



Frédéric Elie on  
ResearchGate

## Focométrie des lentilles minces (méthode de Bessel et Silbermann)

Frédéric Elie

février 2008

CopyrightFrance.com

*La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.*

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

**Abstract :** On peut déterminer la distance focale d'une lentille en obtenant l'image nette d'un objet projetée sur un écran. Deux méthodes sont présentées dans cet article : la méthode de Bessel et celle de Silbermann. Elles utilisent les relations de l'optique géométrique pour les systèmes centrés, dans le cas simplifié où les rayons qui traversent la lentille et atteignent l'écran sont proches de l'axe optique (approximation paraxiale ou approximation de Gauss).

### SOMMAIRE

- 1 - Comment projeter une image sur un écran ?
- 2 - Éléments cardinaux des systèmes optiques centrés et formules de conjugaison
  - 2-1 - Stigmatisme d'un système centré : condition des sinus d'Abbe et condition de Herschel
  - 2-2 - Approximation de Gauss (ou approximation paraxiale)
  - 2-3 - Relations de conjugaison d'un dioptré sphérique en approximation de Gauss
  - 2-4 - Matrice de translation dans un milieu de même indice
  - 2-5 - Formules de conjugaison dans les systèmes centrés en approximation de Gauss
- 3 - Focométrie par méthode de Bessel et de Silbermann
- Annexe : démonstration de la relation de conjugaison du dioptré sphérique en approximation de Gauss

### 1 - Comment projeter une image sur un écran ?

Bien que l'emploi des vidéoprojecteurs connectés aux ordinateurs soit de plus en plus courant pour projeter des images ou des vidéos sur un écran, on peut toujours avoir besoin d'utiliser un système optique, du type rétroprojecteur ou projecteur de diapositives, pour projeter les images d'un objet réel.

Pour cela, on intercale l'objet que l'on veut projeter entre une source lumineuse et une lentille convergente que l'on place à une certaine distance de l'écran. Si l'on fixe la distance entre l'objet et l'écran, la question qui se pose ici est de savoir quelle doit être la distance entre l'objet et la lentille pour obtenir une image projetée nette sur l'écran ?

Nous allons voir qu'il existe deux positions possibles de la lentille pour satisfaire cette condition et qu'elles dépendent de la distance entre l'objet et l'écran et de la distance focale de la lentille. Hormis l'intérêt pratique que la connaissance de ces positions apporte pour projeter correctement l'image d'un objet, elle peut être mise à profit comme méthode de mesure d'une distance focale d'une lentille : c'est ce que l'on appelle la focométrie, et dans le cas présenté il

s'agit de la **méthode de Bessel et Silbermann**.

On s'intéresse au cas d'un objet très diffusant, c'est-à-dire dont chacun de ses points réémet la lumière dans toutes les directions.

Le dispositif et les notations sont alors présentés à la figure 1.

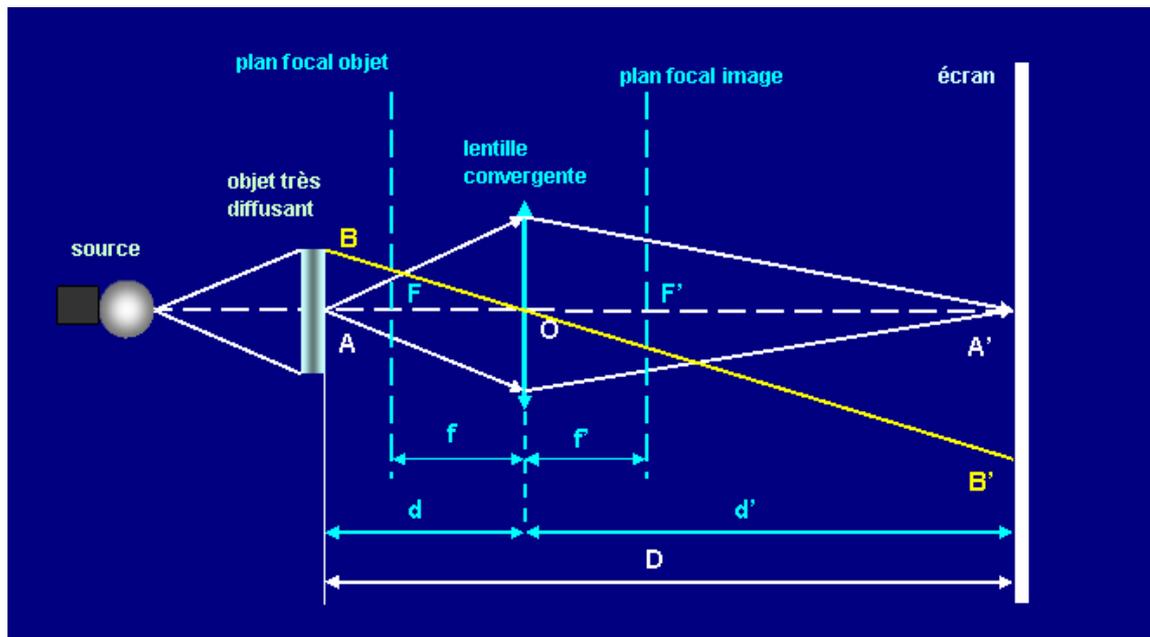


figure 1 – projection d'un objet très diffusant sur un écran

En première approximation, si l'on connaît la distance ( $d'$ ) entre le centre optique O de la lentille et l'écran, la mesure du grandissement G de l'image sur l'écran permet d'estimer la distance focale image  $f'$  de la lentille. En effet :

