ACCUEIL
Frédéric Elie on ResearchGate

Loi de l'émission du rayonnement (loi de Planck): une démonstration quantique

Frédéric Élie

2003

Copyright France.com
La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : La loi de l'émission du rayonnement des corps, qui donne la densité spectrale de puissance en fonction de la température de ce corps (la fameuse loi d'émission de Planck), se démontre directement à partir de la physique quantique (v. [1]). C'est ce qui est proposé dans le présent article.

On décompose le champ électromagnétique en ses modes normaux de vibration que l'on assimile à des ondes planes supposées stationnaires dans l'une des directions (par exemple l'axe Oz):

$$A_z\,(z,t) = A\,q(t)\cos(kz + \delta)$$

où l'amplitude est solution de l'équation harmonique:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

L'onde électromagnétique est la combinaison d'un champ électrique et d'un champ magnétique:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{H} = rot\,\vec{A}$$

d'où:

$$E_x = -\frac{1}{c} A\,\dot{q}\cos(kz + \delta)$$
$$H_y = kA\,q\sin(kz + \delta)$$

Énergie électromagnétique transportée par le champ dans un volume V:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (E^2{}_x + H^2{}_y)\,dV = \frac{VA^2}{8\pi c^2}\frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$$

qui est de même forme que l'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence f = ω/2π et de masse m = VA²/8πc². En mécanique quantique, un tel oscillateur a des états stationnaires discrets n = 0, 1, 2, … d'énergies hf(n + ½) (voir [2]), h est la constante de Planck: n est le nombre de photons d'énergie élémentaire hf associés à l'onde plane.
On considère maintenant un ensemble d'ondes planes de diverses fréquences, suivant Ox, Oy, Oz, d'énergies supposées additives (pas d'interférences): mélange de photons indépendants, en interaction avec les électrons d'un atome, les électrons étant animés d'une vitesse $\vec{v}$.
L'énergie d'interaction photons-électrons est donc (ou hamiltonien):

$$H' = -\frac{e}{c}\vec{v}.\vec{A}(0) = -\frac{e}{c}v_x q\, A\cos\delta$$

La matrice de transition magnétique entre l'état initial (i) et l'état final (f) a pour composantes:

$$H'_{if} = -(e/c)\, A\cos\delta\, (v_x\, q)_{if} = -(e/c)\, A\cos\delta\, v_{ab}\, q_{nn'}$$

(a,b) désigne les états de l'atome et (n,n') désigne les états de l'oscillateur. D'après le formalisme de Heisenberg [2]:

$$v_{ab} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{ab} = \frac{d}{dt}(x_{ab}) = 2\pi\, j\, f_{ab} x_{ab}$$

avec $f_{ab} = (E_a - E_b)/h$, et où x_{ab} est l'élément de matrice de l'opérateur coordonnée x de l'électron. D'où:

$$H'_{if} = -(e/c)\, A\cos\delta\, 2\pi j f_{ab}\, x_{ab}\, q_{nn'}$$

que l'on applique à l'émission spontanée: à l'état initial i, l'atome est dans un état excité (a) sans photons (n = 0), et à l'état final (f) l'atome est dans un état (b) avec au moins 1 photon. Pour un oscillateur harmonique, les seuls éléments $q_{nn'}$ non nuls sont ceux pour lesquels n' = n ± 1, on peut donc considérer uniquement q_{01} (émission d'un seul photon) d'énergie hf_{ab}. Or, toujours d'après le formalisme de Heisenberg, entre l'émission et l'absorption d'un seul photon, on a la relation: $q_{01}q_{10} = h/(4\pi m\omega_0)$, soit ici:

$$|q_{10}|^2 = \frac{h}{4\pi m\omega_{ab}} = \frac{hc^2}{\pi vA^2 f_{ab}}$$

On obtient la probabilité de transition par unité de temps en calculant:

$$P_{if} = |H'_{if}|^2\, 4\pi^2/h^2 \rho(f_{ab})$$

où ρ est la densité des états de fréquence f. les photons sont des particules de quantité de mouvement (relation de De Broglie):

$$p = hf/c$$

d'où la probabilité élémentaire de trouver un photon dont la quantité de mouvement est comprise entre p et p+dp dans le volume V:

$$\rho(p)\,dp = \frac{V}{h^3} d\left(\frac{4}{3}\pi\rho^3\right) = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 df = \rho(f)\,df$$

