). Les calculs qui vont suivre s'appliquent à un obstacle qui est une ouverture de forme quelconque aménagée dans un plan indéfini.
La distance entre l'ouverture (S) et l'écran (E) est notée D. Désignons par P (x,y), de coordonnées (x,y), un point quelconque de (E) où l'on veut déterminer l'amplitude des ondes émises par le faisceau qui traversé l'ouverture (S). D'après le principe d'Huygens-Fresnel un point M(X,Y), de coordonnées (X,Y), quelconque de l'ouverture, y compris de son contour, donne en P une amplitude proportionnelle à la quantité:

$$\frac{\exp(-jkD)}{D}\exp\left(-j\frac{k}{2D}\left((y-Y)^2+(x-X)^2\right)\right)$$

(k = $2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde de la radiation supposée ici monochromatique) et en ce point P l'amplitude totale résultant de la contribution de tous les points M de (S) est donnée par l'intégrale double étendue à la surface et au contour de (S):

$$f(x,y)=\frac{\exp(-jkD)}{D}\iint_{(S)}\exp\left(-j\frac{k}{2D}\left((y-Y)^2+(x-X)^2\right)\right)dX\,dY \quad (1)$$

L'hypothèse d'un écran (E) placé très loin de cette ouverture permet de modéliser la "diffraction à l'infini" (ou ***diffraction de Fraunhoffer***, cas où la distance d'observation D est très grande devant les dimensions caractéristiques de la source X, Y) permet de négliger les termes $(X^2+Y^2)/D$ (étendue de l'obstacle petite devant la distance) et $(x^2 + y^2)/D$ (points de l'écran recevant l'onde situés prés de l'axe du fait de l'éloignement important de l'ouverture), et de simplifier l'intégrale (1):

$$f(x,y)=\frac{\exp(-jkD)}{D}\iint_{(S)}\exp\left(j\frac{k}{2D}(Xx+Yy)\right)dX\,dY \quad (2)$$

Le facteur placé avant l'intégrale ne dépend pas des coordonnées des points de l'écran et on s'intéresse seulement aux variations relatives de l'intensité sur celui-ci: par conséquent, après avoir choisi les coordonnées réduites u=x/D et v=y/D, la fonction de diffraction considérée devient ici:

$$f(u,v)=\iint_{(S)}\exp\left(jk(Xu+Yv)\right)dX\,dY \quad (3)$$

Pour tenir compte du contour de l'ouverture, il faut étendre l'intégrale au plan indéfini et traduire la présence de l'ouverture (S) par une fonction F(X,Y) des coordonnées de ce plan, cette fonction étant appelée ***fonction d'ouverture***. L'expression (3) devient alors:

$$f(u,v)=\int_{-\infty\leq X\leq+\infty}\int_{-\infty\leq Y\leq+\infty}F(X,Y)\exp jk(Xu+Yv)\,dX\,dY \quad (4)$$

et l'on reconnaît que l'amplitude de l'onde diffractée sur l'écran est la ***transformée de Fourier spatiale*** de la fonction d'ouverture. Quant à l'intensité lumineuse de l'onde diffractée, grandeur mesurable, elle est par définition:

$$I\ (u,v) = f(u,v)\ f^*\ (u,v) \qquad (5)$$

où f* est le conjugué complexe de l'amplitude. Remarquer que l'amplitude relative f(u,v) et son intensité I(u,v) sont proportionnelles respectivement à la surface S de l'ouverture et au carré S² de cette même surface.
Les expressions (4) et (5) sont les relations fondamentales de la diffraction à l'infini par une ouverture. En dehors de cette approximation les calculs se révèlent plus complexes même pour des ouvertures de géométrie simple.

2-2 - Remarque: théorème des écrans complémentaires de Babinet

Vous allez me dire: la théorie ci-dessus s'applique pour des ouvertures à travers desquelles passe le faisceau lumineux, or l'expérience décrite au début concerne plutôt un obstacle opaque. Comment peut-on alors appliquer les modèles de diffraction à l'infini à des obstacles?
La réponse est la suivante: on peut appliquer exactement les calculs ci-dessus à des obstacles dont la forme correspond aux ouvertures pour lesquelles ils sont valides: c'est le ***théorème de Babinet*** sur les écrans complémentaires que je ne vais pas démontrer ici (consulter les ouvrages en référence). Je dirai seulement que c'est une conséquence des transformations de Fourier et que, par conséquent, ce théorème n'est applicable que dans le cas d'une diffraction de Fresnel (diffraction "à l'infini").

