



[Frédéric Elie on ResearchGate](#)

Le fond diffus cosmologique (CMB)

Frédéric Élie
février 2021

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract :

Cet article propose une introduction à des outils de base pour comprendre comment le fond diffus cosmologique (CMB, ou FDC en français), ou rayonnement fossile du cosmos, découvert en 1963-1965, nous renseigne sur la configuration actuelle de l'univers, mais aussi sur les ères qui précèdent son émission. De manière très simplifiée, les différentes ères cosmologiques, qui dépendent fortement de la physique quantique et de la relativité générale, se répartissent en deux grandes parties :

- L'univers opaque, non observable par nos moyens radio-électromagnétiques actuels : il s'étend du « t zéro », celui du Big Bang, qui est un horizon, jusqu'à la nucléosynthèse primordiale (BBN), en passant par l'ère de Planck où les interactions fondamentales n'en formaient qu'une (théorie de la grande unification, GUT et gravitation quantique), l'ère de l'inflation (accélération brutale non isentropique de l'expansion), l'ère radiative.

- L'univers transparent, observable : il démarre vers le découplage du rayonnement et de la matière, la recombinaison, et s'étend dans l'ère matérielle jusqu'à aujourd'hui.

Après avoir présenté succinctement ces différentes ères ainsi que les principales propriétés du CMB, on récapitule au chapitre 7 les interrogations encore ouvertes liées à différents résultats : la quasi platitude de l'espace, l'âge de l'univers, la formation et l'ancienneté des galaxies, la causalité liée à l'isotropie et l'homogénéité du CMB, l'absence de rotation de l'espace, la faible entropie de l'univers, les monopôles magnétiques, les défauts topologiques et les cordes cosmiques, l'énergie sombre et la matière noire.

SOMMAIRE

[1](#) – Le fond diffus cosmologique dans l'univers observable

[1.1](#) – Fluctuations du vide quantique et cosmologie

[1.2](#) - La partie observable de l'univers

[1.3](#) - « Constante » de Hubble

[1.4](#) - Âge de l'univers

[1.5](#) - Température du fond diffus cosmologique

[2](#) – Modèle cosmologique Λ CDM

[3](#) – Généralités sur l'après CMB

[4](#) – Expansion de l'univers et datations

[4.1](#) – Métrique d'un espace-temps isotrope et homogène

[4.2](#) – Loi de Hubble

[4.3](#) – Équation d'état de la matière

[4.4](#) – Système dynamique de Friedmann-Lemaître

[4.5](#) – Temps de regard en arrière

[5](#) – Quelques principes des différentes observations cosmologiques

[5.1](#) – *Utilisation du diamètre angulaire apparent*

[5.2](#) – *Utilisation des densités caractéristiques des halos galactiques*

[5.3](#) – *Céphéides*

[5.4](#) – *Densité des baryons*

[5.5](#) – *Supernovæ*

[5.6](#) – *Luminosité des galaxies spirales et relation de Tully-Fisher*

[5.7](#) – *Évaluation de la masse des amas de galaxies par le théorème du viriel*

[5.8](#) – *Comptage des sources par l'effet Sunyaev-Zel'dovich (SZ)*

[5.9](#) – *Évaluation de la distance par la relation « plan fondamental » des galaxies elliptiques*

[5.10](#) – *Fluctuations de la brillance de surface : application aux faibles décalages spectraux*

[5.11](#) – *Propagation de la photosphère d'une supernova type II après l'explosion de l'étoile*

[5.12](#) – *Valeur de la constante de Hubble par les lentilles gravitationnelles*

[5.13](#) – *Principales corrections et différents effets à prendre en compte pour la connaissance précise du spectre du CMB*

[6](#) – Origines du CMB, ou « avant le CMB »

[6.1](#) – *Grandes étapes de l'univers*

[6.2](#) – *Ère de Planck*

[6.3](#) – *Fluctuations du vide quantique*

[6.4](#) – *Inflation*

[6.5](#) – *Ère radiative*

[6.6](#) – *Nucléosynthèse primordiale*

[6.7](#) – *Recombinaison et découplage*

[7](#) – Le CMB et ses questions encore ouvertes

[7.1](#) – *Spectre du rayonnement fossile*

[7.2](#) – *Origine des structures (galaxies...) à partir des anisotropies initiales*

[7.3](#) – *Question de la causalité*

[7.4](#) – *Question sur la durée de formation des galaxies en comparaison de l'âge présumé de l'univers*

[7.5](#) – *Question sur la très faible courbure primordiale de l'univers*

[7.6](#) – *Question sur la longévité de l'univers par rapport aux unités de Planck*

[7.7](#) – *Question sur l'absence apparente de rotation du cosmos*

[7.8](#) – *Question sur la faible entropie de l'univers primordial*

[7.9](#) – *Question sur les monopôles*

[7.10](#) – *Question sur la très faible valeur du nombre baryonique : matière noire et énergie sombre*

[Annexe 1](#) : Un modèle d'inflation chaotique avec un champ scalaire

[Annexe 2](#) : Thermodynamique à l'équilibre et hors équilibre

[A2.1](#) – *Équilibre radiatif*

[A2.2](#) – *Découplage*

[A2.3](#) – *Thermodynamique hors équilibre et particules reliques*

[Annexe 3](#) : Oscillations acoustiques

[A3.1](#) – *Perturbations de densité dans un espace statique*

[A3.2](#) – *Perturbation de densité dans un espace en expansion*

[Références](#)

1 – Le fond diffus cosmologique dans l'univers observable

1.1 – Fluctuations du vide quantique et cosmologie

Les fluctuations du vide interviennent en cosmologie quantique, comme on le verra dans cet article. La théorie quantique prévoit les fluctuations des états quantiques autour des états fondamentaux du vide quantique, sur la base des relations d'incertitude de Heisenberg portant sur l'énergie E et le temps t :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

où $\hbar = h/2\pi$, h est la constante de Planck (voir [référence](#) [1]). Plus généralement ces inégalités portent sur les grandeurs physiques conjuguées au sens de Hamilton, p et q , comme par exemple la quantité de mouvement ou moment p et les degrés de liberté ou position q :

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$$

Pour une fluctuation de durée finie Δt , une variation d'énergie ΔE peut se produire et être suffisamment élevée pour engendrer des particules virtuelles, des paires de particules-antiparticules, des photons, des atomes ou des structures plus complexes qui peuvent interagir avec la matière ou les rayonnements. Les structures complexes apparaissent seulement si la variation d'énergie est suffisamment grande, donc si la durée de la fluctuation est très courte. Mais la probabilité de leur création est extrêmement faible, particulièrement sur la durée de 13,7 milliards d'années depuis le Big Bang.

En 2008, A. Linde considéra que ces fluctuations apparaissent dans l'énergie sombre du vide qui contribue aux forces répulsives opposées à la gravitation et rassemblées dans la constante cosmologique Λ . D'après les dernières données du satellite Planck, lancé par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) en 2009 [2], on sait que l'énergie sombre, encore inconnue, représente 68,3% de l'énergie totale de l'univers observable (les 31,7% d'énergie restante se répartissent en 4,9% de matière ordinaire et 26,8% de matière noire, elle aussi encore inexpliquée, présente dans les structures astrophysiques). Depuis 1998 (Saul Perlmutter [3] et Adam Riess [4], voir aussi [2]), les observations montrent une accélération cosmologique de l'univers, ce qui laisse supposer l'existence d'effets opposés à la gravitation à grande échelle.

L'introduction de la constante cosmologique par Einstein est parfaitement compatible avec la théorie de la relativité générale, mais comme elle peut aboutir à un modèle d'univers stationnaire (sans expansion ni ralentissement), ce que refusait Einstein, celui-ci l'a retirée de ses équations, allant jusqu'à s'autocritiquer en écrivant à Weyl que l'introduction de la constante cosmologique est « la plus grande bêtise de sa vie ». Mais les progrès de la cosmologie observationnelle ont remis la constante cosmologique sur le devant de la scène. Les observations, issues de programmes de la sonde WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe ou WMAP est un observatoire spatial américain de la NASA lancé en juin 2001), SNE (utilisation des supernovae de type I), BAO (mesures de spectres de puissance d'oscillations acoustiques baryoniques), donnent :

1.2 - La partie observable de l'univers

La partie observable de l'univers s'étend jusqu'à 3000 Mpc environ, au-delà il y a la limite de l'horizon cosmologique. Au-delà de 100 Mpc, la structure de l'univers est statistiquement homogène et isotrope à grande échelle. Pour des distances $a < 100$ Mpc, la structure est fortement hétérogène, avec une sorte de hiérarchisation : galaxies, amas, super-amas.

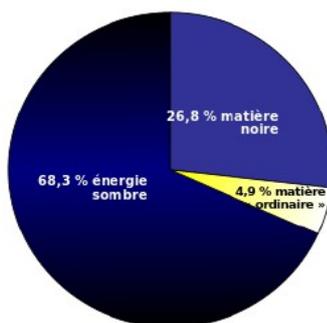


Figure 1.1 : distribution de l'énergie dans l'univers : énergie sombre, matière noire, matière ordinaire

1.3 - « Constante » de Hubble

La « constante de Hubble » H est directement reliée au temps cosmique écoulé depuis le Big Bang. Le temps cosmique est le temps propre d'un observateur, situé sur la Terre par exemple, comobile avec l'univers supposé homogène et isotrope, ce qui est effectivement observé, aux fluctuations près du fonds diffus cosmique, de sorte que l'on peut affirmer que le principe cosmologique s'applique : aucun observateur dans l'univers n'occupe une place privilégiée pour observer l'univers. En conséquence, le temps cosmique est le temps propre d'un observateur au repos par rapport au référentiel espace-temps de l'univers qui, lui, est en évolution depuis le Big Bang. De sorte que les référentiels comobiles des observateurs sont équivalents dans un univers homogène et isotrope. Le modèle cosmologique répondant à ce critère, le plus communément admis, est basé sur la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Cette métrique introduit le facteur d'échelle qui mesure comment varie la distance entre deux objets au repos, en fonction du temps cosmique, à cause de l'expansion de l'univers. Si r_0 est la distance comobile entre ces objets à l'instant cosmique t_0 , elle deviendra $r(t)$ au temps cosmique t par l'intermédiaire du facteur d'échelle $a(t)$:

$$r(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} r(t_0) \quad (1.1)$$

Du fait de la comobilité des deux objets, le rapport entre les distances comobiles est égal à celui des rayons de l'univers R en ces instants ; si, en outre, t_0 est choisi comme temps présent, on pose $a(t_0) = 1$, et l'on a :

$$a(t) = \frac{r(t)}{r(t_0)} = \frac{R(t)}{R(t_0)} \quad (1.2)$$

Le facteur d'échelle $a(t)$ est relié aux différentes formes d'énergie de l'univers, par les équations de Friedmann. Mais la loi de Hubble (1929), qui indique la proportionnalité entre la vitesse de récession d'une galaxie depuis un observateur terrestre et sa distance, suggère que l'observation porte plutôt sur le taux de variation du facteur d'échelle, qui est appelée abusivement « constante de Hubble » malgré que ce taux varie avec le temps cosmique du fait des différentes phases d'expansion de l'univers :

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.3)$$

où $\dot{a}(t) = \frac{da}{dt}$ est la variation du facteur d'échelle.

C'est pourquoi une appellation plus appropriée de H est « taux d'expansion ». Pour fixer les idées, l'élément métrique FLRW a la forme suivante, pour un espace sans courbure (ce qui est proche du cas observé aujourd'hui) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.4a)$$

où dx, dy, dz désignent les coordonnées comobiles, c'est-à-dire intervenant dans la distance entre deux points de l'univers indépendamment de l'expansion de l'univers (ce qui implique que cette distance s'exprime avec une unité liée à l'expansion).

Si les coordonnées comobiles de l'observateur sont fixes ($dx = dy = dz = 0$) alors $dt = ds/c$ est son temps propre. Le ds^2 s'écrit aussi avec les coordonnées physiques $dl^2 = a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a(t)^2 dr^2$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (1.4b)$$

le facteur d'échelle $a(t)$ exprime donc le passage des coordonnées comobiles aux coordonnées physiques.

En vertu du principe copernicien (il n'existe pas d'observateur privilégié et central dans l'univers), la récession a été interprétée comme une dilatation de l'espace-temps, homogène et isotrope pour tout ob-

servateur, ce qui est à l'origine des théories cosmologiques d'expansion de l'univers depuis une singularité initiale. L'observation donne environ : $H = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (18 juillet 2018). H a la dimension de l'inverse d'un temps [T^{-1}].

Rappel : l'unité de distance Mpc (Mégaparsec) est : $1 \text{ Mpc} = 3,26 \cdot 10^6 \text{ années-lumières} = 3,086 \cdot 10^{22} \text{ m}$. Le parsec (pc), unité de distance souvent utilisée en astronomie, est la distance au Soleil d'un observateur telle que celui-ci verrait la distance Terre-Soleil sous un angle de 1" d'arc : $1 \text{ pc} = 3,085 677 581 467 2 \times 10^{16} \text{ m}$; on l'exprime aussi en unités astronomiques ($1 \text{ ua} = \text{distance moyenne Terre-Soleil} = 1,495 978 707 \times 10^{11} \text{ m}$), soit : $1 \text{ pc} = 206 264,806 245 48 \text{ ua}$.

1.4 - Âge de l'univers

L'âge de l'univers est la durée écoulée depuis le Big Bang. Comme l'on ne sait rien sur ce qui précède le Big Bang, un âge fini de l'univers ne signifie pas que celui-ci n'ait pas toujours existé, ou en tous cas existé bien avant l'ère du Big Bang, car celle-ci est un horizon de la physique. Il existe différentes méthodes pour évaluer l'âge de l'univers, et parmi les résultats il y a ceux issus des données du satellite d'observation Planck, combinées avec celles du WMAP. Le principe repose sur la mesure de l'expansion de l'univers, c'est-à-dire du « taux d'expansion » ou « constante de Hubble ». Techniquement on utilise la spectroscopie pour obtenir la vitesse de récession des galaxies qui est obtenue par effet Doppler : le décalage vers le rouge du spectre des galaxies dû à leur récession à la vitesse v est donné par :

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \quad (1.5a)$$

où λ est la longueur d'onde et $\beta = v/c$ (c : vitesse de la lumière), d'où la vitesse de récession :

$$v = c \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \quad (1.5b)$$

Celle-ci étant reliée à la loi de Hubble par

$$v = \frac{d a(t)}{d t} = H a(t) \quad (1.5c)$$

on tire H à partir de z . Plus exactement, H n'est pas rigoureusement constante : 1°) on observe une tendance à l'accélération de l'expansion de l'univers ; 2°) la vitesse de récession des galaxies a changé au cours du temps cosmique depuis le Big Bang : elle était plus importante aux temps qui ont juste suivi le Big Bang, notamment lors de la phase inflationnaire ; puis elle a fortement diminué. Enfin la phase d'accélération nouvellement observée montre un accroissement de la vitesse de récession. Malgré ces changements, le modèle cosmologique FLRW montre que H reste pratiquement constante. L'estimation de l'âge de l'univers utilise le « temps de regard en arrière » (ou « lookback time ») noté $\Delta t(a^*)$, qui est le moment depuis lequel un objet lointain a émis son rayonnement qui parvient jusqu'à nous, compte tenu du décalage spectral vers le rouge dû à l'expansion ; il fournit donc un âge de l'objet exprimé en temps cosmique. Il est égal à :

$$\Delta t(a_*) = \frac{v}{c} \frac{1}{H_0} \quad (1.6a)$$

et s'exprime alors en fonction du décalage z :

$$\Delta t(a_*) = \frac{1}{H_0} \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \quad (1.6b)$$

Or lors de l'émission du fond diffus cosmologique, on sait que le décalage spectral était $z \approx 1000$, ce qui donne pratiquement pour l'âge de l'univers depuis le Big Bang

$$\Delta t(a_*) \approx t_0 = \frac{1}{H_0} \quad (1.7)$$

Avec les valeurs numériques données ci-dessus, on obtient: $t_0 = 13,69 \pm 0,13$ milliards d'années, c'est le temps cosmique écoulé depuis le Big Bang. Les données du satellite Planck donnent plus précisément : $t_0 = 13,82$ milliards d'années.

1.5 - Température du fond diffus cosmologique

Cette température est rattachée au rayonnement électromagnétique qui emplit l'univers à ses tous premiers instants, son existence est prévue dans le modèle du Big Bang. Dans les 380 000 années qui suivent le Big Bang, l'univers, alors de très petite dimension, est rempli d'un plasma de particules (un plasma est un gaz constitué de particules chargées électriquement) : protons, électrons, photons, etc. Cette matière primordiale est en équilibre thermique et, à ce titre, elle émet un rayonnement électromagnétique de corps noir avec une longueur d'onde inversement proportionnelle à la température (loi de Wien) ; cette observation est incompatible avec les théories cosmologiques de l'état stationnaire (sans expansion), lesquelles, du coup, perdent de l'intérêt. La densité est telle que les photons interagissent rapidement avec la matière, et donc ont un libre parcours moyen très faible : l'univers est donc opaque à cause de ce piégeage des photons.

Cette situation perdure jusqu'à ce que, 380 000 ans après le Big Bang, l'univers est suffisamment dilaté pour que sa température moyenne baisse et qu'il se produise le découplage du rayonnement et de la matière : les électrons libres peuvent s'associer aux protons et aux neutrons, ce qui forme les premiers atomes, et les photons, n'étant plus piégés par la matière du fait de sa charge devenue neutre, peuvent se propager avec un libre parcours moyen plus important, de l'ordre des dimensions de l'univers. L'énergie rayonnée ainsi libérée est alors très élevée : des quelques 3000 K de température qu'elle avait au moment du découplage ⁽¹⁾ (qui correspond aux longueurs d'onde du proche infrarouge), par suite de l'expansion de l'univers elle chute, par effet Doppler, à une température très basse, $2,7260 \pm 0,0013$ K ⁽²⁾, correspondant à une longueur d'onde de 3 mm qui est du domaine spectral compris entre l'infrarouge lointain (10 à 100 μm) et les micro-ondes, ou hyperfréquences (longueurs d'onde centimétriques). C'est le rayonnement fossile, ou du fond diffus cosmologique (ou CMB : *Cosmic Microwave Background*) [5] tel qu'il fut observé par le dispositif du laboratoire spatial WMAP de la NASA lancé en 2001, et affinant les observations de l'observatoire spatial COBE (Cosmic Background Explorer) de la NASA, opérant de 1989 à 1996 en vue d'établir une cartographie des anisotropies à grande échelle du CMB. Avec l'expansion de l'univers, le CMB continuera son décalage vers le rouge jusqu'à ne plus être détectable car son spectre sera noyé dans ceux des structures astrophysiques nettement plus énergétiques.

Le rayonnement fossile est globalement homogène, cependant il présente des fluctuations distribuées dans certaines directions de très faible amplitude, dont l'une des origines remonterait aux périodes qui précèdent l'inflation cosmique apparue 10^{-35} seconde après le Big Bang, à l'issue de l'« ère de Planck » : les fluctuations seraient causées principalement par des oscillations acoustiques des baryons et par des effets de diffusion. Les oscillations acoustiques résultent des interactions entre les photons et les baryons du plasma primordial : tandis que le gaz de photons exerce une pression isotrope qui tend à supprimer les irrégularités, l'attraction gravitationnelle exercée par les baryons entre eux les fait se déplacer lentement et former des amas de densités non uniformes ; des oscillations acoustiques résultent de la compétition entre ces deux effets opposés et génèrent par résonance des pics de rayonnement perceptibles dans le CMB. La densité de ces perturbations est adiabatique (sans variation de chaleur), ce qui est compatible avec l'inflation cosmique, lui-même processus adiabatique au cours duquel en un temps extrêmement court l'univers a connu une expansion brutale l'amenant à une courbure très faible. Les zones de concentration de matière engendrée par les interactions gravitationnelles entre baryons sont distribuées de manière non uniforme, elles donneront naissance aux grandes structures telles que les galaxies et les amas de galaxies, matière noire (qui reste encore à expliquer). Les effets de diffusion, quant à eux, proviennent du fait que le découplage des photons et des baryons s'effectue après une certaine durée, il n'est pas immédiat : la probabilité avec laquelle le photon a diffusé (appelée PVF, photon visibility function) est une fonction du temps ; on montre que le maximum de PVF avec laquelle le photon a diffusé pour la dernière fois correspond à 372 000 années, qui est une valeur finie (on dit alors que la

1 Cette température correspond à une énergie de 0,26 eV, nettement plus petite que celle d'ionisation de l'hydrogène 13,6 eV, c'est pourquoi les photons avant le découplage ne peuvent pas modifier l'énergie des atomes d'hydrogène H.

2 La température du CMB à 2,726 K correspond à une densité d'énergie, compte tenu de l'expansion, égale à $0,25 \text{ eV/cm}^3$ ($4,005 \times 10^{-14} \text{ J/m}^3$). La quasi totalité de l'énergie de rayonnement de l'univers est contenue dans le CMB. Le rayonnement du CMB correspond à une densité de photons égale environ à $400\text{--}500 \text{ photons/cm}^3$. La température a diminué d'un facteur égal à $3000/2,726 = 1100$.

profondeur de la surface de dernière diffusion des photons est finie, ce qui est effectivement observé). Mais la durée totale des découplages s'étend sur 115 000 ans après les tout premiers instants qui suivent le Big Bang, ce qui, compte tenu du résultat précédent, donne comme durée de formation du CMB : 115000 + 372000 = 487000 années.

De plus, aux oscillations primordiales du CMB présentées ci-dessus s'ajoutent les anisotropies tardives ou secondaires : depuis que les photons ont pu se propager librement, la matière ordinaire, d'origine baryonique, était constituée d'atomes électriquement neutres (hydrogène, hélium). Or les observations montrent au contraire que l'espace intersidéral est rempli majoritairement d'ions : le processus qui a provoqué l'ionisation des atomes neutres, ou « réionisation », s'est accompagné de fluctuations dans le rayonnement électromagnétique, qui a abouti à de nouvelles hétérogénéités du CMB. Toutefois, ces inhomogénéités du CMB sont suffisamment infimes pour ne pas remettre en cause l'observation qui indique que la structure cosmologique est de géométrie quasi plate, sans courbure (figure 1.2). Mais la structure pseudo-euclidienne de l'espace-temps semble ne pas convenir, et certains astrophysiciens, comme Jean-Pierre Luminet, proposent une géométrie analogue à celle du dodécaèdre de Poincaré [17].

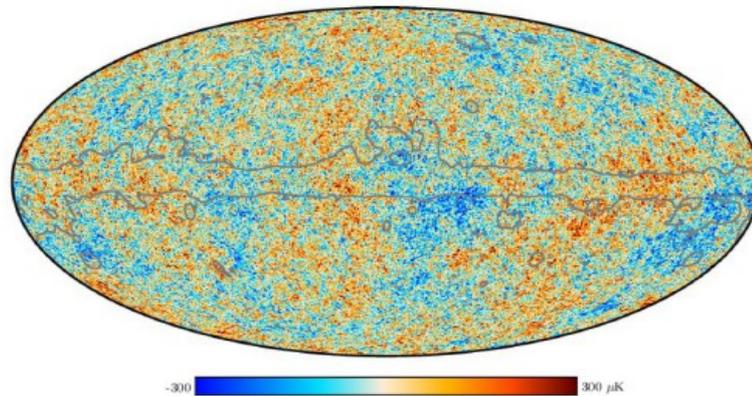


figure 1.2 : carte du CMB après correction des effets de polarisation, représentant la distribution thermique (Planck 2018) : l'amplitude des variations de température donnée par les couleurs s'échelonne de -300 µK à +300 µK

2 – Modèle cosmologique Λ CDM

Le modèle cosmologique qui fait actuellement le plus grand consensus est le « modèle Λ CDM » : il intègre la prise en compte de la constante cosmologique Λ (associée à l'énergie sombre), et de la matière noire froide (CDM : Cold Dark Matter) ; la géométrie relativiste de l'univers est celle d'une variété « plate » (courbure quasi nulle), c'est-à-dire pseudo-euclidienne si l'on utilise les coordonnées physiques au lieu des coordonnées comobiles, comme vu ci-dessus (métrique FLRW) ; ceci revient à adopter comme densité d'énergie ρ (plus exactement de masse) ⁽³⁾ la densité critique ρ_c comme le montrent les observations.

Cette densité est déduite des équations de Friedmann-Lemaître qui relie la courbure, le taux d'expansion et la densité d'énergie :

$$H^2 + c^2 \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + c^2 \frac{\Lambda}{3} \quad (2.1)$$

où K est le facteur de courbure, Λ la constante cosmologique, G la constante de gravitation de Newton, c la vitesse de la lumière, ρ_m la densité de masse de l'univers. L'équation (2.1) signifie :

expansion + courbure = masse de l'univers + énergie du vide quantique

Unités et dimensions : $H = [T^{-1}]$, $K = [L^{-2}]$, $\rho_m = [ML^{-3}]$, $\Lambda = [L^{-2}]$. Selon les valeurs de K , l'univers est soit ouvert, soit sans courbure, soit fermé :

$K = -1$: univers ouvert ;

$K = 0$: univers sans courbure (« plat »)

³ On notera parfois la densité d'énergie ρ_E pour éviter toute ambiguïté avec la densité de masse, parfois notée ρ_m , ou tout simplement ρ , la relation entre les deux étant $\rho_E = \rho_m c^2$.

$K = +1$: univers fermé (« sphérique »).

Quel que soit le scénario d'évolution de l'univers en fonction du temps cosmique, les deux conditions suivantes doivent être prises en compte :

- Conservation de la masse totale, exprimée avec le rayon de l'univers $R(t)$:

$$\rho_m R(t)^3 = \text{constante}$$

soit, avec $a = R(t)/R(t_0)$:

$$\rho_m a^3 = \text{constante} \quad (2.2)$$

- Le rayon de courbure de l'espace-temps, rayon de l'univers $R(t)$, varie avec le temps en fonction du paramètre d'accélération ou de décélération :

$$q_0 = - \frac{\ddot{a}}{a H^2} = - \frac{4 \pi G \rho_m}{3 H_0^2} \quad (2.3)$$

où $\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$ et H_0 constante de Hubble actuellement connue, q_0 est sans dimension.

La densité critique de masse de l'univers correspond à la situation où l'énergie de gravitation et l'énergie cinétique des masses sur lesquelles s'exerce l'attraction gravitationnelle de l'univers sont en équilibre. Soient M la masse de l'univers et m celle d'un corps matériel quelconque animé de la vitesse v due à

l'expansion, alors cette condition est : $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{G M}{R} m$

Or d'après la loi de Hubble, $v = H_0 R$ et la masse de l'univers, supposé sphérique, est :

$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_m$; à l'équilibre on a donc : $\frac{1}{2} H_0^2 R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{G}{R} \rho_c$ où ρ_c est la densité critique, soit :

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} \quad (2.4)$$

En utilisant les paramètres de densité :

- densité de la matière, sans pression, dans l'univers : $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8 \pi G}{3 H_0^2} \rho_m$

- densité d'énergie sombre : $\Omega_\Lambda = c^2 \frac{\Lambda}{3 H_0^2}$

- densité liée à la courbure et à l'expansion : $\Omega_K = - \frac{K c^2}{H_0^2 a^2}$

(2.1) s'exprime alors par :

$$\Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1 \quad (2.5)$$

La densité massique de l'univers est la somme des densités de matière baryonique Ω_b et de matière noire froide Ω_{dm} :

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}$$

avec :

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_c} = \frac{8 \pi G}{3 H_0^2} \rho_b \quad (\rho_b \text{ densité massique de matière baryonique})$$

$$\Omega_{dm} = \frac{\rho_{dm}}{\rho_c} = \frac{8 \pi G}{3 H_0^2} \rho_{dm} \quad (\rho_{dm} \text{ densité massique de matière noire froide})$$

La densité massique de matière totale de l'univers, qui inclut l'équivalent en masse de l'énergie de rayonnement Ω_r , est la somme :

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r$$

où les rayonnements sont la somme des rayonnements des neutrinos Ω_ν et des photons (rayonnement électromagnétique) Ω_γ :

$$\Omega_r = \Omega_\nu + \Omega_\gamma$$

avec $\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c}$ où ρ_γ densité des photons.

Nota : Avec la définition de Ω_m , la condition de conservation (2.2) s'écrit aussi :

$$H_0^2 \Omega_m = \text{constante} \times a^3$$

L'univers est « plat » (sans courbure) si $\Omega_K = 0$, c'est-à-dire pour : $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

Son expansion est accélérée si $q_0 > 1$, la valeur critique $\rho_m = \rho_c$ correspond à $q_0 = 1$, d'après (9) :

$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} > \frac{1}{2}$. Les données d'observation de 2006 fournissent les valeurs suivantes [6], où la constante de

Hubble est réécrite sous la forme paramétrique :

$$H_0 = 100 h_0 (km.s^{-1} . Mpc^{-1}) \quad (2.6)$$

où h_0 est ajustée en fonction des observations obtenues. En ordre de grandeur : $h_0 \approx 0,7$

Les valeurs du tableau 2.1 suivant montrent que l'univers est quasiment plat, $\Omega_K = 0$ avec

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 0,24_{-0,04}^{+0,03} + 0,76_{-0,06}^{+0,04} = 1,00_{-0,06}^{+0,04}$$

et l'expansion accélère puisque :

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \frac{0,76_{-0,06}^{+0,04}}{0,24_{-0,04}^{+0,03}} \geq \frac{0,70}{0,27} = 2,59 > \frac{1}{2}$$

grandeur	notation	Valeur et unités
Température du CMB	T_0	$2,725 \pm 0,001$ (K)
Densité d'entropie	s/k_B (s : entropie S par unité de volume)	$2889,2 (T/T_0)^3$ (cm ⁻³)
Densité de photons du CMB	n_γ	$410,5 \pm 0,5$ (cm ⁻³)
Facteur d'échelle de la constante cosmologique	$c^2/3H_0^2$	$2,853 \times 10^{51}/h_0^2$ (m ²)
Densité critique de masse de l'univers	$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$	$2,77536627 \times 10^{11} h_0^2$ (M _{soleil} Mpc ⁻³) $= 1,87837(28) \times 10^{-29} h_0^2$ (g.cm ⁻³) $= 1,05369(16) \times 10^{-5} h_0^2$ (GeV/c ² .cm ⁻³)
Densité de la matière sans pression de l'univers	$\Omega_m = \rho_m/\rho_c$	$0,127_{+0,007;-0,009} h_0^{-2} = 0,24_{+0,03;-0,04}$
Densité de matière baryonique de l'univers	$\Omega_b = \rho_b/\rho_c$	$0,0223_{+0,0007;-0,0009} h_0^{-2} = 0,042_{+0,003;-0,005}$
Densité de matière sombre de l'univers	$\Omega_{dm} = \Omega_m - \Omega_b$	$0,105_{+0,007;-0,010} h_0^{-2} = 0,20_{+0,02;-0,04}$
Densité de rayonnement de l'univers	$\Omega_\gamma = \rho_\gamma/\rho_c$	$(2,471 \pm 0,004) 10^{-5} h_0^{-2} = (4,6 \pm 0,5) \times 10^{-5}$
Densité de neutrinos de l'univers	Ω_ν	$< 0,007 h_0^{-2} = 0,014$
Densité d'énergie sombre de l'univers	Ω_Λ	$0,76_{+0,04;-0,06}$ (95%)
Densité d'énergie totale de l'univers	$\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda$	$1,003_{+0,013;-0,017}$
Proportion de baryons par rapport aux photons	$\eta = n_b/n_\gamma$	$4,7 \times 10^{-10} < \eta < 6,5 \times 10^{-10}$ (95%)
Densité du nombre des baryons de l'univers	n_b	$1,9 \times 10^{-7}$ (cm ⁻³) $< n_b < 2,7 \times 10^{-7}$ (cm ⁻³)
Âge de l'univers (depuis le Big-Bang)	t_0	$13,7_{+0,1;-0,2}$ (Gannées)

Tableau 2.1 : quelques données d'observations cosmologiques

3 – Généralités sur l'après CMB

Au « début » de l'univers, c'est-à-dire juste après le Big-Bang, il n'y a pas de galaxies, ni étoiles, ni molécules. Il y a un plasma, c'est-à-dire un mélange de rayonnements (photons), et de matière formée d'atomes d'hydrogène H, d'hélium He, d'électrons e^- .

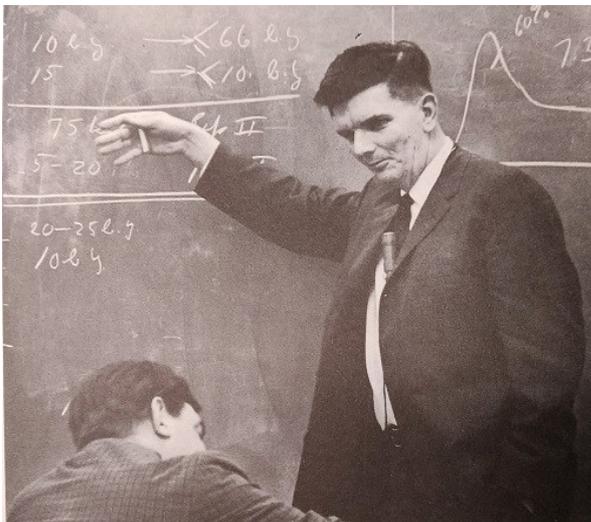
Le CMB, ou rayonnement fossile, est la signature observationnelle de cette époque primordiale, qui nous parvient aujourd'hui (au temps cosmique t_0) avec un décalage du rayonnement dans le domaine centimétrique (rayonnement dit micro-onde), ce qui correspond à une émission au temps après le Big-Bang d'environ 372000 ans avec une température d'environ 3000 K.

Les propriétés du CMB ont commencé à se préciser depuis mars 2013. La découverte du rayonnement fossile a eu lieu sur la période 1963-1965, effectuée par deux physiciens du Bell Laboratory, Arno Penzias et Robert Wilson (tous deux Prix Nobel 1978), au moyen du radiotélescope Holmdel : un flux de photons isotrope et constant a été observé ; son spectre thermique s'étend sur des longueurs d'onde de 0,3 mm à 1 m et présente un maximum vers la longueur d'onde de 3 mm. Son interprétation comme CMB a été établie en 1965 par Robert H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. J. Roll, D. T. Wilkinson [7].

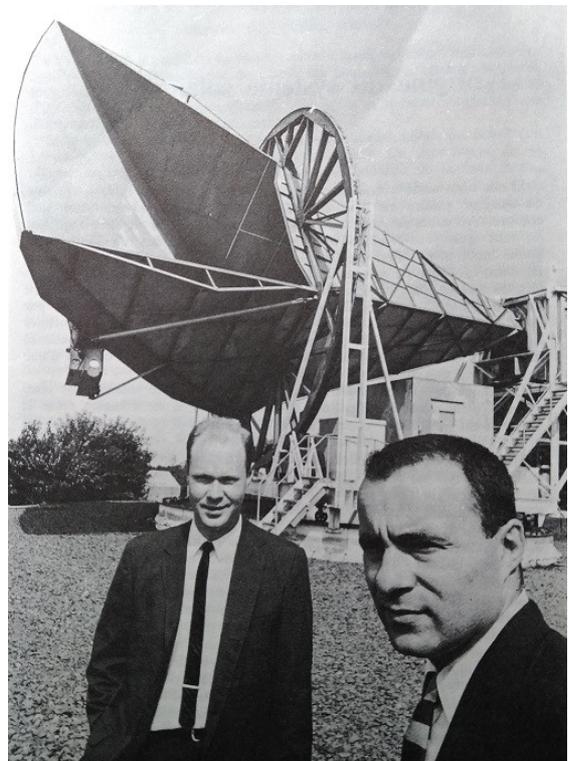
Remarque d'ordre historique : le physicien Georges Gamow avait pressenti et exposé cette même interprétation en 1956 et l'article qu'il avait écrit à ce sujet n'avait suscité aucun intérêt.

Avec le décalage dû à l'expansion (soit au bout de 13,7 milliards d'années), le rayonnement fossile observé aujourd'hui avec cette longueur d'onde correspond à une température reçue actuellement de 2,728 K (l'émission à $T = 3000$ K environ correspond alors à un décalage $z \approx 1000$).

Autre remarque d'ordre historique : la première prédiction d'un rayonnement fossile pouvant être observé avec une température de l'ordre de quelques kelvins a été conjecturée par Halpher et Herman en 1948 sur la base d'un modèle de G. Gamow. Notons aussi que le radical du cyanogène CN a été découvert dans le milieu interstellaire par Dunham et W. S. Adams en 1937 ; or il s'avère que la température d'excitation du CN est égale à 2,3 K, ce qui laisse supposer que ce composé a pu être produit par le rayonnement du CMB à la température actuelle. En 1941, Andrew McKellar appliqua ce résultat au spectre d'absorption CN d'une étoile type B pour mesurer la température à 2,3 K du rayonnement du corps noir environnant, mais il imputa l'origine à des supposés effets de rotation de molécules interstellaires.



Robert Dicke (1916-1997)



Robert Wilson et Arno Penzias devant l'antenne Holmdel

Photos © référence [8]

Avant l'époque d'émission du CMB, l'univers contient des photons qui interagissent avec des électrons, des protons, des noyaux d'hélium, et ces réactions maintiennent un équilibre thermique à 3000 K. Une telle énergie thermique favorise l'ionisation de la matière, ce qui va dans le sens d'un renforcement des

interactions rayonnement-matière : la lumière ne peut pas alors se propager librement, elle est piégée par ses interactions avec les particules matérielles. Cela a pour double conséquence :

- un univers opaque, où les noyaux ne peuvent pas se recombinaison avec les électrons : les atomes ne peuvent pas se former durablement ;

- l'impossibilité d'observer l'univers avant la période d'émission du CMB : c'est l'ère opaque de l'univers.

Puis, suite à l'expansion, la température diminuant, le découplage entre le rayonnement et la matière devient possible et dure 115000 ans ; les photons perdent de l'énergie et ne peuvent plus ioniser les atomes. Il s'ensuit que, tandis que les atomes peuvent se former durablement, les photons peuvent se propager librement : l'univers devient transparent. Les noyaux s'unissent aux électrons en formant d'abord les atomes neutres H et He, et certains isotopes (deutérium, hélium-3, tritium) : c'est la phase de recombinaison. La durée qui sépare le Big Bang et la fin de la recombinaison est donc 372000 + 115000 = 487000 ans, et le rayonnement émis à cette époque nous parvient au bout de 13,7 milliards d'années.

On a vu que le spectre de rayonnement du fond diffus cosmologique est celui d'un corps noir. Cela signifie que le milieu est en équilibre thermique : l'énergie électromagnétique reçue est absorbée et réémis complètement sous forme de rayonnement thermique à une température T , sur une gamme de longueurs d'onde dont le spectre de densité d'énergie suit la loi de Planck (voir par exemple [9]) :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad [\text{J.s.m}^{-3} \text{ ou } \text{J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}] \quad (3.1)$$

où h constante de Planck, c vitesse de la lumière, k_B constante de Boltzmann, $\nu = c/\lambda$ fréquence ; on exprime aussi la loi de Planck avec la luminance énergétique spectrale $L_\nu(\nu, T) = c/8\pi.u(\nu, T)$ en $\text{J.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ ou $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{Hz}^{-1}$ (figure 3.1). Pour une température d'équilibre donnée T , la luminance énergétique spectrale est maximale pour une longueur d'onde selon la loi de Wien :

$$\lambda_{\max}(T)(m) = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T(K)}$$

qui permet de déterminer la longueur d'onde du rayonnement d'un corps à une température donnée ; par exemple, le corps humain à $T = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$ a un rayonnement thermique autour de la longueur d'onde $\lambda_{\max} = 9,3 \mu\text{m}$, soit dans l'infrarouge IR lointain.

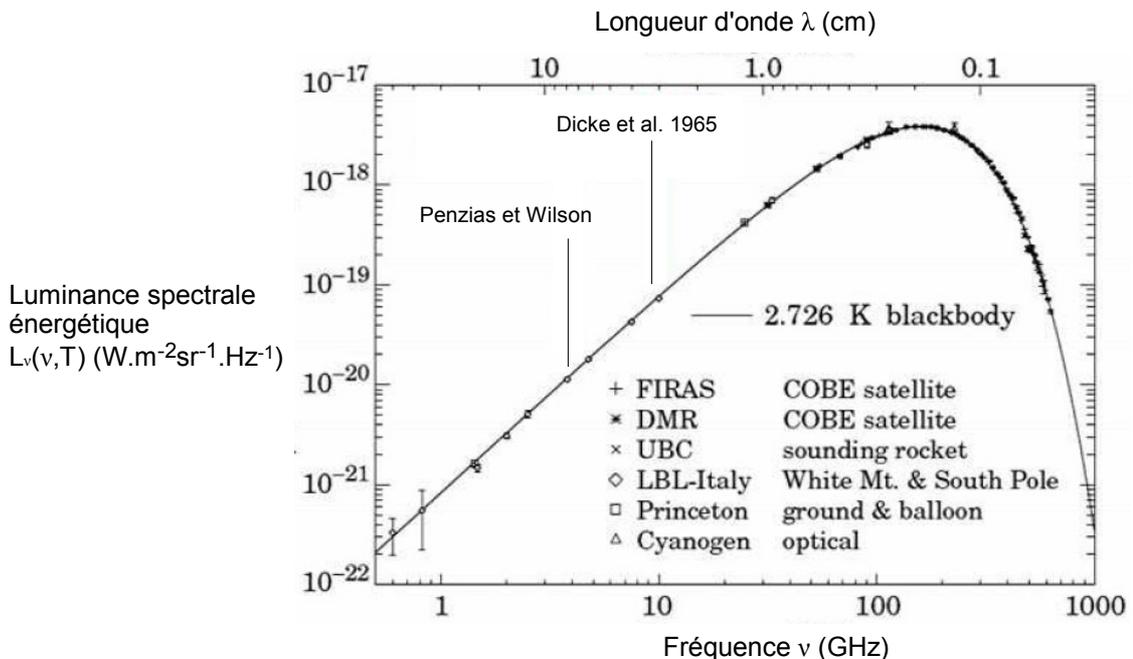


Figure 3.1 : luminance spectrale énergétique du CMB (réf. [10])

L'évolution de la température du CMB avec l'expansion, ou de manière équivalente avec le décalage spectral z , est donnée par :

$$T(z) = 2,725(1+z) \quad (3.2)$$

d'où l'on déduit que la température d'émission primordiale $T \approx 3000$ K correspond à $z \approx 1000$. On verra plus loin les valeurs plus précises. Du spectre de Planck du CMB on déduit que la densité volumique des photons (nombre de photons du CMB / volume comobile) est de l'ordre de 400 photons/cm³ soit 400000 photons/L (plus exactement $n_\gamma = 410$ cm⁻³) (tableau 2.1), en comparaison de 0,5 atomes/L pour la matière baryonique. Ces densités ont très peu évolué sur 13,7 milliards d'années.

Le CMB présente une grande homogénéité et isotropie du rayonnement thermique. Cependant des observations ont révélé des anisotropies (fluctuations) : COBE, WMAP (2003), mission Planck (2009). Comme causes possibles sont évoquées, au temps $t = 372000$ ans, les fluctuations primaires dans le plasma ainsi que les fluctuations secondaires en tant qu'interactions entre le rayonnement CMB et les différents constituants lors de la propagation des photons sur 13,7 milliards d'années :

- Les fluctuations primaires proviendraient d'oscillations acoustiques : le fluide (auquel on assimile le plasma) est très chaud et oscille comme une onde acoustique. Le champ de gravitation est alors compensé par la pression de radiation. Il apparaîtrait alors des bulles de surdensité ou de sous-densité. À la recombinaison ces bulles sont figées, même si la pression radiative des photons disparaît, d'où l'anisotropie thermique perceptible dans le spectre du CMB.

- Les fluctuations secondaires seraient une conséquence de l'effet Sunyaev-Zel'dovich : sur la distance parcourue par les photons en 13,7 milliards d'années, soit environ 50 milliards d'années-lumière compte tenu de l'expansion durant cette période, des amas de galaxies ont été formés bien après le Big Bang ; des interactions par diffusion ont eu lieu avec les milieux constitués de gaz chauds et d'électrons libres, causant des modifications locales de température.

À partir de l'exploitation du spectre de rayonnement du CMB, avec ses inhomogénéités, et selon le modèle Λ CDM, les paramètres cosmologiques sont ajustés : densité des baryons, matière noire, constante cosmologique, etc. (COBE, WMAP, Planck). Les anisotropies ne dépassent pas 10^{-6} K.

Un problème, parmi d'autres, est à mentionner : deux directions opposées de l'émission du CMB dans l'espace, à l'époque de 372000 ans, étaient distantes de 81 millions d'années-lumière. Ces régions n'ont donc pas pu interagir. Une solution possible consiste à introduire l'existence d'une phase d'inflation après le Big Bang : expansion exponentielle sur une durée très courte, où des inhomogénéités microscopiques seraient devenues macroscopiques. On verra plus loin, succinctement, les principales caractéristiques de l'inflation cosmologique ainsi conjecturée.

4 – Expansion de l'univers et datations

4.1 – Métrique d'un espace-temps isotrope et homogène

Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'univers, aux échelles cosmologiques, conduisent à poser sa métrique d'espace-temps sous la forme :

$$d s^2 = -c^2 d t^2 + a^2(t) \gamma_{ij}(x^k) d x^i d x^j \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

où t est le temps cosmique, $a(t)$ le facteur d'échelle, γ_{ij} métrique des hypersurfaces à t fixé, $\Sigma(t)$. En introduisant le temps conforme

$$d \eta = \frac{d t}{a(t)}$$

(4.1) devient :

$$\left. \begin{aligned} d s^2 &= a^2(\eta) (-c^2 d \eta^2 + d \sigma^2) \\ \text{où : } d \sigma^2 &= \gamma_{ij} d x^i d x^j = d \chi^2 + f_K^2(\chi) d \Omega^2 \\ \text{avec : } d \Omega^2 &= d \theta^2 + \sin^2 \theta d \varphi^2 \end{aligned} \right\} (4.2)$$

$d \sigma^2$ est la métrique spatiale, $d \chi$ coordonnée radiale, $d \Omega$ angle solide infinitésimal, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. $f_K(\chi)$ dépend de la courbure K des espaces 3D à t fixé $\Sigma(t)$:

- Si $K > 0$: $f_K(\chi) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi)$ avec $0 \leq \sqrt{K}\chi \leq \pi$ (4.3a)

- Si $K = 0$: $f_K(\chi) = \chi$ (4.3b)

- Si $K < 0$: $f_K(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\chi)$ avec $0 \leq \sqrt{-K}\chi \leq \infty$ (4.3c)

La surface d'une sphère comobile de rayon χ est égale à :

$$S(\chi) = 4\pi f_K^2(\chi) \quad (4.3 \text{ bis})$$

Lorsque $\chi \ll 1/\sqrt{|K|}$ on retrouve la formule classique pour une sphère dans l'espace euclidien : $S = 4\pi\chi^2$.

