ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

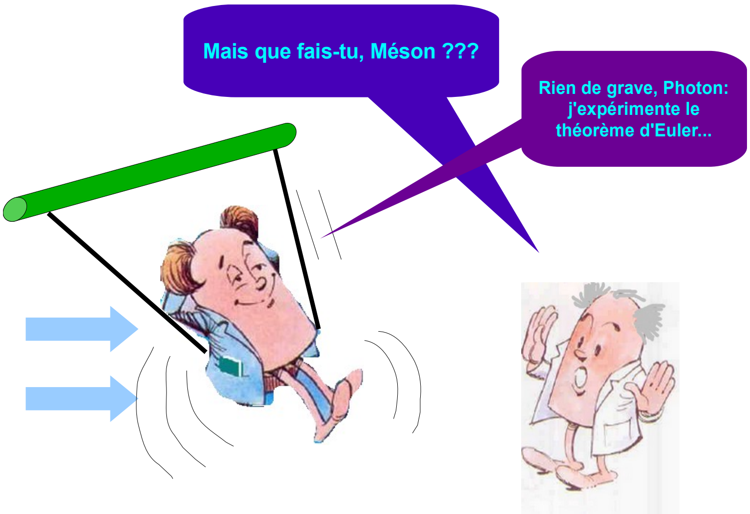
Équilibre d'une plaque soumise à l'action d'un écoulement: une application du théorème d'Euler

Frédéric Élie

avril 2014

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Un dispositif très simple, tel une plaque pouvant s'incliner, soumise à un écoulement régulier, permet, dans certaines limites, de mesurer la vitesse de cet écoulement. Le principe exploite le théorème d'Euler en mécanique, qui est présenté dans le présent article.



SOMMAIRE

0 – Présentation

Voici un dispositif très simple qui permet d'évaluer la vitesse d'un écoulement constant et uniforme.

Une plaque homogène carrée, de côté b et de masse m, est maintenue en équilibre dans un jet de fluide horizontal et stationnaire. La plaque peut tourner en O autour d'un axe horizontal, perpendiculaire au plan de l'écoulement (figure 1).

Le jet est assimilé à un cylindre d'axe horizontal de section S, de vitesse U. La zone où il rencontre la plaque a pour centre le point A, lequel est distant de l'axe O de D.

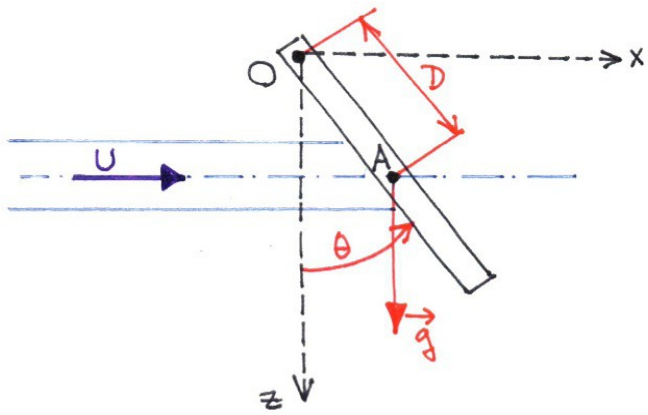


Figure 1

A l'équilibre, la plaque fait avec la verticale un angle θ qui est relié à U et aux dimensions de la plaque. Pour déterminer θ nous allons avoir besoin du théorème d'Euler en mécanique, que nous rappelons ci-après.