2-3 - Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire (ou par un obstacle opaque rectangulaire)

Pour déterminer la diffraction à l'infini par un cheveu ou un fil, on va donc, grâce au théorème de Babinet, calculer au moyen de l'équation (4) la diffraction par une ouverture rectangulaire dont on va ensuite faire tendre vers zéro l'une de ses dimensions.
Les dimensions de l'ouverture sont: largeur a suivant l'axe horizontal OX, hauteur b suivant l'axe vertical OY, où O est l'origine des coordonnées placée au centre du rectangle. La fonction d'ouverture est telle que l'amplitude lumineuse relative doit être nulle sur le plan contenant (S) sauf à l'intérieur de l'ouverture rectangulaire où elle prend la valeur 1; on a donc pour F(X,Y):

$$F(X,Y) = \text{Rect}\ (X/a)\ \text{Rect}\ (Y/b) = 1 \text{ pour } |X| < a/2 \text{ et } |Y| < b/2, \text{ et } 0 \text{ partout ailleurs}$$

Les formules des transformations de Fourier donnent, pour les fonctions "rectangle" Rect une transformée en "sinus cardinal" sinc Z = sin Z / Z qui tend vers 1 lorsque Z tend vers 0. On a donc pour notre ouverture rectangulaire, l'amplitude et l'intensité du faisceau diffracté sur un écran (E) situé à la distance D:

$$f(u,v) = S\ \text{sinc}\ (\pi\ au/\lambda\ )\ \text{sinc}\ (\pi\ bv/\lambda\ ) \qquad (6)$$

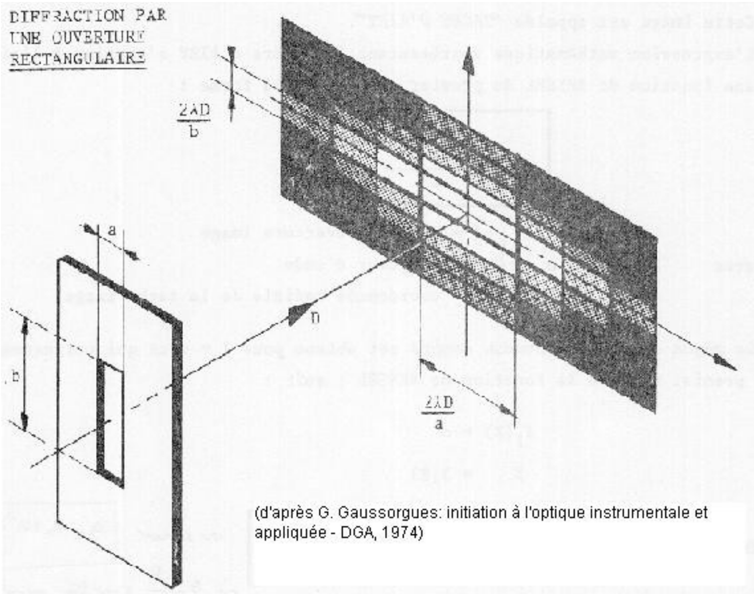
$$I(u,v) = S^2\ \text{sinc}^2\ (\pi\ au/\lambda\ )\ \text{sinc}^2\ (\pi\ bv/\lambda\ ) \qquad (7)$$

où S est la surface S = ab de l'ouverture rectangulaire. Les figures de diffraction obtenues sur l'écran présentent donc des maxima et des minima comme le montre la figure ci-dessous. Les minima sont situés aux coordonnées x et y telles que:

$$x = n\ \lambda\ D/a \text{ et } y = m\ \lambda\ D/b$$

où n et m sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.
La tache principale correspond à n et m = 0. La largeur d'une tache, écart entre deux minima consécutifs, est $\Delta\ x = 2\lambda\ D/a$ et $\Delta\ y = 2\lambda\ D/b$. Par conséquent la taille d'une tache de diffraction observée sur l'écran est d'autant plus importante que la longueur d'onde et la distance sont grandes et que les dimensions de l'ouverture (ou de l'obstacle) sont petites. Pour faciliter la

mesure des dimensions d'un petit objet on aura donc intérêt à utiliser une lumière rouge (limite haute du spectre visible) et à placer l'écran loin de l'objet.



Si l'une des dimensions devient petite devant l'autre, par exemple a/b << 1, le facteur sinc (π bv/λ) de la relation (6) devient nul partout sauf sur l'axe Ox de l'écran: la lumière diffractée est seulement observée suivant l'axe horizontal Ox c'est-à-dire perpendiculairement à la direction de la fente (ou du fil), ce qui correspond bien à ce que nous avons observé dans l'expérience.

