



Frédéric Elie on
ResearchGate

Disque remontant une pente

Frédéric Élie

décembre 2009

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

*« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980*

Abstract : C'est une expérience célèbre et classique qui continue à amuser lorsqu'elle est bien préparée : un disque plein remonte un plan incliné lorsqu'on le lâche à la base de celui-ci. On en trouvera une description détaillée dans le document en référence.

Bien sûr, la loi de Newton sur la pesanteur n'est pas mise en défaut, il n'y a pas de réelle magie (dommage ?) : le « secret » réside en la présence d'une masselotte fixée à la circonférence, côté intérieure, et dans le fait que, lorsqu'on positionne le disque au pied du plan incliné, cette masselotte est située au plus près du sommet du disque, mais pas exactement sur la verticale mais inclinée par rapport à la verticale du côté du plan incliné. C'est une situation de déséquilibre, le centre d'inertie étant à une altitude maximale. Lorsqu'on lâche le disque, le moment dynamique du poids de la masselotte n'est pas nul et entraîne la rotation du disque sur le plan incliné, ce mouvement étant causé par la recherche d'une position d'équilibre stable de l'ensemble. Or la position d'équilibre correspond à l'altitude minimale que la masselotte possédera sur le plan incliné (minimisation de l'énergie potentielle).

Je propose ici une reproduction de cette expérience et une tentative pour prédire l'altitude qu'atteindra le disque au terme de son ascension le long du plan incliné. Le côté sympathique de cette expérience sera occulté par les quelques calculs, certes très simples, auxquels on ne pourra se soustraire.

SOMMAIRE

- 1 - Une expérience classique
- 2 - Un paradoxe apparent
- 3 - Expression de la vitesse du centre d'inertie dans le référentiel galiléen
- 4 - Aspects dynamiques
- 5 - Manipulation expérimentale

1 - Une expérience classique

La gravure ci-contre (figure 1), tirée d'un ouvrage en référence [1], illustre l'expérience. Un ruban de papier fort est recourbé de telle sorte à former un anneau. Sur la face interne, on colle de manière la plus ponctuelle possible un objet un peu lourd, par exemple une pièce métallique ou de la cire à cacheter.

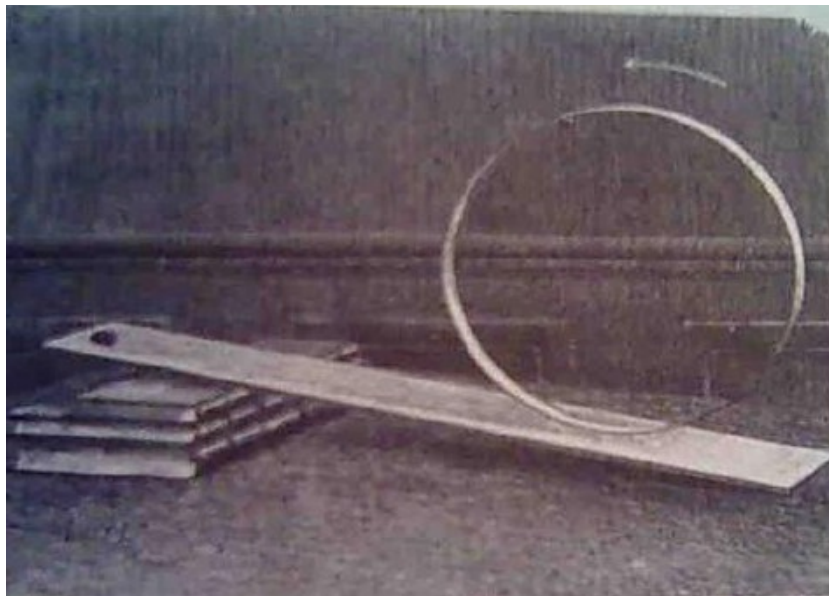


figure 1

L'anneau est posé verticalement sur un plan incliné de fortune construit à l'aide d'une règle en appui sur la table et sur des livres superposés. Pour que l'expérience fonctionne, il est impératif que la masselotte soit au voisinage du diamètre vertical et légèrement décalée par rapport à elle, du côté ascendant du plan incliné (si elle est strictement sur la verticale, il ne se passera rien car le moment dynamique du poids par rapport au centre de l'anneau est nul, et si elle est légèrement vers l'arrière l'anneau roulera sur la table et s'immobilisera lorsque la masse sera à l'altitude la plus basse).

Abandonnons l'anneau : il remontera spontanément le plan incliné et s'immobilisera lorsque la masselotte aura atteint le point le plus bas de sa course.

Pour donner un effet « magique », on emploiera une boîte ronde dont les parois dissimuleront la masselotte située à l'intérieur.

Dans le même ordre d'idée, mentionnons aussi l'expérience de l'objet biconique qui *semble* remonter des rails en forme évasée (voir référence [1]), figure 2.

Former un objet biconique, construit à partir de deux cônes que l'on assemble par leurs bases par collage (il peut s'agir de deux chapeaux en carton coniques tels que ceux utilisés pour fêter le nouvel an). Les rails sont édifiés ainsi : on dispose deux livres, posés sur la tranche opposée à leur reliure, verticalement sur une table, les deux livres ayant des tailles différentes. Deux baguettes sont posées sur ces livres en faisant un angle entre elles dont le sommet est du côté le moins haut. Il est important que ces rails soient ainsi écartés du bas vers le haut, pour la raison suivante :

Abandonner l'objet biconique à la base du rail, il donne l'illusion de remonter alors spontanément le long des rails. A la base, l'axe commun des deux cônes est à une certaine altitude initiale. Suite à l'écartement des rails, cet axe a une altitude qui diminue lorsque l'on parcourt les deux rails vers le haut. Le centre d'inertie du mobile, qui est situé sur l'axe des cônes, s'abaisse donc lorsque les rails s'écartent parce que son énergie potentielle de gravité tend à devenir minimale. Le mobile s'arrête quand son centre d'inertie est à une altitude minimale qui correspond au point où l'axe est tangent aux rails, c'est-à-dire où la largeur de l'objet coïncide exactement avec l'écartement des deux rails. L'illusion d'un objet biconique remontant les rails est d'origine optique : la combinaison de la rotation et de la translation de l'objet le long de rails inclinés, alors qu'en fait son centre d'inertie est plus bas à l'arrivée qu'au départ ! (figure 2 bis)

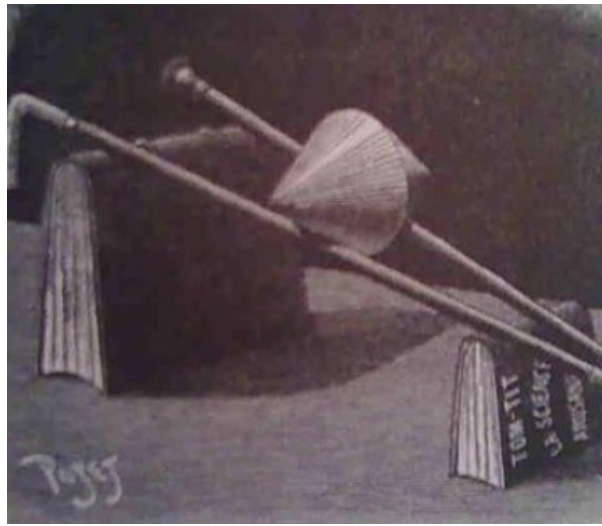


figure 2

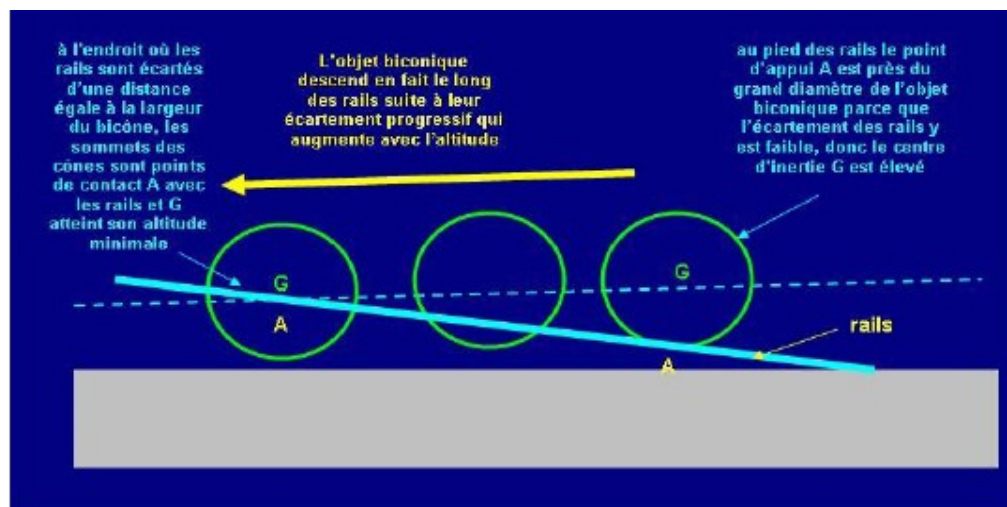


figure 2 bis

2 - Un paradoxe apparent

Considérons le cas du disque, ou de l'anneau, remontant un plan incliné. Un paradoxe apparent se présente.