4.2 – Loi de Hubble

Deux points comobiles de positions respectives \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont séparés, dans l'espace physique, d'une distance égale à la norme du vecteur :

$$\mathbf{D}_{12} = a(t)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Il s'ensuit, avec $\mathbf{D} = a(t)\mathbf{r}$:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{v}_{rec} + \mathbf{v}_{propre}$$

où :

- vitesse de récession : $\mathbf{v}_{rec} = \frac{da}{dt}(t)\mathbf{r} = H(t)a(t)\mathbf{r} = H\mathbf{D}$ (4.4a)

- vitesse propre : $\mathbf{v}_{propre} = a(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (4.4b)

où $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}(t)$ est la « constante de Hubble » qui, pour de grandes distances, donc pour des âges reculés de l'univers, dépend du temps cosmique t . Actuellement, à $t = t_0$, on a $H = H_0$ qui est observé comme constant pour des objets à faibles décalages z , et donc pour lesquels on a :

$$\mathbf{v}_{rec} \approx H_0 \mathbf{D} \quad (4.5)$$

A titre indicatif, les figures 4.1 et 4.2 montrent le comportement linéaire de la « constante de Hubble » avec la distance. Pour des bilans plus complets et récents, voir aussi réf. [11], [12], [15] d'où est issue la figure 4.2.

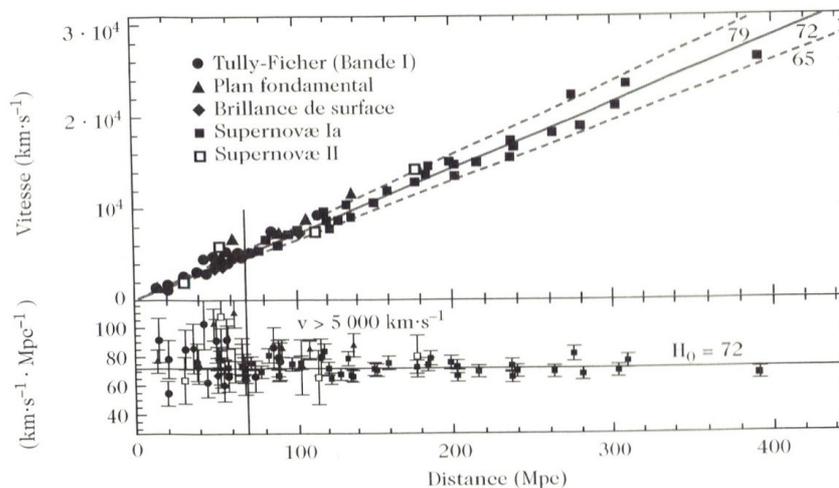


figure 4.1 : vérification de la loi de Hubble avec le projet HST KJey, utilisant différents types d'objets distants jusqu'à 300 Mpc (référence [10])

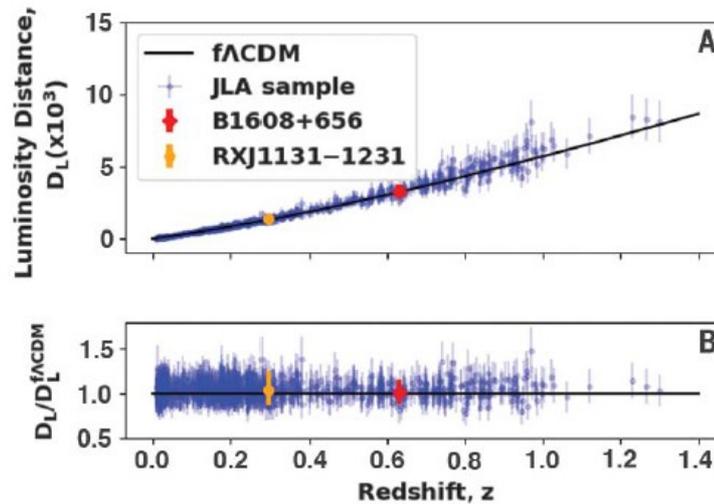


figure 4.2 (référence [15]) :

Diagramme de Hubble $H = f(z)$ et ses écarts résiduels avec le modèle Λ CDM pour un univers sans courbure. D_L est la distance luminosité absolue, D_a la distance angulaire reliée à la précédente par $D_L = (1 + z)^2 D_a$

Remarque à caractère historique : la « loi de Hubble » est rebaptisée « loi de Hubble-Lemaître », car comme il est expliqué en référence [13] :

« Vienne, 31 août 2018. Lors de la 30^{ème} Assemblée générale de l'Union astronomique internationale (UAI), qui compte 13 500 membres dans le monde, le Secrétaire général de l'association proposait de rebaptiser la fameuse loi de Hubble sur l'expansion de l'Univers, en « loi de Hubble-Lemaître », en l'honneur de George Lemaître, professeur à l'Université catholique de Louvain et « père du Big Bang ». Pour remettre les pendules à l'heure ? 30 octobre 2018, c'est chose faite !

Georges Lemaître, Père de la Théorie du Big Bang, avait prédit la loi de récession des galaxies dès 1927, en publiant l'article intitulé « Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant ». « Il y redécouvre tout d'abord la solution dynamique de Friedman aux équations de la relativité générale d'Einstein qui décrit un univers en expansion. Il en déduit également que l'expansion de l'univers implique que les spectres des galaxies lointaines sont décalés d'une quantité proportionnelle à leur distance. Enfin, il utilise des données publiées sur les vitesses et les distances photométriques des galaxies pour calculer le taux d'expansion de l'Univers. » explique l'UAI.

Soit avant que le scientifique américain Edwin Hubble, ne connaissant pas cette prédiction puisque publiée en français et passée largement inaperçue aux yeux de la communauté scientifique internationale, ne découvre "la loi de Hubble" sur base de ses observations astronomiques et ne publie ses résultats en 1929 (réf. [14]). Peu après la publication de cet article, l'expansion cosmique est devenue universellement connue sous le nom de « loi de Hubble », même si son principe fut prédit par George Lemaître en 1927. En astronomie, cette loi énonce que les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse approximativement proportionnelle à leur distance. Elle fut la première preuve de l'expansion de l'Univers, un phénomène générique prédit par la relativité générale, et du « Big Bang », le modèle cosmologique qui en résulte le plus naturellement. »

4.3 – Équation d'état de la matière

Si la matière (au sens large, donc y compris le rayonnement) est assimilée à un fluide, son action peut être décrite comme une pression P directement liée à la densité de son énergie ρ_E :

$$P = w \rho_E \quad (4.6)$$

Rappel : $\rho_E = \rho_m c^2$, où ρ_m est la densité de masse, que l'on notera parfois simplement ρ_m s'il n'y a pas d'ambiguïté. L'effet de la pression peut être attractif ou bien répulsif selon le signe de w . Parmi les situations possibles on note :

$w = 0$ si la matière est sans pression ;

$w = 1/3$ pour le rayonnement (plus exactement lorsque le rayonnement domine la matière, comme c'est le cas à l'ère radiative que l'on verra plus loin) ;

$w = -1$ pour la matière, dite « énergie sombre », lorsque les effets de la constante cosmologique Λ sont

pris en compte ; ces effets sont répulsifs par rapport à la gravitation et favorisent l'expansion, voire son accélération, tandis que la gravitation a une action attractive sur la matière pouvant conduire à sa contraction.

Pour un fluide parfait, on montre que $w = (c_s / c)^2$ où c_s est la vitesse du son dans le fluide.

4.4 – Système dynamique de Friedmann-Lemaître

Pour de faibles décalages spectraux, le facteur d'échelle a pour expression approchée :

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right] \quad (4.7)$$

où q_0 est le paramètre de décélération à l'époque t_0 actuelle :

$$q_0 = \left(- \frac{\ddot{a}}{a H^2} \right)_{t=t_0} \quad (4.7\text{bis})$$

On a : $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ et les équations de Friedmann sont :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{\kappa}{6} (\rho_E + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.8a)$$

$$\frac{1}{c^2} H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho_E - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.8b)$$

$$\dot{\rho}_E + 3H(\rho_E + P) = 0 \quad (4.8c)$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$; (4.8c) exprime la conservation de l'énergie. (4.8) donne le paramètre de décélération à une époque antérieure t :

$$q = \frac{1}{2} (3\gamma - 2) (1 - \Omega_K) - 3\gamma \Omega_\Lambda \quad (4.9)$$

où $\gamma = 1 + w$. On déduit de (4.8) la dynamique d'évolution des différents paramètres (système dynamique de Friedmann-Lemaître) :

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = -(1+q)H \quad (4.10a)$$

$$\frac{1}{H} \frac{d\Omega_\Lambda}{dt} = 2(1+q)\Omega_\Lambda \quad (4.10b)$$

$$\frac{1}{H} \frac{d\Omega_K}{dt} = 2q\Omega_K \quad (4.10c)$$

Suivant les valeurs des points fixes de Ω_Λ et Ω_K (c'est-à-dire où (4.10b et c) sont nuls) on a différentes géométries d'univers :

- a) $\Omega_\Lambda = \Omega_K = 0 \rightarrow$ espace d'Einstein-De Sitter : courbure nulle sans constante cosmologique ;
- b) $\Omega_\Lambda = 1$ et $\Omega_K = 0 \rightarrow$ espace de De Sitter : espace sans matière, avec constante cosmologique, avec sections spatiales > 0 , en expansion éternelle ;
- c) $\Omega_\Lambda = 0$ et $\Omega_K = 1 \rightarrow$ espace de Milne : vide, sans constante cosmologique, avec sections spatiales hyperboliques (courbure négative $K < 0$).

Dans l'évolution de l'univers ces configurations peuvent être, selon les valeurs de γ , des attracteurs dy-

namiques, ou au contraire, des répulseurs, ou des points selle, (tableau 4.1) :

γ	< 0	0]0, 2/3[2/3	> 2/3
$w = \gamma - 1$	< 0	-1 (présence d'énergie sombre)] -1, -1/3[-1/3	> -1/3
Einstein-De Sitter	attracteur	Non attracteur	selle	Non attracteur	répulseur
De Sitter	selle	attracteur	attracteur	attracteur	attracteur
Milne	selle	répulseur	répulseur	répulseur	selle

Tableau 4.1 : stabilité des différents modèles d'univers

4.5 – Temps de regard en arrière

Pour évaluer l'époque de l'univers correspondant à une observation, on a besoin de connaître le « temps de regard en arrière ».

Soit H la valeur de la « constante de Hubble » à un certain âge et H_0 celle d'aujourd'hui. On note $\varepsilon(a) = H/H_0$. On montre que pour l'ensemble des composantes x de la matière de l'univers, on a :

$$\varepsilon(a)^2 = \sum_x \Omega_{x0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_x)} + \Omega_{K0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_{\Lambda 0} \quad (4.11)$$

où $\Omega_x = c^2 \frac{\kappa \rho_x}{3H^2}$ sont les paramètres de densité d'énergie ρ_x des composantes x . Le temps cosmique

est lié au facteur d'échelle par : $dt = \frac{da}{aH}$. Puisque $\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$ il vient :

$$dt = -\frac{1}{H_0} \frac{dz}{(1+z)\varepsilon(z)} = \frac{1}{H_0} \frac{da}{a\varepsilon(a)}$$

Les différentes définitions de temps suivantes sont alors :

■ **Âge de l'univers** (ou temps actuel) :

Puisque à t_0 on a $z = 0$, soit encore $a = a_0 = 1$ à t_0 et $a = 0$, $z = \infty$ à $t = 0$, les relations ci-dessus donnent :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\varepsilon(z)} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a\varepsilon(a)} \quad (4.12)$$

L'âge de l'univers s'exprime aussi avec le temps conforme :

$$\eta_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 \varepsilon(x)} \quad (4.12\text{bis})$$

■ **Âge de l'univers à l'émission d'un photon de décalage spectral z^*** :

$$t(z^*) = \frac{1}{H_0} \int_{z^*}^\infty \frac{dz}{(1+z)\varepsilon(z)} \quad (4.13)$$

ou aussi :

$$t(a^*) = \frac{1}{H_0} \int_0^{a^*} \frac{da}{a\varepsilon(a)} \quad (4.13\text{bis})$$

■ **Temps de regard en arrière** : c'est la différence entre l'âge de l'univers t_0 et l'époque t^* après le Big

Bang où le photon a été émis :

$$\Delta t(z^*) = t_0 - t(z^*) = \frac{1}{H_0} \int_0^{z^*} \frac{dz}{(1+z)\varepsilon(z)} \quad (4.14)$$

ou encore :

$$\Delta t(a^*) = \frac{1}{H_0} \int_{a^*}^1 \frac{da}{a\varepsilon(a)} \quad (4.14bis)$$

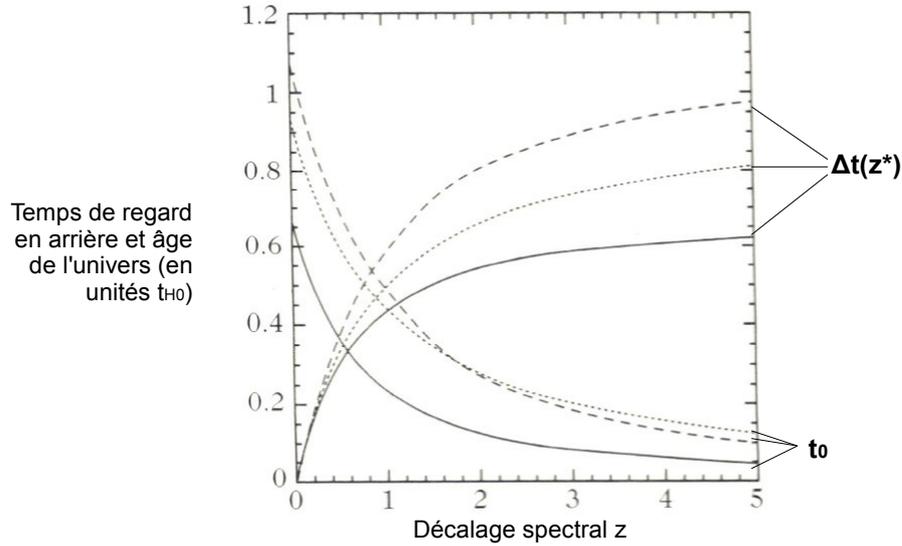


figure 4.3 : âge de l'univers t_0 et temps de regard en arrière $\Delta t(z^*)$ en unités temps de Hubble t_{H_0} , en fonction du décalage spectral z , pour trois modèles d'univers :

—————	$\Omega_{m0} = 1, \Omega_{\Lambda0} = 0$
.....	$\Omega_{m0} = 0,05, \Omega_{\Lambda0} = 0$
- - - - -	$\Omega_{m0} = 0,2, \Omega_{\Lambda0} = 0,8$

■ **Distance radiale comobile** : c'est la distance radiale χ entre une source de décalage spectral z^* , d'où est émis un photon, et un observateur qui reçoit le photon, situé en $\chi = 0$. Le photon suit une géodésique de l'espace-temps, par conséquent sa métrique est nulle ; (4.2) donne dans ce cas :

$$ds^2 = a^2(\eta)(-c^2 d\eta^2 + d\sigma^2) = 0 \rightarrow d\sigma = c d\eta = d\chi \text{ avec } d\eta = dt/a(t) \rightarrow d\chi = c dt/a$$

Or $dt = \frac{da}{aH}$, $H = H_0 \varepsilon(a)$ et $a = \frac{a_0}{1+z} \rightarrow$

$$\chi(z^*) = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^{z^*} \frac{dz}{\varepsilon(z)} \quad (4.15a)$$

ou encore :

$$\chi(a^*) = \frac{c}{H_0} \int_{a^*}^1 \frac{da}{a^2 \varepsilon(a)} \quad (4.15b)$$

Remarque : Pour un univers de courbure non nulle, on montre que (4.15a) devient :

$$\chi(z^*) = |1 - \Omega_0|^{1/2} \int_0^{z^*} \frac{dz}{\varepsilon(z)}$$

• Exemple : On applique (4.12)-(4.15) au cas d'un univers sans constante cosmologique $\Lambda = 0$, de courbure nulle $K = 0$, à l'ère matérielle. (4.11) donne alors :

$$\varepsilon(a) \approx \Omega_0^{1/2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{3}{2}(1+w)}$$

il vient donc :

► Âge de l'univers : (4.12bis) →

$$t_0 = \frac{2}{3 H_0} \frac{\Omega_0^{-1/2}}{1+w} \quad (4.15c)$$

qui se réduit à (7.22), que l'on verra au [chapitre 7](#), à l'ère matérielle $w = 0$ et avec $\Omega_0 \approx 1,003$. (4.15c) est encore :

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{1+w} t_{H0}$$

où $t_{H0} = \frac{1}{H_0}$ temps de Hubble. Le problème est que, actuellement $t_0 \approx t_{H0} = 1/H_0 \approx 9,7776 \text{ h}^{-1} \times 10^9$ ans avec $h = 0,72 \pm 0,05$ soit $t_0 \approx 13,7 \cdot 10^9$ ans, ce que ne donne pas (4.15c) si $w = 0$. En fait, on ne peut pas utiliser $w = 0$ de $t = 0$ à $t = t_0$, comme si l'univers a été toujours à l'ère matérielle. On ne peut pas définir l'âge de l'univers en conservant la même valeur de w (même équation d'état), ou des paramètres cosmologiques inchangés qui interviennent dans (4.11).

Mais on poursuit l'exemple en admettant (4.15c) avec $w = 0$, pour illustrer la signification du temps de regard en arrière et de la distance radiale comobile, et en admettant que l'équation d'état donnée par w et que le régime d'expansion ne changent pas entre t^* et t_0 .

► Âge de l'univers au moment d'émission d'un photon, $t(z^*)$: (4.13bis) donne

$$t(a^*) = \frac{a_0^{-\frac{3}{2}(1+w)}}{\Omega_0^{1/2} H_0} \frac{2}{3(1+w)} a^{*\frac{3}{2}(1+w)} \quad (4.15d)$$

$w = 0$, $a_0 = 1$, $H_0 \approx 2/3t_0$ (compte tenu de l'observation ci-dessus), donnent :

$$t(a^*) = \frac{2}{3} \frac{1}{\Omega_0^{1/2} H_0} a^{*3/2} \approx t_0 a^{*3/2} \quad (4.15e)$$

► Temps de regard en arrière : (4.14bis) →

$$\Delta t(a^*) = \frac{a_0^{-\frac{3}{2}(1+w)}}{\Omega_0^{1/2} H_0} \frac{2}{3(1+w)} \left(1 - a^{*\frac{3}{2}(1+w)} \right) \quad (4.15f)$$

$w = 0$, $a_0 = 1$, $H_0 \approx 2/3t_0$ →

$$\Delta t(a^*) = \frac{2}{3 H_0 \Omega_0^{1/2}} (1 - a^{*3/2}) = t_0 (1 - a^{*3/2}) \quad (4.15g)$$

► Distance radiale comobile :

La distance entre un observateur O (à t_0 , donc à $z = 0$, $a = a_0 = 1$) et la source S émise au temps t^* , donc à $z = z^*$, $a = a^*$, dans la métrique, est reliée à la distance radiale comobile $\chi(a^*)$ par :

$$D^* = d(O(z=0), S(z=z^*)) = a^* \chi(z^*)$$

où $\chi(z^*)$ est donné en (4.15b). On obtient :

$$D^* = \frac{1}{H_0 \Omega_0^{1/2}} \frac{a_0^{-\frac{3w+1}{2}}}{1+3w} 2a^* \left(1 - a^{*\frac{1+3w}{2}}\right) \quad (4.15h)$$

$$w = 0, a_0 = 1, H_0 \approx 2/3t_0 \rightarrow D^* \approx 3t_0 a^* (1 - a^{*1/2}) \quad (4.15i)$$

La figure 4.4a représente la distance radiale comobile en fonction du décalage spectral.

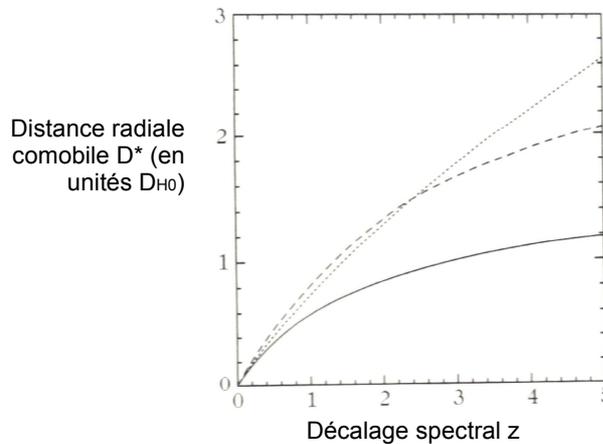


figure 4.4a : distance radiale comobile en fonction du décalage spectral z , pour trois modèles d'univers :

————— $\Omega_{m0} = 1, \Omega_{\Lambda 0} = 0$
 $\Omega_{m0} = 0,05, \Omega_{\Lambda 0} = 0$
 - - - - - $\Omega_{m0} = 0,2, \Omega_{\Lambda 0} = 0,8$

Remarque : Pendant le parcours du photon depuis $S(t^*)$, la source S s'est éloignée de O à cause de l'expansion. Lorsque le photon atteint $O(t_0)$ à l'âge actuel t_0 , la distance sur la métrique est devenue :

$$D_0 = d(O(t_0), S(t_0)) = \frac{D^*}{a} = \chi(z^*) \approx 3t_0 (1 - a^{*1/2}) \quad (4.15j)$$

en remarquant que l'on a pas pour autant $\frac{D_0}{a_0} = \chi(t_0)$! (4.15j) s'écrit encore :

$$\chi(z^*) = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z^*}}\right)$$

Telle est la signification de $\chi(z^*)$: c'est la distance entre le point d'observation O à l'âge actuel et la source S à l'âge actuel, sachant qu'elle a émis sa lumière au temps t^* , donc avec un temps de regard en arrière $\Delta t(z^*) = t_0 - t^*$ (figure 4.4b).

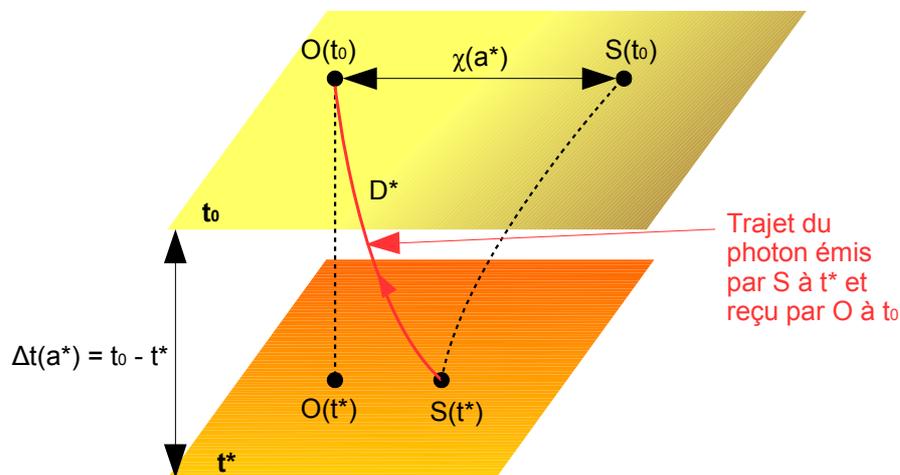


figure 4.4b : temps de regard en arrière et distance radiale comobile

Sur la figure (4.4b) le photon émis par S au temps t^* est reçu par O au temps t_0 en parcourant la distance radiale comobile $D^* = d(O(t_0), S(t^*))$, sur le temps de regard en arrière $\Delta t(a^*) = t_0 - t^*$, par suite de l'expansion. Au cours de ce temps l'expansion a écarté O et S ; chaque observateur se considère fixe dans l'expansion, ce qui peut aussi justifier une autre représentation par la figure (4.4c) : $O(t_0)$ et $O(t^*)$ sont à la « même » place, tandis que c'est S qui semble s'être éloignée en $S(t_0)$ et est distante de O à t_0 de $\chi(a^*) = d(O(t_0), S(t_0))$.

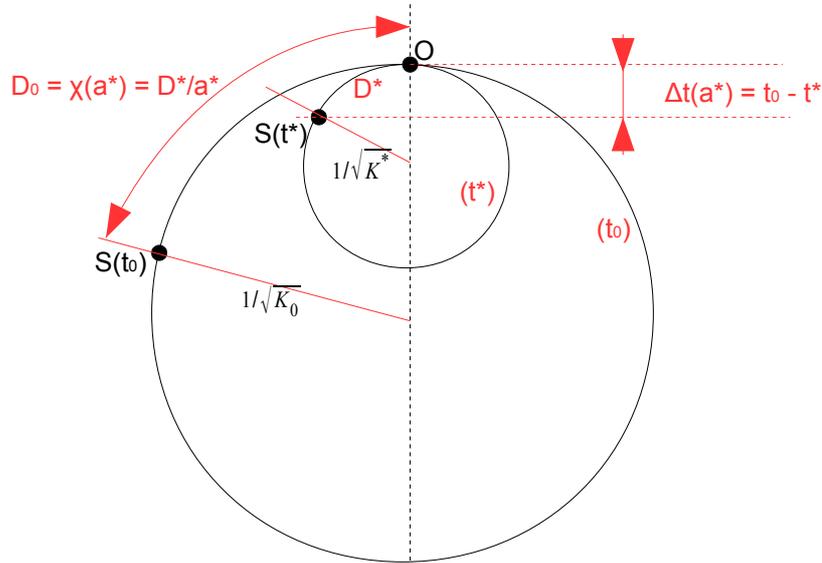


figure 4.4c : représentation du temps de regard en arrière et de la distance radiale comobile pour un univers avec une courbure K^* au temps t^* et K_0 au temps t_0

Bien qu'intuitive, la représentation de la figure (4.4c) est fautive : on verra au [point 7.3](#) que la courbure K , quasi nulle au début $t = 0$, augmente avec t , donc que le rayon de courbure $R = 1/\sqrt{K}$ diminue. Or R n'est pas le rayon de la sphère ainsi représentée. Avec l'expansion, où $a(t)$ augmente aussi avec le temps, la dimension de l'hypersurface (section spatiale de l'espace-temps) augmente même si R diminue. En fait, les explications pédagogiques qui utilisent l'image d'un ballon que l'on gonfle, où deux points comme O et S s'écartent, sont trompeuses car sa courbure diminue tandis que son diamètre augmente.



Même si les calculs précédents reposent sur $K = 1/R^2 = 0$, la représentation de la figure (4.4c) visualise le fait que O est considéré au même point, et l'évolution des distances dues à l'expansion :

$$D_0 = \frac{D^*}{a} = \chi(a^*) = 3t_0(1 - a^{*1/2})$$

En extrapolant au temps « initial » de l'expansion $t = 0$, on a $a^* \rightarrow 0$, d'où la distance maximale de l'uni-

vers observable au temps d'aujourd'hui t_0 : $D_{max} = 3t_0 = \chi(a^* = 0) = 3 \times 13,7 \cdot 10^9 = 41 \cdot 10^9 \text{ AL}$.

D_{max} croît linéairement avec l'âge de l'univers.

Application numérique, par exemple, pour $t^* = 4 \cdot 10^9$ années : (4.15e) $\rightarrow a^* \approx 0,44$; (4.15i) $\rightarrow D^* \approx 6 \cdot 10^9 \text{ AL}$; (4.15g) $\rightarrow \Delta t(a^*) \approx 10 \cdot 10^9$ années ; (4.15j) $\rightarrow D_0 \approx 18 \cdot 10^9 \text{ AL}$.

■ **Diamètre angulaire comobile** : soit $d\Omega_0$ l'angle solide sous lequel on observe un objet de surface apparente dS_c , alors son rayon angulaire R_a est défini par :

$$dS_c = R_a^2(\chi) d\Omega_0^2$$

D'après (4.3bis), $S_c = 4\pi f_K^2(\chi)$ d'où $4\pi f_K^2(\chi) = R_a^2 4\pi$ soit le diamètre angulaire comobile :

$$D_a(z) = 2R_a(z) = f_K(\chi(z)) \quad (4.16)$$

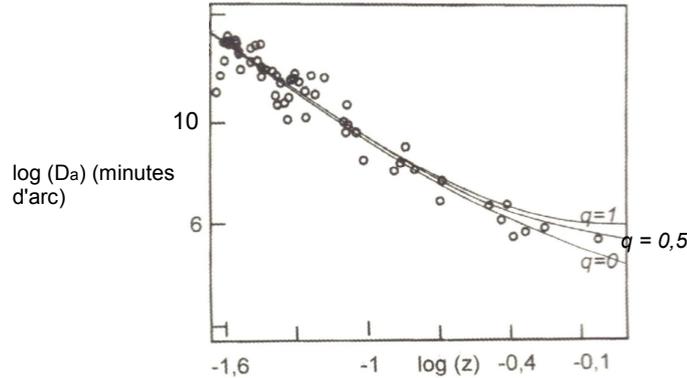


figure 4.5 : diamètre angulaire en fonction du décalage spectral z , pour différents paramètres de décélération q (référence [16])

■ **Distance angulaire (à partir de l'observateur)** : Sa définition généralise celle de la parallaxe ; si l'observateur est un point de convergence d'un faisceau de géodésiques suivies par la lumière partant d'une source, la distance angulaire est le rapport entre la dimension physique transverse de la source et l'angle solide sous lequel il est observé par l'observateur. Soit alors un objet observé (source), de surface physique comobile dS_p , celle-ci est reliée à sa surface comobile dS_c par : $dS_p = a^2(t) dS_c$

Alors la distance angulaire est définie à partir du rapport entre la superficie physique de l'objet et l'angle solide sous lequel elle est observée :

$$r_a(z) = \frac{dS_p}{d\Omega_0^2} = a^2 \frac{dS_c}{d\Omega_0^2} = a_0 \frac{R_a(z)}{1+z} \quad (4.17)$$

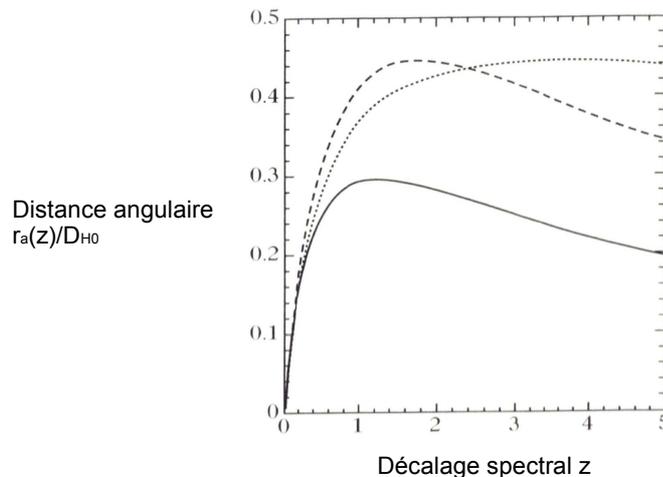


figure 4.6 : distance angulaire en fonction du décalage spectral z , pour trois modèles d'univers [10] :

$$\begin{aligned} \text{—————} & \quad \Omega_{m0} = 1, \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0 \\ \text{.....} & \quad \Omega_{m0} = 0,05, \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0 \\ \text{- - - - -} & \quad \Omega_{m0} = 0,2, \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0,8 \end{aligned}$$

■ *Distance angulaire à partir de la source observée* : Elle est définie cette fois à partir de l'angle solide $d\Omega_s$ sous lequel la source observerait la taille transverse de l'observateur (par exemple deux points d'observation) :

$$dS_{pO} = r_s^2 d\Omega_s^2$$

où dS_{pO} surface physique comobile de l'observateur ; r_s est la distance angulaire à partir de la source observée. Elle n'est pas observable directement. On montre le théorème de réciprocité entre r_s et r_a :

$$r_s = r_a (1+z) \quad (4.18)$$

qui nécessite de connaître z pour déterminer r_s .

■ *Distance luminosité D_L* : Elle est définie à partir du flux lumineux reçu par l'observateur, Φ_0 , émis depuis une source S de luminosité $L_S(\chi)$:

$$\Phi_0 = \frac{L_S(\chi)}{4\pi D_L^2}$$

La luminosité est une puissance, au niveau de la source et au niveau de l'observateur elle est respectivement :

$$L_S = \frac{\Delta E_S}{\Delta t_S} \quad \text{et} \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad \text{avec :} \quad \Delta E_0 = \frac{a}{a_0} \Delta E_S \quad \text{et} \quad \Delta t_0 = \frac{a_0}{a} \Delta t_S \quad \text{d'où :}$$

$$L_S = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 L_0 = L_0 (1+z)^2$$

Le flux lumineux reçu au niveau de l'observateur est aussi égal à la luminosité reçue par unité de surface physique : $\Phi_0 = \frac{L_0}{S_p}$ et comme pour l'observateur on a $S_p = a_0^2 S_c$ avec il vient, compte tenu de la relation entre L_S et L_0 ci-dessus :

$$\Phi_0 = \frac{L_S}{a_0^2 S_c (1+z)^2}$$

en égalisant les deux expressions de Φ_0 :

$$D_L^2 = \frac{a_0^2}{4\pi} S_c (1+z)^2$$

et avec (4.3bis) :

$$D_L(z) = a_0 (1+z) f_K(\chi(z)) \quad (4.19)$$

La luminosité de la source L_S n'est pas directement connue, mais on peut utiliser des sources de références (« chandelles standard ») dont sont connus la luminosité L^* , le décalage z^* et la distance luminosité $D_L(z^*)$, puisque l'on a :

$$D_L(z) = D_L(z^*) \sqrt{\frac{L_S \Phi_0(z^*)}{L^* \Phi_0(z)}}$$

On montre, sous l'hypothèse d'un milieu de propagation de la lumière sans absorption, le théorème de dualité des distances :

$$\left. \begin{aligned} D_L(z) &= r_s (1+z) \\ D_L(z) &= D_a (1+z)^2 \end{aligned} \right| \quad (4.20)$$

où r_s et D_a sont donnés par (4.18) et (4.16).

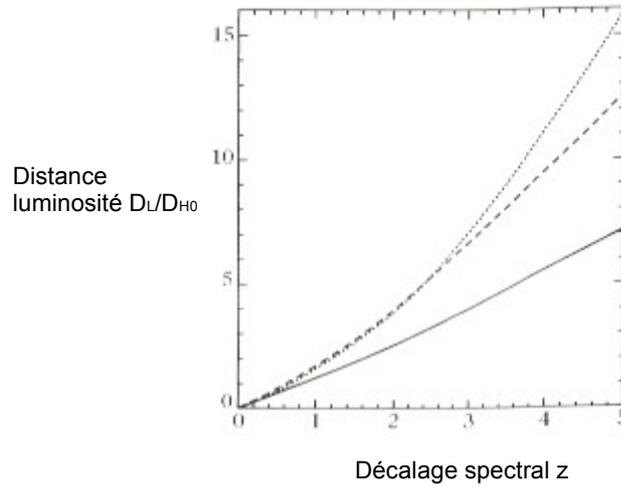


figure 4.7 : distance luminosité en fonction du décalage spectral z , pour trois modèles d'univers [10] :

$$\begin{array}{l} \text{—————} \quad \Omega_{m0} = 1, \Omega_{\Lambda0} = 0 \\ \text{.....} \quad \Omega_{m0} = 0,05, \Omega_{\Lambda0} = 0 \\ \text{- - - - -} \quad \Omega_{m0} = 0,2, \Omega_{\Lambda0} = 0,8 \end{array}$$

■ *Module de distance (filtre bolométrique) :*

Soit m la magnitude apparente d'un objet, et M sa magnitude absolue. Le module de distance est la différence entre ces deux magnitudes, par convention nulle pour un objet situé à une distance de 10 pc parce que, à cette distance, la distance luminosité est $D_L = 10$ pc :

$$m - M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{\Phi(z)}{\Phi(10 \text{ pc})} \right)$$

De la définition de Φ et avec $10 \text{ pc} = D_{H0}/(3 \cdot 10^8 h_0)$, on a :

$$m - M = 25 + 5 \log_{10} \left(3000 \frac{D_L}{D_{H0}} \right) - 5 \log_{10} h_0 \quad (4.21a)$$

où la magnitude absolue est en référence à la luminosité du Soleil L_{\odot} , la magnitude absolue du Soleil étant $M_{\odot} = 4,76$:

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + 4,76 \quad (4.21b)$$

En pratique c'est sur des bandes de fréquences particulières qu'il faut déterminer la magnitude, et non sur le spectre entier (sur le spectre entier la magnitude est dite bolométrique, elle est difficile à mesurer). Sur une bande utilisée, notée $\Delta\nu$, la magnitude absolue est alors exprimée par la modification de (4.21b) :

$$M_{\Delta\nu} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L_{\Delta\nu}}{L_{\odot\Delta\nu}} \right) + M_{\odot\Delta\nu}$$

où $M_{\odot\Delta\nu}$ est la magnitude absolue du Soleil mesurée dans la bande de fréquences (filtres de Johnson : tableau 4.2). La magnitude bolométrique est obtenue en sommant sur l'ensemble des bandes de fréquences utilisées. Un flux de rayonnement reçu sur une bande $\Delta\nu$ correspond à une émission par la source de décalage spectral z sur la bande $(1+z)\Delta\nu$, et le flux émis par la source pour la bande considérée est donc :

$$\Phi_{\Delta v}(z) = \frac{1+z}{4\pi D_L^2} \int_{\Delta v} L_v((1+z)\Delta v) d v$$

et le module de distance défini plus haut prend en compte la déformation du spectre dans la bande considérée due à l'expansion :

$$m_{\Delta v} - M_{\Delta v} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{\Phi_{\Delta v}}{\Phi(10 \text{ kpc})} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right) + C(\Delta v, z)$$

où le terme de correction est :

$$C(\Delta v, z) = -2,5 \log_{10} \left(\frac{\Phi_{\Delta v}(z)}{\Phi_{\Delta v}(z=0)} \right)$$

Filtre (bande)	Longueur d'onde moyenne (nm)	Largeur $\Delta\lambda$ (nm)	Magnitude absolue du soleil dans la bande $M_{\odot\Delta v}$
UV (ultra-violet)	365	66	5,61
B (bleu)	445	94	5,48
V (visible)	551	88	4,64
R (rouge)	658	138	4,42
I (infra-rouge)	806	149	4,08
J	1200	213	3,64
K	2190	390	3,28
bolométrique	Tout le spectre	infinie	4,76

tableau 4.2 : principaux filtres (bandes) employés en astronomie pour mesurer les magnitudes ; il existe aussi d'autres filtres : H (1630 nm), L (3600 nm), M (5000 nm)

■ *Approximation aux petits décalages spectraux* : Revenant à (4.7) et (4.9), pour de petits décalages dans un univers Λ CDM :

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0} \quad (4.22)$$

et pour un composant matériel quelconque x, compte tenu de (4.11) :

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_x (1 + 3w_x) \Omega_{x0} \quad (4.23)$$

Remarque : L'univers est en expansion accélérée si $q_0 < 0$, et décélérée si $q_0 > 0$. Il y a donc accélération si au moins un des composants vérifie $w_x < -1/3$.

Pour de petits décalages spectraux (4.11) prend la forme approchée, compte tenu de (4.23) :

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_x 3(1+w_x) \Omega_{x0} + 2\Omega_{K0} \right) z + \dots$$

soit :

$$\varepsilon(z) \approx 1 + (q_0 + 1)z + \dots \quad (4.24)$$

De (4.24) on déduit les expressions suivantes pour (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.19) :

$$\Delta t(z^*) \approx \frac{1}{H_0} \left(1 - \frac{1}{2} (q_0 + 2) z^* \right) z^* \quad (4.25a)$$

$$a_0 \chi(z^*) \approx \frac{c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{2}(q_0 + 1)z^*\right) z^* \quad (4.25b)$$

$$R_a(z) \approx \frac{c}{a_0 H_0} \left(1 - \frac{1}{2}(q_0 + 1)z\right) z \quad (4.25c)$$

$$r_a(z) \approx \frac{c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{2}(q_0 + 3)z\right) z \quad (4.25d)$$

$$D_L(z) \approx \frac{c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{2}(q_0 - 1)z\right) z \quad (4.25e)$$

■ Horizons :

● Définition : L'horizon est une frontière séparant des événements ou des particules observables et des événements ou particules non observables. Il est défini à chaque instant donné et, par conséquent, varie avec l'expansion.

● Horizon des événements :

Relativement à un observateur O, l'horizon des événements est une hypersurface de l'espace-temps séparant les événements qui sont pour toujours en-dehors du champ d'observation, des événements observables dans le présent, le passé ou le futur.

Comme exemple on a le cône de lumière de la relativité restreinte : si, pour des raisons de courbure ou d'expansion par exemple, le cône de lumière d'un observateur A ne peut jamais rencontrer celui d'un observateur B, alors les événements appartenant au futur pour A ne pourront jamais être observés par B et réciproquement.

Soit χ_s la distance radiale où un photon est émis à la date cosmique t_s et telle qu'il atteint l'origine $\chi = 0$ au bout d'un temps infini $t = +\infty$. Soit $\chi(t_s) = \chi_s$ la ligne d'univers sur laquelle cette condition est vérifiée ; c'est l'horizon des événements :

$$\chi(t_s) = \chi_s = c \int_{t_s}^{+\infty} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.26)$$

Les photons émis au-delà de S, soit en $\chi > \chi_s$ à $t = t_s$ n'atteindront jamais l'origine $\chi = 0$, et les photons émis en-deçà de S, soit en $\chi < \chi_s$ à $t = t_s$ atteindront l'origine $\chi = 0$ au bout d'un temps fini (figure 4.8).

L'horizon des événements existe si l'intégrale (4.26) est convergente, sachant que $a = \frac{a_0}{1+z}$ et

$dt = \frac{da}{aH}$. Cette condition dépend donc de la loi d'évolution de $a(t)$ dont (4.7) est une approximation.

Selon les valeurs de la courbure K et de w qui intervient dans l'équation d'état (4.6) on a différentes évolutions de $a(t)$ à partir des équations de Friedmann (4.8). Avec la courbure :

$$K = \frac{k}{R_c^2} \quad \text{où le rayon de courbure est} \quad R_c = \frac{c}{a_0 H_0 \sqrt{|1 - \Omega_0|}} \quad (4.27)$$

et selon les valeurs de $k = -1, 0, +1$, et puisque d'après l'équation d'état on a $\rho_E + 3P = \rho_E(1 + 3w)$ et $\rho_E + P = \rho_E(1 + w)$, il vient :

► $k = 0$ (univers plat) et $w \neq -1$ (univers sans constante cosmologique), (4.8c) donne :

$$\rho_E = cste \times a^{-3(1+w)}$$

et de (4.8a) :

$$H^2 = cste \times a^{-3(1+w)}$$

d'où :

$$\dot{a}(t) = cste \times a^{-(1+3w)/2}$$

qui s'intègre en :

$$a(t) = cste \times t^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (4.28a)$$

Il s'ensuit pour le temps conforme : $\eta = \int \frac{dt}{a(t)} = cste \times t^{\frac{1+3w}{3(1+w)}}$ si $w \neq -1/3$, et les expressions du facteur d'échelle en fonction du temps conforme :

$$a(\eta) = cste \times \eta^{\frac{2}{1+3w}} \quad \text{si } w \neq -1/3 \quad (4.28b)$$

$$a(\eta) = cste \times e^{\eta} \quad \text{si } w = -1/3 \quad (4.28c)$$

► $k = 0$ (univers plat) et $w = -1$ (univers gouverné par la constante cosmologique), (4.8 c et b) donnent $H^2 = cste \times \rho_E = cste \times a^0 = cste$ et donc $\dot{a} = cste \times a$ qui s'intègre en :

$$a(t) = cste \times \exp(Ht) \quad (4.29a)$$

c'est l'espace de De Sitter en expansion accélérée par la matière sombre. On obtient :

$$a(\eta) = -cste \times \frac{1}{H\eta} \quad \text{avec } \eta < 0 \quad (4.29b)$$

Sa métrique est :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{c^2}{H^2} \cosh^2(Ht) (d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\Omega^2)$$

► $k = \pm 1$ et $w \neq -1/3$ (univers elliptique ou hyperbolique, avec matière) : avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}$ et (4.8b) on obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_0}{|1-\Omega_0|}\right)^{1/2\alpha} (\sinh(\alpha\eta))^{1/\alpha} \quad \text{si } k = -1 \quad (4.30a)$$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_0}{|1-\Omega_0|}\right)^{1/2\alpha} (\sin(\alpha\eta))^{1/\alpha} \quad \text{si } k = +1 \quad (4.30b)$$

où $\alpha = \frac{1+3w}{2}$.

Dans l'exemple de l'univers plat, (A3.37a) en Annexe 3 donne pour l'horizon des événements :

$$\chi(t_S) = c \int_{t_S}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = cste \times \int_{t_S}^{\infty} t^{-n} dt$$

où $n = \frac{2}{3(1+w)}$, converge si et seulement si $n > 1$, donc si $\rho_E + 3P < 0$.

Dans l'exemple de l'univers de De Sitter, (A3.38a) donne pour l'horizon des événements :

$$\chi(t_S) = \int_{t_S}^{\infty} cste \times \exp(-Ht) dt = \frac{cste}{H} \times (1 - \exp(-Ht_S))$$

qui est toujours finie.

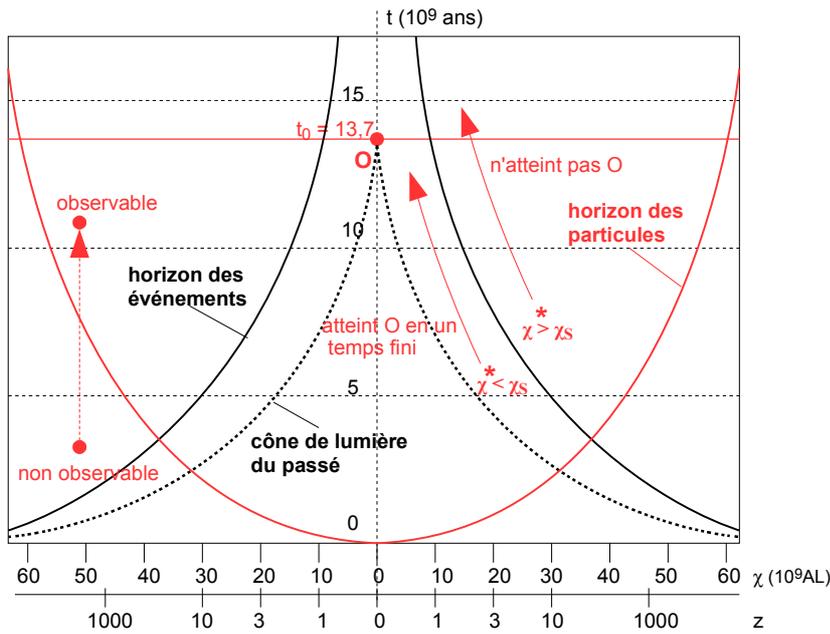
• Horizon des particules (figure 4.8) : À tout instant t_0 , une particule située à une distance radiale

$\chi > c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ ne peut pas encore être observée par l'observateur O. La surface de rayon comobile :

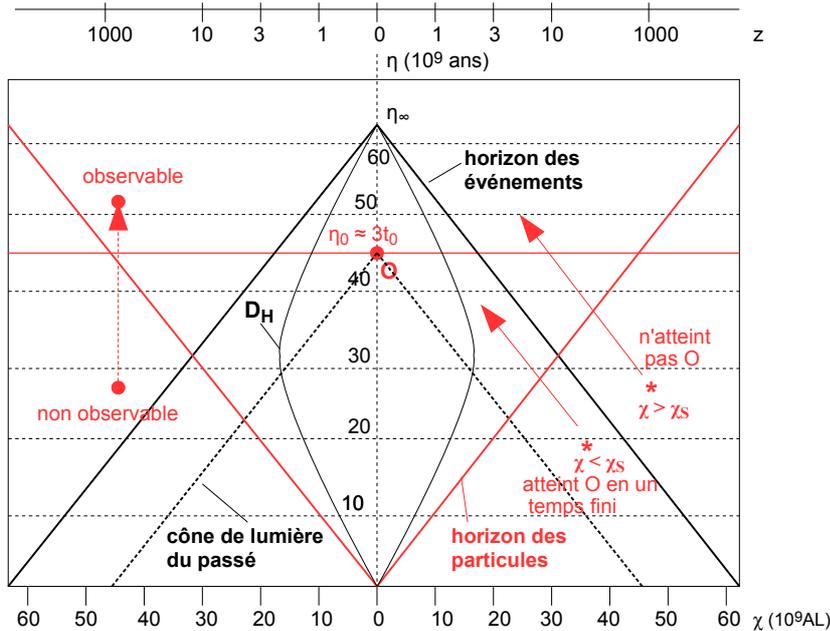
$$\chi(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.31)$$

délimite l'horizon des particules à l'instant t_0 , séparant celles qui sont déjà observables à t_0 ou avant (soit

pour $\chi \leq \chi(t_0)$) de celles qui ne peuvent pas encore être observées ($\chi > \chi(t_0)$). $\chi(t_0)$ est une fonction croissante de t_0 , donc avec le temps qui s'écoule un nombre croissant de particules deviennent observables.