- le grandissement est le rapport de la taille de l'image sur l'écran à la taille de l'objet :  $G = A'B'/AB$
- un calcul élémentaire des triangles semblables OAB et OA'B' montre que :  $G = d'/d$
- si G est suffisamment grand (au moins égal à 10), on peut admettre que la distance  $d = OA$  est pratiquement égale à la distance focale image  $f'$  (c'est une conséquence de la formule de Descartes que nous verrons plus loin) :  $d \approx f'$
- on a donc :

$$f' \approx \frac{d'}{G} \quad (1)$$

Mais une détermination plus précise de  $f'$  nécessite l'emploi de la méthode de Bessel et Silbermann, et avant de les présenter nous avons besoin de quelques rappels sur les éléments cardinaux des systèmes optiques centrés.

## 2 - Éléments cardinaux des systèmes optiques centrés et formules de conjugaison

### 2-1 - Stigmatisme d'un système centré : condition des sinus d'Abbe et condition de Herschel

On considère ici un système optique centré constitué uniquement d'éléments réfringents (lentilles) (on suppose donc qu'il n'y a pas de surface réfléchissante). Par définition un système est centré s'il présente une symétrie de révolution autour d'un axe appelé axe optique.

L'intérieur du système centré est constitué d'une succession de dioptries dont les surfaces sont assimilées à des portions de surfaces sphériques. Les rayons lumineux issus de chaque point

d'un objet placé à l'extérieur du système traversent celui-ci avec une succession de réfractifs à chaque traversée de dioptré, puis sortent du système.

Si à la sortie du système les rayons issus d'un même point objet A convergent en un même point A', dit point image, alors le système est stigmatique et les points A et A' sont conjugués. Attention : la condition de stigmatisme est associée à un couple de points objet et image et n'est pas générale.

Avec la condition de stigmatisme pour deux points A et A', le **principe de Fermat** appliqué aux rayons optiques qui les joignent en passant par le système centré entraîne l'invariance du chemin optique entre A et A' : pour tout rayon lumineux joignant A et A', son parcours à travers les dioptrés du système est tel que l'on a :

$$L(AA') = \int_A^{A'} n(x, y, z) ds = cste \quad (2)$$

En choisissant l'axe z suivant l'axe optique, orienté dans le sens objet → image, perpendiculaire au plan Oxy et, pour un des rayons quelconques issu de A, en désignant par K le point où il pénètre dans le système, et par K' le point où il en sort, la condition (2) s'écrit encore :

$$n AK + L(KK') + n' K' A' = cste \quad (3)$$

où n et n' sont les indices de réfraction de l'espace objet et de l'espace image respectivement (figure 2). Dans (3), L(KK') est le chemin optique à l'intérieur du système.

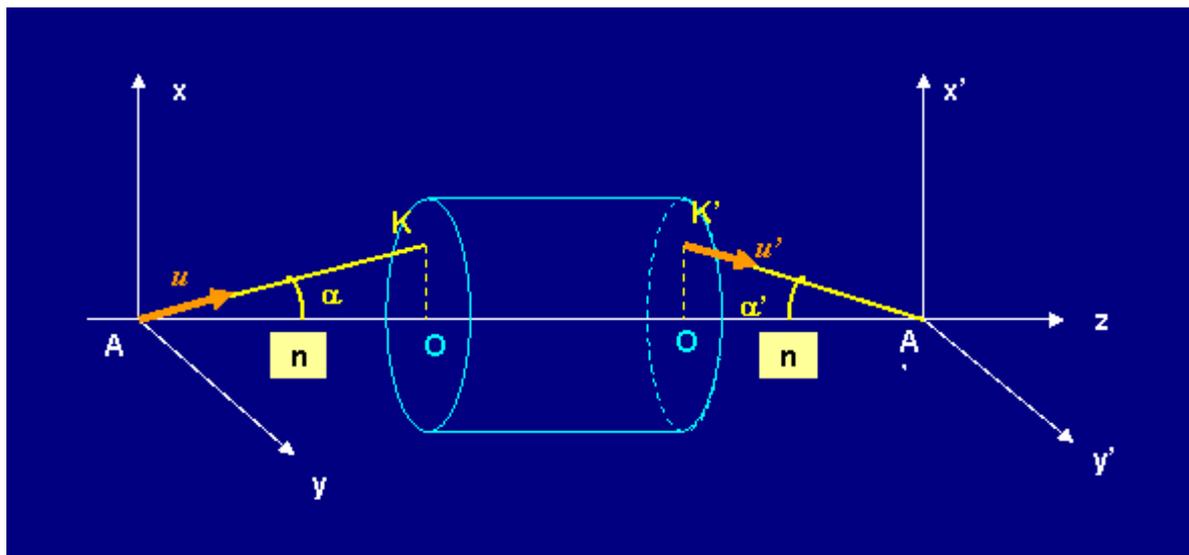


figure 2 – astigmatisme d'un système centré pour un couple de points AA'

En réalité le stigmatisme n'est jamais assuré rigoureusement pour diverses raisons : il exige des surfaces de dioptrés conçues avec une grande précision, et la diffraction a pour effet d'élargir les taches sur l'image issues d'un point de l'objet. De plus, nous avons vu que le stigmatisme rigoureux ne peut pas être généralisé à l'ensemble des couples de points objet-image.