Si le disque roulait sur un plan horizontal et comportait une masselotte initialement placée près de son sommet (situé sur le diamètre le joignant au point de contact au sol), alors, en cherchant à minimiser son énergie potentielle (condition d'équilibre stable), il roulerait sur le plan horizontal jusqu'à ce que son centre d'inertie, supposé concentré dans la masselotte, soit au point le plus bas, donc confondu avec le point de contact au sol. Autrement dit, l'angle final β que fait la masselotte avec la verticale, en partant du sommet du disque, est égal à $\beta = \pi$.

On peut alors supposer que si, au lieu d'être sur un plan horizontal, le disque est au pied d'un plan incliné, la rotation qu'il fait pour retrouver sa position d'équilibre le fasse monter le long du plan incliné jusqu'à ce que la masselotte atteigne la position la plus basse sur le disque sur la verticale, c'est-à-dire lorsque l'angle est $\beta = \pi$.

Le paradoxe consiste alors au constat (confirmé par le calcul que nous allons faire) qu'il n'en est rien : la masselotte s'arrête, non pas au point le plus bas du disque sur la verticale passant par son centre et le sommet, mais au point de contact du disque avec le plan incliné, alors que cette position semble ne pas correspondre au minimum d'énergie potentielle.

Ce paradoxe apparent sera levé dans le paragraphe suivant, mais voyons tout de suite la distance que parcourrait le disque si l'hypothèse d'un équilibre en $\beta = \pi$ était vrai (figure 3).

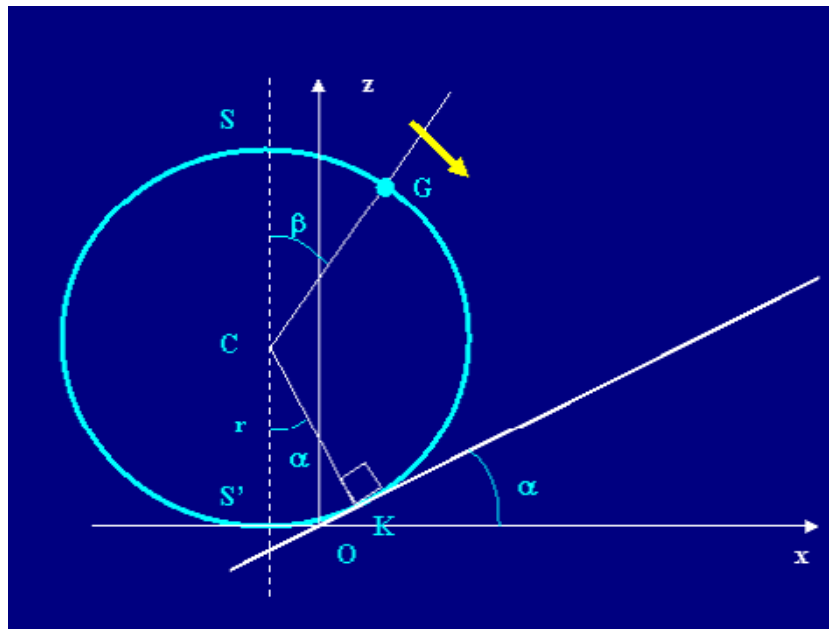


figure 3

Soit G le centre d'inertie supposé confondu avec la masselotte et soit z son altitude pour un angle β avec la verticale $S'S$.

On a vu immédiatement, d'après la figure 3, que $z = r(1 + \cos \beta)$, où r désigne le rayon du disque. Les coordonnées sont mesurées dans le repère Oxz , où l'origine O est l'intersection du plan incliné avec l'horizontale Ox , et Oz est la verticale perpendiculaire en O . Noter que cette verticale Oz ne passe pas par le centre C du disque car le point de contact S' du disque avec l'horizontale ne coïncide pas avec O . Le point de contact du disque avec le plan incliné est K . Si le plan incliné fait un angle α avec l'horizontale, alors on a immédiatement : $(S'CK) = \alpha$.

Traisons le paradoxe en constatant que, si le disque était libre de tourner autour de C , sans contact avec le plan incliné, l'énergie, la condition d'équilibre donnée par le minimum de l'énergie potentielle de G conduirait à une rotation ramenant G en S' . En effet, l'énergie potentielle de G étant :

$$E_p = mgz = mgr(1 + \cos \beta)$$

(m : masse de la masselotte G), atteint un extrémum pour $dE_p/d\beta = 0$, ce qui donne : $\sin \beta = 0$.

La position stable correspond au critère $d^2E_p/d\beta^2 > 0$, donc à $-\cos \beta > 0$, c'est-à-dire : $\pi/2 < \beta < 3\pi/2$. Avec la condition précédente $\sin \beta = 0$, la position d'équilibre stable est donc unique et correspond à :

$$\beta = \pi \quad (1)$$

Sur la figure 3, la condition (1) montre que le centre d'inertie G vient en S' , point de contact du cercle avec l'horizontale. CO est la médiatrice de $(S'CK)$ donc $S'O = OK$, donc l'angle au sommet des triangles $(S'CO)$ et (OCK) est égal à $\alpha/2$, d'où la distance entre O et le point de contact K du disque avec le plan incliné :

$$OK = r \sin(\alpha/2) \quad (2)$$

Nous allons calculer les nouvelles coordonnées de G lorsque le disque a roulé (sans glisser) sur le plan incliné de telle sorte que le centre du disque C s'est déplacé en C' et que le centre d'inertie G s'est déplacé en G' :

le nouvel angle entre le rayon $C'G'$ et la verticale Oz est $\beta = (G'C'S)$ (figure 4).

Une fois ces coordonnées (x, z) de G' déterminées, nous comparerons le cas où elles correspondent à la position d'équilibre donnée par (1) avec le cas où l'énergie potentielle de G' ,

lors du roulement sur le plan incliné, est minimale. De cette comparaison il ressortira la raison pour laquelle, en présence du plan incliné, la condition (1) ne peut pas être celle de l'équilibre stable (alors qu'elle l'était pour une surface plane).

La géométrie du problème est représentée à la figure 4 :

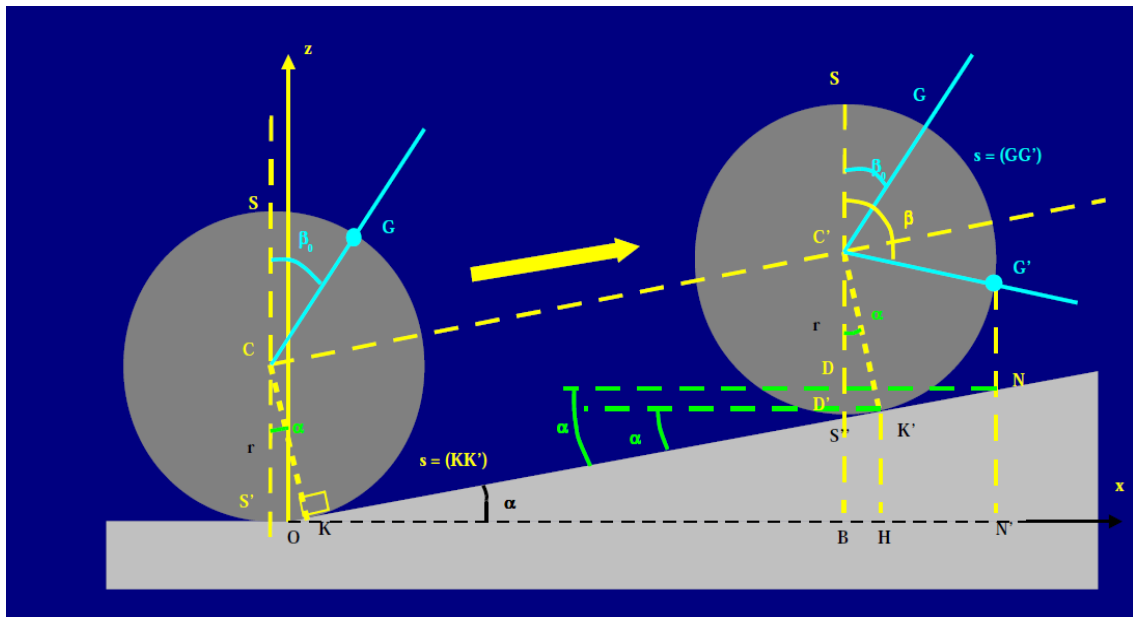


figure 4 – géométrie du problème et notations

Coordonnées du centre d'inertie G' lorsque le disque a tourné de $(\beta - \beta_0)$ sur le plan incliné :

- altitude de G' par rapport à l'horizontale Ox :

$$z = N'G'$$

$$N'G' = N'N + NG'$$

$$N'N = HK' + D'D$$

$$NG' = DC' + r \cos \beta$$

$$N'G' = HK' + D'D + DC' + r \cos \beta$$

$$\text{or } D'D + DC' = D'C'$$

$$HK' = OK' \sin \alpha \text{ où : } OK' = OK + KK'$$

$$\text{or: } OK = r \sin (\alpha/2) \text{ et } KK' = r (\beta - \beta_0) = s$$

$$D'C' = r \cos \alpha$$

$$z = [r \sin (\alpha/2) + r (\beta - \beta_0)] \sin \alpha + r \cos \alpha + r \cos \beta$$

$$z = r \left[\sin \alpha \sin (\alpha/2) + \cos \alpha - \beta_0 \sin \alpha + \beta \sin \alpha + \cos \beta \right] \quad (3)$$

- Altitude du point de contact K' du disque avec le plan incliné:

$$z_{K'} = HK' = r \sin \alpha \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \beta_0 + \beta \right) \quad (4)$$

Remarque : avec $\alpha = 0$ (plan horizontal) on retrouve bien : $z = r(1 + \cos \beta)$ et $z_{K'} = 0$ (point de contact sur le plan horizontal).