(a) – Représentation des horizons des événements et des particules en coordonnées temps cosmique t – distance radiale comobile χ ou décalage spectral z , pour un univers de De Sitter avec $\Omega_{m0} = 0,3$ et $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7$ donnant selon (4.22) le paramètre d'accélération $q_0 = -0,55 < 0$. H est constante, $a(t)$ et χ varient avec le temps selon (4.29a) :
 $a(t) = \text{cste} \times \exp(Ht)$
 $\chi(t) = (c/H)(1 - \exp(-Ht))$
 Pour de faibles z , on a d'après (4.25b) :
 $\chi(z) \approx (c/H)(1 - (q_0+1)z/2)z$
 L'observateur O est situé au temps d'âge de l'univers $t_0 \approx 13,7 \cdot 10^9$ ans et sa ligne d'univers est l'axe vertical passant par $\chi = 0$.
 Par suite de l'expansion les « cônes de lumière » et les horizons sont courbes dans ces coordonnées.



(b) - Représentation des horizons des événements et des particules en coordonnées temps conforme – distance radiale comobile χ ou décalage spectral z , pour le même univers de De Sitter ci-dessus.
 D'après (4.29a), le temps conforme est relié au temps cosmique par :
 $\eta = \int_0^t dt/a(t) = (1/H)(1 - \exp(-Ht))$
 pour $t \rightarrow \infty$ le sommet de l'horizon des événements est fini avec $\eta_\infty = 1/H$
 D'après (4.15j) : $\chi = c\eta = 3t(1 - a^{1/2})$, et au temps conforme de l'observateur, en supposant $a = 0$ pour $t = 0$, il vient :
 $\chi = 3ct_0$, c'est-à-dire $\eta_0 = 3t_0$, comme on le voit sur la figure.
 Le rayon de Hubble $D_H = c/H$ n'est pas constant dans ces coordonnées : en éliminant t entre les expressions de χ et η , on obtient : $D_H = c/H(\chi, \eta) = c\eta / (1 - \exp(-\chi/3(1 - a^{1/2})))$ qui est 0 en $\eta = 0$.
 Comme $\chi = c\eta$ les cônes et horizons sont de section triangulaire isocèle et non plus déformée, ce qui est un avantage de cette représentation.

figure 4.8 : représentation simplifiée de l'horizon des événements :
 (a) en coordonnées temps cosmique t – distance radiale comobile χ
 (b) en coordonnées temps conforme η - distance radiale comobile χ

Si $\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \chi(t_0) < +\infty$ alors l'univers a un horizon des événements puisque seules les particules situées à $\chi \leq \chi(+\infty)$ deviendront observables.
 Le rayon physique de l'horizon des particules à l'instant t_2 pour un événement qui s'est produit à l'instant

$t_1 < t_2$ est obtenu en multipliant (4.31) par $a(t_2)$, conformément à (4.15) :

$$r(t_1, t_2) = a(t_2)(\chi(t_2) - \chi(t_1)) = c a(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.31\text{bis})$$

On montre que, si aux instants t_1 et t_2 les événements se produisent à une ère où l'équation d'état est donnée par le même w , ce rayon physique de l'horizon des particules est :

$$r(t_1, t_2) = c t_2 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} \right] \quad (4.32)$$

Si $t_2 \gg t_1$, (4.32) devient une relation de proportionnalité entre le rayon physique de l'horizon et le rayon de Hubble à l'instant t_2 :

$$r(t_1, t_2) \approx \frac{2}{1+3w} r_H(t_2)$$

où $r_H(t_2) = \frac{c}{H(t_2)}$.

Exemple pour l'univers plat, où $a(t) = cste \times t^n$ avec $n = \frac{2}{3(1+w)}$: (A3.40), donnée en Annexe 3, converge si et seulement si $w > -1/3$ c'est-à-dire pour $\rho_E + 3P > 0$. Cette condition est incompatible avec celle relative à l'horizon des événements vue plus haut : il s'ensuit qu'un univers plat ne peut pas avoir simultanément un horizon des événements et un horizon des particules.

5 – Quelques principes des différentes observations cosmologiques

5.1 – Utilisation du diamètre angulaire apparent

Le diamètre angulaire apparent d'une source, défini en (4.16), (4.17) ou (4.18), varie linéairement avec la distance dans un espace euclidien. Mais dans l'univers non euclidien, ce n'est plus le cas. La relation varie avec la distance, par l'intermédiaire de z , selon le modèle d'univers et en particulier son paramètre de décélération / accélération q (figure 4.6). La figure 4.6 montre que pour de grandes distances ($z > 0,5$) la relation dépend fortement de q , ce qui permet d'identifier le modèle d'univers auquel on a à faire. Cependant à ces grandes distances les mesures du diamètre angulaire sont moins précises qu'aux courtes distances z .

5.2 – Utilisation des densités caractéristiques des halos galactiques

Ces densités sont exploitées pour évaluer le paramètre de densité de matière $\Omega_m = \rho_m / \rho_c$. Les mesures portent sur une masse de $10^{15} m_\odot$ et montrent des densités $\Omega_m \geq 0,1$ proches de la valeur critique ; par exemple :

- les halos sombres des galaxies : $0,1 < \Omega_m < 1$, distances $\approx 10^7$ AL
- IRAS : $\Omega_m = 1$, $\approx 1,5 \cdot 10^8$ AL
- mesures sur amas X, ou par lentilles gravitationnelles
- pour la matière visible des galaxies, les résultats sur Ω_m n'excèdent pas 0,01 avec des relativement faibles distances $1,5 \cdot 10^4$ AL, donc ne sont pas pertinentes.

5.3 – Céphéides

Les céphéides sont des étoiles dont l'atmosphère externe pulse avec une période de 2 à 100 jours, cette période étant directement reliée à la luminosité propre de l'étoile.

La mesure de leur distance est avec une précision d'environ 10%, et plus le groupe de céphéides est important plus cette précision s'affine. Un des objets contenant les céphéides servant à la calibration des distances est le Grand Nuage de Magellan (LMC) avec une précision de 10%. Cependant, à ce jour, les distances mesurées n'excèdent pas 30 Mpc.



Le Grand Nuage de Magellan (LMC)

5.4 – Densité des baryons

La matière baryonique, dont le paramètre de densité est Ω_b , résulte des réactions de nucléosynthèse primordiale. Parmi cette matière le deutérium D se forme uniquement à très haute température, puis par un refroidissement très rapide. Par conséquent le deutérium observé actuellement est un fossile de l'ère de nucléosynthèse primordiale (BBN, voir paragraphe 6.6), et son abondance renseigne sur la densité matérielle initiale de l'univers ρ_m . On a : $\Omega_b \approx 0,24$ et $\Omega_b/\Omega_m \approx 17,5 \%$.

5.5 – Supernovæ

Supernovæ de type Ia : ce sont des supernovæ de luminosité équivalente à celle d'une galaxie, produites par l'explosion d'étoiles naines blanches des systèmes binaires. Elles sont observables à des distances de plusieurs centaines de méga-parsecs, et servent de chandelles standard pour la mesure des distances.

En effet, la naine blanche a une masse qui augmente jusqu'à sa masse limite de Chandrasekhar, égale à $1,4 m_\odot$ (m_\odot désigne la masse solaire) : elle s'effondre ensuite puis explose en formant la supernova de type Ia. Il est établi que sa magnitude moyenne est :

$$\langle M_{max} \rangle = 5 \log(H_0/50) - 19,74 \pm 0,06 \quad (5.1)$$

D'autres supernovæ, de type II et Ib ou Ic, sont utilisées : elles résultent d'explosion d'étoiles massives de Wolfe-Rayet et évoluent sous forme de trou noir ou d'étoile à neutron.

5.6 – Luminosité des galaxies spirales et relation de Tully-Fisher

On montre que la luminosité L des galaxies spirales est corrélée à leur vitesse de rotation maximale v_∞ , ou vitesse de rotation asymptotique (relation de Tully-Fisher) :

$$L = cste \times v_\infty^q \quad \text{où } q = 3,9 \pm 0,2 \quad (5.2)$$

Cela permet d'évaluer les distances avec une précision d'environ 15%. Pour une galaxie spirale la vitesse de rotation en un point situé à la distance R du centre varie avec R : $v(R)$. La figure 5.1 montre cette dépendance pour la galaxie M33. La figure 5.2 représente la loi de Tully-Fisher (5.2) et les observations.

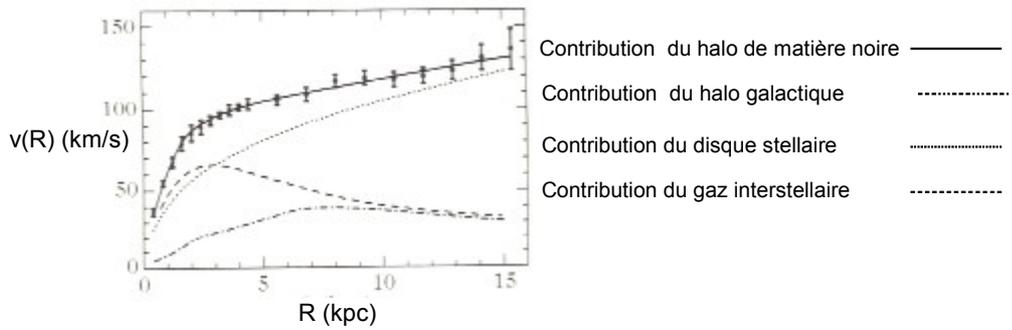


figure 5.1 : vitesse de rotation de la galaxie M33, et les différentes contributions qui agissent sur elle

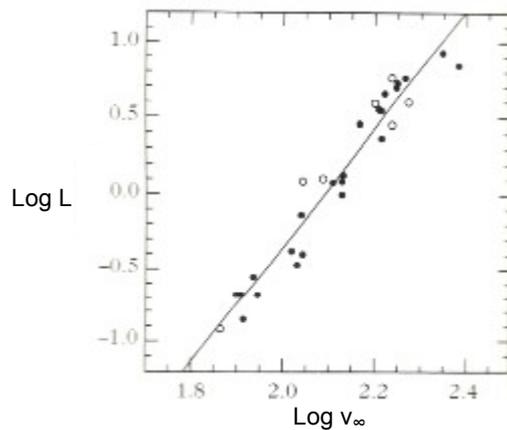


figure 5.2 : relation de Tully-Fisher théorique et pour différentes observations de galaxies spirales

On peut retrouver (5.2) de la façon suivante :

La vitesse v_∞ à laquelle se stabilise la vitesse de rotation est d'autant plus grande que la galaxie est massive. En effet, en supposant que v_∞ est égale à la vitesse de libération vis-à-vis de la gravitation exercée par la galaxie spirale, on a pour une galaxie de masse M_G :

$$v_\infty^2 = G \frac{M_G}{R} \quad (5.3)$$

Or l'observation montre que le rapport masse/luminosité d'une galaxie est approximativement constante :

$$\frac{M_G}{L} \approx C_1 \quad (5.3\text{bis})$$

et que la brillance de surface des disques de galaxie spirale est approximativement égale à une constante qui dépend de la galaxie :

$$\frac{L}{R^2} \approx C_2$$

d'où en éliminant la masse entre ces relations : $\frac{v_\infty^2 R}{G L} = \frac{v_\infty^2}{G L} \sqrt{\frac{L}{C_2}} = C_1$ soit $C_1^2 C_2 G^2 = \frac{v_\infty^4}{L}$ qui est (5.2) où l'exposant de la vitesse n'est pas strictement égal à 4. D'après (4.21), la magnitude absolue est :

$M = M_\odot - 2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$ d'où la relation entre la magnitude absolue et la vitesse de rotation maximale de la galaxie spirale :

$$M = -10 \log_{10} v_\infty + cste \quad (5.4)$$

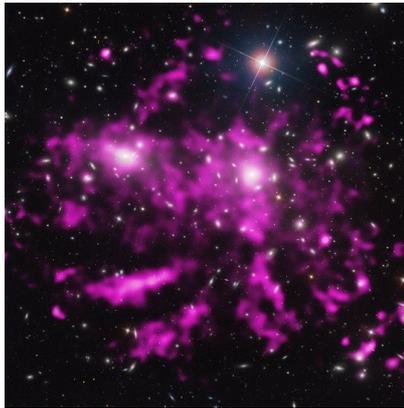
Remarque sur la relation (5.3) :

Le potentiel gravitationnel de la galaxie $V = G \frac{M_G}{R}$ est, en fait, majoritairement dû à la masse de la

matière sombre (invisible) qui détermine donc la dynamique de la galaxie, tandis que la luminosité est principalement due à sa masse baryonique. Il est admis que le rapport entre ces deux masses est sensiblement constant et identique d'une galaxie à une autre. Or la vitesse de rotation $v(R)$ présente un plateau v_∞ qui s'explique seulement par la présence d'une masse invisible – la matière sombre – principalement présente dans les régions périphériques de la galaxie (R grand). Il s'ensuit que la valeur de la masse obtenue à partir de la relation de Tully-Fisher est une valeur limite inférieure de la masse totale.

5.7 – Évaluation de la masse des amas de galaxies par le théorème du viriel

Un amas de galaxies contient entre une centaine et plusieurs milliers de galaxies. Le premier amas étudié fut l'amas de Coma par Zwicky (1930).



Amas du Coma, observée en rayons X, il contient plus de 1000 galaxies
 réf. <http://www.astronoo.com/fr/actualites/amas-de-galaxies-coma.html> ,
 Crédits: X-ray : NASA / CXC / MPE / J. Sanders et al ; optique: SDSS.

La méthode du viriel a ceci d'intéressant qu'elle permet d'évaluer la masse de l'amas M_A en la reliant à son rayon gravitationnel R_G et à sa distribution statistique des vitesses des galaxies qui le constituent, $\langle v^2 \rangle$ qui est la dispersion des vitesses projetée sur la ligne d'observation (les vitesses sont mesurées par effet Doppler). On peut le montrer comme suit, moyennant certaines hypothèses :

- les galaxies d'un amas sont couplées entre elles par la gravitation mais pas avec l'expansion : c'est l'amas dans son ensemble qui est seul concerné par celle-ci ;
- leur dynamique est donc stationnaire ;
- leurs vitesses relatives sont supposées faibles ;
- donc l'amas peut être assimilé à un gaz isolé.

L'accélération d'une galaxie n°k, supposée sous l'action gravitationnelle des autres, est :

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = G \sum_{j \neq k} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} \quad (5.5)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle de la galaxie n°k est alors :

$$2U_k = -G m_k \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}$$

Énergie cinétique totale de l'amas :

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2$$

Moment d'inertie de la galaxie :

$$J = \sum_k m_k r_k^2$$

dont on calcule la dérivée seconde :

$$\dot{J} = \sum_k 2 m_k \mathbf{r}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \rightarrow \ddot{J} = \sum_k 2 m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 + \sum_k 2 m_k \mathbf{r}_k \cdot \ddot{\mathbf{r}}_k \text{ soit : } \ddot{J} = 4T + 2 \sum_k m_k \mathbf{r}_k \cdot \ddot{\mathbf{r}}_k \text{ et d'après}$$

$$(5.5) : \sum_k m_k r_k \ddot{r}_k = G \sum_{j \neq k} m_k m_j r_k \cdot \frac{r_j - r_k}{|r_j - r_k|^3} \quad \text{Or :}$$

$$\sum_{j \neq k} m_k m_j r_k \cdot \frac{r_j - r_k}{|r_j - r_k|^3} = \sum_{k \neq j} m_k m_j \frac{1}{|r_j - r_k|^3} \left(\frac{1}{2} (r_k - r_j) \cdot (r_j - r_k) + \frac{1}{2} (r_k + r_j) \cdot (r_j - r_k) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{|r_k - r_j|^2}{|r_j - r_k|^3} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{m_k m_j}{|r_j - r_k|^3} (r_j^2 - r_k^2) = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{m_j m_k}{|r_j - r_k|} = U$$

la deuxième somme étant identiquement nulle, on a donc :

$$\ddot{J} = 4T + 2U \quad (5.6)$$

Comme l'état de l'amas est supposé stationnaire, la moyenne temporelle de son moment d'inertie est constante donc $\langle \ddot{J} \rangle = 0$ d'où d'après (5.6) : $\langle U \rangle + 2\langle T \rangle = 0$. Pour terminer la détermination de la masse de l'amas M_A , on utilise :

- énergie cinétique moyenne : $\langle T \rangle = \frac{1}{2} M_A \langle v^2 \rangle$;

- énergie potentielle moyenne : $\langle U \rangle = -\alpha \frac{GM_A^2}{R_G}$, où α est une constante correctrice qui dépend de

la géométrie et du type de densité de l'amas ($\alpha \approx 0,4$), R_G est le rayon dans lequel est contenue la demi-masse de l'amas $M_A/2$, soit :

$$M_A \approx \frac{R_G \langle v^2 \rangle}{\alpha G} \quad (5.7)$$

Remarque : La relation (5.7) est cohérente avec la relation observée entre la densité d'un amas et sa dimension, comme le représente le diagramme de Carpenter (figure 5.3).

Pour les amas, on a : $\log_{10} \rho_A = -21,7 - 1,7(\log_{10} R_G - 21,7)$;

Pour les étoiles : $\log_{10} \rho_* = -2,7(\log_{10} R_* - 11,0)$.

Plus la densité d'un amas est petite plus il se confond avec son environnement cosmique. En extrapolant cette corrélation aux grandes échelles, l'organisation de l'univers disparaîtrait et conduirait à l'isotropie de l'univers, qui est une des hypothèses fondamentales de la cosmologie standard. Elle pourra être vérifiée par l'analyse du rayonnement du CMB.

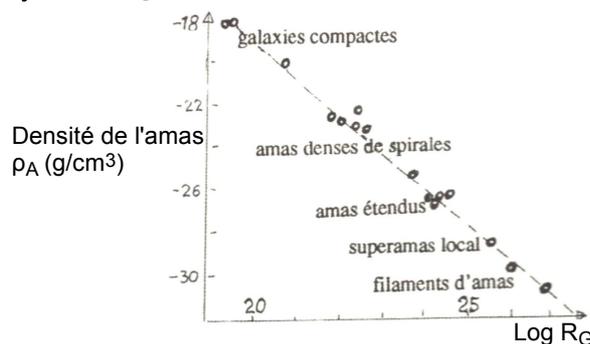


figure 5.3 : diagramme de Carpenter (réf. [16])

■ Exemple de l'amas de Coma :

Décalage spectral $z = 0,0232 \rightarrow$ distance $D \approx 100$ Mpc ;

$\langle v^2 \rangle = 2,32 \cdot 10^{12} (\text{ms}^{-1})^2$;

Pour R_G , en supposant $M_A/L =$ constante et la géométrie sphérique, il vient : $R_G \approx 1,5$ Mpc, d'où sa masse $M_A \approx 2 \cdot 10^{15} M_\odot$;

$$\text{Luminosité : } L \approx 8.10^{12} M_{\odot} \rightarrow \frac{M_A}{L} \approx 250 \left(\frac{M}{L} \right)_{\odot}, \text{ plus précisément : } \left(\frac{M_A}{L} \right)_{\text{Coma}} \approx 400 h_0 \left(\frac{M}{L} \right)_{\odot} .$$

5.8 – Comptage des sources par l'effet Sunyaev-Zel'dovich (SZ)

Le spectre du CMB subit une distorsion due à la diffusion Compton des photons du CMB (à $T \approx 2,7$ K) par les électrons du gaz X ionisé de l'amas de galaxies que ces photons traversent, la température de l'amas étant de l'ordre de $T_A \approx 10^7$ K. Cet effet SZ ne dépend pas du décalage spectral z de l'amas ; la probabilité de diffusion dépend du diamètre de l'amas D_A , de la densité électronique moyenne n_e dans le gaz interne à l'amas, et de la section efficace de la diffusion Thomson σ_T , donc de la température de l'amas :

$$p_{SZ} = cste \times n_e \sigma_T D_A \quad (5.8)$$

mais comme l'amas a un mouvement propre par rapport au CMB, il faut ajouter, au niveau de l'observation, l'effet Doppler qui en résulte : de sorte que le flux du gaz X ionisé, tel qu'il est observé, dépend de z , ce qui permet d'obtenir la distance de l'amas, et l'effet fournit une signature typique de l'amas. Le test SZ donne des résultats robustes et précis pour de grands z , dont l'exploitation fournit des informations pertinentes sur le type d'univers (comme c'est le cas dans le programme Planck).

Il existe cependant des sources d'incertitudes à corriger : les gaz intra-amas ne sont pas rigoureusement homogènes, ce qui a pour effet de sous-évaluer la constante de Hubble H ; ils ne sont pas en équilibre hydrostatique, et il existe des biais dans la projection sur l'axe observationnel.

5.9 – Évaluation de la distance par la relation « plan fondamental » des galaxies elliptiques

Soit I_s la brillance de surface des galaxies elliptiques et $\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ la dispersion des vitesses v des étoiles qui les constituent. On montre que leur luminosité intrinsèque L est corrélée à ces variables par :

$$L = cste \times I_s^{-0,7} \sigma^3 \quad (5.9)$$

En effet, les galaxies elliptiques ont la propriété d'avoir une dynamique gouvernée par leur propre attraction, et on montre que leur rapport masse/luminosité est de la forme :

$$\frac{M_G}{L} = cste \times M_G^n$$

Quant à la brillance de surface I_s , elle varie avec la surface du disque galactique selon la loi de Vaucouleurs :

$$I_s(r) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\right)$$

où $r < r_0$ est la distance au centre de la galaxie et r_0 le rayon de la galaxie. On obtient donc :

$$L = cste \times I_0 r_0^2$$

où I_0 est la brillance de tout le disque galactique. Or d'après le théorème du viriel, une relation analogue à (5.7) appliquée à la galaxie entraîne pour la dispersion des vitesses : $\sigma = cste \times \frac{M_G}{r_0}$ d'où :

$$L = cste \times I_0^{n+1} \sigma^{\frac{4(1-n)}{1+n}} \quad (5.9\text{bis})$$

On retrouve (5.9) pour $n = 1/4$. Avec cette méthode les distances sont obtenues avec une précision de 5 à 10%.

5.10 – Fluctuations de la brillance de surface : application aux faibles décalages spectraux

La résolution de l'image des étoiles d'une galaxie avec une caméra CCD dépend de leur distance, tandis que la luminosité d'un pixel dépend du nombre d'étoiles. Les fluctuations selon la loi de Poisson entre les pixels dépendent de la distance de la galaxie : elles permettent alors de déduire celle-ci. La méthode est applicable seulement pour de très faibles z , $z \leq 0,02$, et sa précision est d'environ 8%.

5.11 – Propagation de la photosphère d'une supernova type II après l'explosion de l'étoile

La vitesse de propagation est mesurée par décalage Doppler du spectre de la supernova, elle est environ $v/c \approx 0,01$. On en déduit le rayon de la photosphère à l'instant t : $r_p = v(t - t_0)$ où t_0 est le temps de l'explosion. La distance de la supernova est donnée par :

$$D = \frac{r_p}{\theta} = \frac{v(t - t_0)}{\theta}$$

où θ est l'angle sous lequel la supernova est observée. Mais cet angle est difficile à évaluer pour les supernovæ en-dehors de notre galaxie, car la photosphère ne possède pas de plan de projection évident.

5.12 – Valeur de la constante de Hubble par les lentilles gravitationnelles

Les lentilles gravitationnelles sont un effet prévu par la Relativité Générale. Un champ de gravitation produit la déflexion de la lumière par effet de courbure de l'espace-temps (figure 5.4).

Soit une source S (par exemple une étoile, un quasar...) et un objet massif, ou « lentille » de centre L (par exemple une galaxie, un trou noir...), et O l'observateur. On désigne :

Axe optique : OLO'

Plan source : plan perpendiculaire à l'axe optique OLO' et contenant S

Plan lentille : plan perpendiculaire à l'axe optique et contenant L

Distance lentille-source, projetée sur OLO' : D_{LS}

Distance observateur-lentille : D_{OL}

Distance observateur-source : $D_{OS} = D_{OL} + D_{LS}$

Position angulaire géométrique de la source : θ_S

Position angulaire de la source, suite à la déflexion d'angle α de la lumière par la lentille : θ_L .

On montre alors que :

$$\theta_L = \theta_S + 2 \frac{R_{SL}}{D \theta_L} \quad (5.10)$$

où $R_{SL} = \frac{2GM_L}{c^2}$ rayon de Schwarzschild de la lentille de masse M_L , et $D = \frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}}$.

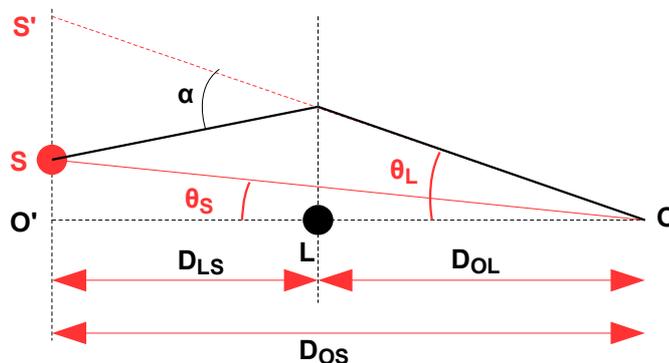
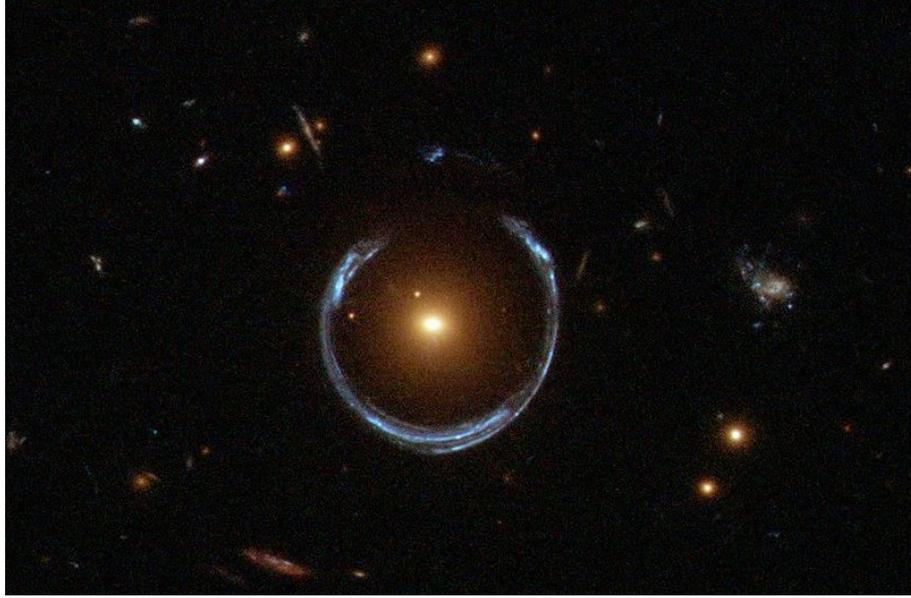


figure 5.4 : Représentation de l'effet de lentille gravitationnelle

Si la source S est exactement sur l'axe optique LO , $\theta_S = 0$, son image forme un anneau circulaire de rayon angulaire appelé rayon d'Einstein :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}} = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^3} \sqrt{H} \frac{z_S - z_L}{z_S z_L}} \quad (5.11)$$

où l'on a utilisé la loi de Hubble : $D = \frac{c}{H} z = \frac{c}{H} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Le rayon géométrique de l'anneau est alors :
 $R_E = D_{OL} \theta_E$.



anneau d'Einstein LRG 3-757

(5.10) est une équation du second degré en θ_L qui a deux solutions :

$$\theta_L = \frac{1}{2} (\theta_S \pm \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2}) \quad (5.12)$$

donc chaque source a 2 images de mirage gravitationnel, situées symétriquement par rapport à elle : celle $\theta_L = \frac{1}{2} (\theta_S - \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2})$ est à l'intérieur de l'anneau d'Einstein, l'autre $\theta_L = \frac{1}{2} (\theta_S + \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2})$ est à l'extérieur ; leur écart angulaire est $\sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2} \geq 2\theta_E$. La lumière défléchie ne subit pas de phénomène d'absorption, donc la brillance de surface de l'image $I(\theta_L)$ est conservée et dépend de la brillance de surface de la source $I_S(\theta_S)$: $I(\theta_L) = I_S(\theta_S(\theta_L))$.

Il existe un délai temporel $\Delta\tau$ entre les deux images ; sa mesure permet de déduire la constante de Hubble. Dans le cas où la lentille est une galaxie dont la dispersion des vitesses de ses étoiles est σ_v , on montre que le délai est :

$$c \Delta\tau = 8\pi \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2 (1+z_L) D_{OL} \theta_E \quad (5.13)$$

où z_L décalage spectral de la lentille. Comme D_{OL} dépend de H , (5.13) devrait permettre de la déterminer. Mais cette expression doit être corrigée des effets de la structure de la lentille, en particulier du facteur de convergence k_0 défini par :

$$k_0(\theta_L) = \frac{1}{2} \frac{S(\theta_L)}{S_c}$$

où la densité de surface de la lentille de masse volumique ρ_L est :

$$S(\theta_L) = \int \rho_L(b, z) dz \approx \frac{M_L}{D_{OL}^2} \delta^{(2)}(\theta_L)$$

pour une lentille mince, avec $b = \theta_S / \theta_E$ paramètre d'impact, et la densité de surface critique est :

$$S_c = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}} \approx 0,35 \left(\frac{D}{1 \text{ Gpc}} \right)^{-1} \text{ g.cm}^{-2}$$

Par exemple, pour la source quasar QSO0957+561 on trouve : $h_0 = (0,82 \pm 0,06)(1 - k_0) \left(\frac{\Delta \tau}{1,14 \text{ an}} \right)^{-1}$

avec $k_0 = 0,24 \pm 0,12$ d'où $0,49 \leq h_0 \leq 0,74$, et comme k_0 est contraint par σ_v , on trouve plus précisément $h_0 = 0,66 \pm 0,07$.

La mesure des délais temporels entre l'apparition des images $\Delta \tau$ nécessite une à plusieurs années de surveillance des galaxies et des quasars.

Avantage de la méthode : elle ne nécessite pas une échelle de distance calibrée ; elle permet d'utiliser des z relativement grands ($z \approx 0,5$) ; elle est très peu influencée par la vitesse propre, et le résultat dépend très peu de la physique de l'objet pourvu que le potentiel défecteur soit rigoureusement connu.

Inconvénient de la méthode : elle nécessite une grande maîtrise de la géométrie de la lentille et de son environnement (interactions avec d'autres galaxies...).

De sorte que la méthode des lentilles gravitationnelles fait appel à seulement quelques dizaines de lentilles de géométries connues de manière satisfaisante.

5.13 – Principales corrections et différents effets à prendre en compte pour la connaissance précise du spectre du CMB

Les observations des fluctuations du spectre du CMB doivent être corrigées des effets qui les perturbent à diverses échelles suivants :

- L'effet Doppler des mouvements du gaz intra-galactique, intra-amas, ou inter-amas.
- L'accroissement de la température des zones denses : elles affectent l'observation des effets thermiques de l'ère de recombinaison (voir [chapitre 6](#)).
- le décalage spectral d'origine gravitationnelle dû à l'énergie supplémentaire nécessaire aux photons pour sortir de la gravitation produite par les zones denses : les paramètres perturbés sont notamment Ω_m et Ω_Λ . Ces effets sont à grande échelle.

Une fois corrigées de ces fluctuations perturbatrices, les fluctuations intrinsèques du CMB peuvent être analysées et conduire à la contrainte des modèles cosmologiques aux différentes échelles. L'analyse utilise la décomposition des fluctuations de température en harmonies sphériques, qui donnent des moments multipolaires repérés par ℓ , attachés aux fluctuations de densité. Les ordres inférieurs (ℓ petits) correspondent aux échelles cosmologiques, tandis que les ordres élevés ($\ell > 400$) correspondent aux petites échelles. Cette « granulométrie » dans le modèle peut être comparée, à chaque niveau d'échelles, aux spectres des anisotropies du CMB et cette comparaison permet d'affecter des contraintes aux différents paramètres concernés à ces échelles. Le tableau 5.1 rassemble quelques valeurs de la constante de Hubble obtenues, après corrections, à partir des différentes méthodes exposées dans ce chapitre 5.

méthode	H_0 (km.s-1/Mpc)
Supernovæ SN Ia	71±2
Tully-Fisher	71±3
Brillance de surface	70±5
Supernovæ SN II	72±9
Plan fondamental	82±2
photosphère	73±15
Lentilles gravitationnelles	60±20
Effet Sunyaev-Zel'dovich	60±4
WMAP	72±5

tableau 5.1 : quelques mesures de la constante de Hubble

Au [chapitre 6](#) suivant on présente de manière succincte les différentes phases de l'histoire cosmologique de l'univers, dont les plus primordiales font encore l'objet de spéculations théoriques dont certaines vont jusqu'à remettre en cause leur existence (comme c'est le cas de l'ère de l'inflation ou de l'ère de Planck).

Dans ces différentes phases, notamment les moins primordiales, peuvent exister les origines des anisotropies intrinsèques du CMB dont l'étude au moyen de la décomposition multipolaire évoquée ci-dessus est expliquée dans ses principes ([chapitre 7](#)). Au [chapitre 7](#) sont indiquées les principaux résultats et les contributions principales des différents paramètres cosmologiques sur le spectre du CMB. Dans le même chapitre certaines questions encore ouvertes sont évoquées.

6 – Origines du CMB, ou « avant le CMB »

6.1 – Grandes étapes de l'univers

Plus on remonte le temps cosmique, plus l'univers présente une densité et une température élevées, et ce jusqu'au « mur de Planck » au-delà duquel il semble difficile, voire impossible, de modéliser l'univers (voir par exemple référence [17] de Jean-Pierre Luminet où le point sur les problèmes, avérés ou apparents, soulevés par l'évolution de l'univers et l'intégration de la Physique Quantique et de la Cosmologie relativiste en une théorie englobante, est présenté de manière très intelligible).

La densité et la température ont diminué jusqu'à ce que l'on observe aujourd'hui, à cause de l'expansion de l'espace, passant par des phases successives où les propriétés de la matière, du rayonnement et de l'espace étaient différentes : aux époques primordiales l'énergie thermique extrêmement élevée empêche la structuration de la matière telle qu'on la connaît aujourd'hui, et interagit avec le rayonnement. Celui-ci se trouve « piégé » par les particules sur une période primordiale d'environ 100000 ans après le Big Bang, avec pour conséquence que l'univers n'y est pas observable.

L'univers devient observable au moment du découplage matière-rayonnement, époque où est émis le CMB qui nous parvient jusqu'à ce jour avec une température très faible ($\approx 2,7$ K) par suite de l'expansion. Il a été établi que la température moyenne de l'univers T diminue d'autant lorsque le facteur d'échelle $a(t)$ augmente lors de l'expansion, cette variation n'étant pas cependant valide dans la phase d'inflation supposée existante, comme on le verra plus loin :

$$a(t)T(t) = cste \quad (6.1)$$

La géométrie de l'univers, aux différents temps cosmiques, est donc directement associée à son évolution thermique dont dépendent les interactions et les conditions de domination du rayonnement, de la matière, de leur couplage ou de leur découplage. On peut représenter les grandes étapes de l'univers, où ces conditions évoluent, sur un diagramme température-temps cosmique (T, t) (figure 6.1).

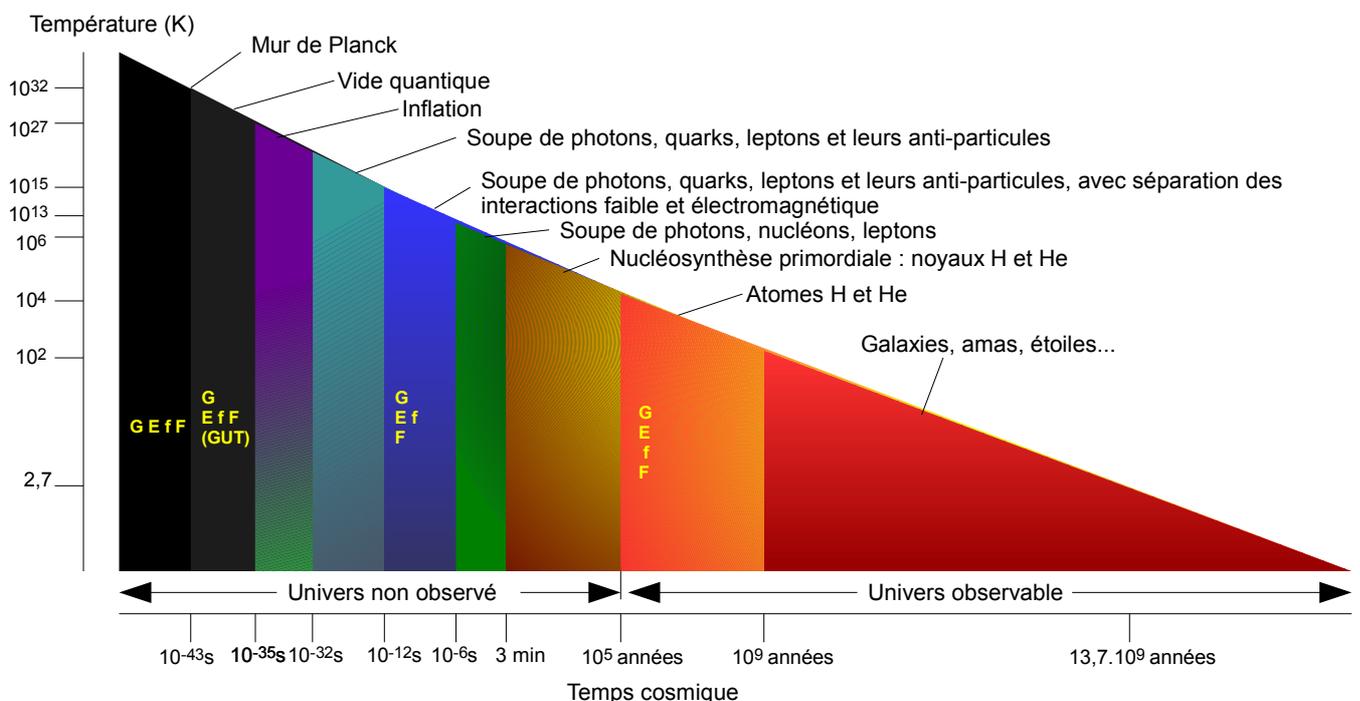


figure 6.1 : évolution thermique de l'univers selon le modèle cosmologique standard

Les interactions fondamentales sont mentionnées aux différentes ères, sous la forme unifiée et séparée : G : gravitation, E électromagnétique, f : nucléaire faible, F : nucléaire forte, EfF : électrofaible (théories GUT), Ef : électrofaible, GEfF : unification des 4 interactions. Les ères précédant celles de la « soupe » de photons, quarks, leptons sont encore au stade d'hypothèses théoriques

De manière très résumée les grandes étapes de l'univers, avérées ou supposées, telles qu'elles sont identifiées par la théorie seule (pour les phases de l'univers non observé) puis par la théorie et l'observation (pour les phases univers observable ou transparent) sont :

- ère de Planck
- univers opaque (non observé) :
 - fluctuations du vide quantique
 - inflation cosmologique
 - photo-ionisation
 - nucléosynthèse primordiale (BBN)
- univers observable (transparent) :
 - découplage : émission des photons fossiles du CMB et ère radiative
 - « dark age » : fin de l'émission des photons du CMB
 - re-ionisation
 - formation des atomes
 - nucléosynthèse stellaire (formation des étoiles)
 - formation des galaxies

6.2 – Ère de Planck

Le temps de Planck est un « horizon de la physique » (voir par exemple [18]) : c'est l'échelle de temps correspondant à la fois aux incertitudes de Heisenberg et à un univers dont l'état de condensation est tel que toute particule possède un rayon égal à celui de Schwarzschild :

$$l_p = \frac{2 G m_p}{c^2}$$

où m_p est la masse de la particule. Ce rayon est parcouru pendant le temps de Planck : $t_p = \frac{l_p}{c}$. Or

l'énergie et le temps vérifient la relation d'incertitude : $m_p c^2 t_p \approx \frac{\hbar}{2}$ d'où :

$$t_p = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}} = 5,391247(60) \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (6.2)$$

On a donc :

- Longueur de Planck : $l_p = c t_p = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} = 1,616255(18) \cdot 10^{-35} \text{ m}$

C'est la longueur d'onde de Compton réduite d'une particule de masse de Planck.

- La masse de Planck d'une particule correspond à une longueur d'onde Compton réduite égale au

demi-rayon de Schwarzschild : $\frac{1}{k_C} = \frac{\lambda_C}{2\pi} = \frac{l_p}{2} = \frac{1}{c} t_p$ soit :

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,176434(24) \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

(données CODATA du 2 juin 2011).

À la masse de Planck correspond la température de Planck T_p définie par : $m_p c^2 = k_B T_p$ soit :

$$T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1,416808(33) \cdot 10^{32} \text{ K}$$

À l'ère de Planck toutes les interactions fondamentales (gravitation, électrofaible, forte) sont censées être unifiées ; mais aux échelles de temps et de longueur de Planck ni la physique quantique ni la relativité générale ne peuvent ensemble et à elles seules prédire cette unification car elles sont utilisables à des échelles nettement supérieures, et il faut résoudre, ou plutôt dépasser, le problème des singularités et des divergences de la renormalisation de l'interaction gravitationnelle [17]. Par exemple,, aux échelles de Planck une fluctuation quantique peut créer une particule de Planck dont la durée de vie

est le temps de Planck, or à ces échelles nos observations sont tout simplement impossibles, ce qui ne signifie pas pour autant que l'espace-temps soit nécessairement de nature différente voire inexistant. Tout ce que l'on peut dire c'est que la notion de mesure y perd son sens, et qu'il faille seulement recueillir des effets secondaires de la géométrie de cet univers qui puissent parvenir jusqu'à nous.

Remarque : particule de Planck : Soit une particule trou noir qui rayonne de l'énergie pendant que sa température augmente jusqu'à ce que son rayon devienne égal à la longueur de Planck. Sa température atteint alors un maximum, la température de Planck. La particule est alors devenue une particule de Planck et reste dans cet état durant le temps de Planck. L'émission d'énergie est supposée suivre encore la loi de Stefan-Boltzmann : $\frac{E}{S} = \sigma T^4$ où E énergie, S surface d'émission (donc E/S

est l'exitance énergétique), σ est la constante de Stefan : $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5,670374 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

À la température de Planck les paires particules-anti particules de Planck sont créées et annihilées continuellement. Ces particules, ayant une masse, modifient donc de manière stochastique la géométrie de l'espace-temps : celui-ci fluctue donc.

Comme l'écrit Hubert Reeves [20] : « Dans ces conditions, les lois de la physique sont devenues inutilisables. Comment décrire le comportement de la matière quand les mots « avant » et « après » ne peuvent plus être définis ?... (...) Quand la température descend en dessous de la température de Planck, la notion de « temps » prend progressivement son sens. On peut alors parler des « premiers temps de l'univers ». Non pas dans l'optique de ce qui succéderait à un mythique « temps zéro », mais dans l'idée que le concept de temps devient alors utilisable. »

6.3 – Fluctuations du vide quantique

Du mur de Planck jusqu'à environ 10^{-35} seconde après le Big Bang l'univers est supposé constitué du vide quantique. La physique quantique prévoit que l'état zéro possède une énergie non nulle :

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

et que ses fluctuations conduisent à la création de particules. Par exemple, n_k particules dans un état d'oscillation $n^{\circ}k$ sont obtenues par l'action sur l'état du vide $|0\rangle$ de l'opérateur création b^+ :

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (b_k^+)^{n_k} |0\rangle$$

(voir par exemple [1]). L'énergie noire, supposée responsable de la constante cosmologique Λ qui s'oppose à la gravitation et donc accélérerait l'expansion, serait l'énergie des fluctuations du vide consécutives à la diminution de la température due à l'expansion.

6.4 – Inflation

■ *L'inflation cosmologique* est une phase, encore hypothétique, qui suit l'ère de domination par le rayonnement et qui est caractérisée par un soudain refroidissement suivi d'un réchauffement, tandis que l'expansion accélère de manière exponentielle. Cette phase, si elle existe, est incluse dans l'univers opaque, elle n'est donc pas observable à ce jour, mais son modèle a pour objectif de résoudre le problème suivant.

Le modèle standard adiabatique, tel que celui de Friedmann-Lemaître, conduit à un univers toujours plat, ce qui ne correspond pas rigoureusement aux observations. Dans ce modèle l'univers se refroidit régulièrement tandis que l'expansion continue tout aussi régulièrement. Comme l'observation montre l'isotropie de la température du CMB, et puisque, à l'ère supposée de Planck, l'univers était concentré dans un volume de quelques millimètres à la température de Planck, le problème de causalité suivant se pose :

La sphère de causalité est trop petite, par rapport au volume de l'univers de l'ère de Planck, pour expliquer l'isotropie de la température de l'univers observable. En effet, la sphère de causalité, ou horizon causal, est l'hypersurface spatiale dans l'espace-temps contenant les points qui, à un instant t

donné, ont pu interagir (l'interaction est un événement), compte tenu que l'interaction se propage à une vitesse limitée par celle de la lumière (voir relations (4.26), (4.31)). Dans un univers sans expansion, le rayon de l'horizon augmente avec le temps à la vitesse de la lumière c ; mais dans un univers en expansion elle augmente plus vite en raison de la distance comobile (figure 6.2). La sphère de causalité est dite primordiale si elle concerne les événements primordiaux, c'est-à-dire antérieurs (au sens du temps cosmique) à l'émission du CMB. Son rayon correspond donc au rayon de l'univers observable à ce jour. Les photons du CMB ont été émis au moment du découplage-recombinaison où les atomes H se sont formés, à l'âge de l'univers d'environ 10^5 à 10^6 années. La sphère de causalité des particules émettant ces photons a alors un rayon de l'ordre de 10^6 années-lumière, et en-deçà de ce rayon aucune interaction avec l'extérieur de la sphère ne peut affecter ces particules (figure 6.3).