Comme il faut tenir compte des deux états de polarisation du photon, il vient:

$$\rho(f)=\frac{8\pi V}{c^3}f^2$$

L'émission est supposée isotrope (probabilités égales dans toutes les directions), d'où: $|x_{ab}|^2 = 1/3\ |r_{ab}|^2$. La position de l'origine des coordonnées de l'atome étant arbitraire, on prend la moyenne des valeurs possibles de $\cos^2\delta$ qui vaut ½.
L'énergie I rayonnée par seconde est alors:

$$I=hf_{ab}P_{if}=hf_{ab}\frac{4\pi^2}{h^2}|H'_{if}|^2\rho(f_{ab})$$

$$= hf_{ab}\frac{4\pi^2}{h^2}\frac{e^2}{c^2}4\pi^2A^2(f_{ab})^2\frac{1}{3}|r_{ab}|^2\overline{\cos^2\delta}\frac{hc^2}{\pi VA^2f_{ab}}\frac{8\pi V}{c^3}(f_{ab})^2=\frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}f_{ab}^4|r_{ab}|^2$$

Si l'état initial est un rayonnement contenant n photons dans le même état, alors:

$$|q_{n,n+1}|^2 = (n+1)\ |q_{01}|^2$$

Cas de l'absorption: dans l'état (i) l'atome est dans le niveau (b) avec n quanta, et dans l'état (f) il est dans l'état (a) avec n-1 quanta. Alors:

$$q_{n,n-1} = q^*_{n-1,n}$$
$$|q_{n,n-1}|^2 = n|q_{01}|^2$$

(où * désigne la quantité conjuguée complexe). À l'équilibre thermique le nombre d'émissions compense en moyenne celui des absorptions. Le nombre d'ondes planes dans l'intervalle de fréquences f, f+df est noté: ρ(f)df. Le nombre total de photons que ces ondes contiennent est: n(f)df.

- La probabilité qu'a un atome dans l'état (a) d'émettre un photon d'énergie hf est proportionnelle à la somme des deux densités précédentes: n(f)+ρ(f);
- La probabilité qu'a un atome dans l'état (b) d'absorber un photon d'énergie hf est proportionnelle à la densité n(f);
- Soit N_a le nombre d'atomes dans l'état (a), et N_b celui dans l'état (b).

Alors, la condition d'équilibre statistique entre photons hf et les atomes dans les états (a) et (b) s'écrit:

$$N_a(n(f)+\rho(f)) = N_b n(f)$$

d'où:

$$n(f)=\frac{\rho(f)}{\frac{N_b}{N_a}-1}$$

or d'après la loi de Boltzmann [3]:

$$\frac{N_a}{N_b}=\frac{\exp -E_a/kT}{\exp -E_b/kT}=\exp -hf_{ab}/kT$$

où k est la constante de Boltzmann; d'où le nombre moyen de photons hf dans l'intervalle de fréquence df en équilibre avec les atomes à la température T:

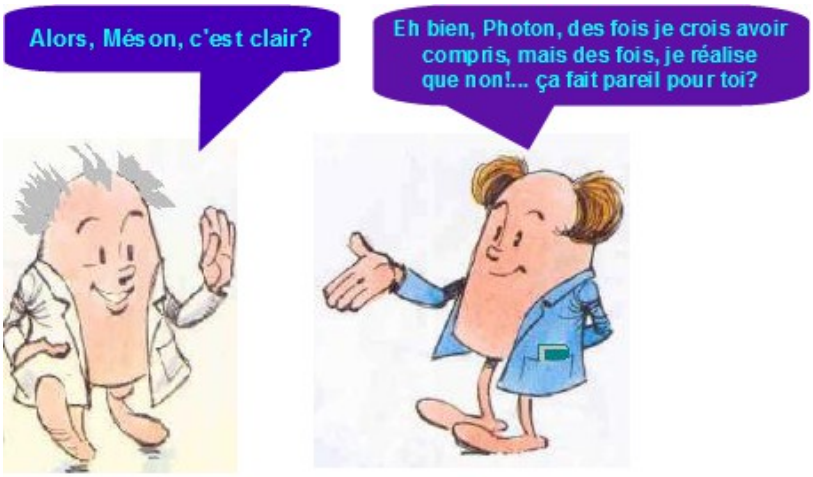
$$n(f)\,df=\frac{\rho(f)\,df}{\exp hf/kT-1}$$

l'énergie de rayonnement par intervalle de fréquence df (en fait une action par unité de volume), $u_f df$, est obtenue en multipliant le nombre moyen n(f)df par leur énergie hf:

$$u_f = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{\exp(hf/kT) - 1}$$

C'est la formule de Planck. u_f représente la densité d'énergie W par unité de volume et de fréquence:

$$u_f = \frac{d}{dV}\left(\frac{dW}{df}\right)$$ (en J/m^3/Hz soit: Jsm^{-3})



Références:

[1] Max Born: *Structure atomique de la matière* – Armand Colin, Paris, 1971

[2] Edgard Elbaz: *Quantique* - éd. Marketing, coll. Ellipses, Paris 1995

[3] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet: *Physique statistique* – Hermann 2001