Cependant une image est toujours vue sur un récepteur, qu'il s'agisse des pixels d'un appareil photo ou d'une caméra CCD ou numériques, des grains d'une pellicule photo en photographie argentique, ou, en final, des bâtonnets et des cônes de l'iris de l'œil. Les éléments sensibles de tous les récepteurs optiques ont obligatoirement une extension spatiale qui limite la résolution de l'image. Celle-ci sera donc considérée satisfaisante si les distorsions des points images dues au défaut de stigmatisme n'excèdent pas la taille de ces éléments sensibles. On parle dans ce cas de stigmatisme approché.

Le stigmatisme approché est assuré si deux points objet M et image M', voisins de A et de A', sont également conjugués, c'est-à-dire si le chemin optique L(MM') est constant. Comme L(AA') est aussi constant, on a :  $L(MM') - L(AA') = \text{constante}$ . En utilisant la **loi de Snell-Descartes** aux interfaces à l'entrée et à la sortie du système centré :

$$(n u - n' u') \cdot \delta K = 0$$

on montre facilement que la condition de stigmatisme approché s'écrit :

$$n' u' \cdot A' M' - n u \cdot AM = \text{cste} \quad (4)$$

Le stigmatisme approché peut être réalisé dans un plan A'x'y' perpendiculaire à l'axe optique dans l'espace image, ou encore sur l'axe optique lui-même. Dans le premier cas on dit que le dispositif est aplanétique, et dans le deuxième cas on dit qu'il satisfait la condition de Herschel. Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  les angles d'incidence et d'émergence du rayon lumineux issu de A (figure 2). Soit B un point objet appartenant au même plan Axy que le point objet A, le point B' est le conjugué de B. Soit C un point objet situé sur l'axe optique, voisin de A, et C' son conjugué. On montre alors les conditions suivantes :

- aplanétisme (**condition des sinus d'Abbe**):

$$n AB \sin \alpha = n' A' B' \sin \alpha' \quad (5)$$

- **condition de Herschel** :

$$n AC \sin^2 \frac{\alpha}{2} = n' A' C' \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \quad (6)$$

Les relations (5) et (6) s'expriment à l'aide du grandissement transversal  $G = A'B'/AB$  et du grandissement longitudinal (suivant l'axe optique z)  $G' = A'C'/AC$  :

$$\text{aplanétisme : } \frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'} = G \quad (7)$$

$$\text{condition de Herschel : } \frac{n \sin^2(\alpha/2)}{n' \sin^2(\alpha'/2)} = G' \quad (8)$$

## 2-2 - Approximation de Gauss (ou approximation paraxiale)

Un système optique centré vérifie l'**approximation de Gauss** s'il est traversé uniquement par des rayons proches de l'axe optique et faisant avec lui un angle d'incidence faible (approximation paraxiale).

On peut dans ce cas définir le grandissement angulaire :  $\gamma = \alpha'/\alpha$  (figure 2). Comme les sinus peuvent être confondus avec leur argument, la relation d'Abbe (5) fait apparaître l'**invariant de Lagrange - Helmholtz** :

$$n AB \alpha = n' A' B' \alpha' = \text{cste} \quad (9)$$

qui s'écrit encore :

$$G \gamma = \frac{n}{n'} \quad (10)$$

Examinons ce que donne l'approximation de Gauss pour le trajet d'un rayon au passage d'un dioptre sphérique simulant une des faces d'une lentille (figure 3). Le dioptre sépare le domaine objet d'indice n du domaine image d'indice n'.