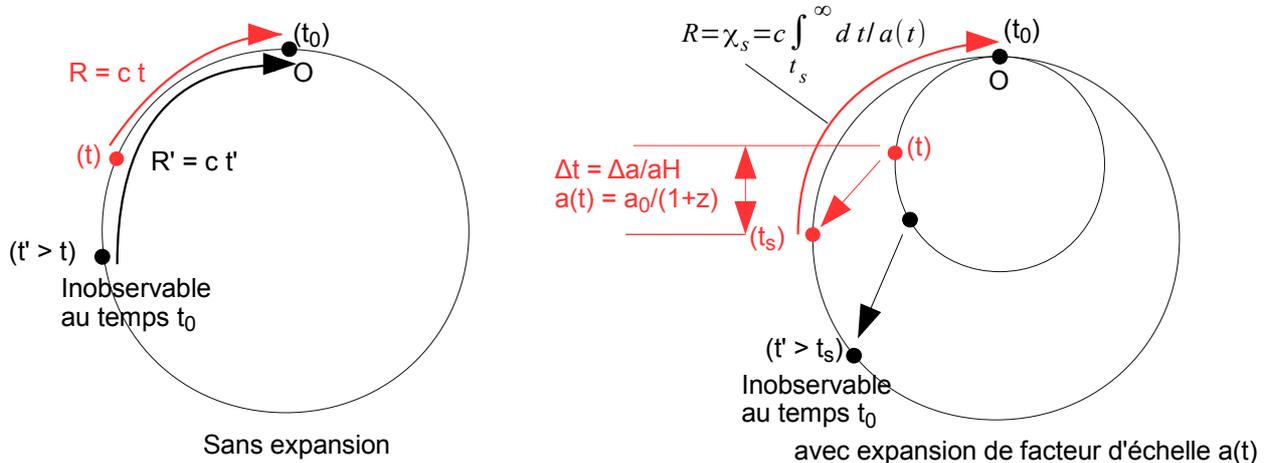


figure 6.2 : horizon des événements (voir aussi figure 4.8)

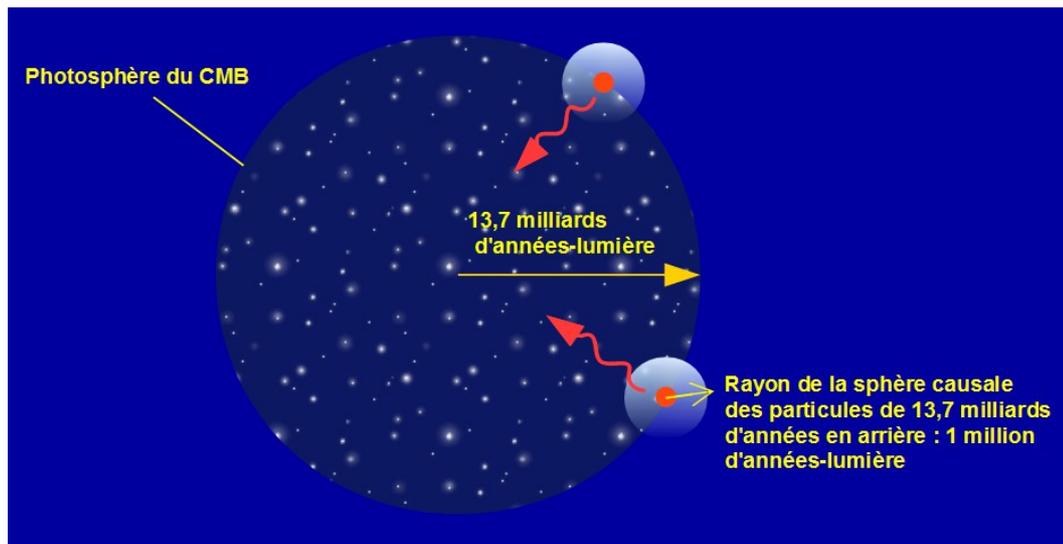


figure 6.3 : isotropie et homogénéité du rayonnement fossile CMB

Les sphères de causalité des particules qui ont émis le rayonnement il y a 13,7 milliards d'années avaient à l'époque un rayon de 1 million d'années-lumière ; elles ne se recouvraient donc pas sur la photosphère du CMB, en conséquence les particules n'étaient pas encore en interaction. Pourtant le caractère isotherme du CMB (qui nous est parvenu refroidi à 2,7K aujourd'hui) incite à supposer qu'elles l'ont été, hypothèse qui a conduit au modèle de l'inflation cosmologique

La mission COBE a permis d'observer le CMB et montre que le rayonnement issu de particules situées à quelque $13,7 \cdot 10^9$ AL est isotherme et isotrope ($T_0 \approx 2,7$ K). Or à cet âge la sphère de causalité au moment de l'émission a un rayon de l'ordre de 10^6 AL. Dans toutes les directions la totalité des sphères de causalité ne se superposent pas, elles sont donc mutuellement non causales, en particulier le fait que leurs émissions thermiques soient à la même température ne peut pas résulter d'une interaction causale. Alors, quel processus physique au-delà de ces sphères de causalité, a-t-il conduit à l'obtention d'une température uniforme du CMB ? Ou bien s'agit-il d'une coïncidence ?

Le scénario de l'univers en inflation (scénario inflationnaire), évacuant la deuxième option de la simple coïncidence, propose de résoudre le problème de la causalité, compte tenu du caractère isotherme et isotrope du CMB.

D'après (6.1) le rayon de l'univers R et la température T vérifient, en régime adiabatique, ou isentropique :

$$R(t)T(t) = cste$$

Sachant que $R \approx 10^{60} \ell_p$ et que l'âge de l'univers est $t_0 \approx 10^{60} t_p$, on devrait donc avoir, avec ce régime d'expansion, $T_0 \approx 10^{-60} T_p$; or on a : $T_0 \approx 10^{-32} T_p$.

À l'ère de Planck, le rayon de l'univers R est de l'ordre du millimètre, mais les horizons ont un rayon de l'ordre de $10^{-32} \text{ mm} \approx \ell_p$, ils sont donc globalement disjoints, avec des températures de particules qui, a priori, n'ont pas de raison d'être les mêmes.

Le scénario inflationnaire part donc de l'hypothèse que tout l'univers qui, après l'émission du CMB, deviendra l'univers observable, a été concentré dans un espace plus petit que les sphères de causalité de l'époque. Dans ce cas il devient possible de considérer des liens de causalité commune aux évolutions des particules.

Avec cette hypothèse, pour raccorder l'évolution de l'univers entre cette période de concentration et celle où il poursuit son évolution de manière adiabatique, il faut considérer que l'univers a connu des épisodes non adiabatiques où l'entropie a augmenté, et où donc on n'a plus $RT = cste$.

■ *Les modèles d'inflation* introduisent tous un ou plusieurs champs scalaires d'interaction : l'inflaton, boson supposé de ces interactions. À ces champs scalaires correspondent des densités d'énergie ρ_E qui sont reliées par l'équation d'état (4.6) où P est la pression : $P = w\rho_E$.

Une particule, ou boson, de champ scalaire possède un spin nul ⁽⁴⁾. Une particule libre possède un degré de liberté défini par un potentiel d'auto-interaction Φ . Sa densité lagrangienne est :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 - \frac{\mu^2}{c^2} \Phi^2 \right]$$

où $\mu = mc^2/\hbar$ est la masse réduite, m masse au repos de la particule. On montre que les équations d'Euler-Lagrange ⁽⁵⁾ appliquées à ce lagrangien conduisent à l'équation du champ de Klein-Gordon :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi + \frac{\mu^2}{c^2} \Phi = 0$$

de solutions :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A \exp \left(-i \frac{E}{\hbar} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right)$$

avec l'équation d'énergie d'Einstein : $E^2 = m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \mathbf{k}^2$ où la quantité de mouvement est remplacée par son expression de De Broglie : $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$.

Si les particules ne sont plus libres, et soumises à un champ extérieur de potentiel fonction du degré de liberté $V(\Phi)$, la densité du lagrangien devient :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 \right] - V(\Phi) \quad (6.3)$$

et l'équation d'évolution devient, dans le cas d'un espace sans expansion :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (6.3bis)$$

On montre alors :

- densité d'énergie : $\rho_E = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 \right] + V(\Phi)$

- pression : $P = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 \right] - V(\Phi)$

4 Sur la notion de spin voir par exemple [références](#) [21] et [22].

5 Sur le formalisme de Lagrange, voir par exemple [référence](#) [23].

soit, pour un champ homogène dans l'espace :

$$\left. \begin{aligned} \rho_E &= \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + V(\Phi) \\ P &= \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - V(\Phi) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

(6.4) montre que pour un champ stationnaire, $\partial\Phi/\partial t = 0$, l'équation d'état des particules est :

$$P = -\rho_E \quad (\text{soit } w = -1)$$

Remarque : Si $\Phi = 0$ pour la particule et si $V(0) \neq 0$ on est dans le cas de l'énergie du vide.

Si le champ scalaire est homogène, (6.4) conduit à :

$$\rho_E + 3P = 2 \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} - V(\Phi) \right) \quad (6.5)$$

L'équation d'état (4.6) combinée avec (6.5) donne alors :

$$(1+3w)\rho_E = 2 \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} - V(\Phi) \right) \quad (6.5\text{bis})$$

(6.5bis) suggère alors que l'expansion peut s'accélérer, c'est-à-dire si l'on a, d'après (4.29) :

$$w < -\frac{1}{3} \quad (6.6a)$$

ce qui arrive, en particulier, lorsque le champ scalaire vérifie la condition suivante dite de « roulement lent » :

$$\frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} \ll V(\Phi) \quad (6.6b)$$

En présence d'expansion, l'équation d'évolution du champ (6.3bis) est remplacée, pour un champ homogène, par :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + 3 \frac{H}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (6.7a)$$

Le terme supplémentaire $Hd\Phi/dt$ agit sur la densité d'énergie et donc sur le rythme d'expansion. Avec l'expansion, par l'intermédiaire de ce terme, (6.7a) est couplée aux équations de Friedmann (4.8) :

$$\frac{H^2}{c^2} = \frac{\kappa}{3} \rho_E - \frac{K}{a^2}$$

soit avec (6.4) :

$$\frac{H^2}{c^2} = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} + V(\Phi) \right) - \frac{K}{a^2} \quad (6.7b)$$

et avec (6.5) et (4.8a) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{3} \left(V(\Phi) - \frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} \right) \quad (6.7c)$$

Remarque : Pendant l'inflation le champ scalaire domine, donc son potentiel varie très peu ; ceci donne comme deuxième condition, suite à l'équation d'évolution (6.7a) :

$$\ddot{\Phi}^2 \ll 3 H \dot{\Phi} \quad (6.6c)$$

Des équations (6.7) cette condition (6.6c) conduit à : $\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| < \frac{3}{2}$, ce qui donne les conditions sur le potentiel $V(\Phi)$:

$$\left(\frac{1}{V(\Phi)} \frac{dV}{d\Phi} \right)^2 \ll 24 \pi G \quad \left(\frac{1}{V(\Phi)} \frac{d^2V}{d\Phi^2} \right) \ll 24 \pi G \quad (6.6d)$$

Les deux conditions (6.6d) expriment que le potentiel scalaire présente une platitude bien prononcée.

Avec la condition de roulement lent (6.6b), (6.7c) montre qu'il y a accélération de l'expansion. Dans une première phase, cette accélération conduit à une diminution très rapide de la température jusqu'à des valeurs très basses, tandis que les distances entre objets augmentent de manière exponentielle comme on le montrera plus loin.

De $\Omega_K = \frac{K c^2}{H^2 a^2}$ et $\Omega_m = \frac{8 \pi G}{3 H^2} \rho_m$ il vient : $\frac{\Omega_K}{\Omega_m} = \frac{3 K}{8 \pi G \rho_m a^2}$. On montre que ce rapport varie avec le temps cosmique et la température selon :

$$\left| \frac{\Omega_K}{\Omega_m} \right| = cste \times \frac{10^{43}}{S_0^{2/3}} \left(\frac{t}{1s} \right) = cste \times \frac{10^{37}}{S_0^{2/3}} \left(\frac{1 \text{ GeV}}{T} \right)^2 \quad (6.8)$$

où $S_0 = \tilde{S}_0 \left(\frac{c}{H_0} \right)^3$ est l'entropie contenue dans la sphère de Hubble actuelle, \tilde{S}_0 étant la densité d'entropie. On montre aussi que la densité d'entropie, pour la composante radiative soit pour $w = 1/3$, est égale à :

$$\tilde{S} = \frac{\rho_E + P}{T} = \frac{8}{3} \frac{\sigma}{c} q_*(T) T^3 \quad (6.9)$$

où $P = \frac{1}{3} \rho_E$, σ est la constante de Stefan et avec :

$$q_*(T) = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T} \right)^3 \quad (6.9bis)$$

les indices b et f désignant respectivement les bosons et les fermions, g_b et g_f sont les facteurs de dégénérescence de chaque espèce qui interviennent dans la fonction de distribution statistique :

$$f_k(\mathbf{p}, T) = \frac{g_k}{\exp\left(\frac{E - \mu_k}{k_B T_k}\right) \pm 1}$$

où μ_k sont les potentiels chimiques des constituants, le signe « \pm » signifie « + » pour les fermions, « - » pour les bosons. $q_*(T)$ comprend seulement les particules en interaction tandis que $g_*(T)$, qui intervient dans la relation (A2.12) en [annexe 2](#), comprend toutes les particules.

Remarque : L'équation thermodynamique de l'expansion adiabatique est :

$$\frac{d\rho_E}{dt} + 3(\rho_E + P) \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 0$$

qui s'écrit encore : $\frac{dS}{dt} = 0$ où $S = \tilde{S} V$, $\tilde{S} = \frac{\rho_E + P}{T}$ densité d'entropie et V volume comobile.

Cette équation exprime que l'entropie dans un volume comobile ne change pas au cours de l'expansion

(expansion isentropique). D'après (6.9) : $S = \tilde{S} V = cste \times T^3 a^3$ donc si $S = cste$, on a pour une expansion adiabatique : $a(t)T(t) = cste$ qui est la relation (6.1). Pour la phase d'inflation l'expansion n'est plus adiabatique donc cette relation ne s'applique plus.

On montre aussi que :

$$\tilde{S} = cste \times q_* n_\gamma \approx 1,8 q_* n_\gamma \quad (6.10)$$

où n_γ est la densité des photons ; donc (6.10) indique que l'on peut déterminer directement l'entropie de l'univers par la mesure de la densité des photons.

De (6.9) on obtient numériquement $S_0 \approx 10^{87}$, cette valeur très grande aujourd'hui conduit à conclure que l'univers était rigoureusement plat à l'ère de la nucléosynthèse primordiale ou du découplage rayonnement-matière. Comme, dans le modèle standard adiabatique, l'entropie se conserve dans un volume comobile, l'univers devrait être encore rigoureusement plat aujourd'hui. C'est pourquoi l'existence d'une phase non adiabatique, comme l'inflation, dans le passé paraît indispensable. Mais cela reste encore à prouver.

Selon la théorie d'Alan Guth [24], lors de cette phase l'entropie initiale S_i augmente d'un facteur noté Z_3 jusqu'à l'entropie finale de cette phase S_f sur l'intervalle de temps cosmique $[t_i, t_f]$:

$$S_f = Z^3 S_i$$

La contrainte avec la valeur de $\Omega_k \approx 1$ d'aujourd'hui conduit à $Z \approx 10^{28}$. Entre l'instant initial et l'instant final de l'inflation, les équations de Friedmann donnent la relation $(1 - \Omega_m^{-1}) \rho_m a^2 = 3K/8\pi G$, soit :

$$(1 - \Omega_{mi}^{-1}) \rho_{mi} a_i^2 = (1 - \Omega_{mf}^{-1}) \rho_{mf} a_f^2$$

Aux époques $t > t_f$ l'univers est adiabatique, d'où : $(1 - \Omega_{mi}^{-1}) \rho_{mi} a_i^2 = 10^{-56} (1 - \Omega_{m0}^{-1}) \rho_{mf} a_f^2$ où Ω_{m0} est le paramètre cosmologique densité de matière d'aujourd'hui. Donc, pourvu que

$$\rho_{mf} a_f^2 \gg \rho_{mi} a_i^2$$

la phase d'expansion adiabatique résout le problème de l'univers plat. Il s'ensuit de (4.8b) que :

$$\frac{1}{c^2} H^2 a^2 - \frac{\kappa}{3} \rho_E a^2 = -\frac{K}{a^2} = cste$$

donc, puisque $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{4\pi G}{3H^2} \rho_m$, que :

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{a}(t) > 0 \\ \text{i.e. : } \dot{a}_f > \dot{a}_i \end{array} \right| \quad (6.11)$$

et d'après (4.8a), la condition (6.11) implique pour l'équation d'état :

$$\rho_E + 3P < 0 \quad (6.11\text{bis})$$

(6.11bis) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une phase d'inflation, c'est-à-dire une phase d'expansion fortement accélérée et adiabatique.

La phase d'inflation a une durée limitée car la densité des particules scalaires n'est pas constante : en effet, les particules scalaires interagissent avec d'autres particules et/ou d'autres champs. Selon l'intensité de ces interactions, les particules se désintègrent avec émission de photons, d'électrons, etc., ce qui a pour effet d'augmenter l'énergie thermique : c'est la phase de réchauffement. Elle dure jusqu'à ce que la densité d'énergie thermique est plus grande que la densité d'énergie associée à la masse des particules scalaires ρ_E , marquant la fin de l'inflation. Dès lors, l'évolution thermique de l'univers continue comme avant l'inflation, et l'expansion retrouve un comportement conforme au modèle de Friedmann-Lemaître où la courbure de l'univers est très faible (univers quasi plat). On a donc le schéma de la figure 6.4.

Le facteur d'échelle varie entre a_i et a_f lors de l'inflation. Pour quantifier son importance sur la courbure, les horizons et la durée de l'inflation, on définit le « nombre de e-fold s » :

$$N = \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \quad (6.12)$$

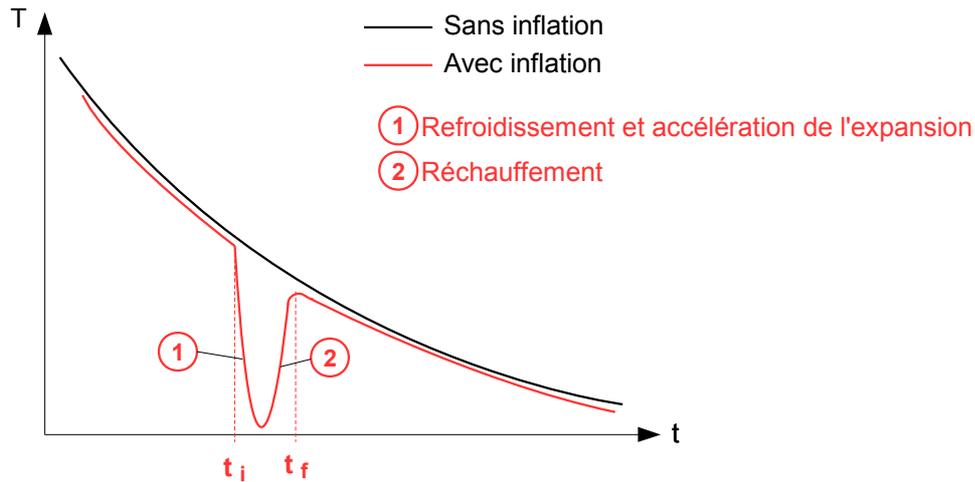


figure 6.4 : évolution de la température avec phase d'inflation

De (4.7bis) et des équations (4.10) on tire :

$$\frac{d\Omega_K}{d \ln a} = (1+3w)\Omega_K(1-\Omega_K) \quad (6.13)$$

qui fournit l'évolution de la courbure en fonction du facteur d'échelle selon les valeurs de w :

Si $-1 < w < -1/3$ l'équation (6.13) possède un point fixe stable pour $\Omega_K = 0$. Il devient instable pour les phases dominées par la matière et/ou le rayonnement, c'est-à-dire si w ne vérifie pas cette condition. Comme la condition d'inflation est (6.6a) ou (6.11bis), lorsque w quittera ce domaine de valeurs à la fin de l'inflation, pour continuer d'avoir $\Omega_K \approx 0$ (univers quasi plat) il faudra que la tendance vers une courbure plus élevée soit suffisamment contrebalancée par la structure de l'espace après réchauffement obtenue par l'inflation : il faut donc que la durée de l'inflation soit suffisamment « longue ».

Or l'importance de l'inflation, représentée par l'e-folds N , est liée au rapport des courbures au début et à la fin de l'inflation :

$$\left| \frac{\Omega_K(t_f)}{\Omega_K(t_i)} \right| = \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^2 = e^{-2N} \quad (6.14)$$

Comme au Big Bang chaud (moment du réchauffement post-inflation) l'observation donne :

$$\left| \Omega_K(t_f) \right| \leq 10^{-60}$$

et qu'au début de l'inflation la courbure est très importante (rayon de l'univers très petit après l'ère de Planck), $\Omega_K(t_i) \geq 1$, (6.14) donne la condition sur N :

$$N \geq 69 \quad (6.15)$$

De (4.8a) : $\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_E + 3P)$, de $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ et de la condition (6.11bis), il vient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad (6.16)$$

La condition (6.16) s'interprète ainsi : le rayon de Hubble est $r_H = \frac{c}{H}$ et le rayon de Hubble comobile

est $\tilde{r}_H = \frac{c}{aH} = \frac{r_H}{a}$; (6.16) indique alors que le rayon de Hubble comobile décroît au cours de l'inflation : $\frac{d\tilde{r}_H}{dt} < 0$ ce qui implique que deux points situés en-deçà de l'horizon de l'un et de l'autre,

donc en relation causale, peuvent être séparés, à la fin de l'inflation, par une distance supérieure au rayon de Hubble comobile, puisque celui-ci décroît, tout en restant en relation causale. La théorie de l'inflation permet donc d'admettre que l'univers observable soit issu d'une même sphère de causalité. La figure 6.5 montre qualitativement la relation entre le rayon de Hubble comobile et le facteur d'échelle lors de l'inflation.

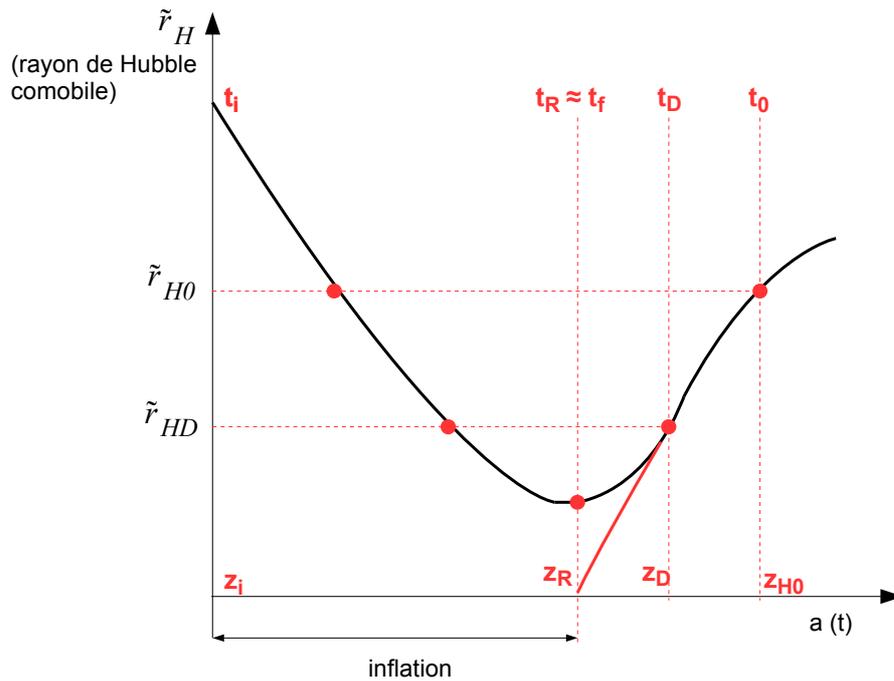


figure 6.5 : évolution du rayon de Hubble comobile avec le facteur d'échelle.

Au facteur d'échelle correspondent différentes valeurs du décalage spectral z aux époques qui viennent après l'inflation : découplage au temps t_D , univers actuel au temps t_0 . Le début de l'inflation est au temps t_i , le réchauffement au temps t_R , la fin de l'inflation au temps $t_f \approx t_R$. En l'absence de l'inflation le rayon de Hubble comobile serait toujours croissante (trait rouge). Avec l'inflation il a une branche décroissante (condition (6.16)) ce qui permet d'obtenir les échelles des sphères causales remontant au début de l'inflation, fournissant une relation causale commune à toutes les parties de l'univers observables aujourd'hui.

La figure 6.5 indique qu'au début de l'inflation il existe des facteurs d'échelle a_i , donc des sphères de causalité de rayon comobile \tilde{r}_{Hi} qui sont du même ordre que ceux de l'univers tel qu'on l'observe aujourd'hui a_0 , \tilde{r}_{H0} . Sous cette condition (6.12) donne :

$$\frac{\tilde{r}_{Hi}}{\tilde{r}_{Hf}} = \frac{a_f}{a_i} \frac{r_{Hi}}{r_{Hf}} \approx a_f = e^N \geq \frac{a_f}{a_0} \frac{r_{H0}}{r_{Hf}}$$

Comme après l'inflation $a(t)$ évolue comme $1/T$ il vient :

$$e^N \approx \frac{T_0}{T_f} \frac{r_{H0}}{r_{Hf}}$$

Avec les données d'observation : $r_{Hf} = \text{cste} \times 10^{-13} (\text{GeV})^{-1}$, $r_{H0} = \text{cste} \times 10^{41} (\text{GeV})^{-1}$, $T_0 = \text{cste} \times 10^{-4} \text{ eV}$, $T_f = \text{cste} \times 10^{16} \text{ GeV}$, il vient :

$$e^N \approx \frac{10^{-4}}{10^{25}} \times \frac{10^{41}}{10^{-13}} = 10^{25} \rightarrow N \geq 58 \quad (6.17)$$

La phase d'inflation qui se termine avec le Big Bang chaud et une courbure quasi nulle requiert, avec (6.15) et (6.17), une durée d'inflation suffisamment longue telle que pour le e-folds :

$$N \geq 58 - 70 \quad (6.18)$$

Il est supposé que dans la phase d'inflation l'univers est dominé par les champs scalaires. En supposant l'existence d'un champ scalaire unique, celui-ci est associé à une particule scalaire de masse au repos m_s . Le champ doit vérifier la condition de roulement lent (6.6b), et la forte accélération de l'expansion est conditionnée par (6.11bis).

■ Comment évolue alors le rayon de l'univers R avec le temps cosmique pendant l'inflation ?

Pour répondre à cette question, on se place dans l'hypothèse d'un champ stationnaire, avec $V(\Phi=0) \neq 0$, et donc l'équation d'état $w = -1$.

On adopte aussi l'hypothèse d'une courbure négligeable $K \approx 0$, car on a vu que le champ scalaire est prédominant lorsque la durée de l'inflation $N(t_i, t_f)$ est suffisamment longue. La densité d'énergie est la somme de la densité d'énergie du rayonnement thermique ρ_T et de la densité d'énergie des particules du champ scalaire ρ_s :

$$\rho_E = \rho_s + \rho_T$$

On verra en [annexe 2](#) que pour le rayonnement thermique : $\rho_T = 2 \frac{\sigma}{c} g_*(T) T^4 = C_T T^4$ où g_* est le facteur de dégénérescence total des composantes de l'univers, et pour l'énergie associée à la particule du champ scalaire de masse m_s on montre que : $\rho_s = C_s m_s^4$ où C_s est une constante caractéristique de la particule. Si l'on suppose que, pendant l'inflation, cette densité ρ_s reste constante, alors avec les hypothèses adoptées (4.8b) se réduit à :

$$\frac{1}{c^2} H^2 = \frac{1}{c^2} \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} (\rho_s + \rho_T) = \frac{8\pi G}{3c^4} (C_T T^4 + C_s m_s^4) \quad (6.19)$$

Avant le début de l'inflation, l'univers étant en expansion adiabatique, le rayonnement thermique domine et l'on a $\rho_T \gg \rho_s$ soit $T \gg (C_s / C_T)^{1/4} m_s$; (6.19) devient alors :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = c \sqrt{\frac{\kappa C_T}{3}} T^2 \quad \text{qui s'écrit encore :} \quad a \frac{da}{dt} = c \sqrt{\frac{\kappa C_T}{3}} (aT)^2$$

En régime adiabatique, on a vu que $aT = cste$ (relation (6.1)) donc le facteur d'échelle évolue avec le temps cosmique selon :

$$a(t) = c \sqrt{\frac{4\kappa C_T}{3}} \times cste \times t^{1/2} \quad (6.20)$$

La température, qui diminue donc selon $T(t) = cste \times t^{-1/2}$ finit par devenir égale à $T \approx \frac{m_s c^2}{k_B}$ et

l'énergie du champ scalaire devient à son tour dominante : $m_s \gg \left(\frac{C_T}{C_s} \right)^{1/4} T$. (6.19) devient alors :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = c \sqrt{\frac{\kappa C_s}{3}} m_s^2$$

d'où l'évolution exponentielle du facteur d'échelle en fonction du temps :

$$a(t) = a_i \exp(t/\tau) \quad (6.21a)$$

avec :

$$\tau = \frac{1}{m_s^2 c} \sqrt{\frac{3}{\kappa C_s}}$$

On montre d'ailleurs que :

$$\frac{\tau}{t_p} = \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^2 \quad (6.21b)$$

Au début de l'inflation la température diminue, selon cette fois :

$$T(t) \propto \frac{1}{a(t)} \propto \exp(-t/\tau) .$$

On peut retrouver ces expressions en utilisant un potentiel scalaire d'inflation chaotique (voir [Annexe 1](#)). Au démarrage de l'inflation la masse de la particule scalaire est $m_s \approx 10^{24}$ eV, $\tau \approx 10^{-35}$ s, et $T \approx 10^{24}$ eV, le temps cosmique est alors $t = t_i = 10^{-35}$ s.

■ **Phase de réchauffement** : L'inflation a une durée limitée puisque ρ_s change à cause de l'interaction des particules scalaires du champ avec d'autres particules. Les particules scalaires finissent par être désintégrées en photons, électrons, neutrinos..., faisant alors augmenter la température par l'apport d'énergie thermique produite par ces désintégrations. L'augmentation de la densité de photons n_γ consécutive à ces désintégrations conduit à un accroissement considérable de l'entropie d'univers jusqu'à une valeur qui reste constante. L'expansion, alors dominée par le rayonnement thermique, redevient adiabatique et suit donc les évolutions d'un univers de type Friedmann-Lemaître (figure 6.6).

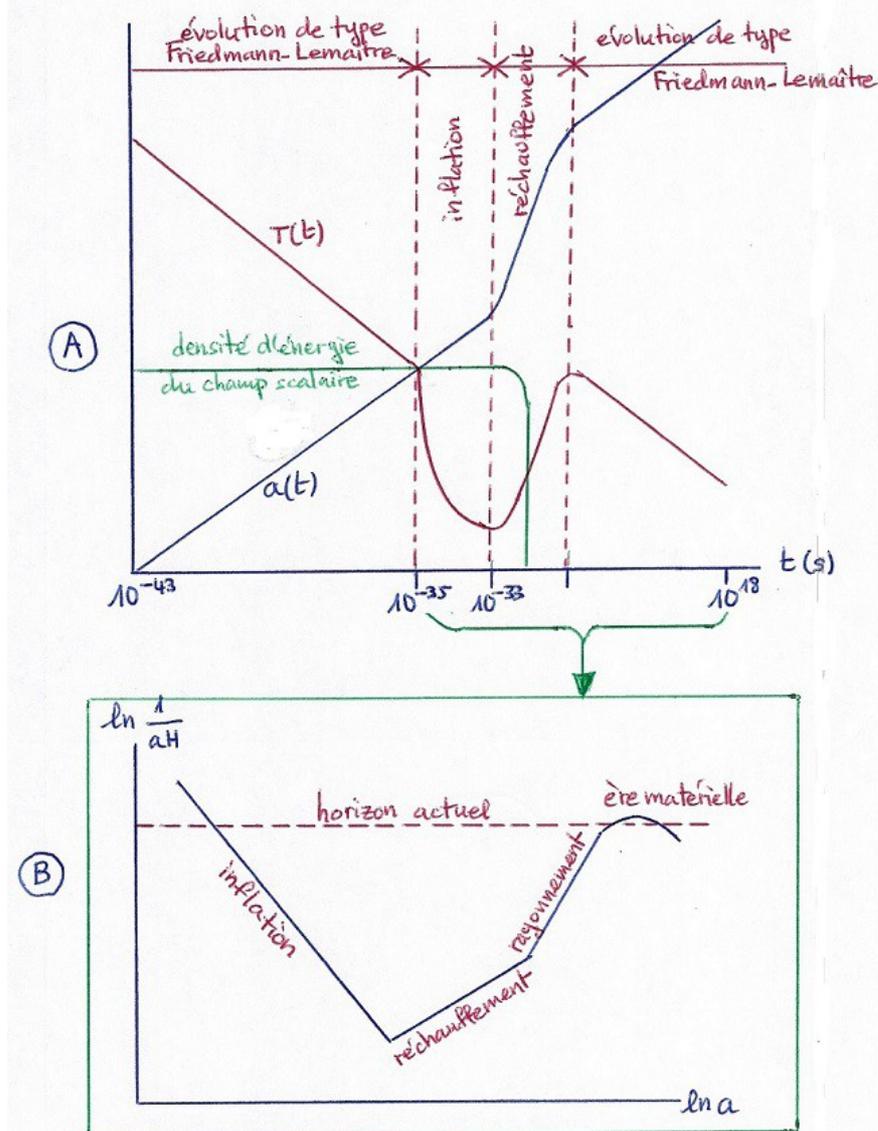


figure 6.6 : Phase d'inflation. Graphique A : évolution de la température et du facteur d'échelle depuis la brisure de grande symétrie survenue vers 10^{28} K (individualisation des interactions GUT).

Les grandes phases de l'évolution sont représentées :

- pour $t < 10^{-35}$ s, l'énergie thermique est supérieure à toutes les autres formes d'énergie de l'univers : l'expansion est de type Friedmann-Lemaître où la température diminue régulièrement (évolution adiabatique où $aT = \text{cste}$) ;
- à $t = 10^{-35}$ s l'énergie thermique a diminué jusqu'à devenir du même ordre que l'énergie du champ scalaire demeurée constante : c'est le début de l'inflation. La température chute et le champ scalaire est le moteur d'une expansion exponentielle ;
- à $t = 10^{-33}$ s les particules du champ scalaire ont été désintégrées par les particules qui ont pu émerger suite à la faible température : en l'absence du champ scalaire la température augmente suite aux interactions des particules (phase de réchauffement), les photons deviennent prédominants et l'entropie augmente. Succède alors l'ère radiative où le rayonnement domine.
- L'univers reprend son expansion adiabatique (type Friedmann-Lemaître), et la température diminuant

régulièrement, l'ère matérielle remplace l'ère radiative. L'émission du CMB se place entre l'ère radiative et l'ère matérielle.

Graphique B : évolution du rayon comobile c/aH avec l'expansion, l'inflation correspond à la condition sur le nombre de e-folds N (6.16). Lorsque celle-ci n'est plus remplie l'univers reprend son expansion adiabatique.

6.5 – Ère radiative

Lorsque la température est $T \approx 10^{15}$ GeV (soit 10^{28} K) ⁽⁶⁾, les excitations du vide quantique produisent des particules élémentaires et leurs anti-particules. Avec l'expansion, les 3 interactions électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte, qui étaient unifiées (objet d'une théorie GUT encore à découvrir), se différencient parce que leurs portées respectives deviennent plus petites que la taille de l'univers ⁽⁷⁾. Cette différenciation se traduit par la brisure des symétries présentes dans l'interaction unifiée.

Lorsque la température diminue brutalement à l'inflation et atteint $1 \text{ GeV} \approx 10^{13}$ K, les particules et leurs anti-particules interagissent et s'annihilent avec émission de photons. Ceux-ci deviennent dominants, le rapport entre le nombre de particules et le nombre de photons est de l'ordre de 10^{-9} . En particulier, le nombre baryonique, c'est-à-dire le rapport nucléons/photons, est de $3 \cdot 10^{-10}$. dans ce processus un très faible excédent de matière par rapport à l'anti-matière a conduit à un univers constitué de matière, l'anti-matière semblant absente des observations.

On montre que pour chaque espèce de particules $n^{\circ}A$, si la particule de masse m_A est relativiste, c'est-à-dire aux températures T telles que $k_B T > m_A c^2$, les particules et leurs anti-particules sont en équilibre avec les photons (γ), d'après (A2.11a, [annexe 2](#)) :

$$n_A \approx n_{\bar{A}} \approx n_\gamma \propto T^3 \quad (6.22)$$

En fait (6.22) est en première approximation, car on montre qu'il existe une faible asymétrie particules / anti-particules (voir [annexe 2](#)).

La température diminuant avec l'expansion, les particules deviennent non relativistes : $k_B T < m_A c^2$, et d'après (A2.28) leurs densités relatives aux photons décroissent de manière exponentielle :

$$\frac{n_A}{n_\gamma} = cste \times g_A(T) \left(\frac{m_A c^2}{k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_A c^2}{k_B T} \right) \quad (6.23)$$

Leur densité atteint une valeur correspondant à la température de découplage T_{eq} , telle que l'intervalle de temps entre les annihilations particules-anti-particules est plus grand que l'âge de l'univers : la densité reste alors quasi constante :

$$\frac{n_A(T_{eq})}{n_\gamma} \sim cste \quad (6.24)$$

Cette évolution de n_A/n_γ dépend donc de m_A/T selon (6.23) et atteint un plateau selon (6.24) pour $T < T_{eq}$ (figure 6.7). S'agissant de la relation entre la température et l'expansion, on montre que la période radiative correspond à des décalages spectraux :

6 L'électron-volt (eV), ou le giga-électron-volt (1 GeV = 10^9 eV) est utilisé comme unité pour diverses grandeurs en vertu de l'équivalence masse-énergie et de la relation énergie thermique-température. On a ainsi :

- pour l'énergie : 1 GeV = $1,6022 \cdot 10^{-10}$ J

- pour la température : 1 GeV = $1,1605 \cdot 10^{13}$ K

- pour la masse : 1 GeV = $1,7827 \cdot 10^{-27}$ kg.

7 Plus exactement, la portée des interactions est caractérisée par le rayon de Yukawa : $r = \hbar/mc$ où m est la masse de la particule du champ ; or les photons électromagnétique ont une masse nulle, donc r est infini tandis que pour les interactions nucléaires la masse est finie donc la portée est très faible. Pour l'interaction électromagnétique, dire que sa portée est plus petite que la taille de l'univers est donc inexact : en fait, le rayon d'action d'un photon est borné par l'horizon, lequel augmente régulièrement avec le temps cosmique, tandis que le rayon physique de l'univers augmente avec l'expansion et est plus grand que l'horizon.

$$z \geq z_{eq} \approx 3612 \Theta_{2,7}^{-4} \left(\frac{\Omega_{m0} h^2}{0,15} \right) \quad (6.25)$$

où $\Theta_{2,7} = \frac{T_{CMB}}{2,725}$, avec T_{CMB} température du fond diffus cosmologique (donc actuellement $\Theta_{2,7} \approx 1$), Ω_{m0} paramètre de densité de matière actuelle, $h \approx 0,7$ facteur correctif de la constante de Hubble. Avec $\Omega_{m0} = \rho_{m0} / \rho_c \approx 0,127$ on a : $z_{eq} \approx 3058$. La température T_{eq} correspondant à z_{eq} est obtenue que T varie avec $a = a_0/(1+z)$:

$$\frac{T_{eq}}{T_0} = \frac{1+z_{eq}}{1+z_0} \approx z_{eq}$$

puisque $z_{eq} \gg 1$ et $z_0 \approx 0$ aujourd'hui. Avec (6.25) on a donc : $T_{eq} \approx z_{eq} T_0$. Or $T_0 \approx T_{CMB} = 2,725 \Theta_{2,7}$

d'où : $T_{eq} = 2,725 z_{eq} \Theta_{2,7} = 2,725 \times 3612 \Theta_{2,7}^{-3} \frac{\Omega_{m0} h^2}{0,15} (K) \approx 8300 K = 0,718 eV$. Vient ensuite la période de découplage.

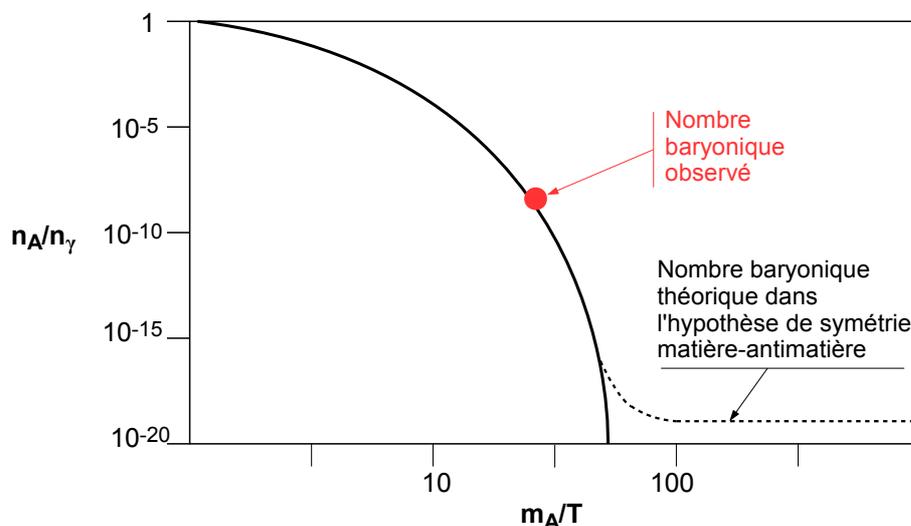


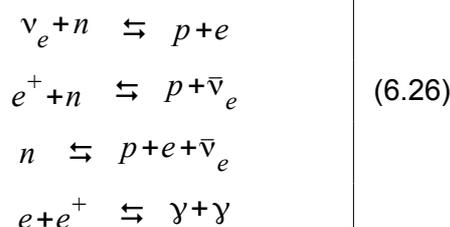
figure 6.7 : densité relative aux photons des particules et anti-particules en fonction de leur masse et de la température

6.6 – Nucléosynthèse primordiale

La nucléosynthèse primordiale est désignée par BBN : Big Bang Nucleosynthesis. Elle recouvre plusieurs étapes en fonction de la température :

■ $T > 100 \text{ MeV} (1,16 \cdot 10^{12} \text{ K})$ à $T > 1 \text{ MeV} (1,16 \cdot 10^{10} \text{ K})$:

L'univers est dominé par les particules relativistes à l'équilibre : électrons e , positrons e^+ , neutrinos ν_e , anti-neutrinos, photons, entre lesquels se produisent des réactions ou qui les activent. Les neutrons et les protons ne sont pas relativistes du fait de leur masse relativement élevée : leur contribution est alors négligeable dans le bilan de masse, lequel dépend donc principalement de l'interaction nucléaire faible et des annihilations électrons-positrons, qui maintiennent ces particules et les bayons non relativistes à l'équilibre thermodynamique :



Donc les noyaux atomiques ne peuvent pas être formés. Les réactions ci-dessus maintiennent en équilibre une population de neutrons du même ordre que celle des protons. Et puisque, par les neutrinos, les protons et les neutrons se convertissent les uns en les autres, la matière dans l'univers est

opaque aux neutrinos. Cet équilibre conduit donc à :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{eq} = cste \times \exp\left(-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T}\right) \approx 1 \quad (6.27)$$

où $(m_n - m_p) = 1,293 \text{ MeV}$.

■ $0,7 \text{ MeV} \leq T \leq 1 \text{ MeV}$:

La température est trop basse pour l'interaction faible, et il se produit le découplage des neutrinos. (n/p) n'est alors plus à l'équilibre. L'interaction faible cesse d'être prédominante (« gel » de l'interaction faible), lorsque le taux de réaction de cette interaction Γ_w devient de l'ordre de la constante de Hubble :

$$\Gamma_w \approx cste \times H$$

avec la définition $\Gamma_w = n \langle \sigma_F v \rangle$: où : σ_F section efficace de l'interaction faible, v distribution de vitesse des paires de particules entrant en réaction. La probabilité de capture d'un neutrino par unité de volume s'obtient en multipliant $\langle \sigma_F v \rangle$ par la densité particulaire des neutrons $n(T)$ qui varie, par l'expansion, comme $n(T) \propto T^3$. v étant fonction de la température on a : $\langle \sigma_F v \rangle \propto G_F^2 T^2$ pour la réaction $n + \nu_e \rightleftharpoons p + e$, G_F constante de Fermi ; on montre alors que pour cette réaction on a :

$$\Gamma_w = cste \times \frac{7\pi}{60} (1 + 3g_A^2) G_F^2 T^5 \quad (6.28)$$

Le temps moyen entre chaque capture de neutrino est proportionnel à Γ_w^{-1} , soit $t(n + \nu_e \rightarrow p + e) \propto G_F^{-2} T^{-5}$. La relation entre H et la température étant donnée par (A2.13, [annexe 2](#)), on montre que la température de gel de l'interaction faible est donnée par :

$$\frac{\Gamma_w}{H} = cste \times \frac{(1 + 3g_A^2) G_F^2}{\sqrt{2\sigma g_*}} T_F^3 \quad (6.29)$$

avec $g_* = 10,75$ comme vu en [annexe 2](#) pour les neutrinos et les particules légères, σ constante de Stefan. Comme au gel on a $t(n + \nu_e \rightarrow p + e) \propto 1/H$, on déduit de (6.29) : $T_F \propto g_*^{1/6} G_F^{1/6} G_F^{-2/3}$. Numériquement on obtient $T_F \approx 0,8 \text{ MeV}$ ($9 \cdot 10^9 \text{ K}$) ; et d'après (A2.14bis) le gel de l'interaction faible se produit au temps $t_F = 1,15 \text{ s}$.

De (6.27) on déduit que le rapport (n/p) à la température de gel T_F a diminué jusqu'à :

$$\left(\frac{n}{p}\right)_F = cste \times \exp\left(-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T_F}\right) = 0,27$$

à $T < T_F$ les réactions $n + \nu_e \rightarrow p + e$ ne permettent plus d'assurer l'équilibre, et les neutrons devenus libres se désintègrent en : $n \rightarrow p + e + \nu_e$

ce qui accélère la diminution de (n/p) . Les neutrons qui ont formé les noyaux lourds ont leur population qui reste alors constante (figure 6.8).

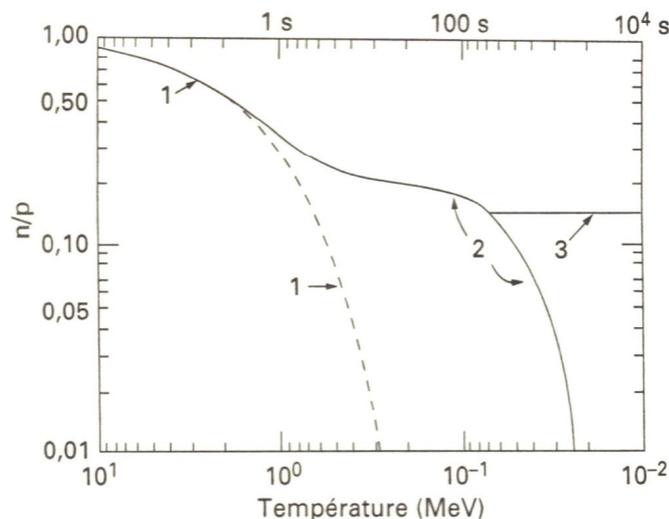
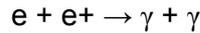


figure 6.8 (réf. [19]) : évolution de la population des neutrons avec la température
 courbe 1 : évolution sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, courbe 2 : évolution après rupture d'équilibre sous l'hypothèse d'absence de réactions nucléaires, courbe 3 : neutrons présents dans les noyaux lourds

■ $0,05 \text{ MeV} \leq T \leq 0,7 \text{ MeV}$:

L'équilibre thermique des réactions entre nucléons ne peut plus être maintenu. À $T < 0,5 \text{ MeV}$, les électrons et positrons s'annihilent avec apport supplémentaire de photons, entraînant ainsi le ralentissement du refroidissement du plasma cosmique :



Les neutrinos, qui sont découplés, ont leur énergie qui n'est plus alimentée par les photons issus de cette annihilation entre électrons et positrons : la température des neutrinos devient donc plus petite que celle des photons.