- Abscisses :

• du point de contact K' du disque sur le plan incliné :

$$x_{K'} = OH = OK' \cos \alpha = (r \sin (\alpha/2) + r (\beta - \beta_0)) \cos \alpha, \text{ soit:}$$

$$x_{K'} = r \cos \alpha \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \beta - \beta_0 \right) \quad (5)$$

• de G' (nouvelle position du centre d'inertie) :

$$x = ON' = OB + DN$$

$$OB = OS'' \cos \alpha$$

$$DN = r \sin \beta$$

$$\text{or : } S''K = OK \text{ donc } OS'' = OK' - S''K'$$

$$OS'' = OK' - OK$$

$$\text{avec } OK' = OK + KK' \text{ donc } OS'' = KK' = s = r (\beta - \beta_0)$$

$$x = r(\beta - \beta_0) \cos \alpha + r \sin \beta \quad (6)$$

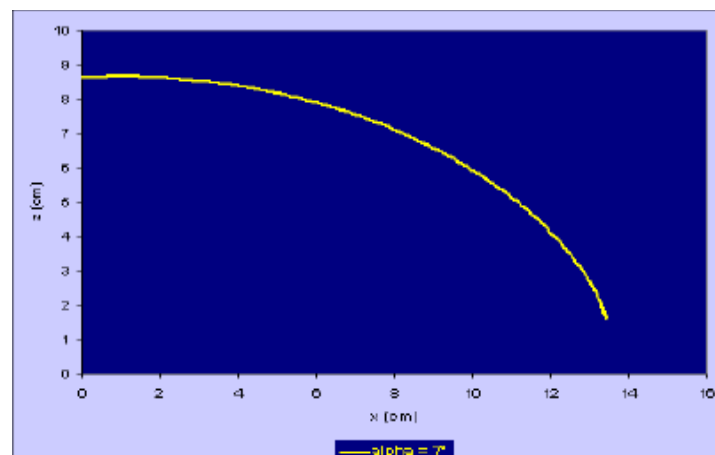
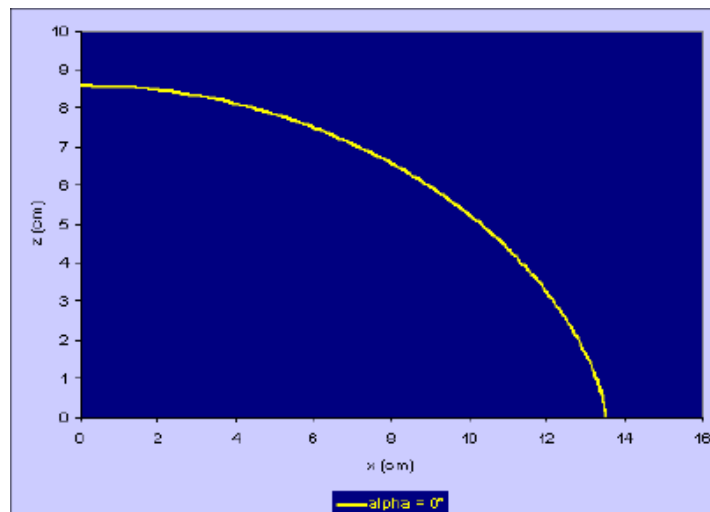
Remarque : avec $\alpha = 0$ (plan horizontal) on vérifie que :

$$x_{K'} = r (\beta - \beta_0) = s$$

$$x = r (\beta - \beta_0) + r \sin \beta$$

avec déjà: $z_{K'} = 0$ et $z = r (1 + \cos \beta)$

Pour un plan incliné d'angle $0 \leq \alpha < \pi/2$ le centre d'inertie décrit une courbe d'équation $z = f(x)$ dans le plan xOz lorsque le disque roule sur le plan incliné donnée par (3) et (6) (voir figure 5), et le point de contact décrit la trajectoire $z_{K'} = g(x_{K'})$ donnée par (4) et (5) (voir figure 6).



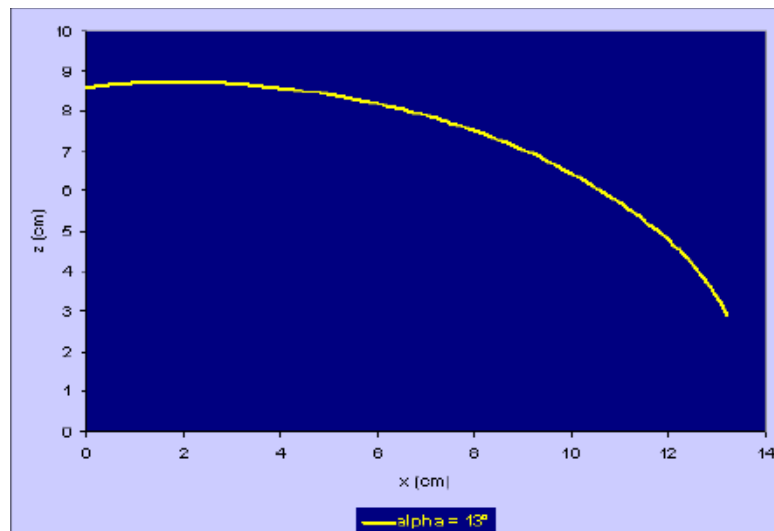
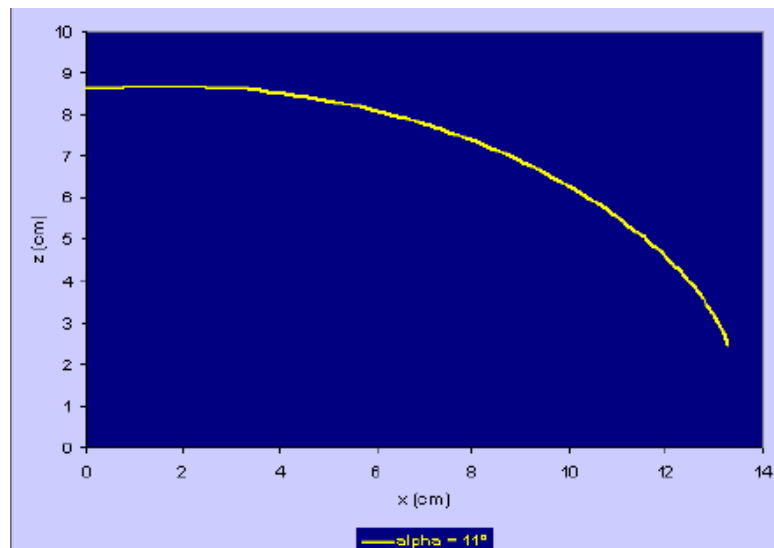
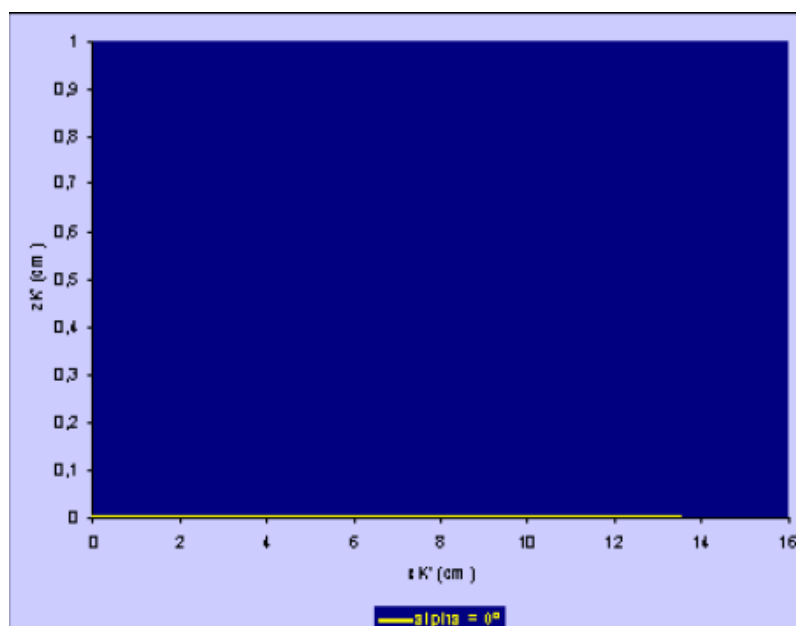


figure 5 – trajectoire de la masselotte G dans le référentiel galiléen pour différentes inclinaisons de la pente : $\alpha = 0^\circ$ (plan horizontal), 7° , 11° , et 13°
 Rayon du disque : $r = 4,3 \text{ cm}$, angle initial : $\beta_0 = 0^\circ$