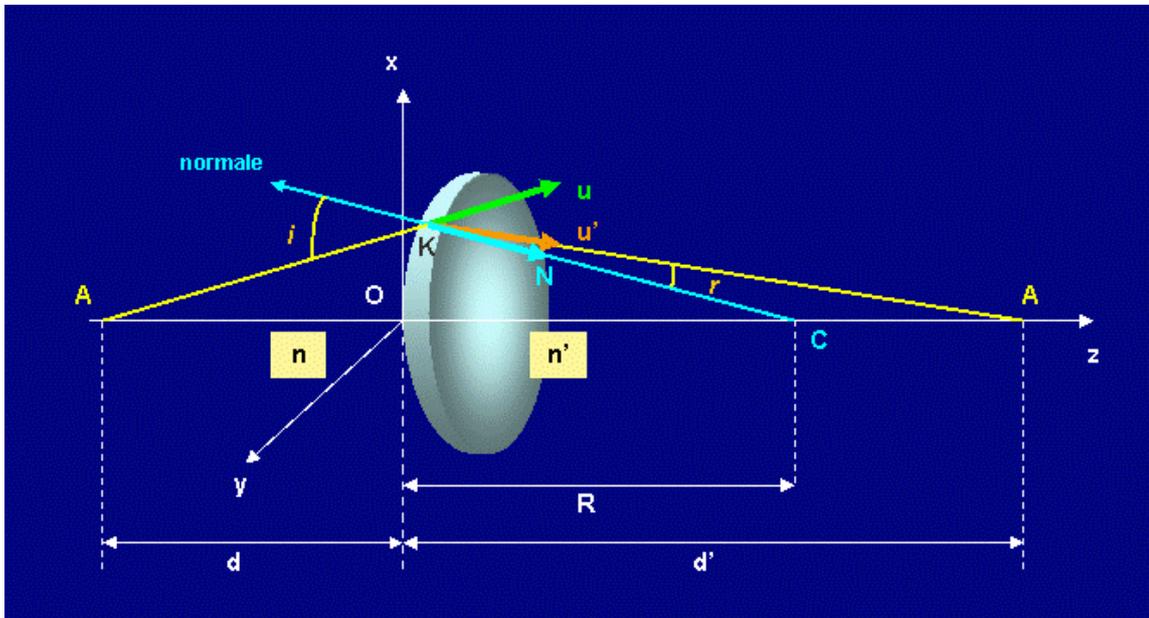


figure 3 – dioptré sphérique

On établit la relation géométrique (vectorielle) entre le rayon réfracté de vecteur unitaire  $\mathbf{u}'$  et le rayon incident de vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  :

L'angle incident est donné par  $i = (\mathbf{N}, \mathbf{u})$ , où  $\mathbf{N}$  est le vecteur unitaire normal en K au dioptré. L'angle de réfraction  $r$  est donné par la relation de Snell-Descartes :  $n' \sin r = n \sin i$  (les indices  $n$  et  $n'$  étant supposés connus). Un raisonnement géométrique simple montre alors que le rayon-vecteur réfracté est obtenu par :

$$\mathbf{u}' = \frac{n\mathbf{u} + v\mathbf{N}}{n'} \quad (11a)$$

$$\text{avec : } v = n' \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}' - n \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = n' \cos r - n \cos i \quad (11b)$$

Posons  $R$  le rayon de courbure du dioptré sphérique, il peut être positif ou négatif selon la concavité.  $K$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$  et le centre de courbure  $C : (0, 0, R)$ . Les vecteurs unitaires  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$ , et  $\mathbf{N}$  ont pour coordonnées dans le repère  $Oxyz$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\alpha, \beta, \chi) \\ \mathbf{u}' &= (\alpha', \beta', \chi') \\ \mathbf{N} &= \mathbf{KC}/R = (-x/R, -y/R, 1) \end{aligned}$$

Avec l'approximation de Gauss, puisque les angles  $i$  et  $r$  sont petits, la relation de Snell-Descartes s'identifie à la **relation de Kepler** :  $n_i \approx n' r$ , et l'expression (11b) devient :  $v \approx n' - n$ . Les coordonnées  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  sont petites et comme les vecteurs sont unitaires :  $\alpha^2 + \beta^2 + \chi^2 = 1$ , de même  $\alpha'^2 + \beta'^2 + \chi'^2 = 1$  entraînent  $\chi \approx 1$  et  $\chi' \approx 1$ . Enfin, l'approximation paraxiale donne aussi  $x/R$  et  $y/R$  petits. Avec ces approximations, (11a) se simplifie en :

$$n'\mathbf{u}' - n\mathbf{u} = (n' - n) \mathbf{KC}/R$$

dont les projections sur  $Ox$  et  $Oy$  sont :

$$\begin{aligned} n'\alpha' - n\alpha &= -\frac{n' - n}{R} x \\ n'\beta' - n\beta &= -\frac{n' - n}{R} y \end{aligned} \quad (12)$$

Il est intéressant, pour des commodités d'écriture, de remarquer que les couples  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha', \beta')$  et  $(x, y)$  étant des coordonnées de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{OK}$  dans le plan Oxy, ces vecteurs peuvent s'écrire comme des nombres complexes dans ce plan:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &: u = \alpha + j\beta \\ \mathbf{u}' &: u' = \alpha' + j\beta' \\ \mathbf{OK} &: z = x + jy\end{aligned}$$

les relations (12) équivalent alors à :

$$\begin{aligned}z' &= z \\ n'u' &= nu - \frac{n'-n}{R}z\end{aligned}\quad (12\text{bis})$$

que l'on peut mettre sous forme d'une relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} z' \\ n'u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ nu \end{bmatrix}\quad (13)$$

où, par définition,  $V$  est la **vergence** du dioptre sphérique, mesurée en dioptrie (dimension de l'inverse d'une longueur) :

$$V = \frac{n-n'}{R}\quad (14)$$

La matrice intervenant dans (13) est appelée **matrice de réfraction** du dioptre sphérique et est notée  $[R]$  :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$$

Les quantités  $n'u'$  et  $nu$  sont appelées **angles optiques complexes**.

*Remarque* : Le vecteur  $\mathbf{AK}$  qui représente le rayon incident, n'est pas en général contenu dans le plan de symétrie vertical zOx, mais fait un angle pratiquement égal à  $\beta$  dans l'approximation de Gauss (puisque'il est supposé petit) ; de même, le vecteur  $\mathbf{KA}'$  n'est pas toujours contenu dans le plan zOx mais fait avec lui approximativement l'angle  $\beta'$ . L'angle que fait le vecteur  $\mathbf{AK}$  avec le plan zOy est pratiquement égal à  $\alpha$  et l'angle que fait  $\mathbf{KA}'$  avec zOy est pratiquement égal à  $\alpha'$  (dans la figure 3 ci-dessus j'ai représenté le cas où  $\mathbf{AK}$  et  $\mathbf{KA}'$  sont contenus dans zOx donc où  $\beta = 0$ ).