Ces différences de température entre le plasma de photons, T_γ , et celle des particules conduisent à un facteur de dégénérescence total $g_* = 3,36$.

L'annihilation est à entropie constante. Comme, d'après (A2.6), la densité d'entropie est :

$$\tilde{S} = \frac{8}{3} \frac{\sigma}{c} q_* T^3$$

on a l'égalité entre l'entropie avant l'annihilation, \tilde{S}_i et l'entropie après l'annihilation \tilde{S}_f :

$$q_{*i} T_i^3 = q_{*f} T_f^3$$

où $q_{*i} = g_\gamma + \frac{7}{8}(g_e + g_{e^+}) = \frac{11}{2}$ puisque $g_\gamma = 2$ et $g_e = g_{e^+} = 2$ pour les photons, les électrons et les positrons, et $q_{*f} = g_\gamma = 2$ puisqu'il reste seulement des photons après annihilation, d'où :

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{q_{*i}}{q_{*f}} \right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} = 1,4$$

La température des neutrinos demeure à T_i tandis que l'univers est à la température $T_f = T_\gamma$. Avec l'expansion les températures des neutrinos et de l'univers diminuent et conservent le rapport $T_f/T_i = 1,4$ jusqu'à aujourd'hui. Or la température du CMB actuelle est $T_\gamma \approx 2,725 \text{ K}$ d'où la valeur présumée de la température actuelle des neutrinos : $T_\nu = T_\gamma / 1,4 = 1,94 \text{ K}$, mais la détection des neutrinos fossiles reste encore difficile.

Les protons et les neutrons peuvent interagir en formant des noyaux atomiques légers, puisque les neutrinos sont découplés, et les positrons et électrons se sont annihilés en donnant des photons. Cette réaction nucléaire apparaît pour $T > 0,1 \text{ MeV}$: elle conduit à la formation du deutérium D par la réaction réversible :



et donc il y a équilibre thermodynamique entre D et les nucléons n, p. Dans ce cas, on a :
Densité particulière des protons et des neutrons :

$$\left. \begin{aligned} n_p &= cste \times g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_p c^2 - \mu_p}{k_B T} \right) \\ n_n &= cste \times g_n \left(\frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_n c^2 - \mu_n}{k_B T} \right) \end{aligned} \right| \quad (6.30)$$

avec $g_n = g_p = 2$, et où $\mu_{n,p}$ désigne le potentiel chimique. Comme $m_n \approx m_p \approx m_N$ où m_N masse moyenne des nucléons dans un noyau de numéro atomique A, (6.30) est approximativement :

$$\left. \begin{aligned} n_p &\approx cste \times 2 \left(\frac{m_N T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_p c^2 - \mu_p}{k_B T} \right) \\ n_n &= cste \times 2 \left(\frac{m_N T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_n c^2 - \mu_n}{k_B T} \right) \end{aligned} \right| \quad (6.30\text{bis})$$

Soit un noyau atomique, qui pourrait être celui du deutérium D, de numéro atomique A. Il est de masse

m_A (qui n'est pas m_N !), constituée de A nucléons (protons p et neutrons n) et de Z protons. Son potentiel chimique et sa masse sont :

$$\left. \begin{aligned} \mu_A &= Z\mu_p + (A-Z)\mu_n \\ m_A &= Zm_p + (A-Z)m_n \end{aligned} \right| \quad (6.31)$$

La densité volumique du nombre de noyaux A dans l'univers (densité particulière) s'exprime de la même façon que pour les particules :

$$n_A \approx cste \times g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_A c^2 - \mu_A}{k_B T} \right) \quad (6.32)$$

en utilisant (6.31) et (6.30 bis) dans (6.32), et puisque l'énergie de liaison du noyau est donnée par le défaut de masse entre les nucléons et le noyau :

$$\frac{E_A}{c^2} = Zm_p + (A-Z)m_n - m_A \quad (6.33)$$

on obtient :

$$n_A = cste \times g_A \left(\frac{m_A}{m_N} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \frac{1}{2^A} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp\left(\frac{E_A}{k_B T} \right) \quad (6.34)$$

Soit n_N la densité des nucléons dans l'univers ; c'est la somme de trois densités :

- la densité des protons libres n_p ;
- la densité des neutrons libres n_n ;
- la densité des nucléons intégrés dans tous les noyaux de différents numéros atomiques A . Cette densité est le produit de la densité des noyaux n_A par le nombre de leurs constituants, c'est-à-dire le numéro atomique A : $n_A \times A$

on a donc :

$$n_N = n_p + n_n + \sum_A n_A A \quad (6.35)$$

L'abondance des noyaux de même numéro atomique A est définie comme le rapport de la densité des nucléons intégrés dans ces noyaux et de la densité totale des nucléons n_N :

$$X_A = \frac{\text{densité des nucléons intégrés dans les noyaux } A}{\text{densité totale des nucléons}} = \frac{n_A A}{n_N} \quad (6.36)$$

On montre que X_A est égale à :

$$X_A = g_A A^{5/2} \left(\frac{1,202}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{3A-5}{2A-2}} \right)^{A-1} \left(\frac{T}{m_N} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \left(\frac{n_N}{n_\gamma} \right)^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp\left(\frac{E_A}{k_B T} \right) \quad (6.37)$$

où $n_\gamma = cste \times T^3$, d'après (6.22), est la densité des photons, et X_p , X_n abondances des protons et des neutrons :

$$X_p = \frac{n_p}{n_N}, \quad X_n = \frac{n_n}{n_N}, \quad E_A \text{ est définie en (6.33).}$$

Exemple : $X_A \approx 1$ si tous les nucléons de l'univers sont dans des noyaux de même numéro atomique, ce qui arrive à la température T_A :

$$T_A \approx \frac{E_A}{A-1} \frac{1}{\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T}{m_N} \right) - \ln\left(\frac{n_N}{n_\gamma} \right)} \quad (6.38)$$

où T_A , T , E_A , m_N sont en MeV. S'agissant du deutérium $D = {}^2\text{H}$ pour lequel $A = 2$, cette température, alors notée T_{NUC} , correspond à l'apparition des premières réactions nucléaires qui permettent la formation du noyau le plus simple, le deutérium :

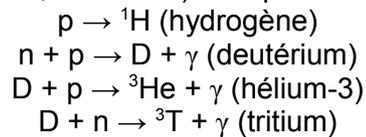
$$T_{\text{NUC}} \approx 0,086 \text{ MeV } (10^9 \text{ K})$$

valeur atteinte au temps cosmique $t_{\text{NUC}} \approx 180 \text{ s}$.

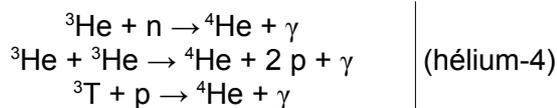
Pour $T > T_{\text{NUC}}$ la formation du deutérium est réversible, il est alors dissocié en protons et neutrons libres par photodissociation : $D + \gamma \rightarrow p + n$, parce que la densité du rayonnement (densité des photons) est encore élevée.

Pour $T < T_{\text{NUC}}$ la photodissociation de D n'a plus lieu parce que l'énergie de liaison du noyau, E_D , devient plus grande que l'énergie de rayonnement. La chaîne des réactions donnant des noyaux plus lourds à partir de D démarre : T_{NUC} est donc la température en-dessous de laquelle commence la nucléosynthèse primordiale.

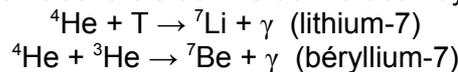
Le deutérium doit être formé en quantité suffisante pour que puissent être synthétisés des noyaux plus lourds. Aux premières secondes, l'univers contient environ 70% des protons et 30% des neutrons de la population des nucléons. Lorsque l'abondance du deutérium relativement aux protons atteint $D/p = 10^{-3}$ elle est suffisante pour que les neutrons soient capturés par les noyaux D ; on obtient alors des noyaux de numéro atomique $A = 3$ (Hélium-3 ${}^3\text{He}$, Tritium ${}^3\text{T}$). Jusqu'à ce stade on a donc les réactions :



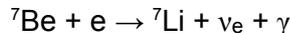
Aux étapes suivantes, les noyaux précédemment formés se transforment en noyaux plus lourds par les réactions suivantes :



(6.37) montre qu'une énergie de liaison E_A importante correspond à une abondance favorable. Pour l'hélium-4 ${}^4\text{He}$ son E_A est plus grande que celle de D, E_D , son abondance devient donc favorisée par rapport au deutérium. La capture de neutrons par ${}^4\text{He}$ conduit à la formation des noyaux de numéros atomiques $A = 5$ ou $A = 8$ qui sont très instables. Par conséquent la population d'hélium-4 reste quasiment stable ; seule une fraction très faible de ${}^4\text{He}$ donne des noyaux de numéro atomique $A = 7$:



et au bout d'un temps cosmique relativement long (quelques « jours ») le béryllium-7 capture un électron en donnant du lithium-7 et un neutrino :



L'arrêt des réactions de ${}^4\text{He}$ est aussi causé par les effets de la barrière coulombienne, prépondérants dans les précédentes réactions conduisant à des noyaux $A = 7$.

Les noyaux plus lourds ne peuvent donc pas se former lors de la nucléosynthèse primordiale : ils se formeront dans les réactions nucléaires internes aux étoiles, des milliards d'années plus tard.

Actuellement on observe une abondance relative de 1 noyau D pour 10000 noyaux de ${}^1\text{H}$ ($D/H = 10^{-4}$), ceci appuie le modèle d'une phase d'expansion où les réactions nucléaires sus-mentionnées ont eu lieu sur 180 secondes (figure 6.9) : l'ère de la nucléosynthèse primordiale.

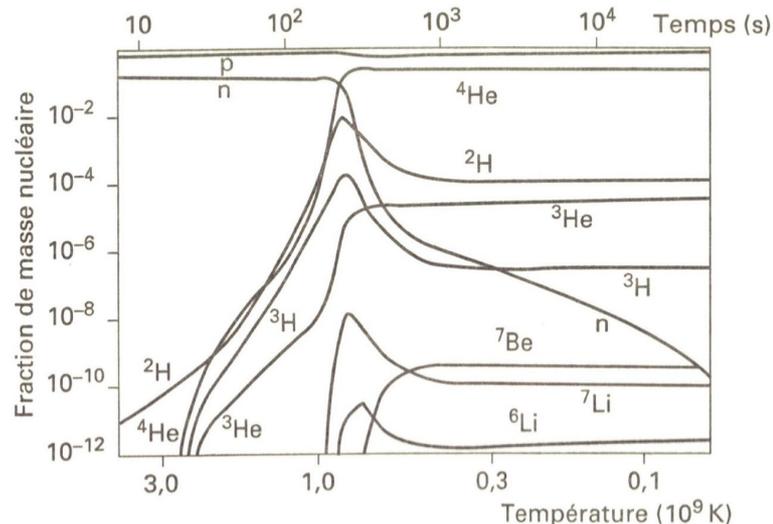


figure 6.9 : formation des noyaux atomiques légers lors de la nucléosynthèse primordiale

À la fin de la nucléosynthèse primordiale, les autres abondances relatives à l'hydrogène sont : ${}^3\text{He}/\text{H} \approx$

Remarque : gel de la formation du deutérium :

à partir du modèle théorique simplifié (6.37) on exprime la relation entre les abondances de deutérium, de protons et de neutrons, au moment du gel de la production de D. On sait que le gel a lieu à la fin de la nucléosynthèse primordiale, et qu'à ce temps on a $g_D = 3$ pour le deutérium. La relation entre les abondances X_D , X_p , X_n fait intervenir les fonctions de partition Z_D , Z_p , Z_n de ces particules. En thermodynamique statistique, la fonction de partition est définie par :

$$Z = \int \exp\left(-\frac{E(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{k_B T}\right) d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}$$

où \mathbf{q} et \mathbf{p} sont les variables degrés de liberté et impulsions généralisées, canoniquement conjuguées dans le formalisme hamiltonien. Z est liée à l'énergie libre de Gibbs $F = E - TS$ (S : entropie) par :

$$Z = \exp\left(-\frac{F}{k_B T}\right)$$

qui implique que, à énergie fixée E , Z augmente lorsque l'entropie augmente. Le nombre total des particules et noyaux dans un volume V est : $N_k = n_k V$, où $k = p, n, A$ respectivement pour les protons, neutrons, noyaux, et s'exprime avec les Z par l'intermédiaire du terme :

$$(m_k T)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_k c^2 - \mu_k}{k_B T}\right)$$

et de même pour les abondances X_k . En introduisant la longueur d'onde thermique $\lambda_{T_k} = \frac{h}{\sqrt{m_k k_B T}}$

on a : $N_k = n_k V \propto \frac{V}{\lambda_{T_k}^3} Z_k$ où $Z_k \propto \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)$ à entropie constante, d'où :

$$\frac{N_D}{N_p N_n} = V \frac{X_D}{X_p X_n} \propto \frac{n_D}{n_p n_n} V$$

$$\text{soit : } \frac{X_D}{X_p X_n} = \text{cste} \times \frac{1}{V} \left(\frac{\lambda_{T_n} \lambda_{T_p}}{\lambda_{T_D}}\right)^3 \frac{Z_D}{Z_n Z_p} = \text{cste} \times \frac{1}{V} \left(\frac{\lambda_{T_n} \lambda_{T_p}}{\lambda_{T_D}}\right)^3 \exp\left(-\frac{E_D - E_n - E_p}{k_B T}\right)$$

où :

$E_D - E_n - E_p = (m_D - m_n - m_p) c^2$ avec $m_D = m_n + m_p - \Delta m_D$ où $\Delta m_D c^2$ est l'énergie de liaison du noyau de deutérium, d'où :

$$\frac{X_D}{X_p X_n} = \text{cste} \times \frac{1}{V} \left(\frac{\lambda_{T_n} \lambda_{T_p}}{\lambda_{T_D}}\right)^3 \exp\left(\frac{\Delta m_D c^2}{k_B T}\right) \quad (6.39)$$

À la température de nucléosynthèse T_{NUC} du modèle simplifié on a pour les neutrons :

$$X_n(T_{\text{NUC}}) = X_n(T_f) \exp\left(-\frac{t_{\text{NUC}}}{\tau_n}\right) \approx 0,11$$

où $X_n(T_f)$ est l'abondance des neutrons à la température de fin de l'inflation, $t_{\text{NUC}} = 303$ s, $g_* = 3,36$; τ_n est le taux de réaction de formation de D par le neutron :

$$\tau_n^{-1} \propto \Gamma_D(n + p \rightarrow D + \gamma) = 4,55 \cdot 10^{-20} n_p \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

(rappel : dimension $[\Gamma_D] = \text{s}^{-1}$, et $[n_p] = \text{cm}^{-3}$). À l'équilibre de la nucléosynthèse (gel de la formation de deutérium) :

$$n_D \propto g_D \left(\frac{m_D T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_D}{k_B T}\right) \text{ avec } g_D = 3 \text{ à } T < 0,066 \text{ MeV}$$

(6.37) devient pour le deutérium, i.e. Avec $A = 2$, $Z = 1$:

$$X_D = g_D 2^{5/2} \left(1,202 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \left(\frac{T}{m_N} \right)^{3/2} X_p X_n \left(\frac{n_N}{n_\gamma} \right) \exp \left(\frac{E_D}{k_B T} \right)$$

où $E_D/c^2 = m_p + m_n - m_D = \Delta m_D$ d'où :

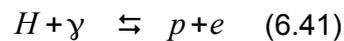
$$\frac{X_D}{X_p X_n} = 24 \times \frac{1,202}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n_N}{n_\gamma} \right) \left(\frac{T}{m_N} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{E_D}{k_B T} \right) \quad (6.40)$$

qui est aussi égal à (6.39).

En novembre 2020, le LUNA (Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics) en Italie a publié ses résultats d'une expérience consistant à reproduire les conditions de la nucléosynthèse primordiale [25]. Pour cela il fallait éviter les interactions avec les rayons cosmiques : c'est la raison pour laquelle l'expérience a été réalisée à l'intérieur de la montagne du Grand Sasso. Des noyaux d'hélium et de lithium ont été obtenus par l'interaction des protons sur des noyaux de deutérium.

6.7 – Recombinaison et découplage

■ *Tant que le rayonnement domine dans l'univers*, l'hydrogène formé se décompose en donnant des protons et des électrons : il y a ionisation. À l'équilibre thermodynamique la réaction est réversible :



et les abondances relatives d'atomes d'hydrogène, de protons et d'électrons se maintiennent selon l'équation de Saha (A2.43a, [annexe 2](#)).

■ *Lorsque la température diminue, suite à l'expansion, jusqu'à 3000-4000 K*, les photons n'ont plus assez d'énergie pour ioniser les atomes d'hydrogène, les électrons restent liés aux noyaux et les atomes d'hydrogène deviennent stables. En parallèle, les photons n'interagissent plus avec les atomes : il y a découplage du rayonnement. Ces photons ne sont plus piégés et se propagent librement, par conséquent l'univers devient transparent et donc observable. Ils constituent le rayonnement fossile, le fond diffus cosmologique (CMB) émis à une température de l'ordre de 3000 K qui, à cause de l'expansion, sont observés à la température $T_0 \approx 2,725$ K.

Suite au découplage des photons, la recombinaison des atomes d'hydrogène (c'est-à-dire leur formation par capture d'un électron par un proton non suivie d'une ionisation) peut s'effectuer.

Il s'ensuit la succession des réactions impliquant l'hydrogène qui conduisent à la formation d'atomes plus lourds. Noter cependant que l'hélium, qui est formé après l'hydrogène et coexiste ensuite avec lui, a sa recombinaison qui se termine bien avant celle de l'hydrogène ; car l'énergie d'ionisation de l'hélium est supérieure à celle de l'hydrogène.

Après le découplage la densité d'énergie de la matière (numéro atomique A) décroît selon (A2.29) comme $a(t)^{-3}$:

$$\rho_A(t) \propto \left(\frac{a_{DA}}{a(t)} \right)^3$$

tandis que la densité d'énergie du rayonnement décroît, selon comme $a(t)^{-4}$, puisque $\rho_\gamma(t) \propto T^4$ donc $\rho_\gamma(t) \propto a(t)^{-4}$ en expansion adiabatique où $a(t)T(t) = \text{cste}$ (relation (A2.12)). Les deux densités deviennent équivalentes $\rho_A \approx \rho_\gamma$ à un âge cosmique d'environ $3 \cdot 10^5$ années à une température d'environ 4000 K ; avant cet âge le rayonnement domine, après c'est la matière qui domine (ère matérielle) (figure 6.10).

■ *Avant le découplage* : revenons à la réaction (6.41). À l'équilibre les abondances relatives de H, p, e sont conservées. Les protons dans l'univers sont répartis en protons libres p de densité particulière n_p , et en protons d'atomes d'hydrogène H (donc protons liés à un électron). L'univers est supposé électriquement neutre, et puisque les atomes d'hydrogène sont électriquement neutres, on a :

$$n_e = n_p \quad (6.42)$$

où n_e est la densité particulière des électrons libres. Soit n_H la densité particulière des protons

constitutifs des atomes H (non ionisés). La densité particulaire totale des protons dans l'univers est alors : $n_b = n_p + n_H$. La proportion d'électrons libres dans l'univers varie en fonction des ionisations des atomes d'hydrogène et est caractérisée par la fraction d'ionisation :

$$X_e = \frac{n_e}{n_b} = \frac{n_p}{n_b} \quad (6.43)$$

compte tenu de (6.42).

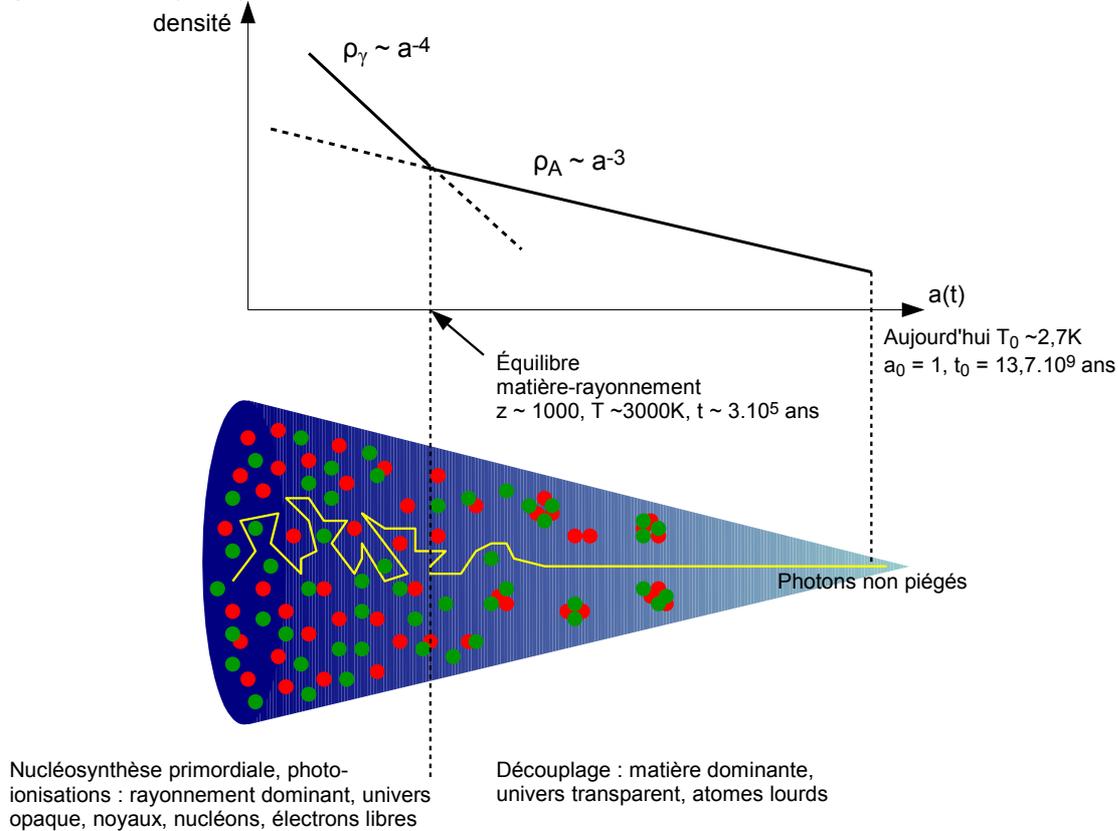


figure 6.10 : transition de l'ère univers opaque à l'univers transparent via le découplage matière-rayonnement

L'évolution de la fraction d'ionisation X_e avec la température est obtenue à partir de l'équation de Saha généralisée (A2.43a) appliquée à la réaction (6.41) :

$$\frac{n_e}{\tilde{n}_e} \frac{n_p}{\tilde{n}_p} = \frac{n_H}{\tilde{n}_H}$$

avec : $n_p = n_e = X_e n_b$, $n_H = n_b - n_p = n_b - n_e = (1 - X_e) n_b$ et d'après (A2.28) :

$$\tilde{n}_e = n_e(\mu_e = 0) = cste \times g_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_e}{k_B T} \right)$$

$$\tilde{n}_p = n_p(\mu_p = 0) = cste \times g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T} \right)$$

$$\tilde{n}_H = n_H(\mu_H = 0) = cste \times g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_H}{k_B T} \right)$$

Attention : $\tilde{n}_p \neq \tilde{n}_p$ bien que $n_p = n_e$. Donc : $\frac{n_e^2}{\tilde{n}_e \tilde{n}_p} = (1 - X_e) \frac{n_b}{\tilde{n}_H} = \frac{n_b^2 X_e^2}{\tilde{n}_e \tilde{n}_p}$

$$\text{d'où : } \frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{n_b} \frac{\tilde{n}_e \tilde{n}_p}{\tilde{n}_H} = cste \times \frac{g_e g_p}{g_H} \left(\frac{m_p}{m_H} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_e + E_p - E_H}{k_B T} \right)$$

Avec $m_p \approx m_H$ et $g_e g_p/g_H = 1$, et $E_e + E_p - E_H = (m_e + m_p - m_H)c^2 = E_I = 13,6 \text{ eV}$ est l'énergie d'ionisation de l'hydrogène H, on a :

$$\frac{X_e^2}{1-X_e} = cste \times \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{n_b} \exp\left(-\frac{E_I}{k_B T}\right) \quad (6.44)$$

Dans (6.44), T et n_b sont données en fonction du décalage spectral z par :

- d'après (3.2) : $T(z) = T_0(1+z) = 2,725(1+z)(\text{K}) = 2,348 \cdot 10^{-13}(1+z)(\text{GeV})$
- $n_b(z) = \left(\frac{n_b}{n_\gamma} \right)_0 n_{\gamma 0}(1+z)(\text{cm}^{-3})$

et avec $\Omega_{b0} = \rho_{b0}/\rho_c$ paramètre de densité des baryons, observé actuellement, (6.44) devient :

$$\log_{10} \left(\frac{X_e^2}{1-X_e} \right) = 20,98 - \log_{10}(\Omega_{b0} h_0^2 (1+z)^{3/2}) - \frac{25163}{1+z} \quad (6.45)$$

où h_0 et Ω_{b0} sont données au tableau 2.1. Lorsque la température atteint la valeur correspondant à l'énergie d'ionisation de H, $T_I = E_I/k_B$, (6.44) donne :

$$\frac{X_e^2(T_I)}{1-X_e(T_I)} \gg 1 \quad \text{soit : } X_e(T_I) \approx 1$$

Or la recombinaison se produit pour des températures très inférieures à T_I : $T \ll T_I$. Autour de $z \approx 1300$, X_e diminue rapidement de $X_e = 0,5$ à $X_e = 0,01$. La recombinaison a lieu lorsque la fraction d'ionisation diminue brutalement, ce qui arrive pour $1200 < z < 1400$, soit à des températures $3100 \text{ K} < T < 3800 \text{ K}$.

Soit le taux de réaction $\Gamma_T = n_e \langle \sigma_T v \rangle$. La réaction implique principalement la diffusion Thompson $e + \gamma \rightarrow e + \gamma$ dont la section efficace est $\sigma_T = 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. La diffusion Thompson est la diffusion d'un photon incident d'énergie suffisamment faible pour que l'interaction avec l'atome se traduise simplement par son recul, et non par une interaction avec l'électron seul. L'énergie du photon n'est alors pratiquement pas transmise à l'atome, et le photon est diffusé sans perte d'énergie. On montre que, pour la diffusion Thompson, $\sigma_T \propto Z^2$ (Z : nombre de charge), mais pour l'hydrogène $Z = 1$.

La recombinaison commence juste après le découplage qui a lieu pour $\Gamma_T \approx H$. Or on montre :

- Si l'expansion résulte uniquement de la matière et du rayonnement :

$$H = H_0 \left[\Omega_{m0} (1+z)^3 \left(1 + \frac{1+z}{1+z_{eq}} \right) \right]^{1/2} \quad (6.46)$$

Le paramètre de densité de matière actuel Ω_{m0} est donné au tableau 2.1. z_{eq} est le décalage spectral lors de la fin de l'ère radiative (donc au temps d'équilibre matière-rayonnement) :

$$z_{eq} \approx 3612 \Theta_{2,7}^{-4} \frac{\Omega_{m0} h_0^2}{0,15}$$

ce qui correspond à $T_{eq} \approx 5,65 \Theta_{2,7}^{-3} \Omega_{m0} h_0^2 (\text{eV})$; pour $z > z_{eq}$, et donc $T > T_{eq}$, l'univers est dominé par le rayonnement.

- Taux de réaction :

$$\Gamma_T = 1,495 \cdot 10^{-31} \left(\frac{\Omega_{b0} h_0^2}{0,02} \right) X_e (1+z)^3 (\text{s}^{-1}) \quad (6.47)$$

Au découplage $\Gamma_T \approx H$, le décalage spectral z_D est donné par :

$$(1+z_D)^{3/2} = \frac{280,01}{X_e \text{ résiduel}} \left(\frac{\Omega_{b0} h_0^2}{0,02} \right)^{-1} \left(\frac{\Omega_{m0} h_0^2}{0,15} \right)^{1/2} \sqrt{1 + \frac{1+z_D}{1+z_{eq}}} \quad (6.48)$$

où $X_e \text{ résiduel}$ est la fraction d'ionisation restante après la fin de la recombinaison. Pour connaître cette fraction d'ionisation résiduelle il faut déterminer le comportement de $X_e(z)$ pendant la phase de recombinaison. Pour cela on utilise l'équation de Boltzmann (A2.40a) où C_A est donnée par (A2.41) appliquée à $n_e = n_b X_e$:

$$\frac{d n_e}{d t} + 3 H n_e = - \langle \sigma_T v \rangle \left(n_e n_p - \frac{\tilde{n}_e \tilde{n}_p}{\tilde{n}_H} n_H \right)$$

où les relations (6.42), (6.43), (6.44) s'appliquent.

En outre le nombre total de baryons reste constant :

$$n_b a^3 = \text{cste} \quad (6.49)$$

d'où : $\frac{d}{d t} (n_b a^3) = 0 = \dot{n}_b a^3 + 3 a^2 \dot{a} n_b$ soit : $\dot{n}_b X_e = -3 H n_b X_e$, et avec le terme de gauche de

l'équation de Boltzmann qui s'écrit $\frac{d n_e}{d t} + 3 H n_e = \frac{d}{d t} (n_b X_e) + 3 H n_e = n_b \dot{X}_e + \dot{n}_b X_e + 3 H n_b X_e$ on obtient :

$$\dot{X}_e = \langle \sigma_T v \rangle \left[(1 - X_e) \left(\frac{m_e T}{2 \pi} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{E_I}{k_B T} \right) - X_e^2 \right] \quad (6.50)$$

où l'on montre que, pour $T < 6000 \text{ K}$:

$$\langle \sigma_T v \rangle = \frac{64 \sqrt{\pi}}{\sqrt{27}} \frac{e^4}{m_e^2} \left(\frac{E_I}{k_B T} \right)^{1/2} \times 0,448 \ln \left(\frac{E_I}{k_B T} \right) \quad (6.50\text{bis})$$

En fait, dans $\langle \sigma_{TV} \rangle$ il faut prendre en compte les taux de réaction liés aux différentes transitions électroniques dans l'atome.

On montre que si $800 < z < 1500$ et pour $0,05 \leq (\Omega_{b0}, \Omega_{m0}) \leq 1$:

$$X_e(z) = 2,74 \cdot 10^{-3} \frac{(\Omega_{m0} h_0^2)^{1/2}}{\Omega_{b0} h_0^2} \exp(14,486(1 - \Theta_{2,7}^{-1})) \left(\frac{z}{1000} \right)^{12,75} \quad (6.51)$$

Remarque : Profondeur optique τ : Elle désigne la transparence de l'épaisseur d'un milieu pour un rayonnement ; c'est l'intégrale du coefficient d'absorption effectif sur l'épaisseur du milieu :

$$\tau = \int_0^L K(\chi) d\chi$$

où χ est la distance dans le milieu (ici c'est le rayon comobile, cf. (4.3bis)), $K(\chi) [\text{m}^{-1}]$ coefficient d'absorption effectif. Si $\tau = 1$ alors le flux lumineux est réduit de $1/e$ lors de sa traversée du milieu. On montre que :

$$K = n_e X_e \sigma_T$$

et que sous les conditions adoptées précédemment on a :

$$\tau(z) = \int n_e X_e \sigma_T d\chi \approx 0,42 \exp(14,486(1 - \Theta_{2,7}^{-1})) \left(\frac{z}{1000} \right)^{14,25} \quad (6.52)$$

La probabilité de diffusion d'un photon entre les décalages spectraux z et $z+dz$ est donnée par :

$$p_\gamma(z) = \exp(-\tau) \frac{d\tau}{dz} \quad \text{avec donc} \quad \int_0^\infty p_\gamma(z) dz = 1$$

(6.52) donne alors :

$$p_\gamma(z) = \text{cste} \times z^{13,25} \exp\left(-A \left(\frac{z}{1000}\right)^{14,25}\right) \quad (6.53)$$

où: $A = 0,42 \exp(14,486 (1 - \Theta_{2,7}^{-1}))$

Avec (6.53), $p_\gamma(z)$ présente un maximum très marqué pour la valeur $z_D \approx 1057,3$ (figure 6.11) : cette valeur correspond au découplage des photons qui deviennent et restent libres, ils forment ainsi le rayonnement du fond diffus cosmologique.

Te voici enfin devenu libre, Photon !

Eh oui, Méson ! Je suis passé du fond confus au fond diffus cosmologique...

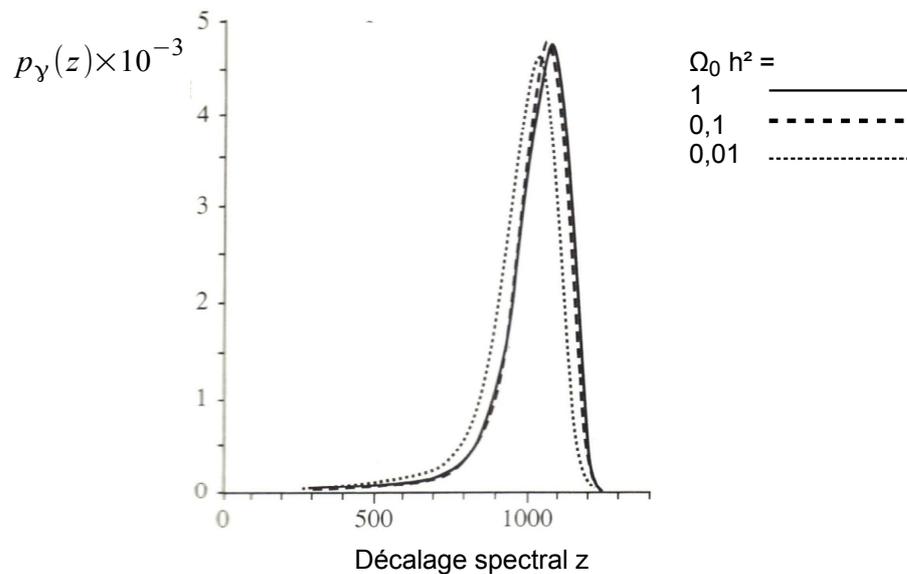
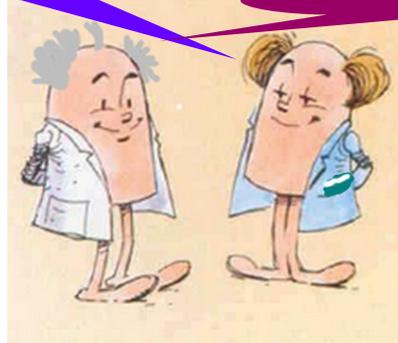


figure 6.11 : fonction de visibilité pour différentes densités [10]

Au moment du découplage, donc pour $z = z_D$, (6.51) donne la fraction d'ionisation résiduelle $X_e \text{ résiduel} \approx 8 \cdot 10^{-3}$. Notons cependant que $p_\gamma(z)$ ne s'annule pas dès que $z < z_D$: l'épaisseur de la zone de découplage, ou surface de dernière diffusion, correspond à des décalages compris entre z_D et le décalage pour lequel $p_\gamma = \frac{1}{2} p_\gamma(z_D)$. Cette épaisseur est $\Delta z_D = 185,7$ d'après le modèle et correspond à la durée moyenne de l'ère du découplage. Ces valeurs de z_D et Δz_D sont confirmées par les observations WMAP qui donnent $z_D = 1089 \pm 1$ et $\Delta z_D = 195 \pm 2$.

Les derniers photons à être émis, constitutifs du CMB, comme on vient de le voir, sont ceux qui correspondent à $z_D \leq z \leq z_D + \Delta z_D$. Après cette émission l'univers se refroidit à cause de son expansion et n'émet plus de nouveau rayonnement global qui puisse être détecté. L'ensemble est dominé par de la matière froide formée d'hydrogène moléculaire.

7 – Le CMB et ses questions encore ouvertes

7.1 – Spectre du rayonnement fossile

Le rayonnement fossile du CMB, issu de la dernière diffusion des photons consécutive à l'ère du découplage, présente un spectre rigoureusement identique à celui de l'émission thermique du corps noir (figure 3.1), confirmé entre autres par les explorations COBE (expérimentation FIRAS).

Prédit dès 1948 par George Gamow, et observé pour la première fois par Arno Penzias et Richard Wilson en 1965, ce rayonnement isotrope nous parvient aujourd'hui avec une température $T_0 \approx 2,725$ K (soit $2,348 \cdot 10^{-4}$ eV) depuis l'époque de la dernière diffusion à laquelle elle était environ :

$$T_0 (1 + z_D) = 2970 \text{ K} < T_D < T_0 (1 + z_D + \Delta z_D) = 3500 \text{ K}$$

À T_0 correspond une longueur d'onde où l'intensité est maximale, donnée par la loi de déplacement de Wien :

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T_0} \quad (7.1)$$

où b constante de Wien, $b = 2,8977685 \cdot 10^{-3}$ m.K, ce qui donne : $\lambda_{max} \approx 1,06$ mm. Le rayonnement du CMB s'étend du domaine centimétrique au domaine sub-millimétrique de part et d'autre de ce maximum : c'est le domaine dit micro-onde. Le spectre du CMB, identique à celui d'un corps noir, montre que le rayonnement fossile a été de nature thermique. Le spectre du CMB s'insère dans le spectre général des émissions du cosmos observées (figure 7.1). Ce spectre général se distribue en divers domaines de longueurs d'onde :

- le domaine radio (métrique) : les principales sources sont les galaxies, étoiles, planètes, amas ;
- domaine millimétrique : rayonnement du CMB, comme on l'a vu ;
- domaine infra-rouge (IR) : principales sources : gaz interstellaires ;
- domaine visible : principales sources : étoiles, nébuleuses ;
- domaine ultra-violet (UV) : principales sources : étoiles ;
- domaine des rayons X et gamma : principales sources : réactions brèves et intenses.

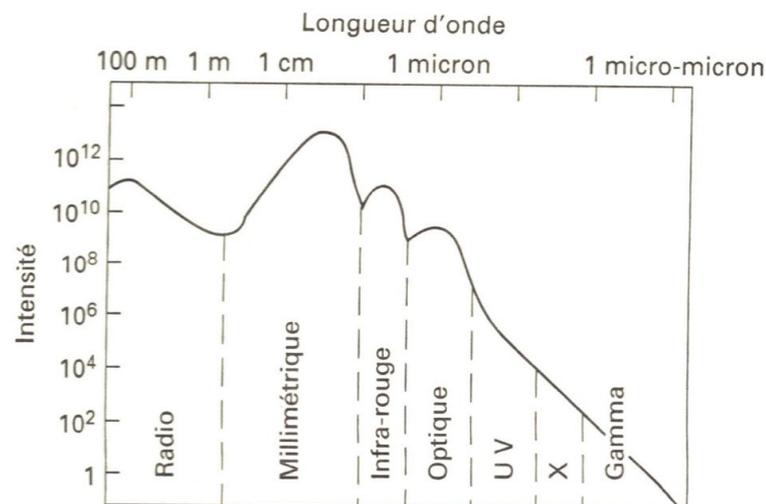


figure 7.1 : principaux rayonnements du cosmos (d'après [19])

Le rayonnement du CMB est isotrope et isotherme ; l'isotropie suggère qu'il a été émis par une source coïncidant avec l'ensemble de l'univers au temps correspondant. Et c'est le cas, comme on l'a vu, puisque le découplage et la recombinaison sont omniprésents dans l'univers d'alors.

Comment, de cette homogénéité, peut émerger l'hétérogénéité du cosmos tel qu'on l'observe actuellement, avec ses structures de galaxies, d'amas de galaxies, et de super-amas ?

Parmi les réponses, il y a l'effet de la gravitation sur le milieu composé de photons, d'électrons, de nucléons : un élément plus dense que son milieu environnant exerce une attraction gravitationnelle sur les particules voisines par courbure de l'espace-temps. Les particules s'unissent alors de plus en plus à cet élément et la masse de l'ensemble augmente, générant ainsi une gravitation plus intense. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que les forces de pression radiative de l'élément contrebalancent la gravitation. Dans le

cosmos la densité de matière, en régime non-relativiste (voir tableau A2.1) $\rho_m \propto T^{3/2}$ diminue moins rapidement que la densité de rayonnement $\rho_\gamma \propto T^4$ lorsque la température diminue avec l'expansion puisque, en régime adiabatique, $T \propto a^{-1}$. En conséquence, après le découplage, les structures matérielles qui marquent les inhomogénéités initiales sont distribuées et relativement amplifiées par rapport au rayonnement dans le cosmos observable actuel. Alors, l'ère actuelle peut être qualifiée d'ère matérielle puisque la densité de matière est largement supérieure à la densité de rayonnement. Les observations et la théorie donnent en effet :

- en moyenne il y a 1 nucléon pour 3 milliards de photons soit $n_N/n_\gamma = 3 \cdot 10^{-10}$, mais l'énergie des photons du CMB est plus faible que celle de la matière : $\rho_m/\rho_{\text{CMB}} \approx 10^4$;
- la relation (A2.11a) donne, avec $g_\gamma = 2$:

$$n_{\gamma 0} = 410,44 \Theta_{2,7}^3 (\text{cm}^{-3}) \quad (7.2)$$

sachant que 999 ‰ photons qui nous parviennent sont issus du Big Bang présumé et sont distribués dans l'univers de manière uniforme :

$$\rho_{\gamma 0} = 4,6408 \cdot 10^{-34} \Theta_{2,7}^4 (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}) = 2 \cdot 10^{-15} \Theta_{2,7}^4 (\text{GeV})$$

D'après (A2.6) la densité d'entropie actuelle est :

$$\tilde{S}_0 = 1,02 \cdot 10^{-8} q_* \Theta_{2,7}^3 (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \text{cm}^{-3}) = 2,48 \cdot 10^{-11} q_* n_{\gamma 0} \quad \text{et} \quad \Omega_{\gamma 0} h_0^2 = 2,47 \cdot 10^{-5}$$

Cependant, sans éléments un peu plus denses que leur environnement lors de l'émission du CMB, aucune inhomogénéité ne serait présente jusqu'à aujourd'hui. Comment ont pu se former ces sur-densités ?

On obtient $n_{\gamma 0}$ à partir de la formule de Planck (3.1) qui donne la densité spectrale d'énergie des photons par unité de volume, à une température donnée T (ou luminance énergétique spectrale). La densité d'énergie rayonnante par unité de volume est alors :

$$\rho_\gamma(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (7.3)$$

ce qui donne, avec le changement de variable $x = h\nu/k_B T$: $\rho_\gamma = \hbar c \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$, comme

l'intégrale vaut $\pi^4/15$, il vient : $\rho_\gamma(T) = 2 \frac{\sigma}{c} g_\gamma T^4$ où $g_\gamma = 2$, qui est (A2.12). Pour avoir une densité de masse par unité de volume il faut diviser par c^2 :

$$\rho_{m\gamma} = \frac{1}{c^2} \rho_\gamma(T) = 2 \frac{\sigma}{c^3} g_\gamma T^4 = 8,4 \cdot 10^{-33} T^4 (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (7.4)$$

Pour $T = T_0 = 2,725 \text{ K}$ on a donc : $\rho_{m\gamma 0} = 4,63 \cdot 10^{-34} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Densité particulière des photons (nombre de photons par unité de volume) :

$$d n_\gamma(\nu) = 2 \times \frac{\text{énergie par unité de volume contenue dans } (\nu + d\nu)}{\text{énergie } h\nu \text{ d'un photon}} = 2 \times \frac{u_\nu(\nu, T)}{h\nu} d\nu$$

(le facteur 2 tient compte des deux états de polarisation possibles des photons). D'où :

$$n_\gamma(T) = 2 \int_0^\infty \frac{u_\nu(\nu, T)}{h\nu} d\nu = \frac{1}{\pi^2 c^3 \hbar^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 0,244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3$$

où l'on a utilisé le changement de variable précédent, soit :

$$n_\gamma(T) = 20,28 T^3 (\text{cm}^{-3}) \quad (7.5)$$

Pour $T = T_0$ on a : $n_{\gamma 0} = 410,4 \text{ cm}^{-3}$. La relation (7.5) est également obtenue par (A2.11a) où $E = h\nu$.

7.2 – Origine des structures (galaxies...) à partir des anisotropies initiales

■ Masse de Jeans :

Les structures à l'origine des hétérogénéités du cosmos, peuvent subir un effondrement en fonction de l'importance relative de la gravitation et de l'énergie cinétique des constituants de gaz qui les composent. On va voir que l'effondrement se produit si la masse M de la structure devient plus grande que sa masse de Jeans M_J : $M \geq M_J$.

Différents cas se présentent selon qu'il s'agisse d'un univers statique ou bien en expansion, et d'un régime relativiste ou non.

- Univers sans expansion et cinétique de la structure non relativiste :

Le gaz est de masse M , de densité de masse ρ , de rayon R (structure supposée sphérique), à la température T . Il est soumis à deux forces antagonistes :

- l'attraction gravitationnelle (donc attractive) ;
- la pression thermique (répulsive).

Ces forces sont équilibrées si $M = M_J$: pour une nébuleuse gazeuse cet équilibre est instable (car ρ et T sont homogènes), il est stable pour une étoile (car ρ et T varient d'un point à l'autre de la structure).

On détermine l'énergie cinétique du gaz et son énergie potentielle gravitationnelle :

- Énergie cinétique du gaz :

L'énergie cinétique de chaque particule constitutive du gaz est : $\frac{3}{2} k_B T$. De manière générale,

l'énergie cinétique moyenne par particule est $\langle W \rangle = \frac{1}{2} f k_B T$, f est le nombre de degré de liberté (= 3 pour un gaz mono-atomique, 5 si diatomique, 6 si polyatomique).