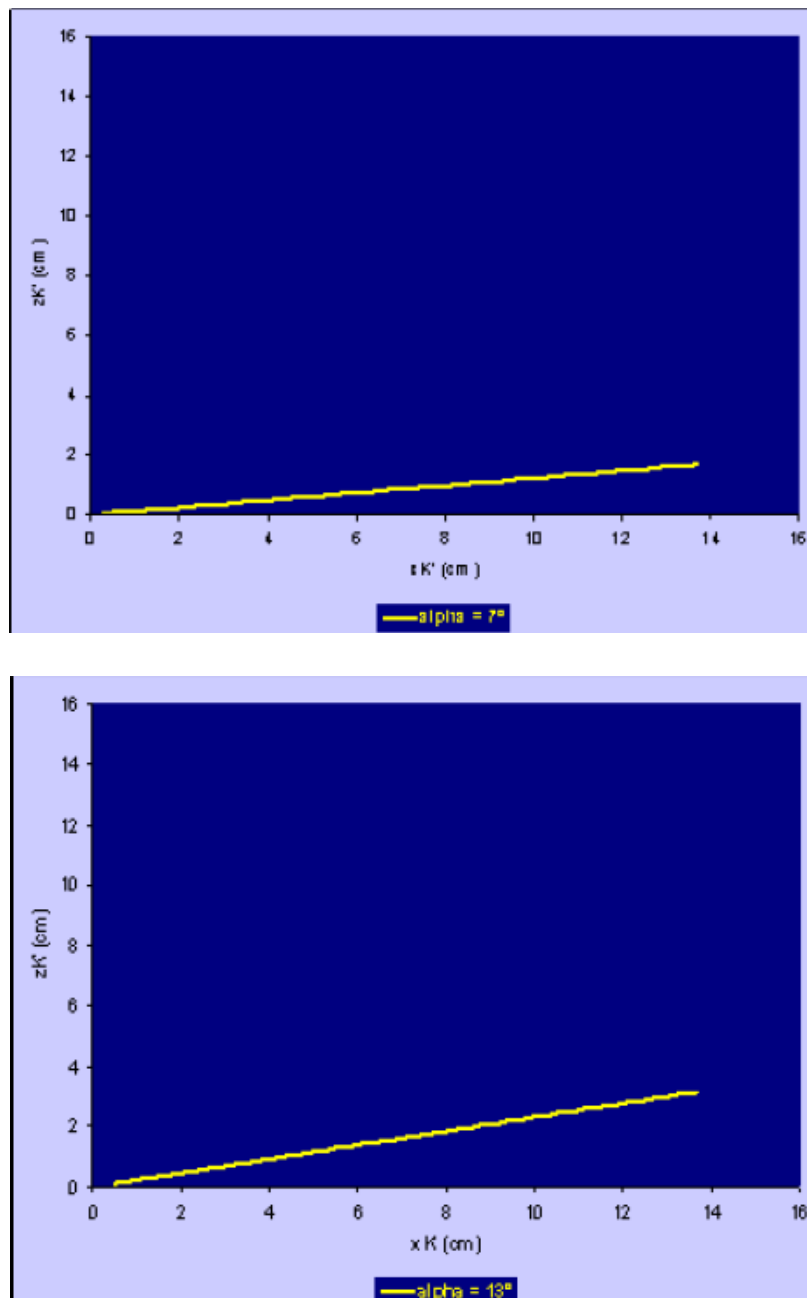


figure 6 – trajectoire du point de contact K' du disque avec le plan incliné pour différentes inclinaisons : $\alpha = 0^\circ$ (plan horizontal), 7° , et 13°

Rayon du disque : $r = 4,3 \text{ cm}$, angle initial : $\beta_0 = 0^\circ$

Remarque : cette trajectoire coïncide avec le plan incliné, comme il se doit

Voici la levée du paradoxe apparent :

- Si le disque tournait sur lui-même en K sans rouler sur le plan il ne se déplacerait pas sur celui-ci. Dans ce cas on a vu que son énergie potentielle est minimale et stable pour $\beta = \pi$ (relation (1)).
- Cette valeur d'équilibre pour β ne correspond pas au minimum d'énergie potentielle dans le cas où le disque roule en montant sur le disque, puisque (3) donne :

$$\frac{dE_p}{d\beta} = 0 \rightarrow \frac{dz}{d\beta} = \sin \alpha - \sin \beta = 0 \quad \text{si} \quad \sin \alpha = \sin \beta$$

la condition de stabilité $d^2E_p/d\beta^2 > 0$ donne $\cos \beta < 0$, soit : $\pi/2 < \beta < 3\pi/2$, ce qui avec la condition précédente fournit la solution unique pour l'équilibre stable :

$$\beta = \pi - \alpha \quad (7)$$

et non pas (1) $\beta = \pi$. Autrement dit G' vient en K' et non au point le plus bas du disque, E , situé sur le segment $D'S''$ (figure 7).

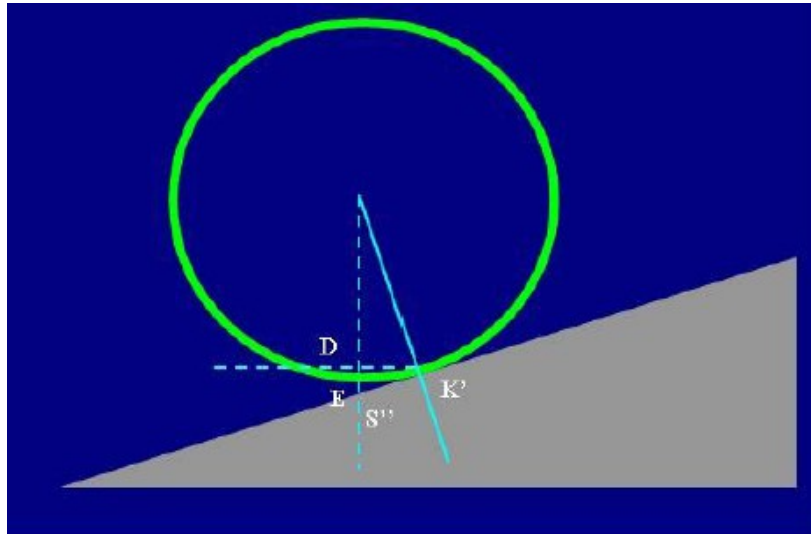


figure 7

Comparons les énergies potentielles E_P pour les valeurs extrêmes du cas « rotation sans roulement sur le plan » ($\beta = \pi$) et du cas « roulement sur le plan » ($\beta = \pi - \alpha$) :

- Cas « rotation sans roulement sur le plan incliné » (pour simplifier on choisit $\beta_0 \approx 0$) :

(3) conduit à $E_{P1}(\beta = \pi) = mgz_{\text{MIN}}^{(1)}$ où :

$$z_{\text{MIN}}^{(1)} = r (\sin\alpha \sin(\alpha/2) + \cos\alpha + \pi\sin\alpha - 1) \quad (8)$$

- Cas « roulement sur le plan incliné » :

(3) conduit à $E_{P2}(\beta = \pi - \alpha) = mgz_{\text{MIN}}^{(2)}$ où :

$$z_{\text{MIN}}^{(2)} = r \sin\alpha (\sin(\alpha/2) + \pi - \alpha) \quad (9)$$

Comparons ces deux expressions d'énergie potentielle en examinant le signe de :

$$g(\alpha) = (z_{\text{MIN}}^{(1)} - z_{\text{MIN}}^{(2)})/r = \cos\alpha + \alpha \sin\alpha - 1$$

C'est une fonction croissante monotone de α sur $[0, \pi/2]$ parce que dans cet intervalle on a $dg(\alpha)/d\alpha = \alpha \cos\alpha > 0$, par conséquent si elle est positive pour deux valeurs extrêmes, elle est positive sur le domaine intermédiaire. Examinons alors son signe au voisinage des valeurs extrêmes $\alpha \ll 1$ et α voisin de $\pi/2$:

- au voisinage $\alpha \ll 1$, on a $g(\alpha) \approx (\alpha^2/2)\cos\alpha > 0$

- au voisinage $\alpha \approx \pi/2$, on a $g(\alpha) \approx \alpha - 1 > 0$

on a donc toujours $g(\alpha) > 0$ sur $0 < \alpha < \pi/2$.