### 2-3 - Relations de conjugaison d'un dioptre sphérique en approximation de Gauss

Reportons-nous à la figure 3. Avec l'approximation de Gauss, on démontre la **relation de conjugaison**, ou formule de Descartes (voir annexe) :

$$\frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} = V'\quad (15)$$

D'après la relation (15), lorsque l'objet A est placé à l'infini ( $d = \infty$ ), le point image A' tend vers un point situé sur l'axe optique, noté F', appelé foyer image tel que :

$$OF' = f' = \frac{n'}{V}\quad (16)$$

De même, pour obtenir un point image  $A'$  rejeté à l'infini ( $d' = \infty$ ), il faut placer le point objet  $A$  en un point appelé foyer objet tel que :

$$OF = f = -\frac{n}{V} \quad (17)$$

L'invariant de Lagrange-Helmholtz (9) permet d'exprimer le **grandissement transversal** :

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{n\alpha}{n'\alpha'}$$

soit (formule de Descartes pour le grandissement) :

$$G = \frac{nd'}{n'd} \quad (18)$$

## 2-4 - Matrice de translation dans un milieu de même indice

Nous allons avoir besoin, par la suite, de la matrice de translation dans un milieu optique de même indice  $n$ , lorsque nous calculerons les relations de conjugaison pour un système optique centré.

La matrice de translation intervient lorsque l'on veut obtenir la position du point d'intersection  $S'(x',y')$  du rayon lumineux avec un plan de front  $O'xy$ , issu d'un point  $S(x,y)$  situé sur le plan de front  $Oxy$ , dans un milieu de même indice  $n$  (figure 4).

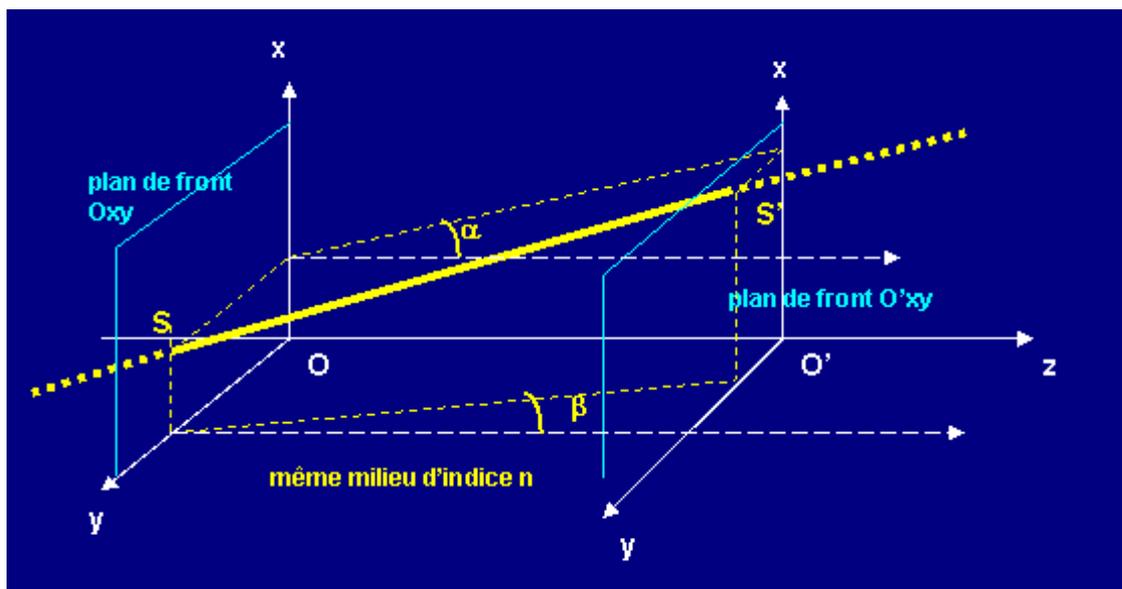


figure 4 – matrice de translation

Avec les notations de la figure 4, et dans l'approximation de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} x' &\approx x + \alpha OO' \\ y' &\approx y + \beta OO' \\ \alpha' &= \alpha \\ \beta' &= \beta \end{aligned}$$

En utilisant les notations complexes introduites plus haut, ces relations équivalent à la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} z' \\ nu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{OO'}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ nu \end{bmatrix} \quad (19)$$

où la matrice [T] est la **matrice de translation** dans le milieu homogène en approximation de Gauss :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{OO'}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous verrons que cette matrice joue un rôle aussi important que celui de la matrice de réfraction dans la détermination de la matrice de transfert d'un système centré, puisque celui-ci est une succession de dioptries où s'effectuent les réfractions, et de milieux homogènes, où seule la translation s'effectue.

## 2-5 - Formules de conjugaison dans les systèmes centrés en approximation de Gauss

Nous avons vu plus haut les relations de conjugaison pour un dioptrie séparant un milieu d'indice  $n$  et un milieu d'indice  $n'$ . Ce n'est pas un système centré puisqu'il est constitué d'un seul dioptrie. Un système centré est formé d'une succession de dioptries séparant des milieux d'indices éventuellement différents, et situé entre un domaine où se trouve l'objet A et un domaine où se forme son image finale A'. La question est : quelles relations existent entre A' et A lorsque le système vérifie l'approximation de Gauss ? La réponse se construit en appliquant les considérations précédentes du dioptrie sphérique autant de fois qu'il y a de dioptries sphériques et de milieux homogènes dans le système centré.