L'énergie cinétique (thermique) par unité de masse m de chaque particule est $\frac{\langle W \rangle}{m} = \frac{3}{2} k_B \frac{T}{m}$.

l'énergie cinétique totale du gaz est donc :

$$E_T = \frac{3}{2} k_B T \frac{M}{m} \quad (7.6)$$

Si la particule est un atome d'hydrogène, $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

- Énergie potentielle gravitationnelle :

Pour un gaz sphérique de rayon R , la sphère de rayon r et d'épaisseur dr , de masse $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ enfermant une boule de masse $M(r)$, de densité de masse ρ (supposée uniforme), a pour potentiel :

$$dE_G(r) = -G \frac{M(r) dm}{r} = -G \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{r} \rho 4\pi r^2 dr \rightarrow E_G = -\frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr \text{ soit :}$$

$$E_G = -\frac{16}{3} \pi^2 G \rho^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (7.7)$$

- L'effondrement du nuage de gaz se produit si $-E_G > E_T$. Avec $n = \rho/m$ densité volumique des particules (ou densité particulaire, dimension $[L^{-3}]$), (7.6) et (7.7) donnent la condition sur le rayon minimal qui est le rayon de Jeans :

$$R > R_J = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{15}{2} \frac{k_B}{4\pi G} \left(\frac{T}{n}\right)^{1/2}} \quad (7.8)$$

et la masse de Jeans correspondante $M_J = \rho \frac{4}{3} \pi R_J^3$:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{m^2} \left(\frac{15 k_B}{8\pi G}\right)^{3/2} \left(\frac{T^3}{n}\right)^{1/2} \quad (7.9)$$

Pour un gaz d'atomes d'hydrogène, avec $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, (7.9) devient :

$$M_J = 3,277 \cdot 10^4 M_\odot \left(\frac{T^3}{n}\right)^{1/2} \text{ où } M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg est la masse solaire.}$$

On peut exprimer aussi le rayon et la masse de Jeans en fonction de la pression et de la densité. On suppose que le gaz est parfait, donc d'équation d'état :

$$PV = \frac{N}{\mathcal{N}} R_0 T = N k_B T = n V k_B T$$

où $R_0 = \mathcal{N} k_B = 8,314 (\text{JK}^{-1})$ constante des gaz parfaits, $\mathcal{N} = 6,0221415 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ nombre d'Avogadro, $N = nV$ nombre de particules du gaz, $N = M/m$, $\rho = nm$. On obtient alors :

- énergie cinétique :

$$E_T = \frac{3}{2} PV = 2\pi R^3 P \quad (7.10)$$

- rayon de Jeans :

$$R_J = \left(\frac{15}{8\pi G} \right)^{1/2} \frac{P^{1/2}}{\rho} \quad (7.11)$$

- masse de Jeans :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{m^2} \left(\frac{15}{8\pi G} \right)^{3/2} \frac{P^{3/2}}{\rho^2} \quad (7.12)$$

La structure s'effondre si $R > R_J$; mais si $R < R_J$ alors elle entre en vibrations acoustiques. En effet, on montre en [annexe 3](#) que sont produites des fluctuations de densité $\varepsilon = \delta\rho/\rho_0$ autour de la densité moyenne ρ_0 , qui évoluent selon l'équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \varepsilon = 4\pi G \rho_0 \varepsilon \quad (7.13)$$

où $c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S^{1/2}$ est la célérité du son dans le gaz, (7.13) a pour solution :

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.14a)$$

avec la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c_s^2 \mathbf{k}^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (7.14b)$$

À la masse de Jeans, $\omega = 0$ et le nombre d'onde correspondant, d'après (7.14b), est le nombre d'onde de Jeans (en module) :

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s} = \sqrt{\frac{15}{2}} \frac{1}{R_J} \quad (7.15)$$

Deux situations se présentent selon les valeurs de ω :

- si $\omega^2 > 0$ (ω est réel, $k > k_J$) : les fluctuations sont des vibrations acoustiques de pulsation :

$$\omega = \sqrt{c_s^2 \mathbf{k}^2 - 4\pi G \rho_0}$$

- si $\omega^2 < 0$ (ω est imaginaire, $k < k_J$) : (7.14a) devient :

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.16)$$

avec $\omega = -\frac{i}{\tau}$ (dans $\pm i/\tau$ seul le signe « - » convient car le système est instable), et :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0 - c_s^2 \mathbf{k}^2}} \quad (7.17)$$

qui est la constante de temps (durée caractéristique) de l'effondrement gravitationnel. Pour $k \ll k_J$, (7.17) devient :

$$\tau \approx (4\pi G \rho_0)^{-1/2} \quad (7.18)$$

Il y a amplification exponentielle des fluctuations (sur-densités) suivie d'un effondrement gravitationnel qui évolue avec le temps de manière exponentielle au début.

- Avec un univers en expansion et structure non relativiste :

L'expansion a pour effet de ralentir la croissance des fluctuations matérielles. On montre en [annexe 3](#) que (7.13) est remplacée par :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2H \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2 \varepsilon = 0 \quad (7.19)$$

Pour un univers à courbure nulle ($K = 0$) et en négligeant la constante cosmologique Λ , (4.8c) donne :

$$\dot{\rho}_E + 3H(\rho_E + P) = 0$$

où (rappel) $\rho_E = \rho c^2$ densité d'énergie, et avec l'équation d'état $P = w\rho_E$ et $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$:

$$\dot{\rho}_E + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_E (1+w) = 0$$

de solution : $\rho_E \propto a^{-3(1+w)}$; (4.8b) donne : $\frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{K}{3} a^{-3(1+w)}$ qui s'intègre en :

$$a(t) \propto \left[\frac{3(1+w)}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+w)}} t^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (7.20)$$

qui est (4.28a). D'où, sous les hypothèses adoptées :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)} t^{-1} \quad (7.21)$$

À l'ère matérielle où $w \approx 0$ puisque $k \ll k_J$, on a, selon les hypothèses adoptées :

$$H \approx \frac{2}{3t} \quad (7.22)$$

et avec ce modèle d'ère matérielle, (4.8b) donne : $\frac{H^2}{c^2} = \frac{8\pi G}{3c^4} (\rho_0 c^2) = \left(\frac{2}{3c}\right)^2 t^{-2}$, où la densité d'énergie est devenue celle de la densité moyenne : $\rho_E = \rho_0 c^2$, ce qui donne :

$$\rho_0(t) = (6\pi G)^{-1} t^{-2} \quad (7.23)$$

De (7.18) il vient alors : $\omega^2 = -4\pi G \rho_0(t) = -\frac{2}{3t^2}$ et (7.19) avec (7.22) donnent

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{4}{3t} \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{2}{3t^2} \varepsilon = 0 \quad (7.24)$$

de solution :

$$\varepsilon(t) \propto t^{2/3} \quad (7.25)$$

avec $w = 0$, (7.20) donne : $a(t) \propto \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} t^{2/3}$ et puisque $a(t)T(t) = \text{cste}$:

$$\varepsilon(t) \propto t^{2/3} \propto a(t) \propto \frac{1}{T(t)} \quad (7.26)$$

À l'ère matérielle, avec les hypothèses approximatives utilisées, les sur-densités augmentent d'autant plus que la température cosmique diminue. Lorsque la température est suffisamment basse pour être en régime non relativiste, $T \ll mc^2/k_B$, l'énergie cinétique est donnée par (7.10), et la célérité du son

diminue et devient très faible devant la vitesse de la lumière : $c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \ll c$ puisque $P = nk_B T$.

La masse de Jeans exprimée par (7.12) devient :

$$M_J = cste \frac{\times P^{3/2}}{\rho^2} = cste \times \left(\frac{T^3}{n} \right)^{1/2}$$

L'énergie cinétique due à la pression est donc très inférieure à l'énergie de l'expansion, donc M_J devient très petite devant la masse causale (voir plus loin). Elle diminue de $10^{18} M_\odot$ à $10^5 M_\odot$ et reste constante après le découplage, et (7.20) donne, avec $w = 0$ les évolutions (7.26). Comme, suite au découplage, les nucléons n'interagissent plus avec le rayonnement et donc ne contribuent plus à la température, la masse de Jeans reste inchangée. Ainsi, après le découplage, des structures de masse $> 10^5 M_\odot$ peuvent subir l'effondrement gravitationnel.

- Masse de Jeans relativiste avec univers en expansion :

D'après le tableau A2.1 en [annexe 2](#), un gaz relativiste a pour équation d'état $w = 1/3$, (A2.12) donne alors :

$$\rho_E(T) = 2 \frac{\sigma}{c} g_*(T) T^4 \quad (7.27)$$

donc pour la pression :

$$P(T) = \frac{2\sigma}{3c} g_*(T) T^4 \quad (7.28)$$

La relation (7.12) présente l'avantage d'exprimer la masse de Jeans avec P et ρ sans préjuger de la forme de l'énergie cinétique ; de (7.27) et (7.12), et puisque $\rho_E = \rho c^2$, on a :

$$M_J = \frac{4\pi c^4}{3m^2} \left(\frac{5}{8\pi G} \right)^{3/2} \rho_E^{-1/2} \quad (7.29)$$

Et de (A2.12) :

$$M_J = \frac{4\pi c^4}{3m^2} \left(\frac{c}{2\sigma g_*} \right)^{1/2} \left(\frac{5}{8\pi G} \right)^{3/2} T^{-2} \quad (7.30)$$

Célérité du son : $c_s^2 = \frac{P}{\rho} = \frac{P c^2}{\rho_E}$ soit avec (7.27) et (7.28) :

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3}} c = 0,58 c \quad (7.31)$$

Or d'après (A2.14) et (A2.14bis) : $t = \sqrt{\frac{3c^3}{4\pi G} \frac{T^{-2}}{\sigma g_*}}$ donc :

$$M_J(t) \propto t \quad (7.32)$$

ceci montre que la masse de Jeans relativiste dans un univers en expansion augmente linéairement avec le temps cosmique, autrement dit la masse nécessaire pour obtenir l'effondrement gravitationnel devient plus importante. Au moment de l'émission du CMB, vers $t \approx 10^5$ ans, on a alors :

$$M_J(\text{CMB}) \approx 10^{18} M_\odot$$

(voir figure 7.2 plus loin).

- **Masse causale :**

Pour un univers homogène et isotrope la métrique (4.1) et (4.2) est celle de Robertson-Walker :

$$d s^2 = c^2 d t^2 - a(t)^2 \left[\frac{d r^2}{1 + K r^2} + r^2 (d \theta^2 + \sin^2 \theta d \varphi^2) \right] \quad (7.33)$$

où K est la courbure de l'espace. Deux points séparés par un élément radial dr sont à une distance l'un de l'autre sur l'hypersurface spatiale égale à :

$$d D = a(t) \frac{d r}{\sqrt{1 + K r^2}} \quad (7.34)$$

où l'élément de rayon comobile est $d \chi = \frac{d r}{\sqrt{1 + K r^2}}$ et donc : $d D = a(t) d \chi$. On a vu en (4.3) que

la surface d'une sphère comobile, de rayon comobile χ est égale à : $S(\chi) = 4 \pi f_K^2(\chi)$ où :

$$f_K(\chi) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} \chi) \quad \text{si } K > 0 : \text{ espace sphérique (univers fermé de volume fini) ;}$$

$$f_K(\chi) = \chi = r \quad \text{si } K = 0 : \text{ espace sans courbure, dit « plat » ;}$$

$$f_K(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} \chi) \quad \text{si } K < 0 : \text{ espace hyperbolique (univers ouvert de volume infini).}$$

À l'ère radiative, (A2.14) donne l'évolution de T(t) et de a(t) avec le temps cosmique t :

$$\left. \begin{aligned} T(t) &= \left(\frac{3 c^3}{4 \pi G \sigma g_*} \frac{1}{t} \right)^{1/4} t^{-1/2} \\ a(t) &= cste \times g_*^{1/4} t^{1/2} \end{aligned} \right| \quad (7.35)$$

L'horizon des particules est défini en (4.31) ; soit un photon, sa métrique est nulle $ds^2 = 0$ par définition, la distance physique parcourue pendant dt par le photon est donc donnée par (7.34) :

$$c d t = d D = a(t) \frac{d r}{\sqrt{1 + K r^2}} \quad (7.36)$$

Si le photon, a été émis au temps $t = 0$ depuis une distance initiale r_0 , et nous atteint aujourd'hui (temps t_0 , en $r = 0$), il a parcouru la distance radiale comobile :

$$\chi(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{d t}{a(t)} = - \int_{r_0}^0 \frac{d r}{\sqrt{1 + K r^2}} = - \frac{1}{\sqrt{K}} \int_{\sqrt{K} r_0}^0 \frac{d u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

qui est (4.31), d'après (7.36). Suivant les valeurs de K, on a :

$$\left. \begin{aligned} \chi(t_0) &= \frac{1}{\sqrt{K}} \arcsin(\sqrt{K} r_0) & \text{si: } K > 0 \\ \chi(t_0) &= r_0 & \text{si: } K = 0 \\ \chi(t_0) &= \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arg} \sinh(\sqrt{-K} r_0) & \text{si: } K < 0 \end{aligned} \right| \quad (7.37)$$

Seules les particules pour lesquelles $\chi \leq \chi(t_0)$ peuvent être détectées au temps d'aujourd'hui t_0 , compté à partir de l'époque de leur émission $t = 0$. Comme a(t) est donné par (7.35), la distance radiale comobile parcourue par le photon est :

$$\chi(t_0) \propto c \int_0^{t_0} t^{-1/2} d t = cste \times 2 c t_0^{1/2}$$

On a vu que la distance physique D(t₀) est obtenue par $D(t_0) = a(t_0) \chi(t_0)$ (cf. (4.31bis) où l'on a posé $t_1 = 0$ et $t_2 = t_0$), soit, puisque $a(t_0) = a_0 t_0^{1/2}$: $D(t_0) = t_0^{1/2} 2 c t_0^{1/2}$, soit :

$$D(t_0) = 2ct_0 \quad (7.38)$$

On peut interpréter (7.38) ainsi : c'est la somme d'une première distance ct_0 parcourue par la lumière suivant la métrique de l'espace (c'est-à-dire avec les coordonnées comobiles) et d'une deuxième distance ct_0 correspondant à l'expansion de l'espace. Les relations (7.35) servent à poser l'horloge

normatif du cosmos, avec les unités de Planck : $\frac{t}{t_p} \propto \frac{1}{4\pi} \left(\frac{45}{\pi} g_*(T) \right)^{1/2} \left(\frac{m_p}{T} \right)^2$. Si t est exprimé en

secondes et si T est en MeV, on a : $\frac{t}{t_p}(s) \approx \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2}$.

La première seconde de l'univers correspond à une température d'environ 1 MeV, soit $1,1605 \cdot 10^{10}$ K.

On a vu que la densité varie avec la température selon (7.4) : $\rho_\gamma(T) = 2 \frac{\sigma}{c} g_\gamma T^4$ et que T évolue avec le temps cosmique selon (7.35) à l'ère radiative, d'où :

$$\rho_\gamma = \frac{3c^2}{2\pi G} \frac{g_\gamma}{g_*} t^{-2} \quad (7.39)$$

La densité du rayonnement décroît donc avec le temps selon (7.39) tandis que le rayon de l'horizon augmente linéairement avec le temps selon (7.38).

On définit alors la masse causale :

C'est la masse équivalente à l'énergie contenue dans la sphère causale, c'est-à-dire la sphère délimitée par la surface de l'horizon, de rayon $D(t_0)$:

$$M_C(t_0) = \frac{4}{3} \pi D(t_0)^3 \rho_{m\gamma}$$

En utilisant (7.39), où $\rho_{m\gamma} = \rho_\gamma/c^2$ elle s'exprime en fonction du temps :

$$M_C(t_0) = \frac{16c^3}{G} \frac{g_\gamma}{g_*} t_0 \quad (7.40)$$

et en utilisant (7.35), elle s'exprime en fonction de la température :

$$M_C(t_0) = \frac{16c}{G} \frac{g_\gamma}{g_*} \left(\frac{6c^3}{\sigma \kappa g_*} \right)^{1/2} T^{-2} \quad (7.41)$$

Or la masse de Jeans relativiste est également proportionnelle à T^{-2} , d'après (7.30) :

$$M_J = \frac{4\pi c^4}{3m^2} \left(\frac{c}{2\sigma g_*} \right)^{1/2} \left(\frac{5}{8\pi G} \right)^{3/2} T^{-2} \propto t_0$$

la célérité du son étant dans ce cas $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ selon (7.31), l'expression précédente devient :

$$M_J = 217,5 c^3 (\sigma g_* \pi G^3)^{-1/2} c_s^{3/2} T^{-2} \quad (7.42)$$

M_C et M_J augmentent donc linéairement avec le temps, et donc selon T^{-2} , pourtant leurs significations physiques sont différentes : comme on l'a vu, M_J résulte de l'équilibre entre l'énergie de gravitation et l'énergie due à la pression thermique ; M_C , quant à elle, est liée à l'équilibre entre l'énergie de gravitation et l'énergie associée à la dynamique des galaxies, dans l'hypothèse d'une densité matérielle très proche de la densité critique ρ_c .

La masse causale (7.41) est supérieure à la masse de Jeans (7.42) :

- leur différence est faible à l'ère radiative ;
- leur différence est plus grande à l'ère matérielle, c'est-à-dire lorsque la densité d'énergie du rayonnement ρ_γ est inférieure ou égale à la densité matérielle ρ_N (nucléons), la transition ayant lieu pour $z_M \approx 10^4$ et $T_M \approx 10^5$ K (avec $M_{CM} \approx 10^{16} M_\odot$) pour $\rho_N \approx \rho_\gamma$: la masse de Jeans atteint un plateau, tandis que la masse causale augmente avec le temps moins rapidement qu'à l'ère radiative, $M_C \approx t^{1/2}$;

- au découplage rayonnement-matière, vers $T_D \approx 3000$ à 3500 K et $z_D \approx 1089$, la masse de Jeans chute brutalement jusqu'à $10^5 M_\odot$ car la pression du rayonnement thermique est devenue trop faible suite au découplage pour contrebalancer l'énergie gravitationnelle et donc empêcher l'effondrement.

(voir figure 7.2 plus loin).

Considérons au « début » (à $t \approx 0$) une structure de masse M supérieure à $10^9 M_\odot$, disons $10^{12} M_\odot$ pour fixer les idées. À cette époque $M > M_C$ et M_J . Bien que $M > M_J$ l'effondrement ne peut pas avoir lieu car $M > M_C$: les interactions des particules de la sphère causale n'ont pas été transmises à l'ensemble de la masse M pour agir sur elle et produire l'effondrement. Vers $t = 10^2$ années, $M \approx M_C \geq M_J$: l'effondrement pourrait se produire puisque la masse a rejoint l'horizon causal mais comme M_C et M_J sont très proches, les fluctuations de densité entraînent rapidement $M_J > M$, et lors de cette transition la structure qui ne se condense pas entre en régime d'oscillations acoustiques, comme vu en (7.13), (7.14), (7.15).

L'écart entre M_J et M augmente ensuite jusqu'à l'ère matérielle, vers $t = 10^5$ années, temps où cessent les vibrations acoustiques. Au découplage M_J devient très inférieure à M et la condensation peut alors se produire. Cette époque correspond pratiquement à celle de l'émission du CMB.

■ Amortissement de Silk :

Pour les structures de masse $M < M_J$, on a vu que les fluctuations de densité s'effectuent selon des oscillations acoustiques. Celles-ci sont amorties et freinées par les interactions qui ont lieu entre les électrons et les photons encore très denses avant le découplage. Plus les fluctuations de densité matérielle sont faibles, plus fort et leur amortissement consécutif à ces interactions ; ainsi le processus d'amortissement est à rétroaction positive, et selon leur masse initiale certaines structures cessent de produire les oscillations acoustiques avant le découplage. Au moment du découplage, les fluctuations qui ont persisté cessent. Les structures dont les oscillations acoustiques ont été maintenues jusqu'au découplage ont une masse initiale supérieure à une masse limite appelée masse de Silk M_S .

Estimation de M_S : Il s'agit d'évaluer la masse de la structure pour laquelle le temps de diffusion Thompson des photons par les électrons est égal à l'âge t_D du découplage. La diffusion Thompson a pour section efficace $\sigma_T = 6,65 \cdot 10^{-25}$ cm². Soit n_e la densité particulière des électrons dans la structure de masse M soumise aux fluctuations. Le libre parcours moyen des photons entre les diffusions dépend de la densité des électrons : il est d'autant plus grand que cette densité est faible (moins d'électrons rencontrés par le photon) :

$$L_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e}$$

L_γ est parcouru à la vitesse c par le photon en un temps : $t_\gamma = \frac{L_\gamma}{c} = \frac{1}{c \sigma_T n_e}$, t_γ est donc le temps

moyen entre chaque collision du photon et d'un électron. Si la structure, supposée sphérique de rayon R , contient $N_e = \frac{4}{3} \pi R^3 n_e$ électrons, la longueur totale parcourue par le photon est $N_e L_\gamma$. La distance

parcourue R est donnée par la moyenne géométrique de L_γ et de $N_e L_\gamma$: $R = \sqrt{L_\gamma (N_e L_\gamma)}$ (NB : la moyenne géométrique de 2 variables aléatoires a et b est définie par \sqrt{ab}). Donc :

$$R = L_\gamma \sqrt{N_e} \quad (7.43)$$

Le temps de diffusion du photon par la structure est alors : $t_d = t_\gamma N_e = t_\gamma \left(\frac{R}{L_\gamma} \right)^2 = \frac{1}{c \sigma_T n_e} \left(\frac{R}{L_\gamma} \right)^2$ soit :

$$t_d = \frac{\sigma_T}{c} n_e R^2 \quad (7.44)$$

M_S correspond à l'égalité $t_d = t_D$, c'est-à-dire la masse est suffisante pour permettre à la diffusion de durer jusqu'au découplage : $\frac{\sigma_T}{c} n_e R^2 = t_D$ donc :

$$M_S = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e c}{\sigma_T} R t_D \quad (7.45)$$

En supposant R égal au rayon de l'univers à l'époque du découplage, on a environ : $M_S \approx 10^{12} M_\odot$. Les fluctuations de structures de masse supérieure à M_S peuvent durer jusqu'au découplage et commencer à se structurer en galaxies de masse égale à M_S (comme c'est le cas de notre galaxie). Si les fluctuations concernent des structures trop massives, de masse supérieure à environ $10^{12} M_\odot$, comme c'est le cas d'amas de galaxies, ces structures n'entrent pas en oscillations acoustiques et n'ont pas d'amortissement Silk.

L'évolution de M_S avec t est également représentée sur la figure 7.2.

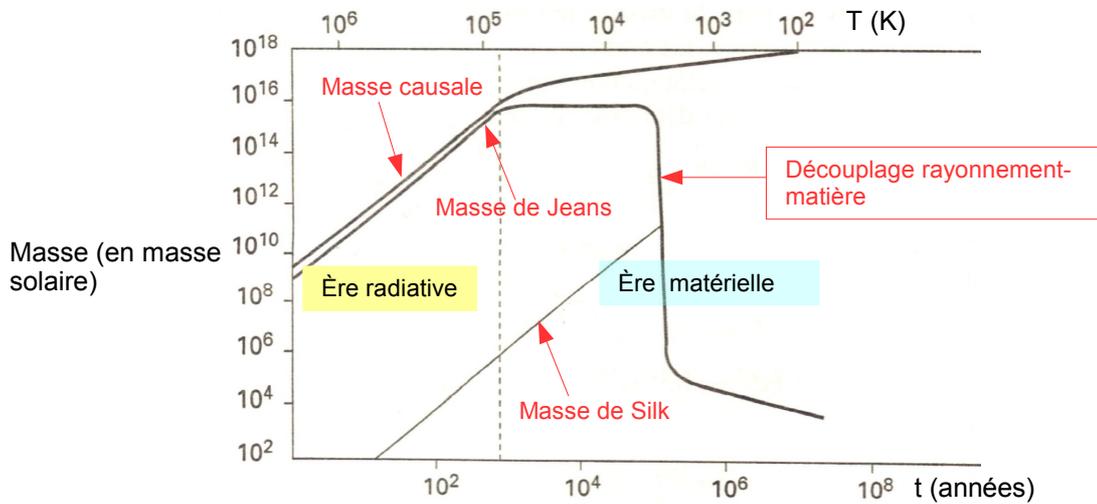


figure 7.2 : évolution de la masse causale M_C , masse de Jeans M_J , masse de Silk M_S , avant et après le découplage

■ **Rôle de la matière exotique dans la germination des structures :**

La matière exotique, ou masse sombre, est constituée de particules qui interagissent faiblement mais qui interviennent dès le début de la germination des structures (galaxies, nébuleuses...). La matière exotique se répartit en 2 familles :

- la matière sombre chaude (HDM : Hot Dark Matter) : particules légères (quelques eV) restant relativistes jusqu'à l'ère matérielle, c'est-à-dire à la fin de l'ère radiative ;
- la matière sombre froide (CDM : Cold Dark Matter) : particules massives (plus lourdes que le nucléon), elles ne sont donc pas relativistes sur tout ou une partie de l'ère radiative.

Un neutrino de type HDM a une masse $m_\nu = 5,348 \cdot 10^{-35} \text{ kg} = 30 \text{ eV}$. Supposons qu'à une certaine époque son paramètre de densité est $\Omega_\nu = \rho_\nu / \rho_c = 0,9$ avec $\rho_c = 1,878 \cdot 10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}$, alors $\rho_\nu = n_\nu m_\nu$ donne la densité particulaire $n_\nu = 316 \text{ cm}^{-3}$. Ces neutrinos cessent d'être relativistes pour $T \leq m_\nu c^2/k_B = 3,5 \cdot 10^5 \text{ K}$, soit un décalage spectral d'environ $z = T/2,725 - 1 = 1,28 \cdot 10^5$.

Lorsque $T < T_M \approx 10^5 \text{ K}$, à l'ère matérielle, donc pour $z < z_M \approx 3,7 \cdot 10^4$, les particules non relativistes (nucléons + neutrinos) dominent le rayonnement, principalement avec les réactions :



Les neutrinos non relativistes n'interagissent pas avec les photons et donc ne contribuent plus à la pression radiative : les structures formées de ces neutrinos peuvent alors se condenser. Cela se produit lorsqu'elles atteignent la masse de Jeans des neutrinos $M_{J\nu}$. Cette appellation n'a en fait pas de sens pour les neutrinos, cette masse limite étant liée à la température donc au temps cosmique, et non à la gravitation de la structure. Au bout du temps nécessaire t_ν pour que l'univers atteigne une température $T_\nu \leq m_\nu c^2/k_B$, les neutrinos parcourent une distance $R_\nu = ct_\nu$ qui est donc le rayon maximum de la structure qu'ils constituent. Ce temps est lié à la température T_ν , à l'ère radiative, par (A2.14) :

$$t_\nu \propto T_\nu^{-2} \propto m_\nu^{-2}$$

donc : $R_\nu = cste \times c T_\nu^{-2} = cste \times \left(\frac{k_B}{m_\nu c^2} \right)^2$ d'où la masse maximale de la structure au début de l'ère

matérielle : $M_{J\nu} = \rho_\nu \frac{4}{3} \pi R_\nu^3 = cste \times \rho_\nu m_\nu^{-6}$ où $\rho_\nu \propto T_\nu^4 \propto m_\nu^4$ d'où :

$$\frac{M_{J\nu}}{m_p} = \left(\frac{m_p}{m_\nu} \right)^2 \quad (7.46)$$

où m_p masse de Planck = $2,1767 \cdot 10^{-8}$ kg.

Avec l'exemple ci-dessus, $m_\nu = 5,348 \cdot 10^{-35}$ kg = 30 eV, on trouve par (7.46) :

$$M_{J\nu} = 3,6 \cdot 10^{45} \text{ kg} = 1,8 \cdot 10^{15} M_\odot$$

Alors, les surdensités des neutrinos qui résultent de la contraction de leur structure ont un potentiel de gravitation qui contribue à la condensation des structures formées de nucléons.

■ *Principe de modélisation statistique des fluctuations de densité :*

On a expliqué que les champs de densité proviennent de l'effondrement gravitationnel des perturbations de la densité primordiale. Pour modéliser ces densités primordiales et leurs évolutions, il est nécessaire d'utiliser une description statistique et spectrale. Une raison importante est que l'observation n'a pas accès à ces densités primordiales : elle a seulement accès aux grandes structures de l'univers (amas, galaxies, super-amas...) dont les distributions spatiales permettent de remonter, via des modèles, jusqu'aux causes des densités primordiales.

Tous les champs, en particulier ceux des fluctuations de densité $\varepsilon = \delta\rho/\rho_0$, sont alors des variables stochastiques. Leurs prédictions statistiques dépendent des distributions statistiques et de leur évolution des perturbations primordiales.

Une des quantités nécessaires dans les modélisations est la fonction de corrélation, par exemple pour les fluctuations de densité, entre un point \mathbf{r} et un point $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$:

$$C(\mathbf{r}') = \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle = \int \varepsilon^*(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r} \quad (7.47)$$

Il est alors pertinent de recourir à l'analyse spectrale, donc d'exprimer $\varepsilon(\mathbf{r})$ par sa série de Fourier afin de traiter ses différents modes caractérisés par leurs vecteurs d'onde \mathbf{k} :

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varepsilon_{\mathbf{k}} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{k} \quad (7.48)$$

Le champ étant à valeurs réelles, on a :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^* = -\varepsilon_{-\mathbf{k}} \quad (7.48\text{bis})$$

Aux coordonnées k_j des vecteurs d'onde \mathbf{k} correspondent des dimensions comobiles : $r_j = \frac{2\pi}{k_j}$ qui

sont liées aux dimensions physiques observables dans l'univers actuel. Les phases des modes $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ sont supposées distribuées de manière aléatoire. Il s'ensuit que la valeur moyenne de $\varepsilon(\mathbf{r})$ dans un volume V étendu est nulle. Sous l'hypothèse d'isotropie et d'homogénéité statistique, $C(\mathbf{r}')$ dépend seulement de la position \mathbf{r}' et les probabilités sont invariantes par rotation. $\varepsilon(\mathbf{r})$ est complètement déterminé par les modes $\varepsilon_{\mathbf{k}}$:

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}'} \rangle = \int C(\mathbf{r}') e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{d^3 \mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 \mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}}$$

Spectre de puissance de ε :

$$W_\varepsilon(\mathbf{k}) = \int C(\mathbf{r}') e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}' \quad (7.49)$$

d'où :

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') W_\varepsilon(\mathbf{k}) \quad (7.50)$$

(δ est ici la distribution de Dirac 3D) ⁽⁸⁾.

Si l'on connaît le spectre de puissance obtenu par l'observation on peut déduire la fonction de corrélation

8 Distribution de Dirac en dimension 3 : $\delta^{(3)}(f(\mathbf{r})) = f(0)$ notée $\delta(f)$; $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ a pour dimension l'inverse d'un volume [L^{-3}], par exemple pour une charge ponctuelle sa densité est $\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ de dimension [QL^{-3}] comme il se doit ; distribution de Dirac en un point : $\delta_a(f) = f(\mathbf{a}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})f(\mathbf{r})$.

par :

$$C(\mathbf{r}') = \int W_\varepsilon(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2} k^2 W_\varepsilon(k) \frac{\sin k r'}{k r'} dk \quad (7.51)$$

Si $|\varepsilon_k|^2 \propto k$ on a le spectre « courbure constante » : les fluctuations génèrent une courbure spatiale indépendante de leurs dimensions. Ce type de fluctuations est présent dans les champs scalaires de l'inflation. Dans ce cas l'auto-corrélation est, suite à (7.51) :

$$C(\mathbf{r}'=0) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2} k^2 W_\varepsilon(k) dk$$

De (7.50) il vient : $\langle \varepsilon_k \varepsilon_{-k} \rangle = \langle \varepsilon_k \varepsilon_k^* \rangle = \langle |\varepsilon_k|^2 \rangle = W_\varepsilon(k)$ soit

$$C(\mathbf{r}'=0) = \langle \left| \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{\rho_0} \right|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \langle |\varepsilon_k|^2 \rangle dk \quad (7.52)$$

$|\varepsilon_k|^2 \propto k$ donne :

$$C(\mathbf{r}'=0) \propto \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \langle k \rangle dk$$

Plus généralement, on introduit le spectre de puissance redimensionné :

$$\tilde{W}_\varepsilon(k) = \frac{2S_{D-2}}{(2\pi)^D} k^D W_\varepsilon(k) \quad (7.53)$$

où D est la dimension, S_{D-1} est la surface de la sphère de dimension D-1 et de rayon R = 1 :

$$S_{D-1} = 2\pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler : $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.

Par exemple :

$$\begin{aligned} D = 2 &\rightarrow S_1 = 2\pi \text{ (cercle)} \\ D = 3 &\rightarrow S_2 = 4\pi \text{ (sphère)} \end{aligned}$$

L'expression (7.51) est alors généralisée par :

$$C(\mathbf{r}') = \int \tilde{W}_\varepsilon(k) \frac{\sin k r'}{k r'} \frac{dk}{k} = \frac{2S_{D-2}}{(2\pi)^D} \int k^D W_\varepsilon(k) \left(\frac{\sin k r'}{k r'} \right) \frac{dk}{k} \quad (7.54)$$

Pour D = 3 (espace 3D), (7.54) donne :

$$C(\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \int k^3 W_\varepsilon(k) \left(\frac{\sin k r'}{k r'} \right) \frac{dk}{k} \quad (7.55)$$

et $\tilde{W}_\varepsilon(k) = \frac{1}{2\pi^2} k^3 W_\varepsilon(k)$ est appelé spectre de puissance par intervalle logarithmique en k : il donne une évaluation de l'amplitude de fluctuation de densité moyennée sur la distance comobile $2\pi/k$.

À l'ère radiative l'allure du spectre de puissance redimensionné est $\tilde{W}_\varepsilon(k) \propto k^4$ puisque $|\varepsilon_k|^2 \propto k$, comme le montre la figure 7.3.

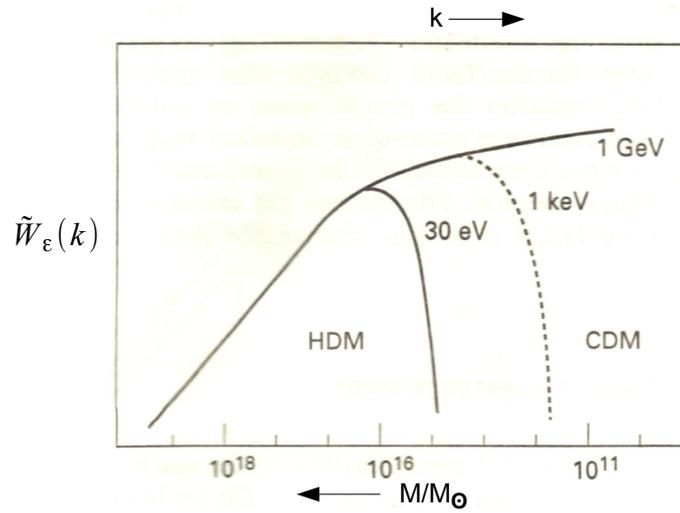


figure 7.3 : évolution théorique du spectre des fluctuations, pour $\varepsilon = \delta\rho/\rho_0 = 1$, en fonction de leur dimension, ou ce qui revient au même la masse M , ou du nombre d'onde k qui est inversement proportionnel à la dimension ; les différentes évolutions sont paramétrées par la masse des particules exotiques : pour les neutrinos de masse 30 eV, leur masse de Jeans est insuffisante pour le déclenchement de la condensation des structures de masse de l'ordre de celle d'une galaxie

• Remarque : fenêtrage :

L'observation porte seulement sur une partie finie des processus liés aux fluctuations de densité, elle introduit donc un filtrage spatial dans les données recueillies. Ce filtrage, ou fenêtrage, provient du fait que l'établissement de la corrélation (7.57) s'effectue obligatoirement avec une moyenne spatiale sur un volume fini V :

$$\bar{C}(\mathbf{r}') = \frac{1}{V} \int_V \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}) \bar{\varepsilon}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r} \quad (7.56)$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la fluctuation de densité observée. Or $\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}')$ est l'extrapolation continue d'un ensemble fini et discret de données effectivement observées $\bar{\varepsilon}'(\mathbf{r}')$, cette extrapolation revenant à utiliser une fenêtre F :

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}') = F \star \bar{\varepsilon}'(\mathbf{r}') = \int_V \bar{\varepsilon}'(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (7.57)$$

où \star désigne le produit de convolution. La fenêtre F doit vérifier les deux conditions :

- normalisation : $\int_V F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = 1$

- largeur caractéristique finie R de l'observation : $\int_V F(\mathbf{r}) r^2 d^3 \mathbf{r} = R^2$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution étant égale au produit des transformées de Fourier, (7.57) donne, pour les valeurs spectrales :

$$\bar{\varepsilon}_k = \varepsilon_k \tilde{F}(k) \quad (7.58)$$

On peut alors restituer la densité de probabilité $p(A, V)$ pour une grandeur physique A quelconque à partir de celle de sa valeur observée A donc affectée du fenêtrage :

$$prob(A \leq \bar{A} \leq A + dA) = p(A, V) dA \quad (7.59)$$

Exemple : si A est le nombre de galaxies, $p(A, V) dA$ donne la probabilité de trouver N galaxies dans un volume V . Pour certains régimes, tels que celui de l'inflation, et pour ses fluctuations précurseurs, on

montre que la densité de probabilité suit une loi gaussienne : $p(A, V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(V)} \exp\left(-\frac{\bar{A}^2}{2\sigma(V)^2}\right)$

où $\sigma(V) = \sqrt{\langle \bar{A}^2 \rangle_V} = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 p(A, V) dA$ écart quadratique centré, ou variance, puisque avec cette

distribution la moyenne, ou moment d'ordre 1, est nulle : $\langle \bar{A} \rangle_V = \int_{-\infty}^{+\infty} A p(A, V) dA = 0$.

Mais la caractérisation précise du régime nécessite de connaître le moment d'ordre 2, $\sigma(V)$.

Pour cela il faut prendre en compte :

- le caractère éventuellement non-linéaire de l'évolution ;
- la fonction de transfert entre modes k au temps t et ceux au temps actuel t_0 , ou entre les valeurs $a(t)$ et $a_0 = a(t_0)$: $\varepsilon_k(t) = T(k, t) \varepsilon_k(t_0)$

L'évolution des densités, prise en compte par $T(k, t)$, dépend de la valeur du rayon comobile $r(k) = 2\pi/k$ associée au mode k de la fluctuation, ε_k , par rapport au rayon de Hubble $D_H = c/H$.

Une définition plus précise de la fonction de transfert prend en compte ceci :

$$\varepsilon_k(a) = \varepsilon_+(a) T(k, a) \varepsilon_k(a_i) \quad (7.60a)$$

où a_i est le facteur d'échelle initial avant, et $\varepsilon_+(a)$ la fonction de croissance des perturbations :

$$\varepsilon_+(a) = \frac{5}{2} \frac{H(a)}{H_0} \Omega_{m0} \int_0^a \frac{dx}{(x H(x) / H_0)^3} \quad (7.60b)$$

$T(k, a)$ caractérise le changement du spectre de puissance initial sous l'action de l'évolution : il dépend des paramètres densité Ω_j , dont Ω_m , et de la nature des éléments de l'univers : matière, rayonnement.

Le traitement du mode $\varepsilon_k(a_i)$ doit alors tenir compte de la valeur de $r(k)$ par rapport à D_H . Cette comparaison détermine deux types de modes :

- $r(k) < D_H(a)$: longueur d'onde plus petite que le rayon de Hubble (mode sub-Hubble) ;
- $r(k) > D_H(a)$: longueur d'onde plus grande que le rayon de Hubble (mode super-Hubble).

► Avant leur entrée sous le rayon de Hubble D_H (modes initialement super-Hubble) les modes de fluctuations ne peuvent pas avoir été affectés par les effets physiques contenus dans la sphère de Hubble (sphère de rayon D_H) : leur amplitude dépend alors seulement de la métrique :

- S'ils entrent sous le rayon de Hubble à l'ère matérielle, on montre que leurs fluctuations de densité augmentent selon :

$$\varepsilon_m \propto a(t) \quad (7.61)$$

- S'ils entrent sous le rayon de Hubble à l'ère radiative, on montre que leurs fluctuations de densité augmentent selon :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_m \propto \ln a(t) \quad \text{pour } k \eta \gg 1 \\ \varepsilon_m \approx \text{cste} \quad \text{pour } k \eta \ll 1 \end{array} \right| \quad (7.62)$$

où $d\eta = dt/a(t)$ est le temps conforme.

► Entrée dans la sphère de Hubble au découplage :

- Les fluctuations super-Hubble correspondant à des masses importantes ($M > 10^{18} M_\odot$) deviennent sub-Hubble ($r < D_H$) au moment du découplage t_D , elles sont en relation de causalité, et comme leur masse est toujours $> M_J$ et qu'elles n'interagissent plus avec le rayonnement, elles continuent alors de croître comme dans l'ère matérielle, selon (7.61), proportionnellement à $a(t)$, et ce, jusqu'à aujourd'hui.
- Les fluctuations qui correspondent à des masses plus petites ($M < 10^{14} M_\odot$) et qui deviennent sub-Hubble à l'ère matérielle, sont moins massives que M_J (7.12) : elles entrent en oscillations acoustiques selon (7.14) jusqu'au découplage où leur masse devient $M > M_J$. Leur condensation se poursuit alors.

► Pour les modes sub-Hubble à l'ère radiative, et qui le restent donc ultérieurement, on montre que l'évolution de leurs fluctuations de densité matérielle vérifie l'équation de Mészáros :

$$\ddot{\varepsilon}_m + \frac{2+3u}{2u(u+1)} \dot{\varepsilon}_m - \frac{3}{2u(u+1)} \varepsilon_m = 0 \quad (7.63)$$

dans l'hypothèse $\varepsilon_r \ll \varepsilon_m$, $k\eta \ll 1$, où « r » et « m » désignent les composantes radiatives et

matérielles, et où $u = \frac{a}{a_M}$ et $\varepsilon = \frac{u}{1+u} \varepsilon_m$ fluctuation de densité totale (a_M : facteur d'échelle lors de la transition à l'ère matérielle). Solutions de (7.63) :

- mode de croissance : $\varepsilon_+(u) = u + \frac{2}{3}$
- mode de décroissance : $\varepsilon_-(u) = \varepsilon_+(u) \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1+u}+1}{\sqrt{1+u}-1} \right) - 2\sqrt{1+u} \right]$
- à l'ère matérielle ($u \gg 1$) ces solutions deviennent : $\varepsilon_+(u) \propto u$ et $\varepsilon_-(u) \propto u^{-3/2}$, donc à l'ère matérielle les fluctuations augmentent avec $a(t)$ ou bien elles décroissent avec $a(t)^{-3/2}$.

Les modes de fluctuations observables aujourd'hui étaient au début nécessairement super-Hubble. On montre que la fonction de transfert donnée par (7.60) est approximativement :

$$T(k, a_0) \approx \begin{cases} 1 & \text{pour } k \ll k_M \\ \left(\frac{k_M}{k} \right)^2 & \text{pour } k \gg k_M \end{cases} \quad (7.64)$$

La fonction de transfert $T(k, a)$ est représentée à la figure 7.4 pour différents types de particules : matière exotique (CDM, MDM, HDM), baryons... en régime adiabatique ou en iso-courbure, selon que l'entropie de la perturbation initiale est nulle, ou bien que le potentiel de gravitation de la perturbation initiale est nul.

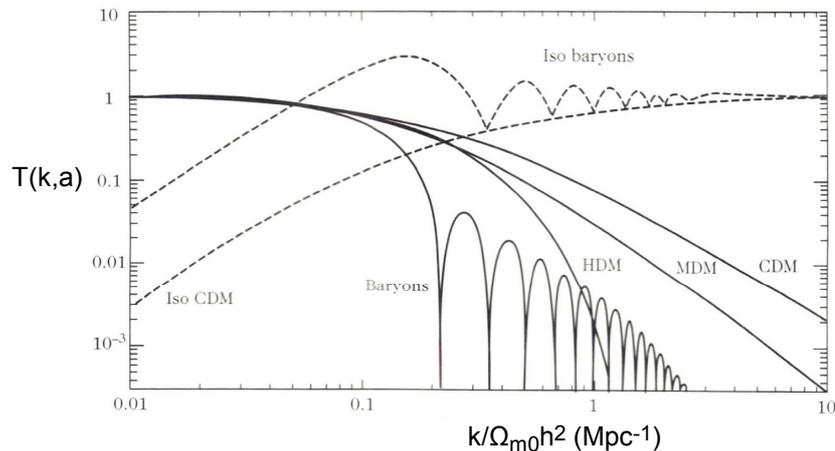


figure 7.4 : fonction de transfert pour les perturbations des différents composants de la matière (réf. [26])

Dans ces différents scénarios (fig. 7.4), le rôle de la matière exotique est déterminant, comme on l'a vu à la figure 7.3 : si la germination des structures est affectée par la CDM, le spectre de puissance $\tilde{W}_\varepsilon(k)$ est une fonction monotone de la masse M/M_\odot , proportionnelle à $\rho_\varepsilon(k)^3$. Les grandes structures (M/M_\odot élevé) qui entrent dans le rayon de Hubble avant le découplage ont leur spectre $\tilde{W}_\varepsilon(k) \propto k^4$ puisque $|\varepsilon_k|^2 \propto k$. Pour les structures plus petites ($M/M_\odot \leq 10^{16}$), si elles entrent en oscillations acoustiques, celles-ci ralentissent leur croissance qui s'arrête jusqu'au découplage et au-delà.

Si la germination est affectée par la HDM (masse d'environ 30 eV) ou par la MDM (masse d'environ 1 keV), puisque les neutrinos relativistes interagissent avec le rayonnement, la pression de celui-ci domine largement l'énergie gravitationnelle, et la puissance des fluctuations de densité diminue d'autant plus fortement que la masse initiale de la structure est petite : l'évolution du spectre $\tilde{W}_\varepsilon(k)$ avec M/M_\odot présente donc un maximum. Les masses correspondantes sont inférieures à celles des grands amas galactiques. Les structures se fragmentent en galaxies indépendantes, sur une durée relativement longue, et donc ces formations sont à des décalages z petits. Or l'observation montre des galaxies avec des z importants, ce qui laisse supposer que le scénario avec les HDM est improbable.

Resteraient alors le scénario CDM qui présente néanmoins des incohérences avec l'observation : grande quantité de structures observées à plusieurs centaines d'AL, vitesse propre des galaxies trop petite devant celles observées, incompatibilité avec l'ancienneté des galaxies et des quasars observés...

7.3 – Question de la causalité

Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que deux objets A et B puissent entrer en interaction, c'est-à-dire agir l'un sur l'autre, est qu'ils soient tous deux dans la même sphère causale (cf. (7.38)). À un instant cosmique t' , si la distance entre A et B, D_{AB} est supérieure au rayon de la sphère causale ($D_{AB} > 2ct'$), alors ces objets A et B ne peuvent ni interagir, ni avoir interagi. Ils pourront éventuellement le faire à des instants ultérieurs $t > t'$ compte tenu de l'expansion ; mais l'observation à la date t où ils interagissent ne pourra jamais montrer que A et B ont interagi à la date t' .

Pourtant, nous avons vu que l'émission du CMB a eu lieu au temps cosmique $t' \approx 10^5$ à 10^6 ans (plus exactement $372000 + 115000$ ans pour le découplage, soit 487000 ans), et donc où la sphère de causalité s'étendait sur $2ct' \approx 1$ million d'années-lumière, et que le CMB observé aujourd'hui (à $13,7$ milliards d'années) paraît isotherme, à $T_0 \approx 2,725$ K avec une anisotropie très faible de 10^{-6} K. Les atomes situés dans des sphères causales séparées n'ont pas pu entrer en interaction conduisant à une température identique des uns et des autres. Les sphères causales de 10^6 AL de diamètre « tapissent » la sphère céleste à une distance de $13,7$ milliards d'AL, tandis que leur distribution thermique est uniforme et isotrope. Le nombre de sphères causales indépendantes sur la sphère céleste est de l'ordre de $N_C = 4\pi R^2 / \pi R_C^2 = 4 \times (13,7 \cdot 10^9 / 10^6)^2 = 7,5 \cdot 10^8$. Elles ne se recouvrent pas sur la sphère céleste, et pourtant elles contiennent des atomes à la même température (figure 7.5).