Conclusion :

$$E_{P \text{ MIN}}^{(1)} > E_{P \text{ MIN}}^{(2)}$$

Donc, l'énergie potentielle dans le cas « rotation sans roulement sur le plan incliné », qui serait

atteinte après que le disque ait tourné tel que $\beta = \pi$ correspondant à un équilibre pour le disque tournant sur lui-même sans translation, est supérieure à l'énergie potentielle obtenue après un roulement $\beta = \pi - \alpha$ correspondant à la minimisation de l'énergie potentielle pour le cas disque roulant sur le plan incliné.

Physiquement, cela signifie que :

- Puisque $\beta = \pi - \alpha$ est plus petit que $\beta = \pi$, l'altitude finale du centre d'inertie est plus petite avec $\beta = \pi - \alpha$ qu'avec $\beta = \pi$.
- Donc pour atteindre $\beta = \pi$, angle d'équilibre dans le cas d'un disque tournant sur lui-même sans rouler sur le plan incliné, le disque doit monter plus haut que pour atteindre $\beta = \pi - \alpha$, angle d'équilibre dans le cas du disque roulant sur le plan incliné : il lui faudrait faire une rotation d'angle supplémentaire égal à $\pi - (\pi - \alpha) = \alpha$.

Voilà qui résout le paradoxe.

D'ailleurs on pourrait le voir tout de suite en traçant $z = f(\beta)$ sur le domaine $0 < \alpha < \pi/2$ et $\beta \leq \pi$, et en constatant que $E_P(\pi) > E_P(\pi - \alpha)$ (la figure 8 montre que pour chaque inclinaison de la pente, les valeurs mini de z , atteintes pour $\pi - \alpha$, sont toujours plus petites que les valeurs de z en π).

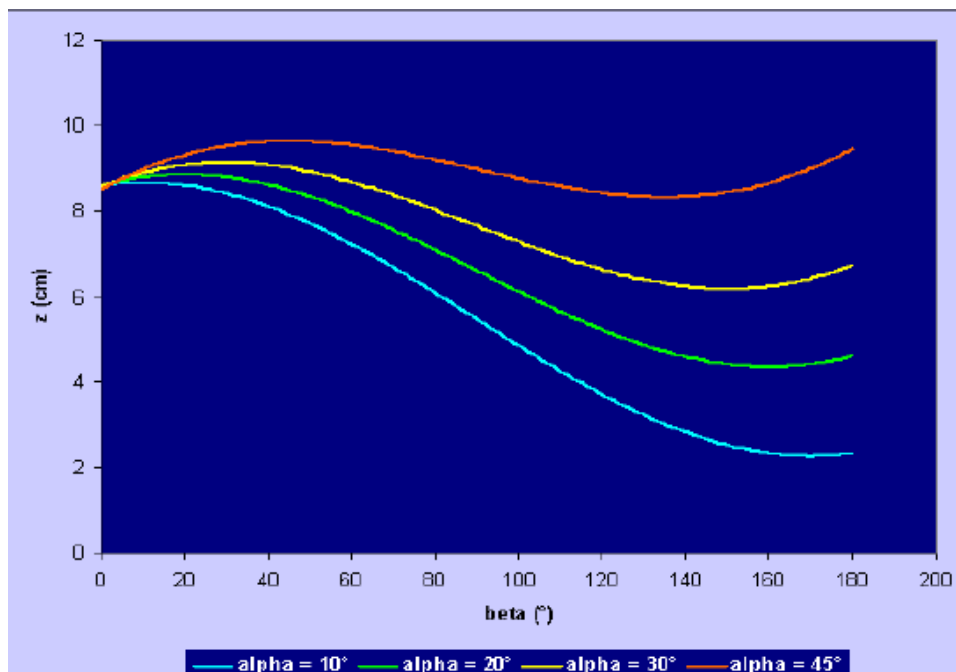


figure 8 – variation de l'altitude z du centre d'inertie en fonction de l'angle de rotation β pour quelques valeurs de l'inclinaison α du plan incliné

Pour l'expérience que nous allons effectuer plus loin, nous aurons besoin de la valeur de la distance à l'origine O du point de contact K' lorsque le disque atteint sa position d'équilibre. Pour cela (5) nous donne immédiatement, lorsque β atteint sa valeur d'équilibre (7) :

$$OK' = \frac{x_{K'}}{\cos \alpha} = r \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \pi - \alpha - \beta_0 \right) \quad (10)$$

La figure 9 montre la variation de OK' pour $\beta_0 \approx 0$ et sera comparée aux résultats « expérimentaux » obtenus.

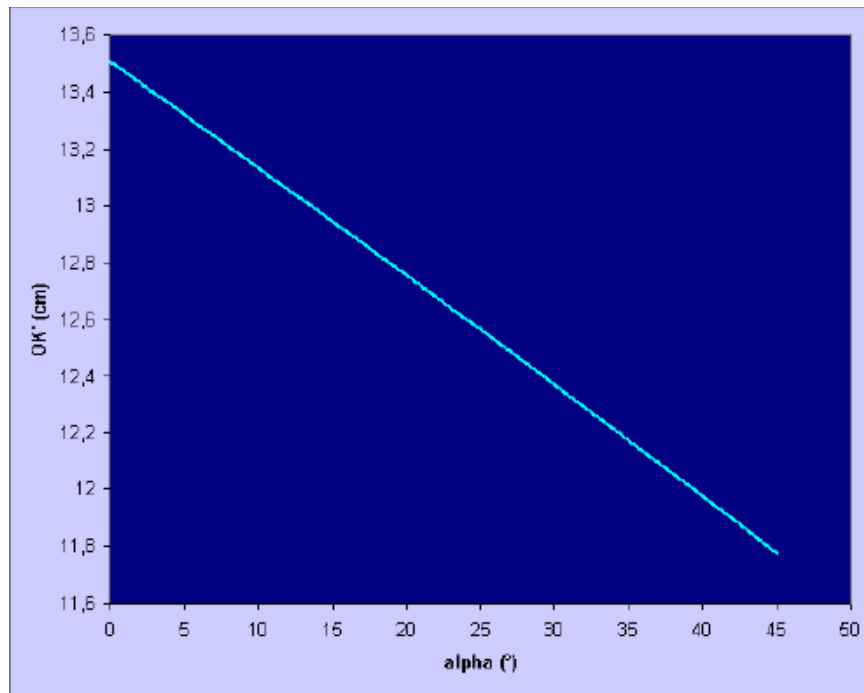


figure 9 – variation du point d'équilibre avec l'inclinaison du plan
($r = 4,3 \text{ cm}$; $\beta_0 \approx 0^\circ$)

3 - Expression de la vitesse du centre d'inertie dans le référentiel galiléen

On peut déduire les composantes de la vitesse du centre d'inertie G' dans le référentiel galiléen $R(Ox, z)$ en dérivant par rapport au temps les coordonnées (x, z) de G' données dans ce repère par les relations (6) et (3) : $\mathbf{V}_{G'/R} = (dx/dt, dz/dt)$:

- d'après (6) :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = r\dot{\beta} \cos \beta + r\dot{\beta} \cos \alpha \quad \text{où l'on a noté} \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$$

$$\dot{x} = r\dot{\beta}(\cos \beta + \cos \alpha) \quad (11a)$$

- d'après (3) :

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = r\dot{\beta} \sin \alpha - r\dot{\beta} \sin \beta$$

$$\dot{z} = r\dot{\beta}(\sin \alpha - \sin \beta) \quad (11b)$$

Remarque, exercice corrigé :

Dans le référentiel galiléen, la vitesse de G' se déduit de celle du centre du disque C' par la relation :

$$\mathbf{V}_{G'/R} = \mathbf{V}_{C'/R} + \dot{\beta} \mathbf{j} \times \mathbf{C}'G'$$

(voir figure 10), où $\mathbf{j}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Oy perpendiculaire au plan xOz , complétant la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.

a) Démontrer la relation ci-dessus, compte tenu du fait que le disque roule sans glisser sur le plan incliné (s'aider par exemple des principes rappelés dans l'article sur les armes de siège du Moyen-Age [2]).

Solution :

b) Le calcul ne pose aucune difficulté particulière. Les coordonnées de **OC'** dans (R) sont :

On voit immédiatement que:

$$z_{C'} = BC' = HK' + D'C'$$

$$z_{C'} = BC' = r \left(\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + (\beta - \beta_0) \sin \alpha \right) \quad (12b)$$
$$\begin{aligned} X &= x - x_C = r \sin\beta \\ Z &= z - z_C = r \cos\beta \end{aligned}$$

©Frédéric Élie, décembre 2009 - <http://fred.elie.free.fr> - page 12/21

$$\dot{x}_{C'} = r \dot{\beta} \cos \alpha$$

$$\dot{z}_{C'} = r \dot{\beta} \sin \alpha$$

Par ailleurs le produit vectoriel s'écrit :

$$\dot{\beta} \mathbf{j} \times \mathbf{C}' \mathbf{G}' = \dot{\beta} \mathbf{j} \times (r \sin \beta \mathbf{i} + r \cos \beta \mathbf{k}) = -\dot{\beta} r \sin \beta \mathbf{k} + \dot{\beta} r \cos \beta \mathbf{i}$$

Il en résulte que la vitesse de G' dans R(Oxz) est :

$$\mathbf{V}_{G'/R} = \mathbf{V}_{C'/R} + \dot{\beta} \mathbf{j} \times \mathbf{C}' \mathbf{G}' = (\dot{\beta} r \cos \alpha + \dot{\beta} r \cos \beta) \mathbf{i} + (\dot{\beta} r \sin \alpha - \dot{\beta} r \sin \beta) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}_{G'/R} = \dot{\beta} r (\cos \alpha + \cos \beta) \mathbf{i} + \dot{\beta} r (\sin \alpha - \sin \beta) \mathbf{k} \quad (13)$$

et l'on retrouve bien les composantes de la vitesse données par (11a) et (11b).