Reportons-nous de nouveau à la figure 2 ci-dessus. D'après ce qui vient d'être dit, le vecteur complexe  $(z', n'u')$  image dans le milieu d'émergence d'indice  $n'$  est relié au vecteur complexe  $(z, nu)$  objet dans le milieu d'incidence d'indice  $n$  par une matrice de transfert  $[G(AA')]$  qui est le produit des matrices de translation et de réfraction qui représentent autant de fois les dioptries et les milieux homogènes existant entre A et A'.

Les composantes de  $[G(AA')]$  étant  $g_{nm}$ ,  $n = 1, 2$  et  $m = 1, 2$ , on a :

$$\begin{bmatrix} z' \\ n'u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ nu \end{bmatrix} \quad (20)$$

avec  $[G(AA')] = [T(K'A)][R(K')]\dots[T(K_1K)][R(K)][T(AK)]$  où les  $K_p$  désignent les points où le rayon est réfracté au niveau du dioptrie  $n^{\circ}p$ .

Par définition, et par extension du cas du dioptrie sphérique, on appelle **vergence du système centré** l'opposé de la composante  $g_{21}$  de la matrice de transfert [G] :

$$V = -g_{21} \quad (21)$$

C'est bien une caractéristique du système centré, car on peut vérifier que c'est la seule composante de  $[G(AA')]$  qui ne dépende pas de A et de A'.

La matrice de transfert entre A et A',  $[G(AA')]$  peut encore s'écrire en regroupant sous la forme d'une matrice de transfert du système centré, entre K et K',  $[G(KK')]$  et en isolant les matrices de translation dans les milieux objet et image :

$$[G(AA')] = [T(K'A)][G(KK')][T(AK)]$$

Les composantes de  $[G(KK')]$ , notées  $a_{nm}$ , sont évidemment indépendantes du couple

conjugué (AA'). D'autre part (19) donne immédiatement les matrices de translation [T(K'A')] et [T(AK)] en remplaçant pour chaque milieu OO' par d' et -d, et l'indice par n' et n. Il vient alors:

$$G(AA') = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d'/n' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - V d'/n' & a_{12} - a_{11} d/n + d'/n' (a_{22} + V d/n) \\ -V & a_{22} + V d/n \end{bmatrix} \quad (22)$$

L'image B' d'un point B voisin de A doit être indépendante de l'inclinaison u des rayons en provenance de A. Or compte tenu de (20) cela veut dire que :  $z' = g_{11} z + g_{12} nu$  ne doit pas dépendre de u, donc que  $g_{12} = 0$ . Il s'ensuit que  $g_{11} = z'/z$  est le grandissement transversal G.

Pour un objet placé à l'origine O ( $z = 0$ ), la relation (20) donne aussi :  $n'u' = g_{22} nu$ . Comme  $\gamma = u'/u$  est le grandissement angulaire pour l'objet à l'origine, on a  $g_{22} = \gamma n'/n$ .

Finalement, la matrice de transfert s'écrit :

$$G(AA') = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -V & \gamma n'/n \end{bmatrix} \quad (23)$$

Comme elle est le produit de matrices dont le déterminant est égal à un, son déterminant est aussi égal à un, et cette propriété fournit la **relation de Lagrange-Helmholtz** :

$$\det G(AA') = 1 = \frac{n'}{n} \gamma G \rightarrow n x \alpha = n' x' \alpha' \rightarrow n AB \alpha = n' A' B' \alpha'$$

*Remarque* : lorsque l'on connaît G, V, n', n et  $\gamma$  on peut déduire les éléments de la matrice de transfert du système  $a_{nm}$  par identification de (23) et de (22).

Par définition les **distances focales** objet f et image f' sont :

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{n}{V} \\ f' &= \frac{n'}{V} \end{aligned} \right| \quad (24)$$

Les distances focales permettent intervenir dans l'expression de la distance entre les plans focaux image et objet et les dioptries extrêmes du système, c'est-à-dire les distances OF et O'F' (figure 5).

Les deux plans focaux image et objet sont définis comme suit :

- plan focal objet Fxy : tout rayon issu de F émerge au niveau du plan O'xy parallèlement à l'axe optique Oz
- plan focal image F'xy : tout rayon parallèle à l'axe optique qui pénètre dans le système centré au niveau du plan Oxy émerge en convergeant en F'.