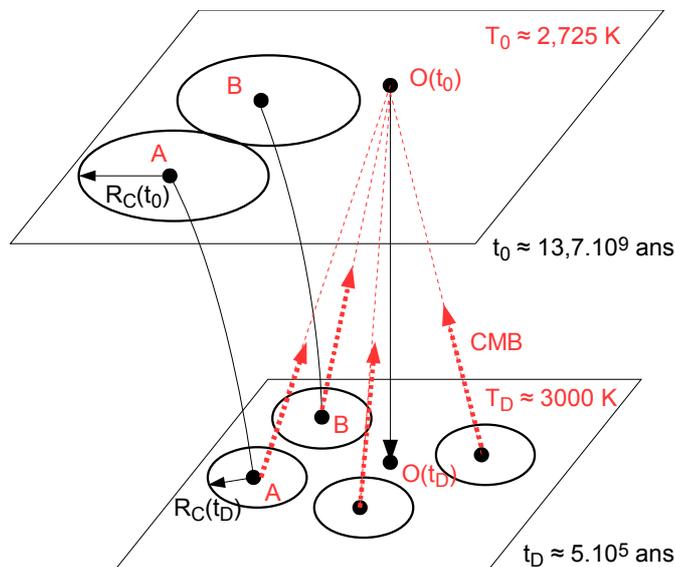


figure 7.5 : représentation de principe de l'isothermie des sphères de causalité à l'époque de l'émission du CMB, reprenant la figure 4.4b. Un très grand nombre de sphères disjointes ($\approx 10^9$) ont une distribution thermique uniforme et isotrope, alors que les interactions, se propageant à la vitesse c , n'ont pas eu le temps de les relier. Par exemple, pour les objets A et B, leurs sphères causales sont disjointes au temps du découplage, et commencent à se rencontrer, donc à pouvoir échanger des interactions, au temps actuel.

De cette uniformité thermique actuellement observée on déduit qu'elle existait aussi à l'époque de l'émission u rayonnement du CMB. En effet, l'expansion conserve la distribution thermique, le spectre de Planck (7.3) ; seule la valeur de la température est affectée par elle. La densité de photons par unité de volume varie avec la température selon (7.5) :

$$n_\gamma(T) \propto T^3 \quad \text{avec actuellement} \quad n_{\gamma 0} = n_\gamma(T_0) = 410,4 \text{ cm}^{-3}$$

On a vu que, à l'époque de l'émission du CMB, où sont formés les premiers atomes d'hydrogène, la température était de l'ordre de $T_D \approx 3 \cdot 10^3$ K. Puisque l'expansion est supposée adiabatique au moins depuis cette époque (et plus largement depuis la fin de l'inflation), on a : $a(t)T(t) = cste$ où

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} \quad \text{et donc une décroissance de la densité des photons selon} \quad n_\gamma \propto a^{-3} \quad . \text{ Ainsi dans (7.3),}$$

ramené à cette époque, on a :

$$T_D = \left(\frac{a_0}{a_D} \right) T_0 \quad (7.65)$$

sans modifier la forme la forme du spectre, avec donc, en ordre de grandeur $a_D \approx 10^{-3}$, $z_D \approx 10^3$, comme

vu auparavant.

Comment alors expliquer cette isothermie d'il y a quelque $13,7 \cdot 10^9$ ans alors que les sphères causales étaient séparées et indépendantes ? Une des réponses possibles est proposée dans la théorie de l'inflation, comme on l'a vu, mais elle n'a pas encore reçue de confirmation expérimentale.

7.4 – Question sur la durée de formation des galaxies en comparaison de l'âge présumé de l'univers

Tant que le rayonnement prédomine, les structures (gaz de particules) ont une masse inférieure à la masse Jeans, et ne parviennent pas à condenser sous l'effet de la gravitation. À cet effet de pression radiative il faut ajouter celui de l'expansion qui s'oppose à la condensation : l'expansion tend à étirer les structures et donc à diminuer leur densité. Avant le découplage matière-rayonnement, il faut donc beaucoup de temps pour que se forment des galaxies ou des gaz condensés d'où elles peuvent provenir. Une fois le découplage réalisé, c'est-à-dire lorsque les protons et les électrons, découplés du rayonnement, peuvent former des atomes, d'abord d'hydrogène, soit à une température $T_D \approx 3 \cdot 10^3$ K. Aux températures inférieures à T_D la condensation de matière peut commencer, lente au début car la gravitation est encore faible, puis accélérée car la condensation s'amplifie par un effet de rétroaction positive de la matière attirée par la gravitation engendrée par la structure. À partir d'une densité de la structure 10^6 fois plus grande que la densité du milieu environnant, la taille de la proto-galaxie, qui continuait de s'étendre par l'expansion, se stabilise, tandis que l'horizon cosmique continue d'augmenter linéairement avec le temps (figure 7.6).

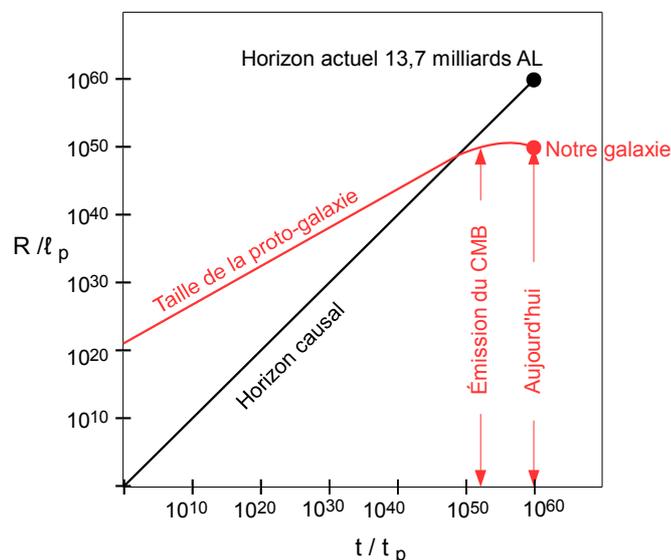


figure 7.6 : évolution d'une proto-galaxie jusqu'à notre galaxie actuelle, et de l'horizon causal

Le problème qui se pose est alors le suivant. Au début de la condensation, c'est-à-dire aux environs de la masse de Jeans, les surdensités augmentent lorsque la température du CMB diminue, comme l'indique (7.6) :

$$\varepsilon = \frac{\delta\rho}{\rho_0} \propto \frac{1}{T}$$

Au départ $T \approx T_D \approx 3 \cdot 10^3$ K tandis qu'aujourd'hui $T \approx T_0 = 2,725$ K : ε devrait alors augmenter d'un facteur d'environ $T_D/T_0 \approx 10^3$. Or ce n'est pas ce que les observations montrent : aujourd'hui $\varepsilon_0 \leq 10^{-5}$ alors que l'on devrait avoir 10^{-2} , auquel cas la formation des galaxies devrait être en cours et loin d'être terminée. De plus, on observe des galaxies déjà anciennes, à un âge d'univers de 10^9 ans, temps trop proche du découplage pour que leur formation soit achevée.

Quel processus a pu accélérer la formation des galaxies ? On sait qu'une piste de réponse possible est dans l'introduction de la « matière sombre » comme contributeur relativement abondant au fait que la densité d'énergie de l'univers est très proche de la densité critique ρ_c : $\Omega_0 \approx 1,003$ (tableau 2.1). La matière sombre, ou « matière exotique », serait constituée de neutrinos (HDM et CDM) mais surtout de particules encore inconnues.

À la figure 7.6 on voit que la taille de la structure préliminaire à une galaxie moyenne, telle que la nôtre (Voie Lactée), est plus grande que le rayon de la sphère de causalité. Celui-ci R_C croît plus vite que l'expansion. La vitesse de croissance de la proto-galaxie est cependant plus petite que celle de la

sphère de causalité car elle est soumise aux effets de la pression radiative et de l'expansion. Au moment de l'émission du CMB, vers 10^5 ans, la taille de la structure, donc sa masse, se stabilise et devient inférieure au rayon causal qui, lui, continue de croître régulièrement.

Un autre problème est alors que les germes de surdensités sont au-delà de la sphère de causalité et donc qu'aucune interaction n'a pu avoir le temps d'agir sur eux au point d'en faire une structure hétérogène. Et plus on remonte aux ères primordiales, plus ces particules de la future proto-galaxie sont en-dehors de la sphère de causalité qui est alors très petite : à l'âge de l'univers $t = 10^{-35}$ s, soit $t / t_p = 1,9 \cdot 10^8$ (avec temps de Planck $t_p = 5,3906 \cdot 10^{-44}$ s), le rayon causal est $R_C = 2ct = 6 \cdot 10^{-27}$ m, tandis que la taille de l'ensemble des particules de la future proto-galaxie est déjà $R = 10^{-5}$ m (soit $R/l_p = 6,2 \cdot 10^{29}$ où $l_p = 1,6161 \cdot 10^{-35}$ m est la longueur de Planck), il y a donc $(R/R_C)^3 = 4,6 \cdot 10^{63}$ sphères causales indépendantes dans le volume de la future proto-galaxie.

Alors, les fluctuations de surdensités primordiales qui donneront des proto-galaxies, puis des galaxies, peuvent-elles être produites par un processus causal commun ? Et si oui, comment le confirmer depuis les observations actuelles qui ne portent que sur une partie observable de l'univers ?

7.5 – Question sur la très faible courbure primordiale de l'univers

Aussi contre-intuitif que cela peut sembler, la courbure K de l'espace augmente avec le temps, il en est de même pour le facteur d'échelle $a(t)$ (cf. commentaires de la figure 4.4c). la courbure actuelle est toujours plus grande que celle dans le passé $t > t_0$, quelle que soit l'ère considérée : radiative, matérielle, découplage, et au-delà ; l'espace se dilate, le rayon de l'hypersurface, bien que faible, augmente mais le rayon de courbure $1/\sqrt{K}$ diminue !

Aux ères primordiales, la courbure était quasi-nulle, l'univers était pratiquement « plat ». La courbure est évaluée par le paramètre de courbure Ω_K :

$$\Omega_K = -\frac{K c^2}{H^2 a^2}$$

(rappel : dimension de K homogène à $[L^{-2}]$). L'équation (4.10c) s'écrit aussi, en négligeant l'effet de la constante cosmologique $\Omega_\Lambda \approx 0$:

$$\frac{d\Omega_K}{d \ln a} = (3w+1)(1-\Omega_K)\Omega_K$$

où l'on a utilisé $H = \dot{a}/a$ et donc $1/H dt = a/da = 1/d(\ln a)$, soit :

$$\frac{d\Omega_K}{(1-\Omega_K)\Omega_K} = (3w+1) d(\ln a) = \frac{d\Omega_K}{\Omega_K} - \frac{d(\Omega_K-1)}{\Omega_K-1}$$

qui s'intègre en :

$$\frac{\Omega_K}{\Omega_{K0}} \frac{\Omega_{K0}-1}{\Omega_K-1} = a^{3w+1} = \frac{1}{(1+z)^{3w+1}} \quad (\text{avec } a_0 = 1)$$

soit :

$$\Omega_K(z) = \frac{\Omega_{K0}}{(1-\Omega_{K0})(1+z)^{1+3w} + \Omega_{K0}} \quad (7.66a)$$

L'écart à la planéité $|\Omega_K|$ est directement reliée au paramètre de densité $\Omega = \rho/\rho_c$ où ρ densité totale de masse-énergie $\Omega = \Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda$; en effet, la densité critique (de masse) est définie pour une courbure nulle ($K = 0$) avec $\Lambda = 0$, ce qui donne par l'équation de Friedmann (4.8b) : $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$.

Remarquons que ρ_c n'est pas invariable : elle dépend directement de H donc de l'expansion, donc du temps. Pour $t = t_0$, $H = H_0$, on a donc environ $\rho_{c0} = 1,87837 \cdot 10^{-29} h_0^2$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$).

En faisant apparaître Ω dans l'équation de Friedmann par $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c$:

$$\rho - \rho_c = \frac{K}{a^2} \frac{3c^2}{8\pi G} = \rho_c (\Omega - 1)$$

il vient : $|\Omega - 1| = \frac{|K|}{a^2} \frac{3c^2}{8\pi G \rho_c} = \frac{|K|}{a^2} \frac{c^2}{H^2}$ c'est-à-dire, en se rappelant que la constante cosmologique n'a pas été prise en compte, et donc qu'elle est supposée déconnectée de la courbure :

$$|\Omega - 1| = |\Omega_K| \quad (7.66b)$$

où Ω_K est donné par (7.66a).

Le facteur d'échelle $a(t)$ et le paramètre de Hubble $H(t)$ dépendent du temps, ou de manière équivalente, de la température T , sous l'hypothèse d'une expansion adiabatique (ou isentropique) qui, rappelons-le, n'est pas valide pour la phase d'inflation, mais acceptable aux ères radiative, matérielle, découplage, émission du CMB. Donc ρ_c évolue aussi :

- à l'ère radiative : d'après (A2.14), $a(t) \propto t^{1/2}$, $T(t) \propto t^{-1/2}$: d'après (A2.13b) $H \propto T^2 \propto t^{-1}$ d'où : $a^2 H^2 \propto t t^{-2} = t^{-1} \propto T^2$ donc :

$$|\Omega - 1| = |\Omega_K| \propto T^{-2} \quad (7.66c)$$

Vers la fin de l'ère radiative, avec $z_{eq} \approx 3058$ et $w = 1/3$, (7.66a) donne $|\Omega_K| \leq 10^{-6}$, soit 10^5 fois plus petite que la courbure actuelle.

- à l'ère matérielle : d'après (7.21), $H \propto t^{-1} \propto T^{3/2}$, $a \propto t^{2/3} \propto T^{-1}$, $a^2 H^2 \propto T^3 T^{-2} = T$ d'où :

$$|\Omega - 1| = |\Omega_K| \propto T^{-1} \quad (7.66d)$$

- actuellement : $\Omega_0 = 1,003 (+0,013, -0,017)$, soit : $|\Omega_0 - 1| = |\Omega_{K0}| < 0,1$ en accord avec les observations.
- À l'émission du CMB : ($T \approx 3500$ K, $z \approx 1089 \pm 195$), $|\Omega_{CMB} - 1| = |\Omega_{KCMB}| \leq 10^{-3}$
- au découplage (avec $w = 1/3$) : $|\Omega_{eq} - 1| = |\Omega_{Keq}| \leq 3 \cdot 10^{-5}$
- à la nucléosynthèse primordiale (BBN) : $|\Omega_{BBN} - 1| = |\Omega_{KBBN}| \leq 10^{-17}$
- à l'ère de Planck, courbure quasi nulle : $|\Omega_p - 1| = |\Omega_{Kp}| \leq 10^{-61}$

En considérant donc, selon le modèle, qu'au « début » de l'univers la courbure est nulle, i.e. L'espace est « plat », $\Omega_p = 0$, on peut se demander pourquoi il cesse de l'être avec son expansion ? Une réponse possible est que, pour des états tels que $w \geq 0$, le point $\Omega_K = 0$ n'est pas stable. Le tableau 4.1 au [chapitre 4](#) donne le niveau de stabilité des différents points fixes où les quantités données par (4.10b) et (4.10c) sont nulles, et selon les valeurs de $\gamma = 1+w$, donc selon les valeurs de l'équation d'état w . Cependant, d'après le tableau 4.1, le point $\Omega_K = 0$ est un attracteur si $w < -1/3$, soit si $\gamma < 2/3$ (ce qui donne : $0 \leq \gamma < 2/3$ pour un espace de De Sitter où $\Omega_K = 0$ et $\Omega_\Lambda = 1$; ou bien : $\gamma < 0$ pour un espace d'Einstein-De Sitter où $\Omega_K = \Omega_\Lambda = 0$).

Ce critère d'instabilité ne répond pas, cependant, à la question de la causalité d'un univers « initialement » plat. Il montre seulement que l'univers reste quasiment plat tant que $w \geq 0$, c'est-à-dire l'univers est dominé par la matière et/ou le rayonnement tels qu'on les connaît.

La courbure augmentant avec le temps depuis sa valeur nulle au temps $t = 0$ (qui, rappelons-le, est le temps cosmique théorique du Big Bang, considéré comme expansion depuis une singularité cosmologique dont l'existence est encore à ce jour conjecturée), alors que le rayon spatial de l'univers (rayon de l'hypersurface espace de l'espace-temps) augmente, suggère une représentation pédagogique et simplifiée de la figure 7.7 en lieu et place de celle de la figuré 4.4b.

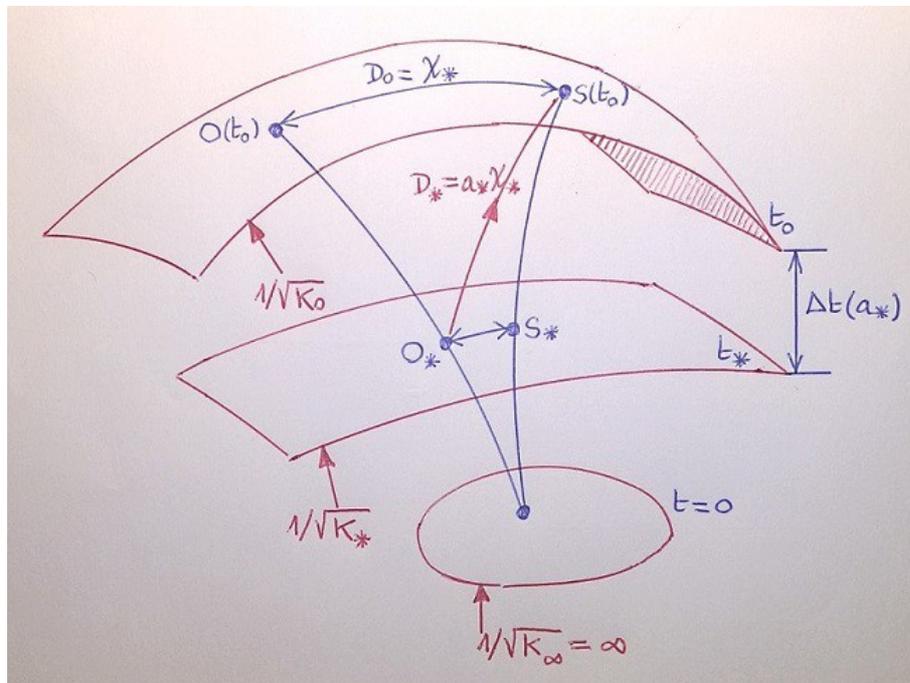


figure 7.7 : représentation simplifiée de l'évolution de la courbure de l'univers au cours de son expansion depuis la singularité $t = 0$ où la courbure est $K_\infty = 0$

Remarque : complément et rappel sur l'intervention du paramètre de Hubble H :

La distance suivant la métrique entre une galaxie (ou tout autre objet céleste) A et l'observateur O, au temps t est :

$$D(t) = a(t)r$$

r étant supposée fixe (pas de vitesse propre de la galaxie A), la vitesse d'éloignement de A par rapport à O est :

$$v = \frac{dD}{dt} = \dot{a}r = a \frac{\dot{a}}{a} \frac{D}{a} = H D$$

où $H = \frac{\dot{a}}{a}$ est le paramètre (ou « constante ») de Hubble au temps t . De $a = \frac{a_0}{1+z}$ il vient :

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{c} \frac{dD}{dt} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = \frac{1}{c} H D$$

Par exemple : une galaxie de décalage spectral vers le rouge $z = 4$ a une vitesse de récession due à l'expansion $v = 0,92c$.

Pour $z \ll 1$, on a $H \approx H_0$ soit : $D \approx \frac{c}{H_0} z = (15.10^9 \text{ AL}) z$.

On a vu en (4.7bis) le paramètre de décélération : $q = -a \ddot{a} / \dot{a}^2$ et d'après (4.9), actuellement :

$$q_0 = \frac{1}{H_0^2} \left[c^2 \frac{\Lambda}{3} - 4\pi G \left(\frac{\rho_0}{3} + \frac{P_0}{c^2} \right) \right]$$

q_0 intervient dans la formule de Mattig qui relie les paramètres du modèle cosmologique a_0 , a_* , r_* (* désignant l'époque et la distance d'une source d'émission dont l'image nous parvient actuellement à t_0)

aux observables cosmologiques z , H_0 , q_0 , avec $a_* = \frac{a_0}{1+z_*}$, on a :

$$(1+z_*)a_*r_*\frac{H_0}{c}=a_0r_*\frac{H_0}{c}=\frac{1}{q_0^2(1+z_*)^2}\left[q_0(1+z_*)+1-2q_0+(q_0-1)\sqrt{2q_0(1+z_*)+1-2q_0}\right]$$

7.6 – Question sur la longévité de l'univers par rapport aux unités de Planck

Les durées caractéristiques des systèmes dépendent des différentes énergies des interactions qui gouvernent leur dynamique. Dans la description de celles-ci, différentes constantes fondamentales, ainsi que leurs combinaisons, interviennent, notamment dans l'identification des échelles caractéristiques sur lesquelles la dynamique se déploie. Par exemple, pour une chute d'eau, parmi les constantes fondamentales il y a celle de la gravitation G , qui intervient, certes implicitement, dans le champ de pesanteur qui agit sur la chute, la constante de Boltzmann k_B qui intervient par l'intermédiaire des conditions thermodynamiques, le nombre d'Avogadro \mathcal{N} qui intervient dans les propriétés liées au fluide (densité, etc.), etc.

Mais il y a aussi les paramètres invariants d'échelle, souvent des nombres sans dimensions, tels que le nombre de Reynolds R_e qui est un rapport d'ordre de grandeur entre les effets dynamiques du fluide, sa géométrie et les effets de frottement, la viscosité, chacun de ces effets se ramenant in fine aux constantes fondamentales ou leurs combinaisons. Les paramètres invariants d'échelle s'introduisent naturellement dès lors que les variables dynamiques du problème (position, vitesse, longueur, durée, etc.) interviennent sous formes de grandeurs adimensionnelles, en référence à des échelles caractéristiques. Par exemple, pour la chute d'eau la variable dynamique « position verticale d'une particule de fluide » z pourra intervenir en comparaison avec la hauteur de chute H , ce qui donnera z/H , et non avec le diamètre de la Terre qui est a priori hors-échelle pour la description recherchée (mais des phénomènes plus complexes, ou plus détaillés, peuvent faire intervenir plusieurs échelles, comme c'est le cas, d'ailleurs, en cosmologie quantique). La durée caractéristique d'une chute d'eau n'est pas limitée dans l'hypothèse d'un comportement stationnaire, auquel cas la comparer avec un temps de référence – ou unité de temps – n'a pas de sens. En revanche, ce sont les dimensions de référence qui peuvent caractériser le système : par exemple, la hauteur de la falaise. Elle est concernée par la limite imposée à la continuité et à l'intégrité du phénomène : si H est très grand devant cette limite, l'écoulement de l'eau cessera d'être laminaire, le fluide, comme milieu continu, changera de structure en donnant lieu, par exemple, à des structures discontinues telles que les embruns, les brumes, les gouttes, qui entreront dans de nouveaux états thermodynamiques ou autres. La taille de la chute (épaisseur, longueur), en tant qu'écoulement laminaire et stationnaire, et au final la durée totale de son évolution dans la description lagrangienne, sera toujours dans un rapport fini avec H en quelques ordres de grandeur mais jamais dans la disproportion.

Qu'en est-il pour l'évolution de l'univers ? On a vu que, en l'état actuel de nos connaissances, elle procède de la gravitation (par la Relativité Générale), des processus quantiques (par la Physique Quantique et la Thermodynamique Statistique). La combinaison des constantes fondamentales présentes dans ces grands formalismes aboutit aux échelles de Planck dont il fut question à l'ère de Planck (point 6.2) : en particulier l'unité « naturelle » de temps en cosmologie devrait être le temps de Planck (6.2) :

$$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,391247 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

En vertu des principes épistémiques qui viennent d'être évoqués de manière heuristique, la « durée » de l'univers, ou le temps caractéristique des processus cosmologiques actuels, devraient ne pas excéder plusieurs ordres de grandeur de t_p .

Ce n'est pas le cas, loin s'en faut : l'âge estimé de l'univers est $t_0 \approx 13,7 \cdot 10^9$ années, soit en échelle de Planck :

$$t_0 / t_p \approx 8 \cdot 10^{60}$$

ce qui est énorme, et même hors-norme !

Ce constat est à corréler à celui des vitesses de récession des galaxies : elle est proche de leur vitesse d'échappement, c'est-à-dire la vitesse d'étirement de l'espace telle que l'action de gravitation des galaxies entre elles est insuffisante pour qu'elles se rapprochent. Rappelons que la vitesse d'échappement correspond à la densité critique de l'univers ρ_c , telle que l'énergie cinétique due à l'expansion est contrebalancée exactement par l'énergie potentielle de la gravitation :

$$\frac{GM^2}{D} = \frac{1}{2} M v^2$$

où D est le « rayon de l'univers », M masse de l'univers, v = HD vitesse de récession globale. Avec

$$M = \frac{4}{3} \pi D^3 \rho_c \text{ on obtient } \rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} = 1,87837 \cdot 10^{-29} h^2 (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}) .$$
 Or d'après les observations, la

densité totale de l'univers est très proche de la densité critique : $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} \approx 1,003$. On a vu que si

l'univers est de courbure nulle ($\Omega_K = 0$) alors sa densité est égale à la densité critique ($\Omega_0 = 1$). On observe que la courbure est faible, mais pas nulle, comme on l'a vu : $|\Omega_K| \approx 0,1$, tandis que la densité est quasi-critique : en conséquence l'âge de l'univers est suffisamment grand pour que la densité globale soit devenue proche de ρ_c , alors que sa courbure est encore finie. Et cet âge est démesuré par rapport à l'échelle de temps naturelle.

De sorte que la question de l'âge de l'univers rejoint celle de la courbure et de la valeur de la densité proche de la densité critique : pourquoi (par quelle causalité primordiale) l'âge de l'univers est-il si élevé par rapport à son unité naturelle ?

7.7 – Question sur l'absence apparente de rotation du cosmos

Les équations de la Relativité Générale appliquées à l'expansion du cosmos incluent l'existence éventuelle d'une rotation de l'espace, plus exactement une vorticité à la manière d'un fluide.

Cette notion de rotation du cosmos n'est pas à confondre avec celle d'une rotation propre : elle s'applique exclusivement à un référentiel d'observation inertiel où, par définition, il n'y a aucune accélération propre, de sorte que si l'espace était soumis à une rotation d'ensemble, on l'observerait dans ce référentiel à la manière du pendule de Foucault où le déplacement du plan d'oscillation met en évidence la rotation du référentiel lié à la Terre ⁽⁹⁾.

En relativité générale on montre que la dérivée covariante d'un champ de 4-vecteur dépendant d'un paramètre λ , $u^\mu(\lambda) = \frac{dx^\mu}{ds}$, où ds^2 est l'élément métrique (définit le temps propre $d\tau = ds/c$), se décompose en 4 composants :

$$\nabla_\mu u^\mu = -u_\mu \dot{u}^\mu + \frac{1}{3} \theta \gamma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad (7.67)$$

avec $\dot{u}^\mu = du^\mu/d\lambda$, $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, $\theta = \nabla_\mu u^\mu$ décrit la déformation isotrope de l'espace-temps (appelé expansion), $\sigma_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique (donc de trace nulle $\sigma_{\mu}^{\mu} = 0$) représentant le cisaillement, vérifiant $\sigma_{\mu\nu} u^\mu = 0$, qui décrit la déformation du flot géodésique de matière, et $\omega_{\mu\nu}$ est un tenseur, lui aussi antisymétrique, qui décrit la rotation du flot de matière appelé vorticité. Les amplitudes de cisaillement et de vorticité sont :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \text{ et } \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}$$

L'expansion est liée au facteur d'échelle a(t) par :

$$\frac{1}{3} \theta = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{H}{c}$$

ce qui implique que le volume d'un élément du « fluide cosmique » est proportionnel à $a(t)^3$ comme on l'a déjà vu. On montre que l'évolution de l'expansion, compte tenu de (7.67), est solution de l'équation de Raychauduri :

9 Sur le pendule de Foucault, voir par exemple [27]

$$\dot{\theta} = u^\nu \nabla_\nu (u_\mu \nabla u^\mu) = -\frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}^\mu \dot{u}_\mu + 2(\omega^2 - \sigma^2) - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (7.68)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$$

avec le tenseur de Riemann :

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma$$

où le symbole de Christoffel est défini par :

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\lambda\alpha} \Gamma_{\lambda\mu\nu}$$

qui intervient dans l'équation des géodésiques dans l'espace-temps muni de la métrique $g_{\mu\nu}$:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0$$

et $R_{\mu\nu}$ donne le scalaire de courbure (c'est pourquoi il s'appelle aussi le tenseur de courbure) :

$$\tilde{R} = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

En l'absence de vorticité, $\omega = 0$ pour tout temps t ( coulement irrotationnel), on montre pour les hypersurfaces d'espace de dimension 3, que la courbure vérifie l'équation de Friedmann généralisée :

$$\tilde{R}_{(3)} = -\frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 + 2R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (7.69)$$

En supposant que le fluide cosmique est parfait, on montre que la conservation de la matière dans l'univers se traduit par :

$$\dot{\rho} + (\rho + P/c^2)\theta = 0 \quad (7.70a)$$

qui est (4.8c), et que la dynamique du fluide est donnée par l'équation d'Euler :

$$(\rho c^2 + P) \dot{u}_\mu + \tilde{\nabla}_\mu P = 0 \quad (7.70b)$$

où $\dot{u}_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu$ est l'accélération, et $\tilde{\nabla}_\mu$ est la dérivée covariante 3D correspondant à la métrique spatiale $d\sigma^2$ qui apparaît dans (4.2). L'équation de Friedmann généralisée (7.69) devient alors :

$$\frac{6K}{a^2} = \tilde{R}_{(3)} = 2\kappa\rho_E - \frac{2}{3}\theta^2 + 2\sigma^2 + 2\Lambda \quad (7.71)$$

où K courbure spatiale, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, Λ constante cosmologique. Comme $\frac{\theta}{3} = \frac{H}{c}$ (7.71) devient :

$$\frac{K}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho_E + \frac{\Lambda}{3} - \left(\frac{H}{c}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{3} \quad (7.72)$$

qui donne l'équation de Friedmann (4.8b) en l'absence de cisaillement ($\sigma = 0$) et de rotation ($\omega = 0$).

Les observations (COBE) confirment l'absence de rotation du cosmos ; s'il y en avait une, l'observation montrerait une variation de la densité sur l'axe de rotation, ce qui n'est pas le cas. On pourrait supposer

que la période de rotation actuelle serait très élevée ($> 10^{11}$ années), et par la conservation du moment cinétique, en déduire qu'elle était beaucoup plus faible (rotation plus rapide) aux ères primordiales, par exemple au découplage (âge 10^5 ans) la période serait $> 10^6$ ans, impliquant des variations du CMB : or celles-ci ne sont pas observées.

Alors, quelle pourrait être la causalité de l'absence de rotation du cosmos dès les temps primordiaux ?

7.8 – Question sur la faible entropie de l'univers primordial

Aux temps primordiaux de l'univers, à l'ère de Planck (si elle existe), les 4 interactions fondamentales connues sont unifiées : gravitationnelle, électromagnétique, nucléaire faible, nucléaire forte. L'univers, avec une densité extrêmement élevée, et sous l'action de l'interaction unifiée, devait être un « fluide » homogène, muni d'une réserve d'énergie et d'une entropie initiales. Si l'on considère que l'univers est un système isolé, alors d'après le Second principe de la thermodynamique, son entropie devrait augmenter au cours du temps : $\Delta S \geq 0$. Après le début de l'expansion (si tant est qu'il y ait un sens de parler de « début ») l'énergie initiale est transformée en diverses formes d'énergie : thermique, radiative, gravitationnelle, nucléaire forte, nucléaire forte. Ces transformations sont sources de diversité, au sens de la théorie de l'information, et cet apport de diversité dans différentes régions de l'univers correspond à une diminution de l'entropie pour ces régions, ou néguentropie, qui participe au bilan de l'entropie globale qui, elle, doit toujours augmenter. Ceci implique une décomposition de l'entropie d'univers en une néguentropie et en une entropie complémentaire, associée aux milieux extérieurs aux structures qui sont le siège de processus néguentropiques :

$$\Delta S = \Delta S_{structures} + \Delta S_{milieux} \geq 0$$

avec $\Delta S_{structures} \leq 0$ et $\Delta S_{milieux} \geq 0$. La néguentropie concerne les structures en devenir comme les étoiles, les galaxies, les amas, les super-amas, etc., tandis que l'entropie des milieux est liée à l'expansion (dont on a vu que $S \propto a^3(t)$, aux rayonnements, etc.

Au cours de leurs vies, sous certaines conditions, les étoiles évoluent et s'effondrent lorsqu'elles ont dépassé leur masse de Jeans. Une proportion d'entre elles continuent de s'effondrer au lieu de se stabiliser en étoiles naines ou en étoiles à neutrons, et deviennent des trous noirs.

On montre que les trous noirs ont une entropie élevée. Bekenstein et Hawking ont montré que celle-ci est une entropie gravitationnelle et qu'elle est directement proportionnelle au carré de la masse du trou

noir, et donc à l'aire de la surface de l'horizon d'événement du trou noir A : $S \propto M^2 = \left(\frac{Rc^2}{2G}\right)^2 \propto R^2$ soit :

$$S \propto \frac{1}{4} A \quad (7.73a)$$

où M et R sont la masse et le rayon du trou noir ; S. Hawking a établi que la masse M est inversement proportionnelle à la température du rayonnement $M \propto 1/T$. Le trou noir émet donc un rayonnement rigoureusement thermique, qui est indépendant du processus de sa formation (problème de la perte d'information dans le trou noir) [17] [28], [29], [30]. C'est une source d'entropie importante qui contribue à l'accroissement de l'entropie d'univers.

Pourtant, en comparaison avec l'ancienneté du cosmos, la proportion de trous noirs est basse : l'entropie de l'univers augmente alors moins rapidement que prévu. Des trous noirs auraient pu se former très tôt, dès lors que les structures matérielles se formaient suite au découplage et après le début de l'ère matérielle. Mais s'ils étaient relativement peu massifs, ils ont pu s'évaporer comme le prédit la théorie. Restent alors les trous noirs massifs et super-massifs, normalement moins anciens (décalage z peu élevé). Mais ils sont en nombre insuffisant pour permettre une entropie d'univers élevée. Ainsi, l'entropie d'univers actuelle est faible, ce qui laisse supposer que l'entropie primordiale était encore plus faible.

Alors : pourquoi y a-t-il si peu de trous noirs par rapport à l'âge de l'univers, et pourquoi, par quelle causalité, une entropie initiale de l'univers si faible ?

On peut se rendre compte de l'importance du rôle de la gravitation, et en particulier des trous noirs, sur l'entropie d'univers, par rapport à celui du rayonnement (photons et neutrinos) :

L'entropie du rayonnement est proportionnelle à la densité des particules relativistes (photons, neutrinos, HDM) :

$$S_R \propto n_Y \quad (\text{relations (A2.6) et (A2.7)})$$

Pour l'univers observable actuellement on a : $S_R = 10^{88} k_B \approx 10^{65} \text{ J.K}^{-1}$. L'entropie gravitationnelle est produite principalement par les trous noirs. En utilisant la relation de Bekenstein-Hawking (7.73a) et les observations, on obtient pour un seul trou noir :

$$S_{BH} = 10^{77} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \quad (7.73b)$$

La masse totale de la matière ou de son équivalent en énergie est estimée actuellement à $10^{22} M_\odot$. Si elle est entièrement contenue dans un trou noir primordial – comme cela est envisagé dans certains modèles ⁽¹⁰⁾ – l'entropie gravitationnelle de l'univers serait : $S_G = 10^{77} \times (10^{22})^2 = 10^{121} k_B \approx 10^{98} \text{ J.K}^{-1}$.

Donc $S_G \gg S_R$, ce sont les trous noirs qui contribueraient le plus à l'entropie d'univers. Ils sont cependant relativement trop peu nombreux pour que l'entropie de l'univers soit grande.

À la phase d'inflation l'entropie augmente, comme on l'a vu : on n'a plus $aT = \text{cste}$. De part et d'autre de cette phase, l'expansion est isentropique : pour une température grande devant l'énergie des particules du champ scalaire $T > m_s$, on a $a(t) \propto t^{1/2}$ et donc $T \propto t^{-1/2}$; lorsqu'elle atteint $T \leq m_s$, on a :

$a(t) \propto \exp(t/\tau_s)$ l'expansion est exponentielle : début de l'inflation, et donc la température chute brutalement $T \propto \exp(-t/\tau_s)$ ⁽¹¹⁾ ; puis la phase n'est plus adiabatique. Ce changement de température entraîne une forte $\Delta S > 0$. Désignons par (i) le début de l'inflation, (f) la fin de l'inflation, alors le paramètre entropique est :

$$C(i, f) = \frac{a_f T_f}{a_i T_i} = \text{constante si adiabatique, variable sinon.}$$

À la fin de l'inflation, après réchauffement, on retrouve $T_f = T_i$ et donc $C(i, f) = a_f/a_i$, avant et après l'inflation sont dans le rapport $R_f = C(i, f)R_i = (a_f/a_i)R_i$, ce qui est cohérent avec les observations (figure 7.8).

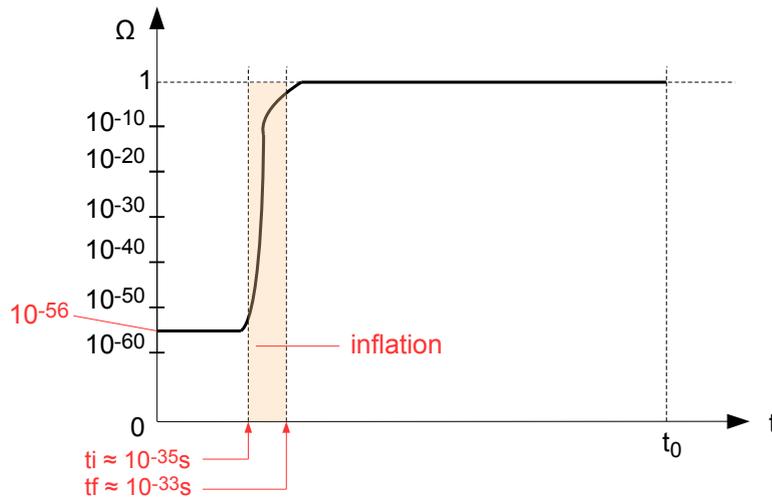


figure 7.8 : évolution de la densité, représentée par $\Omega = \rho/\rho_c$, dans le modèle comprenant l'inflation ; après celle-ci l'évolution suit le scénario de Friedmann-Lemaître

Remarque :

Rappelons que l'inflation, en tant qu'épisode non adiabatique, est une solution au problème de causalité lié à la très faible dimension de la sphère causale initiale $R_C \approx 10^{-33} \text{ cm}$ par rapport à celle de l'univers $R \approx 10^3 \text{ m}$.

L'inflation est aussi l'épisode où les interactions grandes-unifiées (GUT) se séparent : elle est associée à la brisure de symétrie de grande unification à $t \approx 10^{-35} \text{ s}$.

L'univers étant considéré comme un milieu homogène et isotrope lors de l'inflation, sa métrique peut être celle de Robertson-Walker :

10 Sur une étude critique des conséquences de cette hypothèse en matière de température et d'unités physiques, voir Jean-François Lahaeye [31], [32].

11 Où $\tau_s = (8\pi G \rho_s / 3)^{-1/2}$, $\tau_s / t_p = (m_p / m_s)^2$, $\tau_s = 10^{-35} \text{ s}$, $m_s = 10^{24} \text{ eV}$; à $t = 10^{-35} \text{ s} = \tau_s$ (début de l'inflation) on a $T = 10^{24} \text{ eV}$.

$$d s^2 = c^2 d t^2 - a(t)^2 \left[\frac{d r^2}{1 + K r^2} + r^2 (d \theta^2 + \sin^2 \theta d \varphi^2) \right]$$

7.9 – Question sur les monopôles

Cette question est liée à la formation de défauts topologiques de l'univers causée par son refroidissement.

Lors des phases initiales de l'univers les interactions non gravitationnelles étaient unifiées (GUT) : des champs scalaires étaient associés à l'interaction GUT, leurs bosons étant alors de spin 0. L'énergie de l'interaction était alors très élevée et l'interaction possédait une grande symétrie (son groupe de transformations n'est pas décomposable en groupes correspondant à des symétries particulières).

Suite à l'expansion, la température diminue et atteint une valeur critique T_{GUT} en-dessous de laquelle l'état de grande symétrie devient instable : la transition de phase marque alors le début de l'inflation cosmologique, les champs scalaires évoluent vers des états de plus basse énergie, conformément au Second Principe. Leurs nouvelles symétries ne sont plus associées au groupe G de l'ère GUT, mais sont associées aux groupes qui résultent de la brisure de G : pour les interactions non gravitationnelles on a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ⁽¹²⁾.

On montre que si G est simple, différents domaines de l'espace correspondent à des états de symétrie différente ; à leurs frontières (ou « murs domaniaux ») il existe des défauts topologiques, et aux points où ils se rencontrent il y a création de monopôles magnétiques, tandis que les lignes qui délimitent ces domaines correspondent aux « cordes cosmiques ». Il y a deux sortes de cordes cosmiques :

- les ouvertes, qui traversent les horizons cosmologiques,
- les fermées, ou boucles.

Leurs longueurs sont très élevées : 10^6 à 10^9 AL. L'observation des cordes cosmiques, qui repose sur les variations de température du CMB qu'elles génèrent, n'a pas encore confirmé leur existence.

Pour préciser ces notions, voici un exemple :

Considérons un champ scalaire Φ , tel que celui donné en [Annexe 1](#) pour l'épisode inflationnaire ; son potentiel d'auto-interaction $V(\Phi)$ est tel qu'il minimise l'action et est donc de la forme (A1.1) :

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \alpha m^2 \Phi^2$$

Pour un même potentiel les champs scalaires possibles sont donc $\pm\Phi$. Certains domaines de l'espace correspondent à $+\Phi$ et d'autres à $-\Phi$, leurs sphères causales sont initialement disjointes, et la distribution de ces domaines est statistique. Si un domaine passe de $+\Phi$ à $-\Phi$ lors d'une transition de phase (due par exemple à un changement de la température), des défauts topologiques apparaissent.

Plusieurs domaines de champs $\pm\Phi$ se trouvent inclus dans la même sphère causale qui s'étend au cours du temps. Ils sont alors capables de s'influencer, certains domaines pouvant basculer de $+\Phi$ à $-\Phi$, ou de $-\Phi$ à $+\Phi$. Les hypersurfaces qui séparent deux domaines voisins sont appelés « murs domaniaux ». Lors des transitions, le champ passe de $-\Phi$ à $+\Phi$ (ou vice versa) en passant par le champ nul 0. Bien que $V(\Phi)$ reste inchangé pour ces deux états $\pm\Phi$, en $\Phi = 0$ le potentiel ne vérifie plus la relation ci-dessus mais prend une valeur élevée : les murs domaniaux contiennent une grande énergie. En effet, lors de la transition de phase, si elle est brutale, les domaines n'ont pas eu le temps de libérer leur énergie pour avoir le même champ scalaire : cette énergie non libérée se trouve alors concentrée aux murs domaniaux.

Les murs domaniaux en $\Phi = 0$ correspondent à l'état dit du « faux vide », car l'énergie n'y est pas minimale. Les domaines où le champ est $+\Phi$ ou $-\Phi$ correspondent à l'état dit du « vrai vide » parce que le potentiel $V(\Phi)$ est associé à une énergie minimale.

Les murs domaniaux sont alors dimensionnés de telle sorte que leur énergie, qui est élevée, soit d'une densité minimale. Leur épaisseur répond à cette exigence : suffisamment petite pour contenir une énergie localement minimale, mais suffisamment longue pour que la densité d'énergie cinétique soit petite afin de minimiser sa contribution à l'énergie totale. La variation du champ de $-\Phi$ à $+\Phi$ (ou vice versa) est donc progressive sur cette épaisseur optimale (figure 7.9).

12 Sur une présentation introductive de ces notions de groupes de symétrie, voir par exemple [\[22\]](#).

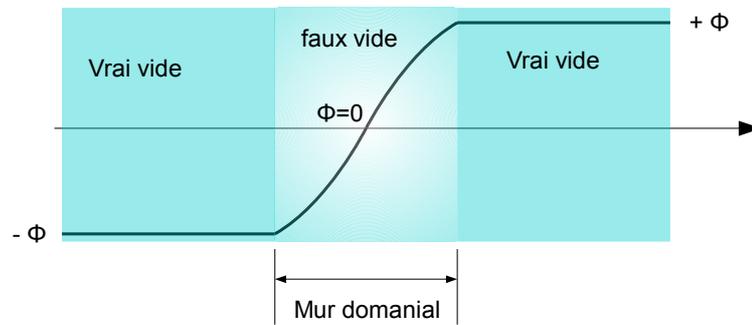


figure 7.9 : murs domaniaux, défauts topologiques

La densité d'énergie du champ scalaire est liée à la masse m_s du boson scalaire associé par :

$$\rho_E = C_s(T) m_s^4$$

À la transition GUT, vers $t_{GUT} \approx 10^{-35}$ s, ρ_E a une valeur énorme : $\rho_E \approx 10^{110}$ eV.cm⁻³. L'épaisseur des murs domaniaux est égale à la longueur d'onde de Compton des particules scalaires :

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_s c} = 10^{-31} \text{ m}$$

Avec cette épaisseur, 1 cm² de surface d'un mur domanial correspond à un volume de $10^{-31} \times 10^{-4} = 10^{-35}$ m³ contenant une énergie égale à $10^{110} \times 10^6 \times 10^{-35} = 10^{81}$ eV = $1,6 \cdot 10^{62}$ J $\approx 1,78 \cdot 10^{45}$ kg, c'est-à-dire environ 9000 galaxies comme la nôtre, la Voie Lactée !

Toute la matière de l'univers pourrait être contenue dans un mur domanial d'à peine 100 m².

De tels objets, situés dans notre sphère causale, devraient être observables de par les énormes perturbations qu'ils apporteraient sur la structure et la dynamique du cosmos. Ce n'est pas le cas. Leur inobservabilité laisserait alors supposer qu'ils n'ont pas été concernés par l'expansion, ou bien que lors de l'inflation ils ont été propagés bien au-delà de notre sphère causale actuelle.

L'absence de murs domaniaux implique l'absence de monopôles magnétiques. À la brisure de symétrie à t_{GUT} , la température devrait être de l'ordre de $T_{GUT} \approx 10^{16}$ GeV (10^{29} K), et la masse des monopôles produits de l'ordre de $M_{\text{monopôle}} \approx k_B T_{GUT} / c^2 \approx 10^{16}$ GeV ($1,8 \cdot 10^{-11}$ kg) soit 10^{16} fois la masse d'un nucléon !