4 - Aspects dynamiques

On cherche maintenant l'équation du mouvement, c'est-à-dire les solutions $\beta = f(t)$. Pour cela on dispose d'au moins deux moyens :

- soit en calculant l'accélération de G' dans le référentiel galiléen R(Oz), puis en appliquant le principe fondamental de la dynamique ;
- soit en appliquant le théorème de l'énergie, le système étant supposé isolé. C'est ce que nous adoptons ici car la méthode est plus simple.

Soit $E_p = mgz$ l'énergie potentielle de G', et $E_C = 1/2 m V_{G'/R}^2$ son énergie cinétique. Son énergie mécanique E qui est leur somme est un invariant

$$E = E_p + E_C = \text{constante}$$

Donc sa dérivée temporelle est nulle. Comme z et la vitesse sont connues par (3) et (11) ou (13), il vient immédiatement :

$$V_{G'/R}^2 = r^2 \dot{\beta}^2 [(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2] = 2r^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos(\alpha + \beta))$$

et par conséquent :

$$E = m r^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos(\alpha + \beta)) + m g r \left[\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta + (\beta - \beta_0) \sin \alpha \right] \quad (14)$$

En écrivant que $dE/dt = 0$, on arrive, après quelques manipulations, à l'équation du mouvement de G' dans le référentiel galiléen R(Oxz) :

$$\ddot{\beta} - \frac{g}{2r} \sin \beta = \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \sin(\alpha + \beta) - \ddot{\beta} \cos(\alpha + \beta) - \frac{g}{2r} \sin \alpha \quad (15)$$

C'est une équation tout simplement diabolique : elle est non linéaire, elle comporte des termes sinusoïdaux et quadratiques qui ne peuvent même pas admettre des comportements asymptotiques, sauf au commencement du mouvement, pour lequel β est très petit, et pour des pentes négligeables (α petit).



Dans ce cas, on voit, en effet, que le premier terme, à gauche du signe « égal » est linéaire et que le terme source, à droite du signe « égal », est non linéaire mais peut être assimilé à $d^2\beta/dt^2$ dès lors que l'on pose approximativement $(\alpha + \beta) \ll 1$ et $\alpha \ll 1$, donc :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{g}{4r}\beta \approx 0$$

dont la solution, qui décrit le mouvement de G' aux tout premiers instants, est de la forme :

$$\beta(t) = \beta_0 \cosh \omega t$$

avec $\omega^2 = g/4r$, et comme condition initiale : $\beta(0) \approx \beta_0$ et $d\beta(0)/dt \approx 0$. Cette expression du mouvement initial de G' montre le caractère spontanément irréversible du mouvement du disque dans sa recherche d'un équilibre stable. La complexité du second terme dans (15) (non linéarité) introduit, au-delà d'une certaine durée, une perturbation complexe de ce mouvement, laquelle est contrainte globalement par un basculement irréversible vers la position d'équilibre stable final (autrement dit, les solutions de (15) ne montreront jamais un comportement oscillatoire amplifié : elles restent bornées, monotones et tendant vers une position d'immobilisation).

Remarques :

1 - L'énergie cinétique de G' s'écrit :

$$E_c = m r^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos(\alpha + \beta)) \quad (16)$$

Au point d'équilibre, où E_p est minimale, $\beta = \pi - \alpha$, on a $\cos(\alpha + \beta) = \cos\pi = -1$ donc $E_c = 0$: la vitesse de G' s'annule bien lorsque G' atteint K (on le vérifie d'ailleurs immédiatement avec (13)). En ce point, $z = z_K$, en effet :

$$(3) \rightarrow z(\beta = \pi - \alpha) = r \sin \alpha \cdot (\sin \frac{\alpha}{2} - \beta_0 + \pi - \alpha)$$

$$(4) \rightarrow z_K(\beta = \pi - \alpha) = r \sin \alpha \cdot (\sin \frac{\alpha}{2} - \beta_0 + \pi - \alpha) = z(\beta = \pi - \alpha)$$

E est alors égale à $E(\beta = \pi - \alpha)$, et (14) donne :

$$E = m g r \sin \alpha \cdot (\sin \frac{\alpha}{2} + \pi - \alpha - \beta_0) \quad (17)$$

A ce niveau, un problème apparaît : l'énergie mécanique E est supposée constante, donc sa valeur au point d'équilibre $\beta = \pi - \alpha$, donnée par (17), est aussi égale à sa valeur aux conditions

initiales $(\beta_0, (d\beta/dt)_0)$ et qui est, d'après (14) :

$$E = m r^2 \dot{\beta}_0^2 (1 + \cos(\alpha + \beta_0)) + m g r (\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta_0) \quad (18)$$

On s'aperçoit immédiatement que les conditions initiales vitesse nulle et angle nul ($\beta_0 = 0, (d\beta/dt)_0 = 0$) sont incompatibles avec (17). Physiquement, cela peut se comprendre : si G' est positionné initialement au sommet du disque et sans impulsion initiale, rien ne le fera entrer en rotation (il est en position d'équilibre instable et le moment dynamique de son poids est nul). Il en résulte que le disque doit nécessairement avoir une impulsion initiale et/ou que G' ne soit pas rigoureusement au sommet du disque à l'instant initial.

La compatibilité des conditions initiales avec la valeur de l'énergie à la position d'équilibre stable se traduit par l'égalité de (17) et (18). Elle impose donc que les conditions initiales ne sont pas quelconques mais doivent satisfaire :

$$\dot{\beta}_0 = \pm \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{\frac{(\pi - \alpha - \beta_0) \sin \alpha - \cos \beta_0 - \cos \alpha}{1 + \cos(\alpha + \beta_0)}} \quad (19)$$

qui est possible seulement si :

$$(\pi - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha > \cos \beta_0 + \beta_0 \sin \alpha \quad (20)$$

Cette condition (20) est satisfaite uniquement pour de grandes valeurs de α , ce qui n'est pas compatible avec l'observation qui montre une rotation du disque même pour de faibles inclinaisons.

En outre, écrire que l'énergie mécanique, supposée constante, est égale à la valeur prise au point d'équilibre $\beta = \pi - \alpha$, donnée par (17), conduit à une singularité en ce point. En effet l'égalité de (14) avec (17) fournit une vitesse angulaire qui devient indéterminée en ce point :

$$E = m r^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos(\alpha + \beta)) + m g r \left[\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta + (\beta - \beta_0) \sin \alpha \right] =$$

$$m g r \sin \alpha \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \pi - \alpha - \beta_0 \right)$$

permet d'exprimer la vitesse angulaire $d\beta/dt$ en fonction de β :

$$\dot{\beta} = \pm \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{\frac{(\pi - \alpha - \beta) \sin \alpha - \cos \beta - \cos \alpha}{1 + \cos(\alpha + \beta)}}$$

comme en (19). Au point d'équilibre $\beta = \pi - \alpha$ on a une indétermination du type « 0/0 ».

Conclusion : on n'a pas le droit de dire que l'énergie mécanique, telle qu'exprimée par (14), reste constante jusqu'au point d'équilibre. Autrement dit le système n'est pas conservatif tout au long du mouvement, entre β_0 et $\pi - \alpha$, et des forces de frottement doivent être prises en compte surtout lorsqu'on s'approche du point d'équilibre. (14) peut être acceptable au début du mouvement, mais certainement pas à la fin.

2 – En conséquence de la remarque qui précède, on doit considérer que l'énergie mécanique du système doit être égale à celle correspondant aux conditions initiales (dont on a vu qu'elles ne pouvaient pas être nulles). On pourra alors exprimer la vitesse angulaire en fonction de la position angulaire pourvu que celle-ci reste inférieure à la valeur finale $\pi - \alpha$. Cette approche permet, sans résoudre l'équation différentielle (15), de décrire qualitativement l'évolution du système dans l'espace de phase formé par les points figuratifs de coordonnées $\Omega(\beta, d\beta/dt)$. En

effet, de l'égalité :

$$E = m r^2 \dot{\beta}^2 (1 + \cos(\alpha + \beta)) + m g r \left[\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta + (\beta - \beta_0) \sin \alpha \right] =$$

$$E_0 = m r^2 \dot{\beta}_0^2 (1 + \cos(\alpha + \beta_0)) + m g r \left[\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta_0 \right]$$

on tire l'équation de la trajectoire du point figuratif dans le plan de phase :

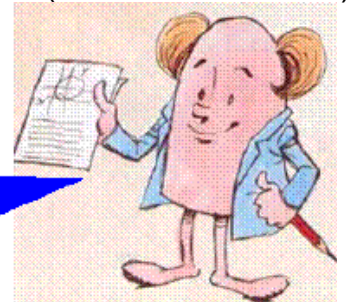
$$\dot{\beta} = \sqrt{\frac{\dot{\beta}_0^2 (1 + \cos(\alpha + \beta_0)) + \frac{g}{r} (\cos \beta_0 - \cos \beta) - \frac{g}{r} (\beta - \beta_0) \sin \alpha}{1 + \cos(\alpha + \beta)}} \quad (21)$$

(21) montre toujours une indétermination en $\beta = \pi - \alpha$, mais de toutes façons (21) n'est pas applicable en son voisinage.