2-4 - Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire (ou un obstacle opaque circulaire)

Voici un autre exemple de diffraction qui pourra donner des idées d'expériences pour obtenir une tache de diffraction avec un écran troué, ou pour évaluer la taille des gouttelettes d'eau présentes dans la brume à partir de la mesure du halo blanchâtre de la lune.
En remplaçant l'ouverture rectangulaire par une ouverture circulaire (S) de rayon r, la fonction d'ouverture devient:

$$F(X,Y) = 1 \text{ pour } X^2 + Y^2 < r^2, \text{ et 0 partout ailleurs}$$

La transformée de Fourier de cette fonction cercle fait intervenir la fonction de Bessel d'ordre 1 notée $J_1(z)$ pour la variable réduite : $z = 2\pi\, r(u^2 + v^2)^{1/2}/\lambda$:

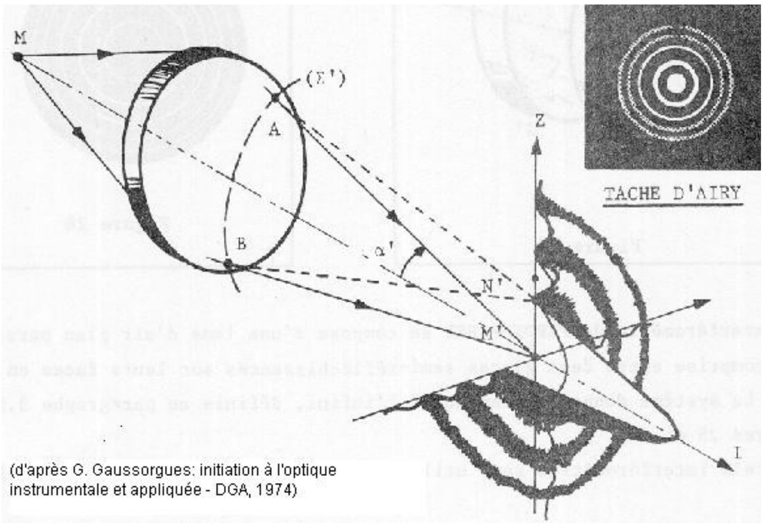
$$f(u,v) = 2S\, J_1(z) / z \qquad (8)$$

avec S = π r² surface de l'ouverture circulaire et je rappelle que les coordonnées réduites sur l'écran sont u = x/D et v = y/D. Comme le montre la figure suivante, la tache de diffraction est constituée d'une tache circulaire principale entourée d'anneaux alternativement sombres et clairs concentriques: c'est la ***tache d'Airy***. Le rayon du premier anneau sombre est le premier zéro de la ***fonction de Bessel*** $J_1(z) = 0$ de solution z = 3,83. Ceci donne le rayon de la tache principale:

$$R = 1{,}22\, \lambda D/2r \qquad (9)$$

ou encore son rayon angulaire, c'est-à-dire l'angle α sous lequel cette tache est vue sur l'écran et tel que tg α = R/D $\approx \alpha$

$$\alpha \text{ (radians)} = 1{,}22\, \lambda / 2r \qquad (10)$$



(d'après G. Gaussorgues: initiation à l'optique instrumentale et appliquée - DGA, 1974)

Remarque: ce phénomène de diffraction par une ouverture circulaire est responsable de la limite de résolution dans les instruments d'optique, les plus petits détails visibles, de taille caractéristique 2r, étant limités par les taches de diffraction données par (9) ou (10). Avec un instrument d'optique de focale f la distance apparente entre deux petits détails de l'objet observé (une étoile par exemple) est de l'ordre de $f.\alpha$ où α est la dimension angulaire de la tache de diffraction de chacun de ces détails. D'après la relation (9), cette taille apparente dépend de l'ouverture numérique N = 2r / f caractéristique de l'instrument d'optique, en effet:

$$f.\alpha = 1,22 \lambda D / N \qquad (11)$$

Usuellement, les objectifs des appareils d'optique sont caractérisés par des ouvertures géométriques f / n où n = 1/N est l'inverse de l'ouverture numérique. Par exemple une ouverture f / 1,4 signifie que pour une focale fixée à f le diamètre de l'objectif est égal à f / n (ou f.N). Une grande ouverture numérique N (ou un faible n) entraînera une bonne résolution de l'appareil. Deux appareils travaillant avec la même N bénéficieront de la même résolution, avec des diamètres et des focales différentes.

3 - Faites le calcul vous-même !

Je propose dans le lien suivant de calculer la diffraction pour une ouverture rectangulaire dont on pourra choisir les dimensions a et b, la longueur d'onde du faisceau lumineux, et la distance D à l'écran, avec représentation dans le plan de l'amplitude relative en fonction des coordonnées (x,y) sur l'écran.

figures de diffraction par un obstacle rectangulaire

Bibliographie

- M. Françon: *Optique, formation et traitement des images*, éd. Masson, 1972
- J-P. Faroux, J. Renault: *Optique*, éd. Dunod, 1998
- G. Gaussorgues: *Initiation à l'optique instrumentale et appliquée*, DGA, CEFCA avril 1974