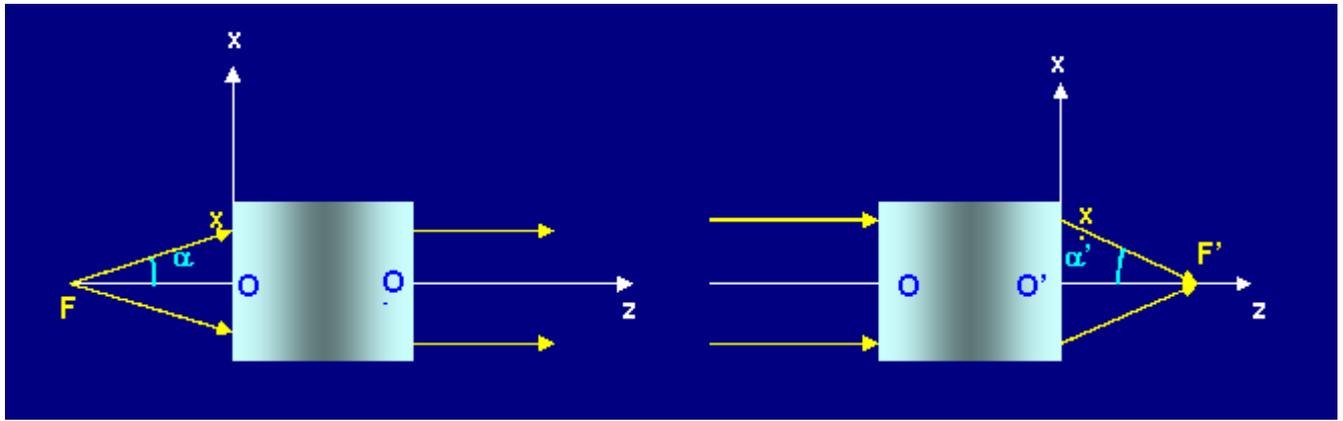


figure 5 – point focal objet et point focal image

En utilisant la matrice de transfert  $[G(KK')]$  du système centré, les coordonnées  $(x, \alpha)$  et  $(x', \alpha')$  au niveau des plans Oxy et O'xy sont reliées par :

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} n \alpha \\ n' \alpha' &= -V x + a_{22} n \alpha \end{aligned}$$

Dans le cas du point focal objet, comme les rayons émergents sont parallèles à Oz on a  $\alpha' = 0$ , d'où :

$$x / \alpha = a_{22} n / V = - OF$$

ce qui s'écrit encore, avec (24) :

$$OF = a_{22} f \quad (25)$$

Dans le cas du point focal image, les rayons incidents sont parallèles à Oz donc :  $\alpha = 0$ , d'où

$$OF' = a_{11} f' \quad (26)$$

Comme dans le cas d'un système constitué d'une seule lentille (donc deux dioptries sphériques) les coefficients  $a_{11}$  et  $a_{22}$  sont égaux à 1, les relations (25) et (26) justifient la définition des focales données en (24). La connaissance des focales donne immédiatement celle de la vergence du système. On remarquera que si  $n = n'$  les focales sont opposées  $f = -f'$ . Exemples d'ordre de grandeur : objectif d'un appareil photographique  $f' = 5$  cm ( $V = 20$  dioptries), lunette astronomique  $f' = 1$  m ( $V = 1$  dioptrie).

## 2-6 - Formule de Descartes et formule de Newton

Nous avons dit plus haut que la composante  $g_{12} = 0$ , ce qui d'après (22) donne :

$$g_{12} = a_{12} - a_{11} \frac{d}{n} + \frac{d'}{n'} (a_{22} + V \frac{d}{n}) = 0$$

où  $a_{21} = -V$  (définition (21)), il vient la relation homographique en  $(d/n)$ :

$$\frac{d'}{n'} = \frac{a_{11} \frac{d}{n} + a_{12}}{a_{22} + V \frac{d}{n}} \quad (27)$$

On applique (27) aux plans conjugués du système centré, c'est-à-dire par définition les plans d'entrée et de sortie du système mis en correspondance par la seule fonction de transfert du système  $[G(KK')] = [a_{nm}]$ ; ceci revient à faire abstraction des matrices de translation entre l'objet et le plan d'entrée, et entre le plan de sortie et l'image, soit à poser :  $[T(K'A)] = [T(AK)] = \mathbf{1}$  (matrice unité). dans ce cas, compte tenu de (23) :

$$\begin{aligned} a_{11} &= G \\ a_{12} &= 0 \\ a_{22} &= \gamma n'/n = 1/G \text{ (d'après la relation de Lagrange-Helmholtz (10))} \end{aligned}$$

(27) donne alors :

$$G \frac{n'}{d'} - \frac{1}{G} \frac{n}{d} = V \quad (28)$$

Appliquons (28) aux plans principaux qui sont par définition les plans conjugués à l'entrée H et à la sortie H' du système tels que  $G = 1$  ; leurs distances à l'objet A et à l'image A' sont notées  $d = HA = p$  et  $d' = H'A' = p'$ . On obtient la **formule de Descartes** :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = V \quad (29)$$

Lorsque les milieux objet et image ont même indice, compte tenu de (24), la formule (29) devient :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (30)$$

En (23) et (22) on a posé que le grandissement transversal est :

$$G = a_{11} - Vd'/n'$$

Pour les plans principaux  $a_{11} = 1$  lorsque  $d' = p'$ , d'où :  $G = 1 - Vd'/n'$ , et d'après la relation de Descartes (29) le grandissement transversal devient :

$$G = \frac{n}{n'} \frac{p'}{p} \quad (31)$$

La **formule de Newton** établit la relation entre les plans focaux objet et image F et F'. Pour ces points focaux, par définition on a  $d' = f'$  et  $d = f$  dans (22) où  $f$  et  $f'$  sont les distances focales entre les foyers F, F' et les plans principaux conjugués H, H'. La relation matricielle (22) se décompose alors en :

$$[G(FF')] = [T(H'F')][G(HH')][T(FH)]$$

où  $[G(HH')]$  est exprimée par (23) mais où, puisqu'il s'agit des plans principaux pour lesquels  $G = 1$ , on a :  $G = 1$ ,  $\gamma n'/n = 1/G = 1$ . Finalement il vient :

$$G(FF') = \begin{bmatrix} 1 & f'/n' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -f/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - V f'/n' & -f/n \\ -V & 1 + V f/n \end{bmatrix}$$

mais avec (24) on a :  $f' = n'/V$  et  $f = -n/V$  donc :

$$G(FF') = \begin{bmatrix} 0 & 1/V \\ -V & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