La figure 12 montre quelques trajectoires du point figuratif, pour quelques valeurs de l'inclinaison du plan incliné α , et un rayon du disque r fixé. Les singularités apparaissent clairement en $\beta = \pi - \alpha$ (droites verticales). On s'aperçoit aussi que la vitesse angulaire ne tend pas à diminuer lorsqu'on s'approche du point d'équilibre, mais au contraire augmente, alors que nous avons vu que l'énergie cinétique s'y annule. Cela s'explique aisément si l'on se souvient que l'expression de l'énergie cinétique (16) n'est plus valable en présence de forces de frottement. Si l'ascension du disque le long du plan incliné finit par s'arrêter au point d'équilibre ou en son voisinage c'est grâce à la présence de forces de frottement, mais ce n'est sûrement pas grâce aux seuls effets d'inertie du système considéré comme isolé. Si le système était parfaitement isolé, absence de forces dissipatives, rien n'imposerait que la vitesse soit nulle au point où l'énergie potentielle est la plus faible car en ce point, sous cette hypothèse simplificatrice, on a affaire à une indétermination. A la limite, en ce point, il reste toujours un moment dynamique non nul, dû à la présence d'un bras de levier C'K' (figure 4) qui provient de ce que K' (le point « d'équilibre ») n'est pas sur la même verticale que C' (le centre de rotation), et donc le système ne peut pas y être en repos.

Donc ce que j'ai dit dans la remarque précédente à propos de l'équation (16) est incorrect : en $\beta = \pi - \alpha$, l'énergie cinétique n'est pas nulle, elle est indéterminée, et elle l'est parce que la vitesse angulaire est indéterminée, tout en ayant $\cos(\alpha + \beta) = -1$ en ce point.

Et oui, sous ses aspects simplistes, ce problème du disque qui remonte une pente sous l'effet de son seul poids concentré en un point de son pourtour, comporte des pièges fondamentaux !



La morale de cette histoire est que, en définitive, un modèle aussi simple que celui que j'ai employé pour prédire le mouvement d'un disque remontant un plan incliné, montre des incohérences ou des indéterminations pour certaines situations, et que cela conduit à identifier les limites de sa validité. Tout ne se réduit pas à résoudre des équations !... il faut faire aussi de la Physique. Un système est rarement isolé, ou sans phénomènes dissipatifs.

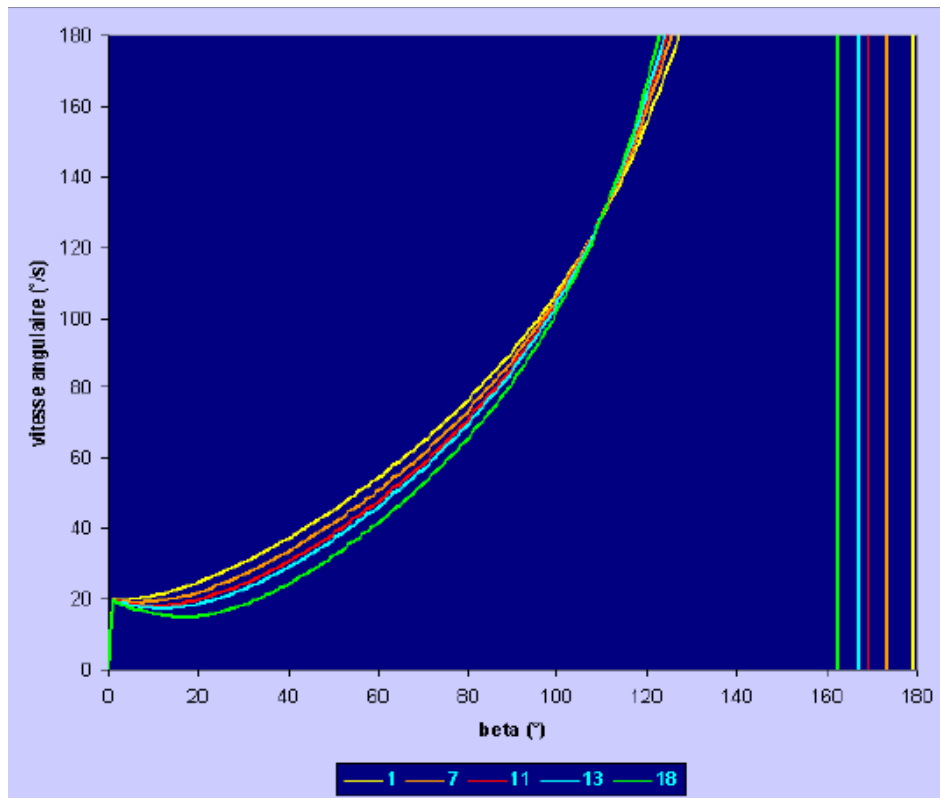


figure 11 – trajectoire du point figuratif de l'état du système, dans le plan de phase $(\beta, d\beta/dt)$, pour un disque remontant un plan incliné.

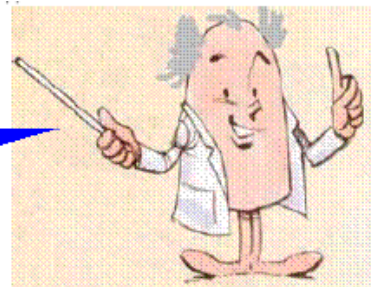
Les courbes sont paramétrées par l'angle d'inclinaison $\alpha = 1, 7, 11, 13$ et 18° , avec un rayon du disque $r = 4,3$ cm et une vitesse angulaire initiale $(d\beta/dt)_0 = 20^\circ/s$ et un angle initial $\beta_0 = 0^\circ$. Les singularités (traits verticaux) apparaissent pour les positions angulaires $\beta = \pi - \alpha$ qui correspondent théoriquement au minimum d'énergie potentielle pour un système supposé parfaitement isolé (non dissipatif). Elles disparaîtraient si l'on introduisait les frottements réels.

3 – Recommandation importante :

Si l'on n'y prend pas garde, on serait tenté de paramétrer la trajectoire du point figuratif $\Omega(\beta, d\beta/dt)$ par l'énergie E du système, et d'exprimer alors la vitesse angulaire en fonction de la position angulaire par :

$$\dot{\beta} = \pm \sqrt{\frac{E - m g r \left(\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + \cos \beta + (\beta - \beta_0) \sin \alpha \right)}{m r^2 (1 + \cos(\alpha + \beta))}}$$

Là aussi, le plus grand ennemi de la vigilance est l'habitude !...



cela conduit à des absurdités parce que l'énergie E est elle-même paramétrée par l'angle d'inclinaison α (ainsi que par les conditions initiales). C'est l'expression (21) qui doit être employée.

5 - Manipulation expérimentale

J'ai essayé de comparer les valeurs théoriques de la figure 10 avec des relevés obtenus par une manipulation sommaire (figure 11) : contre la paroi circulaire d'une boîte plate vide cylindrique j'ai collé un mastic assez ponctuel et dense, et j'ai aménagé un plan incliné dont l'inclinaison peut être modifiée. Le repérage angulaire est facilité par un papier quadrillé vertical au contact du plan incliné et sur lequel on trace la pente de ce dernier, puis on la mesure au rapporteur. La distance OK' est repérée grâce à une règle graduée rigide. Ce dispositif sommaire a permis d'obtenir les valeurs suivantes, avec les photos correspondantes :

Inclinaison α (°)	Distance OK' (cm)	Photo
1	12,5	2
2	12,8	3
4	12,8	4
5	12	5
6	11	-
7	10,5	-
11	11	-
13	10	-
18	6,5	6

Le dispositif initial (avec $r = 4,3$ cm, rayon du disque) est représenté à la photo 1.