1 – Systèmes ouverts en mécanique: théorème d'Euler

En mécanique, les systèmes *dynamiquement* ouverts sont définis par un ensemble matériel délimité par une surface *géométriquement* fermée (S) à travers de laquelle il y a échange avec le milieu extérieur d'énergie et de matière (exemple: une fusée dont la masse varie parce qu'elle envoie à l'extérieur une quantité d'énergie qui la fait avancer par réaction). (S) est appelée ***surface de contrôl****e*.
A travers la surface de contrôle (S) la quantité de masse entrante est notée dm_e, et la quantité de masse sortante est notée dm_s. Le bilan de masse dans le volume enfermé dans (S) est donc:

$$dm = dm_e - dm_s$$

soit, par unité de temps:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_s}{dt}$$

Avec les notations usuelles: $q_{m,e} = dm_e/dt$ et $q_{m,s} = dm_s/dt$, on a donc la relation de conservation de la masse:

$$\frac{dm}{dt} = q_{m,e} - q_{m,s} \quad (1)$$

NB: en régime stationnaire dm/dt = 0 (pas d'évolution de la masse du système mécanique), donc on a: $q_{m,e} = q_{m,s}$.

Entre deux instants infiniment voisins t+dt et t, la variation de la masse est:

$$m(t+dt) - m(t) = dm = dm_e - dm_s$$

d'où:

$$m(t+dt) + dm_s = m(t) + dm_e$$

Soit $\vec{F}$ la somme des forces extérieures appliquées au système mécanique délimité par la surface de contrôle (S), et soit $\vec{P}$ la quantité de mouvement de ce système; d'après le principe fondamental de la dynamique le système prend une vitesse $\vec{V}$ telle que:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{V})=\frac{dm}{dt}\vec{V}+m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Or le 2e terme, $m\frac{d\vec{V}}{dt}$, est égal à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\vec{P}_F$ du système considéré comme fermé, c'est-à-dire sans échange de matière avec l'extérieur:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{V}+\frac{d\vec{P}_F}{dt}$$

avec donc $d\vec{P}_F/dt=m\,d\vec{V}/dt$
Or, d'après (1), dm/dt = $q_{m,e}-q_{m,s}$, d'où:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=(q_{m,e}-q_{m,s})\vec{V}+\frac{d\vec{P}_F}{dt}$$

$d\vec{P}_F/dt$ est par définition (principe fondamental de la dynamique) égale à la somme des forces extérieures $\vec{F}$ appliquées au système. On a donc:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}+(q_{m,e}-q_{m,s})\vec{V} \quad (2)$$

C'est le ***théorème de la quantité de mouvement pour un système ouvert***: la variation de la quantité de mouvement d'un système ouvert est égale à la force exercée sur le système, considéré comme fermé (sans échange de matière) augmentée du flux d'échange de matière avec l'extérieur.

Il résulte de (2) que, en régime stationnaire $d\vec{P}_F/dt=0$ on a:

$$\vec{F}=(q_{m,s}-q_{m,e})\vec{V} \quad (3)$$

(3) exprime le ***théorème d'Euler pour la quantité de mouvement***.

Qu'en est-il alors du moment cinétique?

Soit $\sigma_{\vec{F},O}$ le moment cinétique par rapport à un point O pour le système considéré comme fermé. Le théorème du moment cinétique énonce alors que le moment dynamique $M_{\vec{F},O}$ des forces extérieures $\vec{F}$ par rapport à O est égal à la dérivée par rapport au temps de $\sigma_{\vec{F},O}$:

$$M_{\vec{F},O}=\frac{d\sigma_{\vec{F},O}}{dt}$$

Si A_e et A_s sont les points d'entrée et de sortie de la matière du système ouvert, le moment cinétique correspondant par rapport à O est:

$$d\vec{\sigma}_O = dm_e \overrightarrow{OA_e} \wedge \vec{V}_e - dm_s \overrightarrow{OA_s} \wedge \vec{V}_s + d\vec{\sigma}_{F,O}$$

où $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_s$ sont les vitesses en ces points.
D'où le moment dynamique total:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_{F,O}}{dt} + \left(\frac{dm_e}{dt} \overrightarrow{OA_e} \wedge \vec{V}_e - \frac{dm_s}{dt} \overrightarrow{OA_s} \wedge \vec{V}_s \right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{M}_{F,O} + \left(q_{m,e} \overrightarrow{OA_e} \wedge \vec{V}_e - q_{m,s} \overrightarrow{OA_s} \wedge \vec{V}_s \right) \quad (4)$$

(4) est le ***théorème du moment cinétique pour un système ouvert***: la variation du moment cinétique d'un système ouvert est égale au moment dynamique de la force exercée sur le système considéré comme fermé, augmentée du bilan des moments cinétiques associés aux masses entrantes et sortantes échangées avec l'extérieur (figure 2).