On pose  $\sigma' = F'A'$  et  $\sigma = FA$  les distances entre les foyers et les points image ou objet. On applique la relation homographique (27) au cas où les foyers sont les origines, donc avec  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 1/V$ ,  $a_{22} = 0$  :

$$\frac{\sigma'}{n'} = -\frac{1/V}{V\sigma/n}$$

d'où la **formule de conjugaison de Newton** qui offre une autre façon de relier les points objet et image via les foyers :

$$\sigma\sigma' = f f' \quad (33)$$

### 3 - Focométrie par méthode de Bessel et de Silbermann

Retournons à la figure 1. La lentille étant supposée mince, les plans principaux sont confondus et l'on a  $p = -d$  et  $p' = d'$  avec  $D = d + d' = p' - p$ . La relation de Descartes (30) donne la condition pour qu'une image nette se forme sur l'écran et elle devient ici :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p' - D}$$

La distance  $D$  entre l'écran et l'objet étant choisie, la distance  $p'$  entre l'image et la lentille est l'inconnue et satisfait l'équation du second degré qui découle de la relation ci-dessus :

$$p'^2 - Dp' + f'D = 0$$

Il existe deux solutions réelles si  $D^2 - 4f'D \geq 0$ , soit :

$$D \geq 4f' \quad (34)$$

Il faut donc que la distance entre l'écran et l'objet soit au moins quatre fois la distance focale image. Les solutions donnent alors une relation entre la distance focale  $f'$  et la distance  $p'$  ; si donc on règle  $p'$  de façon à obtenir une image nette sur l'écran, on peut déterminer  $f'$  :

- si on a  $D = 4f'$ , alors  $p' = D/2 = d'$  et comme  $D = d + d'$ , il vient  $d = D/2$  : autrement dit, la lentille est à mi-chemin entre l'objet et l'écran. Dans ce cas on obtient  $f' = D/4$ . C'est la **méthode de Silbermann** pour déterminer la focale image : on place la lentille à mi-chemin entre l'objet et l'écran, l'image obtenue n'est pas forcément nette du premier coup. Pour la rendre nette, on ajuste la distance entre l'objet et l'écran, la lentille étant chaque fois placée au milieu, jusqu'à obtenir la netteté.

- Si  $D > 4f'$  (la distance entre l'objet et l'écran est strictement plus grande que  $4f'$ ) alors il y a deux positions possibles de la lentille pour obtenir une image nette :

$$p' = \frac{D}{2} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - Df'}$$

La **méthode de Bessel** consiste alors en ceci : on repère la distance entre les deux positions possibles, qui est :

$$\delta = 2\sqrt{\frac{D^2}{4} - D f'}$$

et on déduit la focale image :

$$f' = \frac{D^2 - \delta^2}{4D} \quad (35)$$

### Annexe : démonstration de la relation de conjugaison du dioptré sphérique en approximation de Gauss

Se reporter à la figure 3.

On veut démontrer la relation (15) en utilisant le principe de Fermat entre A et A'. Posons  $\psi$  l'angle entre le rayon vecteur **KC** et l'axe optique Oz :  $\psi = (\mathbf{KC}, \mathbf{CO})$ .

Le principe de Fermat énonce que le chemin optique  $L(AA') = nAK + n'KA'$  est constant quelle que soit l'incidence du rayon, ou, ce qui revient au même, quel que soit l'angle  $\alpha = (\mathbf{CA}, \mathbf{AK})$ , ou encore quel que soit  $\psi$  ; autrement dit  $L(AA')$  est indépendant de  $\psi$ .

Après un calcul élémentaire de géométrie on a :

$$AK = -d \sqrt{1 + 2R \frac{R-d}{d^2} (1 - \cos \psi)}$$

$$KA' = d' \sqrt{1 + 2R \frac{R-d'}{d'^2} (1 - \cos \psi)}$$

d'où l'expression du chemin optique :

$$L(AA') = -nd \sqrt{1 + 2R \frac{R-d}{d^2} (1 - \cos \psi)} + n'd' \sqrt{1 + 2R \frac{R-d'}{d'^2} (1 - \cos \psi)}$$

Avec l'approximation de Gauss,  $L(AA')$  est à peu près égale à :

$$L(AA') \approx -nd + n'd' + \frac{1}{2} R \psi^2 \left( n' \frac{R-d'}{d'} - n \frac{R-d}{d} \right)$$

$L(AA')$  est indépendant de  $\psi$  si :

$$\frac{\partial L(AA')}{\partial \psi} = 0 \rightarrow n' \left( \frac{R}{d'} - 1 \right) = n \left( \frac{R}{d} - 1 \right)$$

qui donne la relation de conjugaison :  $\frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} = \frac{n' - n}{R}$