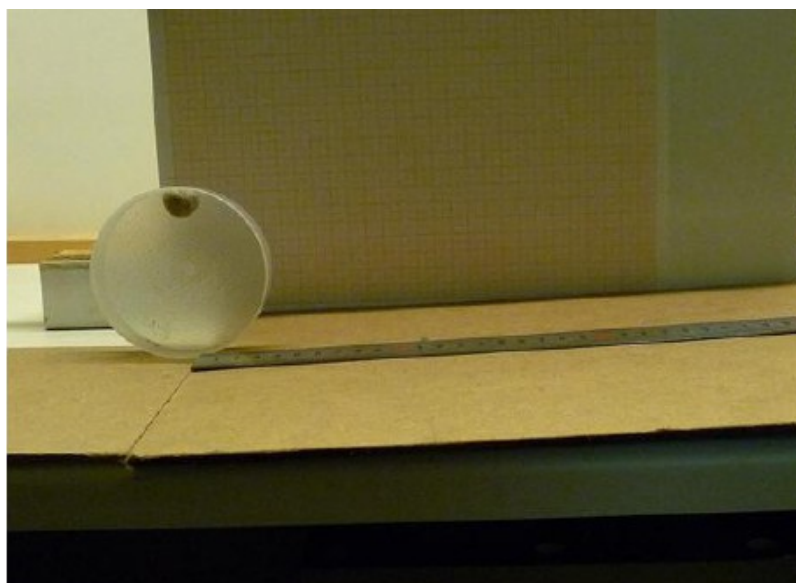


photo 1 – dispositif utilisé

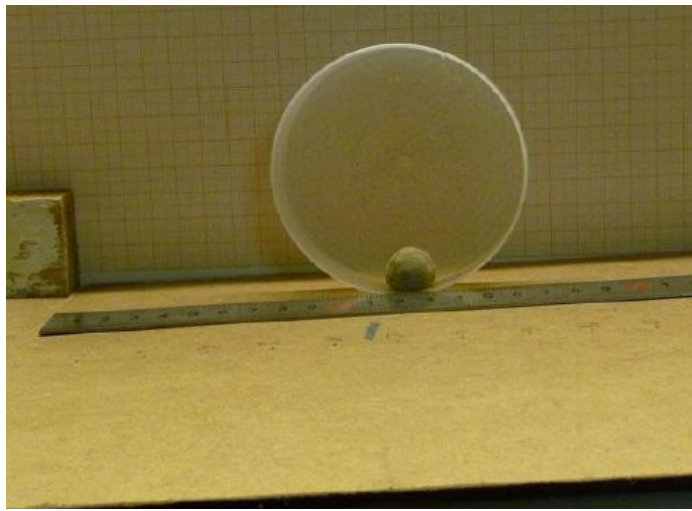


photo 2 – inclinaison 1°

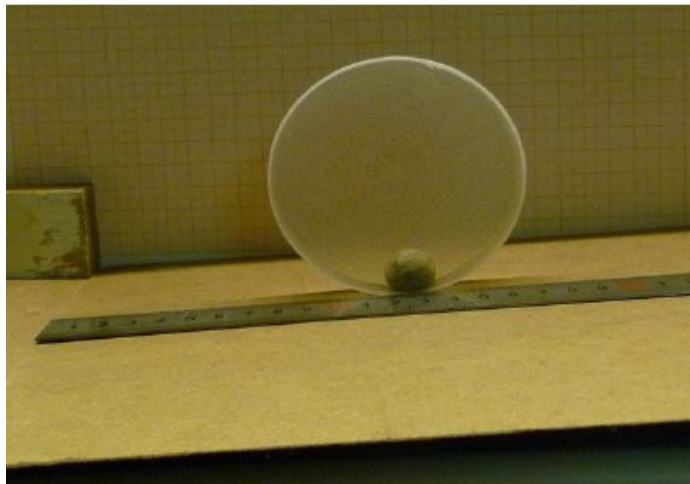


photo 3 – inclinaison 2°

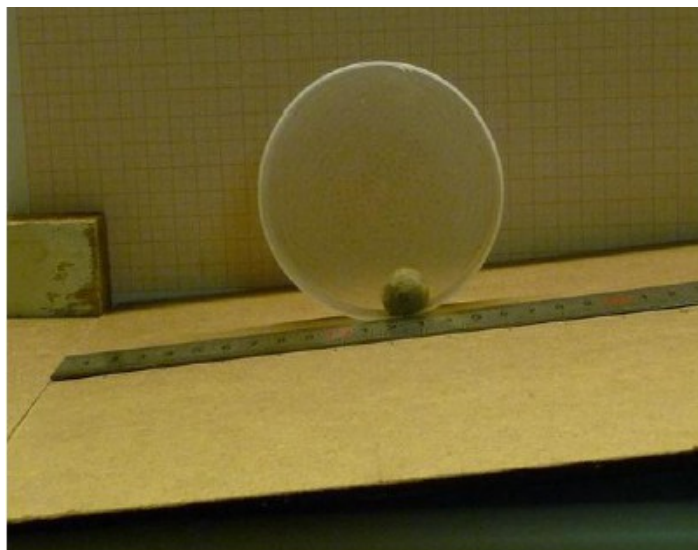


photo 4 – inclinaison 4°

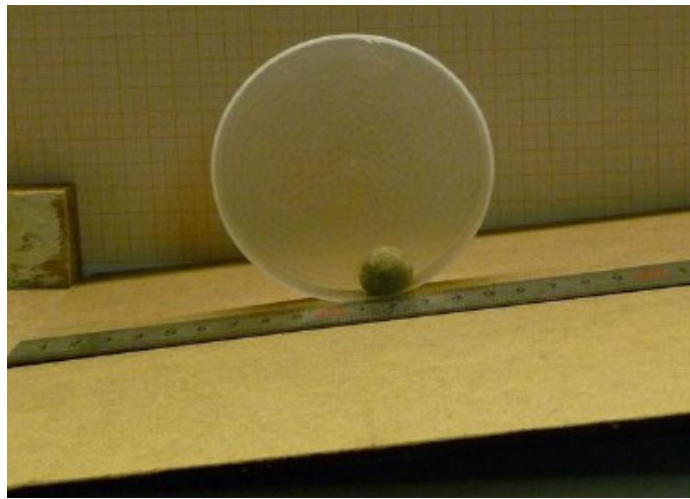


photo 5 – inclinaison 5°



photo 6 – inclinaison 18° : la position d'équilibre n'est manifestement plus $\beta = \pi - \alpha$

Les résultats sont sur la figure 11 :

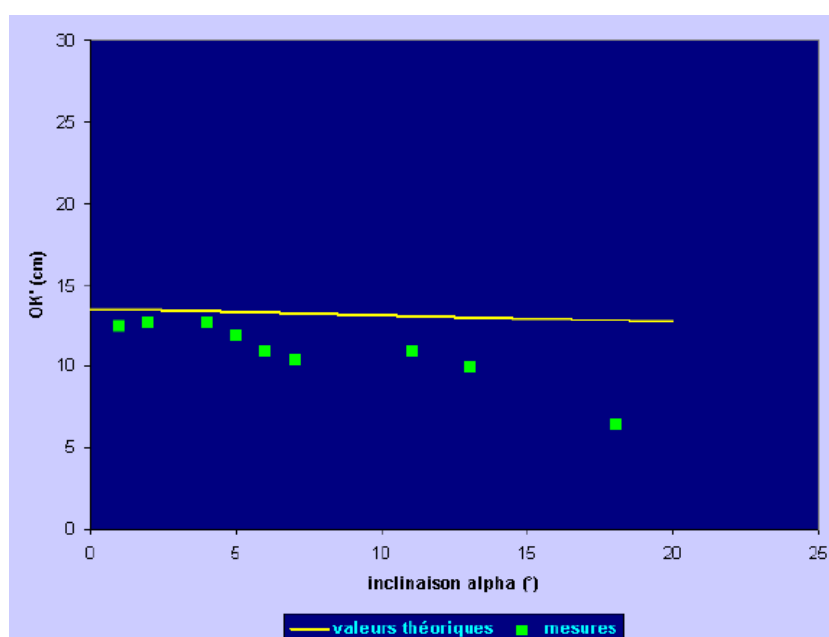


figure 11 – comparaison des valeurs « mesurées » avec le modèle ($r = 4,3 \text{ cm}$)

Commentaires :

- la position d'équilibre théorique est surévaluée par rapport aux valeurs théoriques.
- L'écart augmente avec l'inclinaison.
- A partir d'une inclinaison de 7° , la position de G' à l'équilibre est complètement différente de sa position théorique (photo 6, pour $\alpha = 18^\circ$)

Ces écarts avec le modèle peuvent s'expliquer ainsi :

- imprécision de la manipulation et des relevés
- masse G' peu ponctuelle, les effets du moment d'inertie du disque et de sa masselotte ne sont pas pris en compte et sont complexes
- effets de frottement, surtout pour des inclinaisons importantes
- angle initial différent de zéro
- il y a obligatoirement une impulsion initiale, même légère, pour mettre en mouvement le disque, car il faut vaincre les forces de frottement
- et comme on l'a déjà signalé, le modèle théorique est trop simpliste et conduit à des absurdités si on applique aveuglément le théorème de l'énergie mécanique aux positions extrêmes.

Bibliographie

- [1] Tom Tit : *La science amusante* – Librairie Larousse, 1892, réimprimé par MAME Imprimeurs, Tours, octobre 2005
- [2] Frédéric Élie : *Des armes du Moyen Age, mangonneau et trébuchet* – site fred.elie.free.fr (août 2007)