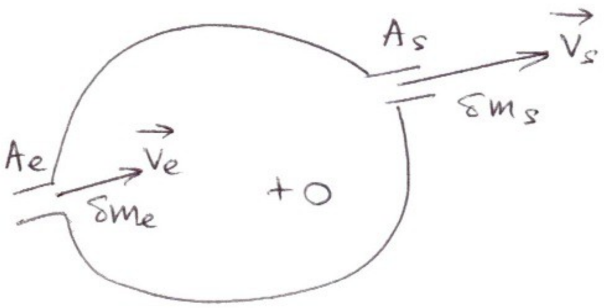


figure 2

NB: Les points d'entrée et de sortie de la matière, A_e et A_s, peuvent être multiples.
Exemple: ***tourniquet hydraulique*** (figure 3).

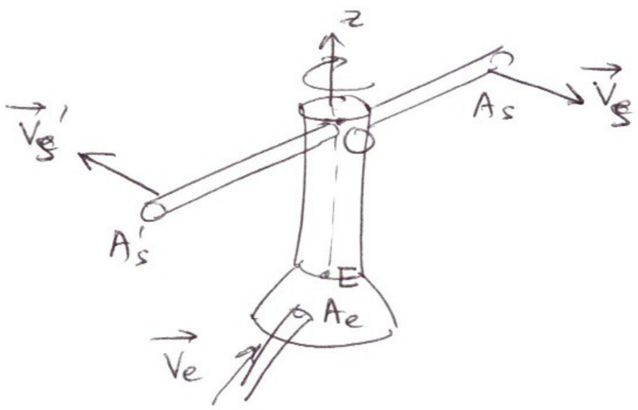


figure 3 – entrée et sortie de la matière dans un tourniquet hydraulique

Dans cet exemple, l'application de (4) s'écrit:

$$\vec{M}_O = 0 = \vec{M}_{F,O} - \left(\overrightarrow{OA_s} \wedge \frac{dm_s}{dt} \vec{V}_s + \overrightarrow{OA'_s} \wedge \frac{dm_s}{dt} \vec{V}'_s \right) + \overrightarrow{OE} \wedge \frac{dm_e}{dt} \vec{V}_e$$

relation que nous proposons de développer dans un autre article sur le tourniquet hydraulique (il y a des volontaires?).

Il résulte de (4) que, en régime stationnaire ($d\vec{\sigma}_O / dt = 0$) on a:

$$\vec{M}_{F,O}=q_{m,s}\overrightarrow{OA}_s\wedge\vec{V}_s-q_{m,e}\overrightarrow{OA}_e\wedge\vec{V}_e \quad (5)$$

Soient dW_E et dW_I les travaux élementaires des forces extérieures et intérieures appliquées au système ouvert. Alors, si le système est considéré comme fermé, la variation de son énergie cinétique est:

$$dE_{c,F} = dW_E + dW_I$$

Pour le système ouvert, en revanche, il faut ajouter à l'énergie cinétique $dE_{c,F}$ du système considéré comme fermé, la variation d'énergie cinétique associée au bilan de masse échangée avec l'extérieur:

$$\tfrac{1}{2}\, dm_e V_e^2 - \tfrac{1}{2}\, dm_s V_s^2$$

donc la variation de l'énergie cinétique totale du système ouvert est:

$$dE_C=dE_{C,F}+\frac{1}{2}\left(dm_e V^2{}_e-dm_s V^2{}_s\right) \quad (6)$$

d'où les puissances mécaniques:

$$P=\frac{dE_C}{dt}=\frac{dE_{C,F}}{dt}+\frac{1}{2}\left(q_{m,e}V^2{}_e-q_{m,s}V^2{}_s\right)$$

Comme $dE_{C,F}/dt = P_F$ est la puissance mécanique pour le système considéré comme fermé, il vient:

$$P=P_E+P_I=P_F+\frac{1}{2}\left(q_{m,e}V^2{}_e-q_{m,s}V^2{}_s\right) \quad (7)$$

En régime stationnaire (P = 0) on a le ***théorème d'Euler pour l'énergie cinétique d'un système ouvert***:

$$P_F=\frac{1}{2}\left(q_{m,s}V^2{}_s-q_{m,e}V^2{}_e\right) \quad (8)$$

2 – Équilibre de la plaque soumise à un écoulement

La masse du fluide « entrante » est en A (donc A = A_e dans les équations du §1 ci-dessus), avec la vitesse $\vec{V}_e$. Sa variation est:

$$q_{m,e}=\frac{dm_e}{dt}=\frac{d}{dt}(\rho S x)=\rho S\frac{dx}{dt}=\rho S U$$

la masse du fluide « sortante » est également en A (donc A = A_s) avec la vitesse $\vec{V}_s$ et:

$$q_{m,s}=\frac{dm_s}{dt}$$

le moment dynamique de la plaque, en son centre d'inertie G, par rapport à O, est celui de son poids $m\vec{g}$:

$$\vec{M}_{F,O}=\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{g}$$

L'application du théorème d'Euler pour le moment cinétique donne alors ici:

$$\vec{M}_{F,O}=\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{g}=q_{m,s}\overrightarrow{OA}_s\wedge\vec{V}_s-q_{m,e}\overrightarrow{OA}_e\wedge\vec{V}_e$$

Hypothèse: la sortie de la masse de fluide en A se fait le long de la paroi, donc dans la direction $\overrightarrow{OA}$, on a donc $\vec{V}_s$ parallèle à $\overrightarrow{OA}_s = \overrightarrow{OA}$ donc $q_{m,s} \overrightarrow{OA}_s \wedge \vec{V}_s = 0$. Il reste donc:

$$\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = -\rho S U \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_e$$

avec $\vec{V}_e = U\vec{e}_x$, $\overrightarrow{OA} = D\sin\theta\,\vec{e}_x + D\cos\theta\,\vec{e}_z$, $\vec{g} = g\vec{e}_z$, $\overrightarrow{OG} = \frac{b}{2}\sin\theta\,\vec{e}_x + \frac{b}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z$

d'où:

$$\left(\frac{b}{2}\sin\theta\,\vec{e}_x + \frac{b}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z\right) \wedge mg\,\vec{e}_z = -\rho S U\,(D\sin\theta\,\vec{e}_x + D\cos\theta\,\vec{e}_z) \wedge U\vec{e}_x$$

$$-\frac{b}{2} mg\sin\theta\,\vec{e}_y = -\rho\,SU^2 D\cos\theta\,\vec{e}_y$$

d'où:

$$\tan\theta = \frac{2\rho\,SU^2 D}{bmg} \quad (9)$$

NB: L'expression (9) faisant intervenir la tangente de l'angle d'inclinaison de la plaque, elle devient vite inexploitable pour des vitesses élevées (d'autant qu'elles interviennent par leur carré) car tanθ tend rapidement vers l'infini. C'est le même problème constaté dans l'article [2].

En pratique, la section S est celle de la buse de sortie du jet si elle n'est pas trop loin de la plaque: par exemple celle d'un sèche-cheveux.
Pour vous en convaincre voici l'expérience et ses limites, avec les données suivantes, que les lecteurs courageux pourront effectuer:

AN: $S = 0{,}008\ m^2$
$U = 5\ m/s$
$D = b/2 = 0{,}4\ m$
$m = 0{,}1\ kg$
$\rho = 1{,}3\ kg/m^3$ (air)
on doit trouver environ: $\tan\theta = 0{,}265 \rightarrow \theta = 15°$

Références:

[1] J. P. Pérez: Mécanique, fondements et applications – Dunod, 2001

[2] Frédéric Élie: Essais de topographie très sommaire à Notre-Dame du Mai – site http://fred.elie.free.fr, mai 2012