Si l'on suppose que les monopôles sont en interaction uniquement à l'intérieur de la sphère causale, dont le rayon est environ $2ct$, leur densité particulaire est de l'ordre de :

$$n_{\text{monopôle}} \propto \frac{1}{(2ct_{GUT})^3} \quad (7.74)$$

et donc leur densité d'énergie :

$$\rho_{E \text{ monopôle}} \propto n_{\text{monopôle}} M_{\text{monopôle}} c^2 \approx 10^{88} \text{ GeV.cm}^{-3}$$

À la brisure de symétrie, l'ère est radiative, t_{GUT} et T_{GUT} sont donc reliés par (A2.14bis) :

$$t_{GUT}(\text{s}) \approx \left(\frac{3c^3}{4\pi G \sigma g_*} \right)^{1/2} T_{GUT}^{-2}$$

On obtient alors le paramètre de densité des monopôles : H et T sont reliés par (A2.13b) en régime radiatif

$$H_{GUT} = \frac{8\pi G}{3c^3} \sqrt{2\sigma g_*} T_{GUT}^2$$

d'où :

$$\Omega_{\text{monopôle}} = \frac{\rho_{\text{monopôle}}}{\rho_{c \text{ GUT}}} = \frac{\rho_{\text{monopôle}}}{3H_{GUT}^2} 8\pi G$$

La température des bosons scalaires est une fonction de T_{GUT} (g_* dépend de T_{GUT}), la théorie des transitions de phase montre alors que :

$$\Omega_{\text{monopôle}} h^2 \propto T_{GUT}^3 M_{\text{monopôle}}$$

soit :

$$\Omega_{\text{monopôle}} h^2 \propto 10^{17} \left(\frac{T_{GUT}}{10^{16} \text{ GeV}} \right)^3 \left(\frac{M_{\text{monopôle}}}{10^{16} \text{ GeV}} \right) \quad (7.75)$$

7.10 – Question sur la très faible valeur du nombre baryonique : matière noire et énergie sombre

■ La matière se répartit en 3 familles, au stade des connaissances et des modèles actuels :

- La matière dont les symétries sont décrites dans le modèle standard des particules : elle représente 5% de la matière totale de l'univers (voir par exemple [33]).
- La matière noire (ou masse sombre), non baryonique et non relativiste, représente $23 \pm 3\%$ de la matière totale. Elle ne se manifeste pas par son champ de gravité. Elle contribuerait fortement à la création de germes de galaxies. On a vu, en effet, que l'ancienneté des galaxies, par rapport à l'âge de l'univers, pourrait s'expliquer par ce scénario. Mais à ce jour aucune preuve observationnelle définitive ne le confirme.
- L'énergie sombre : c'est une hypothèse qui pourrait expliquer l'expansion importante de l'univers depuis au moins l'inflation, donc l'âge relativement élevé de l'univers, et sa très faible courbure, questions évoquées plus haut. L'énergie sombre représente $72 \pm 3\%$ de la matière totale. Sa contribution pourrait être associée à la constante cosmologique. Celle-ci serait une action du vide quantique, ce qui implique que sa densité devrait être de l'ordre de celle correspondant au moins à la brisure électrofaible. La constante cosmologique Λ regroupe les densités d'énergie (de rayonnement ρ_γ , des neutrinos ρ_ν) qui ont une action répulsive sur l'expansion :

$$\Lambda = \kappa \rho_\Lambda \quad (7.76)$$

où ρ_Λ regroupe les densités d'énergie sombre.

■ De l'équation de Friedmann (4.8b) on obtient le paramètre de densité (ou tout simplement « densité ») d'énergie totale de l'univers, et d'après les données actuelles il vaut :

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda \approx 1,003$$

(4.8b) et (7.66b) donnent encore :

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_K = 1 \quad (7.77)$$

avec $\Omega_\Lambda = c^2 \frac{\Lambda}{3H^2}$, $\Omega_K = -\frac{Kc^2}{H^2 a^2}$, $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM}$ où Ω_b densité de la matière baryonique,

Ω_{CDM} densité de la matière noire froide (CDM), Ω_m étant la densité de la composante matérielle pour laquelle l'équation d'état est $w = 0$; $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$ où Ω_r densité de la composante radiative pour laquelle l'équation d'état est $w = 1/3$, Ω_γ densité des photons, Ω_ν densité des neutrinos.

Rappel : les observations donnent actuellement :

- $\Omega_m \approx 0,127 h_0^{-2}$
- $\Omega_b \approx 0,0223 h_0^{-2}$
- $\Omega_{CDM} \approx 0,105 h_0^{-2}$
- $\Omega_\gamma \approx 2,471 \cdot 10^{-5} h_0^{-2}$
- $\Omega_\nu < 0,007 h_0^{-2}$
- $\Omega_\Lambda \approx 0,76$

■ La relation (7.77) fixe une contrainte sur la densité d'énergie sombre :

$$\Omega_\Lambda = \frac{1}{c^2} \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \leq 1 \quad (7.78)$$

où ρ_c est la densité critique à l'ère considérée, donc varie avec H . (7.78) est actuellement satisfaite puisque $\Omega_\Lambda \approx 0,76$.

La contrainte (7.78) est-elle compatible avec la condition de brisure électrofaible (WS) ? On montre en

théorie quantique des interactions électrofaibles que cette limite est proportionnelle à m_s^4 , où m_s est la masse de la particule du champ scalaire, et que, à l'ère de cette brisure de symétrie on a :

$$\rho_{WS}/\rho_c \approx 10^{58} \text{ avec actuellement : } \rho_c \approx 1,05369 \cdot 10^{-5} h_0^2 (\text{GeV}/c^2 \cdot \text{cm}^{-3}) \text{ d'où } \rho_{WS} \approx (10^3 \text{ GeV})^4$$

$$\Omega_\Lambda \approx 0,76 \text{ donne pour la densité associée à la constante cosmologique : } \rho_\Lambda \approx (10^{-3} \text{ eV})^4 \text{ on a donc :}$$

$$\rho_{WS}/\rho_\Lambda \approx 10^{60} .$$

Il existe donc une sérieuse difficulté à intégrer dans le modèle standard de la théorie quantique des particules, les particules et les champs de l'énergie noire : c'est le « problème de la constante cosmologique ».

- Noter que le nombre baryonique de l'univers est extrêmement faible : $\frac{n_b}{n_\gamma} \approx 4,7 \cdot 10^{-10}$ à $6,5 \cdot 10^{-10}$ avec, comme on l'a vu : $n_\gamma \approx 410,5 (\text{cm}^{-3})$ et $n_b \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$ à $2,7 \cdot 10^{-7} (\text{cm}^{-3})$.

■ Signalons enfin le « problème de coïncidence » :

Actuellement les composantes CDM et l'énergie sombre sont dominantes dans l'univers (voir valeurs de $\Omega_\Lambda + \Omega_{\text{CDM}}$). Pourtant, au cours du temps cosmique, ces densités n'ont pas cessé de diminuer dans des proportions importantes lors des différentes transitions de phase ou ruptures de symétrie (figure 7.10) :

- à la transition de rupture GUT l'énergie requise est $10^{112} \rho_c \approx 10^{15} \text{ GeV} \cdot \text{cm}^{-3}$, où l'on rappelle que ρ_c change aux différentes ères ⁽¹³⁾.
- À la transition de rupture électrofaible (WS) on a vu que $\rho_{WS} \approx 10^{58} \rho_c$. C'est la densité d'énergie entre le faux vide à haute température et le vrai vide à basse température.
- La transition quark-hadron (QH) a lieu à $T = 10^{12} \text{ K} = 10^8 \text{ eV}$, ce qui correspond à une densité d'énergie $\rho_{QH} = 10^{44} \rho_c$.

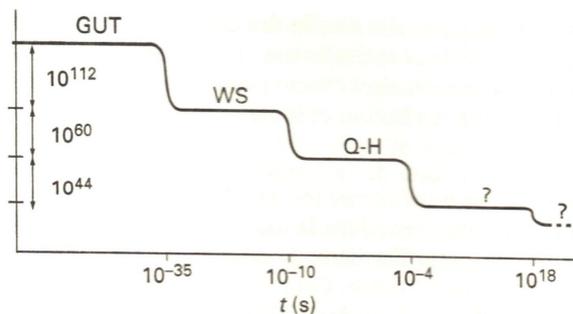


figure 7.10 (réf. [20]) : évolution des densités d'énergie des champs scalaires associées aux différentes transitions de phase (ruptures de symétrie) : transition de grande unification des interactions électromagnétique, nucléaires faible et forte (GUT), transition électrofaible (WS), transition quark-hadron (QH). La densité d'énergie en ordonnée est en unités ρ_c en $\text{GeV} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Ces variations des densités d'énergie par rapport aux densités critiques lors des différentes transitions de phase où interviennent les champs scalaires sont énormes, alors qu'aux âges « récents » de l'univers elles convergent vers des valeurs du même ordre.

Au-delà du cadre du CDM et de l'énergie sombre, et en considérant les autres composantes de l'énergie, on note aussi que dans (7.77) les paramètres de densité actuels sont dans des rapports ajustés tels que $\Omega_\Lambda \leq 1$. On a en effet :

$$\frac{\Omega_\gamma}{\Omega_b} \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \approx 1,86 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \left(\frac{10^{-3}}{1} \times \frac{5}{14} \right)$$

autrement dit la suite de rapports :

$$2 \times (\Omega_\gamma : \Omega_b : \Omega_m : \Omega_\Lambda) = 10^{-3} : 1 : 5 : 14 \quad (7.79)$$

13 Rappel : le fait d'utiliser eV ou GeV comme unités permet d'omettre c^2 dans les égalités.

On remarque aussi, pour l'ensemble des paramètres de densité, y compris celui de la courbure, contraints par (7.77), on a :

$$\Omega_{\Lambda} + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_K = 1 = \frac{1}{2} \Omega_m \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_m} \right) + \frac{1}{2} \Omega_r \left(1 + \frac{\Omega_m}{\Omega_r} \right) + \frac{1}{2} \Omega_r \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_r} \right) + \Omega_K$$

Or on a les rapports :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_m} &\approx 2 \times 3 \\ \frac{\Omega_m}{\Omega_r} &= \frac{\Omega_m}{\Omega_y + \Omega_v} \approx 2 \times 3^2 \\ \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_r} &= \frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_y + \Omega_v} \approx 2^2 \times 3^3 \end{aligned} \right| \quad (7.80)$$

d'où :

$$\Omega_m (1 + 2 \times 3) + \Omega_r (1 + 2 \times 3^2) + \Omega_r (1 + 2^2 \times 3^3) + 2 \Omega_K = 2$$

soit avec (7.80) :

$$\Omega_K = 1 - \Omega_r (1 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^3) \quad (7.81)$$

Numériquement, avec $\Omega_r = \Omega_y + \Omega_v = 2,471 \cdot 10^{-5} + 0,007$ il vient $\Omega_K \approx 0,1$ comme il se doit.

Il intervient donc dans la contrainte (7.77) sur les densités une série limitée de combinaisons : $2^n \times 3^{n+1}$, où $n = 1, 2$. On peut imaginer que le passage à une courbure négative correspond à une valeur de $n > 2$, avec donc des termes supplémentaires dans la série limitée (7.81), ce qui pourrait correspondre à l'intervention de densités d'énergie de nouvelle sorte.

En conclusion, comment, par quelle causalité primordiale, s'explique alors cet arrangement des paramètres de densité pour la matière, l'énergie sombre et la courbure ?

*
* *

Annexe 1 : Un modèle d'inflation chaotique avec un champ scalaire

Le modèle d'inflation chaotique se base sur l'hypothèse d'un univers où des domaines ont un champ scalaire distribué au hasard. Les domaines où le champ Φ initial, à l'instant t_i , est suffisamment grand et dont la durée d'inflation est longue contribuent à une expansion de l'univers avec une courbure spatiale quasi-nulle (univers quasi-plat).

Le modèle à champ scalaire le plus simple pose que son potentiel d'auto-interaction est massif libre :

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \alpha m^2 \Phi^2 \quad (A1.1)$$

où m est la masse de la particule du champ scalaire (boson scalaire), le facteur α permet une analyse dimensionnelle cohérente portant sur $V(\Phi)$, m^2 et Φ^2 ; en effet dans la relation (6.4) :

$$\rho_E = \frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}^2}{c^2} + V(\Phi)$$

ρ_E est la densité d'énergie, de dimension $[ML^{-1}T^{-2}]$, qui est donc celle de $V(\Phi)$, il s'ensuit que Φ a pour dimension $[M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}]$. De (A1.1) il vient donc que α a pour dimension $[L^{-2}M^{-2}]$, et l'on pose $\alpha = \frac{1}{M^2 L^2}$

où M et L sont des constantes de dimension respective masse et longueur, qui pourraient être la masse de Planck m_p et la longueur de Planck l_p . Les équations d'évolution du champ et de l'expansion adoptées sont celles de Friedmann (6.7a) et (6.7b), où la courbure est quasi nulle $K \approx 0$:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} + \frac{3H}{c^2} \dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (\text{A1.2a})$$

$$\frac{1}{c^2} H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \Phi^2 + V \right) \quad (\text{A1.2b})$$

où d'après (A1.1) : $\frac{dV}{d\Phi} = \alpha m^2 \Phi$.

Par hypothèse le champ initial, donc le potentiel, est très grand : $\Phi \gg 1$, ce qui implique $H \gg 1$, donc (A1.2a) devient :

$$3H\dot{\Phi} + c^2 \alpha m^2 \Phi = 0 \quad (\text{A1.3})$$

Par ailleurs, la condition (6.6b) de roulement lent, $\dot{\Phi}^2 \ll V(\Phi)$ conduit à l'approximation pour (A1.2b) :

$$\frac{H^2}{c^2} \approx \frac{\kappa}{3} V(\Phi) \quad (\text{A1.3bis})$$

où $\kappa = 8\pi G/c^4$. On a donc :

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3} \frac{1}{c^2 L^2} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \Phi^2 \quad (\text{A1.4})$$

(A1.3) et (A1.3bis) donnent l'évolution du facteur d'échelle et du potentiel en fonction du temps cosmique pendant l'inflation. En effet (A1.4) devient :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \frac{1}{cL} \left(\frac{m}{M} \right) \Phi \quad (\text{A1.4bis})$$

que l'on remplace dans (A1.3) d'où :

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \frac{c^2}{\sqrt{12\pi G}} \frac{m}{M} \frac{c}{L}$$

qui s'intègre entre t_i et $t < t_f$, en :

$$\Phi(t) = \Phi_i - \sqrt{\frac{c^4}{12\pi G}} \frac{m}{M} \frac{c t}{L} \quad (\text{A1.5})$$

(A1.4bis) donne :

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \frac{m}{c^4 M} \Phi \frac{c dt}{L}$$

et d'après (A1.5) : $c dt = - \sqrt{\frac{12\pi G}{c^4}} \frac{M}{m} L d\Phi$ que l'on remplace dans l'expression de da/a ci-dessus,

ce qui donne après intégration : $\ln \frac{a}{a_i} = \frac{4\pi G}{c^4} (\Phi_i^2 - \Phi^2)$ soit :

$$a(t) = a_i \exp \frac{\kappa}{2} (\Phi_i^2 - \Phi(t)^2) \quad (\text{A1.6})$$

Posant $B = \sqrt{\frac{c^4}{12\pi G}} \frac{m}{M} \frac{c}{L}$ dans (A1.5) il vient :

$$\Phi_i^2 - \Phi^2 = -B^2 t^2 + 2\Phi_i B t \approx 2\Phi_i B t$$

ce qui donne l'évolution exponentielle de l'expansion de la forme (6.21a) :

$$a(t) = a_i \exp(t/\tau) \quad (\text{A1.7})$$

avec :

$$\tau = \frac{1}{2\Phi_i B} \quad (\text{A1.7bis})$$

Dans la théorie de l'inflation on considère un des paramètres de roulement lent :

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{A1.8})$$

et l'on montre que la condition de roulement lent (6.11) et (6.11bis) conduit à $\varepsilon < 1$. (A1.4bis) donne :

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \frac{1}{cL} \frac{m}{M} \dot{\Phi}$$

et avec (A1.5) et (A1.4), (A1.8) s'écrit finalement :

$$\varepsilon = \frac{2}{\kappa} \frac{1}{\Phi^2} \quad (\text{A1.9})$$

C'est la fin du roulement lent lorsque $\varepsilon \approx 1$ soit pour un champ, d'après (A1.9) :

$$\Phi_f \approx \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \quad (\text{A1.10})$$

On montre que le nombre de e-folds $N(t_i, t_f)$ défini par (6.12) s'exprime avec l'inflation par :

$$N(t_i, t_f) = -\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \frac{d\Phi}{\sqrt{\varepsilon}}$$

qui donne, avec (A1.9) : $N(t_i, t_f) = -\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \Phi d\Phi = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} \Phi_i^2 - \frac{1}{\kappa} \right)$ soit :

$$N(t_i, t_f) = \frac{\kappa}{4} \Phi_i^2 - \frac{1}{2} \quad (\text{A1.11})$$

Le roulement lent dure tant que $\Phi > \Phi_f = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$.

La condition (6.15) entraîne alors que le potentiel libre $V(\Phi)$ donné par (A1.1) soit suffisamment grand, donc pour le champ initial :

$$\Phi_i \geq \left(4 \times \frac{69 + 1/2}{\kappa} \right)^{1/2} = \frac{16}{\sqrt{\kappa}} .$$

*
* *

Annexe 2 : Thermodynamique à l'équilibre et hors équilibre

On considère des particules de densité particulaire n_A en interaction mutuelle selon un taux d'interaction :

$$\Gamma_A = n_A \langle \sigma_A v_A \rangle$$

σ_A est la section efficace de l'interaction, v_A la distribution des vitesses des particules.

A2.1 – Équilibre radiatif

■ Si $\Gamma_A \gg H$, c'est-à-dire si le taux de réaction est plus grand que l'expansion, les particules, au cours de leur interaction, sont à l'équilibre thermodynamique, donc à une température commune T .

Si les particules d'espèce $n^\circ A$ sont des fermions, elles suivent la statistique de Fermi-Dirac dont la fonction de distribution est :

$$f_A(\mathbf{p}, T) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E(T) - \mu_A}{k_B T_A}\right) + 1}$$

Si elles sont des bosons, la statistique est de Bose-Einstein et a pour fonction de distribution :

$$f_A(\mathbf{p}, T) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E(T) - \mu_A}{k_B T_A}\right) - 1}$$

où g_A est le facteur de dégénérescence (ou nombre effectif de degrés de liberté), μ_A est le potentiel chimique, T_A est la température des particules d'une même espèce $n^\circ A$ qui interagissent entre elles, et

$$E(T) = \mathbf{p}^2 c^2 + m_A^2 c^4, \quad \mathbf{p} \text{ étant la quantité de mouvement (14).}$$

Toujours si $\Gamma_A \gg H$ pour l'espèce $n^\circ A$, les particules qui interagissent avec les photons sont à la température des photons : dans ces conditions la température des photons est la température d'univers, et comme l'indique (6.10), l'entropie d'univers est donc directement reliée à la densité des photons n_γ .

On détermine les conditions sous lesquelles l'entropie est conservée au cours de l'expansion, ce qui correspondra à une relation entre la densité d'entropie et la température. Pour cela on va montrer que :

$$d(\tilde{S} a^3) = -\frac{\mu}{T} d(n a^3) \quad (\text{A2.1})$$

où n densité particulaire (des bosons ou fermions), μ potentiel chimique.

Remarque : analyse dimensionnelle de ces grandeurs :

Entropie S : énergie / température $[S] = [\text{ML}^2 \text{T}^{-2} \Theta^{-1}]$

Densité d'entropie \tilde{S} : entropie / volume $[\tilde{S}] = [\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2} \Theta^{-1}]$

Densité particulaire n : nombre de particules / volume $[n] = [\text{L}^{-3}]$

Potentiel chimique μ : variation d'énergie / variation du nombre de particules $[\mu] = [\text{ML}^2 \text{T}^{-2}]$

Preuve de (A2.1) :

On sait, en thermodynamique, que la variation de la pression P avec la température T est donnée par l'équation :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\rho_E + P}{T} + n T \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu}{T} \right) \quad (\text{A2.2})$$

Avec $H = \dot{a}/a$ et l'équation de Friedmann (4.8c) qui devient $\dot{\rho}_E + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_E + P) = 0$ on obtient la

variation élémentaire de l'énergie $d(\rho_E a^3) = \dot{\rho}_E a^3 dt + 3 \rho_E a^2 \dot{a} dt = -3 \dot{a} a^2 P dt$ soit :

$$d(\rho_E a^3) = -P da^3 \quad (\text{A2.3})$$

La densité d'entropie est :

14 Voir par exemple [34].

$$\tilde{S} = \frac{\rho_E + P - n\mu}{T} \quad (\text{A2.4})$$

donne la variation d'entropie, en utilisant (A2.3) :

$$\begin{aligned} d(\tilde{S} a^3) &= d\left(\frac{\rho_E a^3}{T}\right) + d\left(\frac{P a^3}{T}\right) - d\left(\frac{n\mu a^3}{T}\right) \\ &= a^3 \frac{dP}{T} - \frac{dT}{T^2} (\rho_E + P) a^3 - d\left(\frac{\mu}{T}\right) n a^3 - \frac{\mu}{T} d(n a^3) \end{aligned}$$

et de (A2.2) on obtient :

$$d\left(\frac{\mu}{T}\right) = \left(dP - \frac{\rho_E + P}{T} dT\right) \frac{1}{nT}$$

qui injecté dans l'expression $d(\tilde{S} a^3)$ précédente donne :

$$d(\tilde{S} a^3) = a^3 \frac{dP}{T} - (\rho_E + P) a^3 \frac{dT}{T^2} - \frac{dP}{nT} n a^3 + \frac{\rho_E + P}{T} n a^3 \frac{dT}{nT} - \frac{\mu}{T} d(n a^3) = -\frac{\mu}{T} d(n a^3)$$

CQFD de (A2.1).

(A2.1) montre que l'évolution est isentropique, $d(\tilde{S} a^3) = 0$, si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

- Le nombre de particules est constant, il n'y a pas de particules créées ou détruites au cours des interactions :

$$d(n a^3) = 0 \quad (\text{A2.5a})$$

- Les particules sont relativistes :

$$\frac{\mu}{T} \ll 1 \quad (\text{A2.5b})$$

En régime isentropique $\tilde{S} a^3 = cste$ et $aT = cste$, d'où la relation entropie-température :

$$\tilde{S} = cste \times a^{-3} = cste \times T^3$$

Plus précisément on a :

$$\tilde{S} = \frac{k_B^4}{(c\hbar)^3} \frac{2\pi^2}{45} q_* T^3 = \frac{8}{3} \frac{\sigma}{c} q_* T^3 \quad (\text{A2.6})$$

où σ est la constante de Stefan, et :

$$q_*(T) = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^3 \quad (\text{A2.7})$$

où les indices b, f s'appliquent pour les bosons et les fermions. q_* ne doit pas être confondu avec le nombre de degrés de liberté g_* qui intervient dans la fonction de distribution $f(\mathbf{p}, T)$, à savoir :

$$g_*(T) = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4$$

q_* comprend seulement les particules en interaction, tandis que g_* comprend toutes les particules. Ces paramètres sont égaux, $g_* = q_*$ seulement si $T_b = T_f = T$ c'est-à-dire en équilibre radiatif.

Preuve de (A2.6) :

Si $\mu/T \ll 1$ alors (A2.4) devient approximativement :

$$\tilde{S} \approx \frac{\rho_E + P}{T}$$

On verra plus loin que, en régime radiatif :

$$\rho_E = 2 \frac{\sigma}{c} g_*(T) T^4$$

et l'on a l'équation d'état :

$$P = w \rho_E = 2 \frac{\sigma}{c} g_*(T) w T^4$$

où en régime radiatif : $w = 1/3$.

Ce régime entraîne l'isothermie des espèces donc $g_*(T) = q_*(T)$, et avec $1+w = 4/3$, la densité d'entropie

$$\tilde{S} = \frac{\rho_E + P}{T} = (1+w) 2 \frac{\sigma}{c} q_*(T) T^3 = \frac{8}{3} \frac{\sigma}{c} q_*(T) T^3$$

qui est (A2.6).

CQFD de (A2.6).

À partir des fonctions de distribution pour une espèce n°A de particules :

$$f_A(\mathbf{p}, T) = \frac{g_A(T)}{\exp\left(\frac{E(T) - \mu_A}{k_B T_A}\right) \pm 1}$$

on peut calculer les densités particulières n_A , les densités d'énergie de ces particules ρ_A , leur pression P_A :

$$n_A(t) = \frac{1}{h^3} \int f_A(\mathbf{p}, T) d^3 \mathbf{p} \quad (\text{A2.8a})$$

$$\rho_A(t) = \frac{1}{h^3} \int f_A(\mathbf{p}, T) E(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \quad (\text{A2.8b})$$

$$P_A(t) = \frac{1}{h^3} \int f_A(\mathbf{p}, T) \frac{p^2 c^2}{3E} d^3 \mathbf{p} \quad (\text{A2.8c})$$

où l'énergie totale E vérifie l'équation d'Einstein : $E^2(T) = \mathbf{p}^2 c^2 + m_A^2 c^4$. Les relations (A2.8) s'écrivent donc encore :

$$n_A(t) = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{2\pi^2} \int_{m_A c^2}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_A^2 c^4} E dE}{\exp\left(\frac{E - \mu_A}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.9a})$$

$$\rho_A(t) = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{2\pi^2} \int_{m_A c^2}^{\infty} \frac{\sqrt{E^2 - m_A^2 c^4} E^2 dE}{\exp\left(\frac{E - \mu_A}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.9b})$$

$$P_A(t) = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{6\pi^2} \int_{m_A c^2}^{\infty} \frac{(E^2 - m_A^2 c^4)^{3/2} dE}{\exp\left(\frac{E - \mu_A}{k_B T}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.9c})$$

Les grandeurs (A2.9) s'expriment au moyen des intégrales sans dimension :

$$I_{m,n}(T, m_A, \mu_A) = \int_{x_A}^{\infty} \frac{z^m (z^2 - x_A^2)^{n/2}}{\exp(z - y_A) \pm 1} dz \quad (\text{A2.10})$$

avec :

$$z = \frac{E}{k_B T}$$

$$x_A = \frac{m_A c^2}{k_B T}$$

$$y_A = \frac{\mu_A}{k_B T}$$

selon :

$$n_A = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{2\pi^2} (k_B T)^3 I_{1,1} \quad (\text{A2.11a})$$

$$\rho_A = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{2\pi^2} (k_B T)^4 I_{2,1} \quad (\text{A2.11b})$$

$$P_A = \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{6\pi^2} (k_B T)^4 I_{0,3} \quad (\text{A2.11c})$$

Si $T \gg m_A c^2 / k_B$, $T \gg \mu_A / k_B$ (i.e. $x_A, y_A \ll 1$), (2.11b) devient :

$$\rho_A \approx 2 \frac{\sigma}{c} g_A T^4 \quad (\text{A2.12})$$

■ La relation (6.19) indique que, à l'ère radiative, la « constante » de Hubble se comporte comme

$$H \propto T^2$$

Par ailleurs, comme les sections efficaces des interactions varient comme

$$\sigma_A(T) \propto T^n$$

car les interactions augmentent avec la température, le taux de réaction varie comme :

$$\Gamma_A(T) \propto n_A \sigma_A \propto T^{n+3}$$

Pour l'interaction électrofaible (WS) qui entraîne la capture des neutrinos, $n = 2$, ce qui donne :

$$\Gamma_A(T) \propto T^5 \quad \text{et} \quad \sigma_A(T) \propto T^2$$

Si $n \geq 0$, lorsque la température T diminue avec l'expansion, il existe donc toujours une température en-dessous de laquelle, pour une espèce de particules donnée $n^\circ A$, leurs interactions ne se maintiennent plus : les particules en question ne sont alors plus en équilibre thermique avec les autres particules, il y a découplage consécutif au « gel » des interactions. On note T_D cette température et l'on a :

- couplage de l'espèce A avec les autres particules : $T > T_D$, $\Gamma_A > H$
- découplage de l'espèce A avec les autres particules : $T \leq T_D$, $\Gamma_A \leq H$

Il s'ensuit que les différents rayonnements émis lors des interactions des particules d'espèce $n^\circ A$ n'ont pas, a priori, les mêmes températures T_A , cette disparité agit sur leurs contributions respectives à la densité d'énergie totale par l'intermédiaire du nombre effectif de degrés de liberté à la température d'univers T :

$$g_*(T) = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T} \right)^4 \quad (\text{A2.13a})$$

où les indices b, f désignent les particules bosons ou fermions, les sommations portant sur toutes les espèces $n^\circ A$ où, pour chacune de ces espèces, en régime radiatif, leur densité d'énergie est exprimée par (A2.12). La densité d'énergie totale fait intervenir le nombre effectif de degrés de liberté donné par (A2.13a) :

$$\rho_E(T) = 2 \frac{\sigma}{c} g_*(T) T^4$$

■ Le tableau (A2.1) donne les densités particulières n_A , les densités d'énergie ρ_A , les pressions P_A (équation d'état avec w) pour les espèces $n^\circ A$ de particules, dans le cas où elles sont des bosons ou des fermions, et pour différentes gammes de température d'univers (réf. [10]).

température T	boson / fermion	$n_A(T)$	$\rho_A(T)$	P_A
$T \gg \frac{m_A c^2}{k_B}, \frac{\mu_A}{k_B}$	boson	$\propto \frac{1,202}{\pi^2} g_A T^3$	$\propto \frac{\pi^2}{30} g_A T^4$	$\frac{\rho_A}{3}$
	fermion	$\propto 3 \times \frac{1,202}{4\pi^2} g_A T^3$	$\propto \frac{7\pi^2}{8 \times 30} g_A T^4$	$\frac{\rho_A}{3}$
$\frac{\mu_A}{k_B} \gg T \gg \frac{m_A c^2}{k_B}$	fermion	$\propto g_A \mu_A^3 / 6\pi^2$	$\propto \frac{g_A}{8\pi^2} \mu_A^3$	$\frac{\rho_A}{3}$
$T \gg \frac{m_A c^2}{k_B}, \mu_A < -k_B T$	boson et fermion	$\propto \frac{g_A}{\pi^2} T^3 \exp \frac{\mu_A}{k_B T}$	$\propto \frac{3 g_A}{\pi^2} T^4 \exp \frac{\mu_A}{k_B T}$	$\frac{\rho_A}{3}$
$T \ll \frac{m_A c^2}{k_B}$	boson et fermion	$\propto g_A (m_A T)^{3/2} \exp \left(-\frac{E - \mu_A}{k_B T} \right)$	$\propto m_A n_A$	$n_A k_B T$

tableau A2.1 : comportement thermodynamique des bosons et fermions selon la température d'univers

■ À l'ère radiative l'équation de Friedmann (4.8b), avec (A2.12), donne la relation entre H et T :

$$H(T) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^3}} \sqrt{2\sigma g_* T^2} \quad (\text{A2.13b})$$

ainsi $H \propto T^2$. Rappel : $g_* = q_*$ si pour toute espèce $T_A = T$. Par définition de $H = (da/dt)/a$, et en régime adiabatique $aT = \text{cste}$, la relation (A2.13b) fournit la relation entre la température et le temps cosmique :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = T \left(-\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} \right) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^3}} \sqrt{2\sigma g_*} T^2$$

qui s'intègre en :

$$t(T) = \sqrt{\frac{3c^3}{4\pi G}} \frac{1}{\sqrt{\sigma g_*}} T^{-2} \quad (\text{A2.14})$$

Voir tôt dans le passé c'est voir chaud. Numériquement :

$$t(T) \approx 2,42 g_*^{-1/2} \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2} \text{ (s)} \quad (\text{A2.14bis})$$

■ On a vu que pour une température de l'ordre de 1 GeV les réactions d'annihilation particules-antiparticules se produisent avec émission de photons : $A + \bar{A} \rightleftharpoons \gamma + \gamma$. On montre que le nombre de photons ne se conserve pas, donc leur potentiel chimique est $\mu_\gamma = 0$; par conséquent, la réaction étant en équilibre, on a : $\mu_A + \mu_{\bar{A}} = 0$. On montre aussi que pour des particules relativistes, c'est-à-dire dont la masse est telle que $m_A \ll k_B T/c^2$, à partir de (A2.11a), il existe un écart positif entre les densités des particules A et des antiparticules \bar{A} , exprimé par :

$$n_A - n_{\bar{A}} = cste \times \frac{\sigma}{6\pi^2 c k_B} g_A T^3 \left[\pi^2 \left(\frac{\mu_A}{k_B T} \right) + \left(\frac{\mu_A}{k_B T} \right)^3 \right] \quad (\text{A2.15})$$

Pour $T < m_A c^2/k_B$ l'écart (A2.15) tend vers zéro de manière exponentielle :

$$n_A - n_{\bar{A}} \approx cste \times g_A(T) \sinh \left(\frac{\mu_A}{k_B T} \right) \times \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_A c^2}{k_B T} \right) \quad (\text{A2.16})$$

Remarque : asymétrie matière-antimatière :

Après l'annihilation des particules et antiparticules aux différents âges thermiques, aux basses températures subsiste l'écart résiduel (A2.16) qui suffit pour rendre majoritaires les particules devant les antiparticules après des phases d'annihilation au cours de l'expansion.

Cette asymétrie nécessite de considérer que dans les réactions entre particules le nombre baryonique B⁽¹⁵⁾ n'est pas conservé. Dans le cas contraire l'univers aurait autant de particules que d'antiparticules. De plus, il est nécessaire d'attribuer des comportements statistiques légèrement différents pour les particules et leurs antiparticules : la probabilité de désintégration d'une particule ne serait pas rigoureusement la même que celle de son antiparticule. L'échelle de temps des réactions et de l'expansion joue aussi un rôle important dans la brisure de symétrie : si le temps de l'expansion est plus petit que le temps de réaction, celle-ci devient asymétrique ; le nombre de particules qui en résulte devient très légèrement supérieur à celui des antiparticules. C'est ce qui se produit quand l'expansion est rapide (comme dans l'inflation).

Les théories de « Grande Unification » (GUT) qui portent sur l'unification des interactions électrofaibles avec les interactions nucléaires fortes, prédisent la rupture de symétrie entre les particules et les antiparticules pour des énergies de l'ordre de 10¹⁵ GeV, au-dessus desquelles la symétrie existe. Parmi ces théories, le modèle fondé sur le groupe spécial unitaire SU(5), où les deux types d'interaction sont unifiées, permet de prévoir leur séparation en une interaction fondée sur le groupe SU(3) (interaction forte) et une interaction fondée sur le groupe SU(2) x U(1) (interaction électrofaible). Malheureusement, elle confère une durée de vie du proton trop faible : 10²⁹ ans, alors qu'elle est de 10³² ans, de plus, cette

théorie n'explique pas la population relative des nucléons et des photons : $\frac{n_p(T_D)}{n_\gamma} \approx 3.10^{-10}$.

L'évolution de la répartition de la matière et de l'anti-matière au cours des différentes phases thermiques de l'univers est représentée au tableau A2.2.

15 Voir référence [1].

Température T	Proportion des photons, particules et antiparticules
$T > 10^{28} \text{K}$	Nombre de quarks = nombre d'antiquarks nombre d'électrons = nombre de positrons
$T \approx 10^{28} \text{K}$	Brisure de symétrie GUT nombre de particules matérielles > nombre d'antiparticules
$10^{12} \text{K} < T < 10^{28} \text{K}$	Surabondance de quarks = $(1 + 10^9)$ quarks/ 10^9 antiquarks surabondance d'électrons = $(1 + 3 \cdot 10^9)$ électrons/ $3 \cdot 10^9$ positrons
$T \approx 10^{12} \text{K}$	Transition quark-hadron formation des nucléons annihilation nucléons-antinuécléons
$10^{10} \text{K} < T < 10^{12} \text{K}$	Quantité de nucléons par rapport aux photons : $n_p/n_\gamma = 3 \cdot 10^{-10}$ (1 nucléon pour 3 milliards de photons) quantité d'antinuécléons = 0 surabondance des électrons = $(1 + 3 \cdot 10^9)$ électrons/ $3 \cdot 10^9$ positrons
$T \approx 10^{10} \text{K}$	Annihilation électrons-positrons
$T < 10^{10} \text{K}$	Quantité de nucléons par rapport aux photons : $n_p/n_\gamma = 3 \cdot 10^{-10}$ (1 nucléon pour 3 milliards de photons) quantité d'antinuécléons = 0 quantité relative d'électrons et de protons = 1 électron / 1 proton quantité de positrons = 0

tableau A2.2 : abondances relatives des particules et antiparticules aux différentes températures d'univers (cf. [20])

On ne peut donc pas supposer que, aux températures élevées ($m_A \ll k_B T/c^2$, particules relativistes), il y a équilibre des particules, antiparticules et photons. Si c'était le cas, on aurait :

$$n_A = n_{\bar{A}} = n_\gamma = cste \times \frac{\sigma}{c} g_*(T) T^3 \propto T^3 \quad (\text{A2.17})$$

Et lorsque les particules deviennent non relativistes ($m_A c^2 > k_B T$) on a, d'après (6.23) :

$$\frac{n_A(T)}{n_\gamma} = cste \times \left(\frac{m_A}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_A c^2}{k_B T}\right) \quad (\text{A2.18})$$

Donc avec l'hypothèse d'une distribution initiale (A2.17), la distribution (A2.18) diminuerait d'une valeur égale à 1 jusqu'à une valeur pour laquelle les particules deviennent suffisamment espacées, suite à l'expansion, pour que le temps entre deux annihilations devienne plus long que l'âge de l'univers : ce serait alors le découplage des particules et du rayonnement (photons), qui se produit pour $T \leq T_D$ pour laquelle $\Gamma_A \leq H$. La population relative des particules de matière et des photons atteint alors un plancher puisqu'il n'y a plus d'annihilations : $n_p(T_D)/n_\gamma$. Or nous allons voir que cette valeur plancher, obtenue avec l'hypothèse (A2.17), ne correspond pas du tout à la population observée $n_p/n_\gamma = 3 \cdot 10^{-10}$.

Calculons donc $n_p(T_D)/n_\gamma$ compte tenu de (A2.17) et (A2.18). Pour cela on a besoin de connaître le temps moyen des annihilations :

La probabilité d'annihilation $A + \bar{A} \rightarrow \gamma + \gamma$ est égale à :

$$P_{\text{ann}} = n_A \sigma_{\text{ann}} v$$

où σ_{ann} est la section efficace d'annihilation pour les particules A et leurs antiparticules, v la vitesse moyenne des paires de particules (A, \bar{A}) . La durée moyenne d'annihilation est inversement proportionnelle à la probabilité :

$$t_{\text{ann}} \propto \frac{1}{P_{\text{ann}}} = \frac{1}{n_A \sigma_{\text{ann}} v}$$

où n_A est donnée par l'expression correspondant à la phase de découplage que l'on verra au point

A2.2, puisque $T < T_D$:

$$n_A(t) \approx cste \times g_A \left(\frac{m_A T_D}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{a_D}{a(t)} \right)^3 \exp \left(- \frac{m_A c^2}{k_B T_D} \right)$$

On montre que la section efficace de l'annihilation varie comme : $\sigma_{ann} \propto \frac{1}{m_c^2}$ où m_c est une masse caractéristique de l'interaction d'annihilation pour les espèces considérées n°A (par exemple : $m_c = 137$ MeV est la masse des pions, qui interviennent dans l'annihilation des nucléons $p + \bar{p}$ ou $n + \bar{n}$). La vitesse moyenne des paires (A, \bar{A}) est égale à :

$$v \propto \left(\frac{k_B T}{m_A} \right)^{1/2}$$

Il s'ensuit que t_{ann} est quasi inversement proportionnel à T^2 :

$$\frac{t_{ann}}{t_p} \propto \frac{c^2}{\hbar} \left(\frac{2\pi^3}{k_B} \right)^{1/2} \frac{m_c^2}{m_p m_A} \frac{1}{g_A} \left(\frac{m_p}{T} \right)^2 \exp \left(\frac{m_A c^2}{k_B T} \right) \quad (A2.19)$$

où t_p et m_p sont le temps et la masse de Planck. Le découplage des particules et des photons a lieu lorsque le temps d'annihilation est égal au temps d'expansion, à la température T_D :

$$\frac{t_{ann}}{t_p} = \frac{t_{exp}}{t_p} \approx \left(\frac{m_p c^2}{k_B T_D} \right)^2$$

En remplaçant, dans cette expression, t_{ann} par (A2.19) il vient :

$$\exp \left(- \frac{m_A c^2}{k_B T_D} \right) = \frac{m_c^2}{m_p m_A} \left(\frac{m_p}{T_D} \right)^2 \frac{t_p}{t_{exp}} = \left(\frac{m_c}{m_p} \right)^2 \left(\frac{m_p}{m_A} \right)$$

d'où la température de découplage :

$$T_D = \frac{m_A c^2}{k_B} \frac{1}{\ln \left[\frac{m_A}{m_p} \left(\frac{m_p}{m_c} \right)^2 \right]} \quad (A2.20)$$

Si A désigne les nucléons on a $T_D = 20$ MeV. Au découplage, leur population se stabiliserait donc à la valeur plancher : $\frac{n_p(T_D)}{n_\gamma} \approx 3.10^{-19}$ alors que l'observation donne 3.10^{-10} .

On ne peut donc pas prendre l'hypothèse (A2.17) comme condition initiale : la condition initiale doit intégrer la dissymétrie entre les particules et les antiparticules (nucléons et anti-nucléons) impliquant l'interaction faible.

A2.2 – Découplage

■ Deux situations de découplage :

Pour des particules d'espèce n°A donnée, le découplage a lieu à une date t_{DA} telle que $\Gamma_A \leq H$, à laquelle la température d'univers est $T(t_{DA}) = T_{DA}$. À l'âge t_{DA} , le facteur d'échelle est $a_{DA} = a(t_{DA})$. Si ces particules A étaient en équilibre thermique avant le découplage, alors au découplage, leur fonction de distribution est :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E(p_{DA}) - \mu_A}{k_B T_{DA}}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.21})$$

où p_{DA} est la quantité de mouvement des particules A au moment du découplage ; l'énergie est une fonction de p_{DA} par l'intermédiaire de l'énergie cinétique. Après le découplage, à une date $t > t_{DA}$, la fonction de distribution des particules A est exprimée avec la même forme :

$$f_A(\mathbf{p}, t) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E - \mu_A}{k_B T_A(t)}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.21bis})$$

où, par suite de l'expansion, la quantité de mouvement à un instant $t > t_{DA}$ (après le découplage) vérifie :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_{DA}) \frac{a_{DA}}{a(t)} \quad (\text{A2.22})$$

Suite à (A2.22) et puisque $E = E(p)$, la fonction de distribution au découplage peut s'exprimer en fonction de grandeurs connues à toute date $t > t_{DA}$, en effet :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E\left(\frac{a(t)}{a_{DA}} \mathbf{p}(t)\right) - \mu_A}{k_B T_A(t_{DA})}\right) \pm 1} = F\left(\frac{a(t)}{a_{DA}} \mathbf{p}(t), t_{DA}\right) \quad (\text{A2.22})$$

Bien noter que T_{DA} est la température d'univers qui permet le découplage de A, et que $T_A(t)$ est la température de A à un temps t , qui n'est pas a priori égale à la température d'univers $T(t)$ s'il n'y a pas équilibre thermodynamique :

pour $t > t_{DA}$, a priori $T_A(t) \neq T(t)$

Bien entendu au découplage $T_{DA} = T(t_{DA}) = T_A(t_{DA})$.

Deux situations de découplage se présentent :

- Le découplage a lieu lorsque les particules A sont relativistes.
- Il a lieu lorsqu'elles sont non relativistes.

■ *Découplage relativiste* : $T = T_{DA} \gg m_A, \mu_A$:

Puisque $\mu_A / k_B T_{DA} \ll 1$, (A2.21) devient :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) \approx \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E}{k_B T_{DA}}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.23})$$

Après le découplage, à $t > t_{DA}$, la fonction de distribution est :

$$f_A(\mathbf{p}, t) \approx \frac{g_A}{\exp\left(\frac{E}{k_B T_A(t)}\right) \pm 1} \quad (\text{A2.23bis})$$

où la température est $T_A(t) = T_{DA} \frac{a_{DA}}{a(t)}$ puisque le régime est isentropique. Soit t_{NR} le temps où les

particules A cessent d'être relativistes, alors si $t_{NR} \gg t_{DA}$ (les particules deviennent non relativistes bien plus tard que leur découplage), au temps $t > t_{NR}$ on a : $E \approx m_A c^2$, et :

$$f_A(\mathbf{p}, t) = \frac{g_A}{\exp\left(\frac{m_A c^2}{k_B T_A(t)}\right) \pm 1} \quad \text{pour } t > t_{NR} > t_{DA} \quad (\text{A2.24})$$

■ **Découplage non relativiste** : $T = T_{DA} \ll m_A, \mu_A$:

L'énergie prend la forme approchée : $E \approx m_A c^2 + \frac{p^2}{2m_A}$ où $p^2/2m_A$ est l'énergie cinétique classique.

Au découplage la fonction de distribution des particules A est donc :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = g_A \exp\left(-\frac{m_A c^2 - \mu_A}{k_B T_{DA}}\right) \exp\left(-\frac{p_{DA}^2}{2m_A k_B T_{DA}}\right)$$

Elle peut être déduite des propriétés dynamiques observées à $t > t_{DA}$ si l'on sait relier les températures des particules $T_A(t)$ à la température au découplage T_{DA} . En effet, la température $T_A(t)$ est reliée à la moyenne quadratique de la distribution des vitesses : $T = \text{cste} \times \langle p^2 \rangle$ (attention, ceci ne signifie pas que $T = p^2/2m_A$!); sa variation due à l'expansion suit donc celle (A2.22) de p^2 , on a donc :

$$\frac{T_A(t)}{T_{DA}} = \frac{\langle p^2(t) \rangle}{\langle p_{DA}^2 \rangle} = \left(\frac{a_{DA}}{a(t)}\right)^2 \quad (\text{A2.25a})$$

Attention : on n'a donc pas $T_A(t) = T(t)$ température de l'univers qui évolue comme $a(t)^{-1}$ en régime isentropique ; en effet les particules A évoluent, après la découplage, avec leur propre température et ne sont plus en équilibre thermodynamique avec l'univers, tandis que leur entropie S_A évolue différemment de $S(t)$.

De (A2.25a) il suit que la fonction de distribution au découplage peut être déduite à partir de valeurs obtenues à une date postérieure à celle-ci :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = g_A \exp\left(-\frac{m_A c^2 - \mu_A}{k_B T_{DA}}\right) \exp\left(-\frac{p(t)^2}{2m_A k_B T_A(t)}\right) \quad (\text{A2.25b})$$

(A2.25b) s'écrit encore : $f(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = g_A \exp(-X_A)$ avec : $X_A = \frac{m_A c^2 - \mu_A}{k_B T_{DA}} + \frac{p^2(t)}{2m_A k_B T_A(t)}$,

comme $\frac{p^2}{2m_A} = E - m_A c^2$ il vient : $X_A = -\frac{1}{k_B T_A(t)}(E - \mu_{\text{eff}})$ où

$$\mu_{\text{eff}} = m_A c^2 + (\mu_A - m_A c^2) \frac{T_A(t)}{T_{DA}} \quad (\text{A2.26})$$

est le potentiel chimique effectif, et donc :

$$f_A(\mathbf{p}_{DA}, t_{DA}) = g_A \exp\left(-\frac{E - \mu_{\text{eff}}}{k_B T_A(t)}\right) \quad (\text{A2.27})$$

De (A2.27) et (A2.9a) on déduit la densité particulaire des particules A découplées :

$$n_A(t) \approx \frac{1}{(hc)^3} \frac{g_A}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m_A^2 c^4} E dE}{m_A c^2 \exp\left(\frac{E - \mu_{\text{eff}}}{k_B T_A}\right) \pm 1}$$

soit :

$$n_A(t) = cste \times g_A \left(\frac{m_A T_{DA}}{2\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{a_{DA}}{a(t)}\right)^3 \exp\left(-\frac{m_A c^2}{k_B T_{DA}}\right) \quad (\text{A2.28})$$

d'où aussi la densité d'énergie des particules A :

$$\rho_A = n_A m_A c^2 = cste \times g_A m_A c^2 \left(\frac{m_A T_{DA}}{2\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{a_{DA}}{a(t)}\right)^3 \exp\left(-\frac{m_A c^2}{k_B T_{DA}}\right) \quad (\text{A2.29})$$

On va montrer que, après le découplage des particules A, la relation entre leur température $T_A < T_{DA}$ et la température d'univers T est :

$$\frac{T_A}{T} = \left(\frac{q_\gamma(T)}{q_\gamma(T_{DA})} \frac{q_A(T_{DA})}{q_A(T)}\right)^{1/3} \quad (\text{A2.30})$$

où q_γ est attribuée aux photons :

$$q_\gamma(T) = \sum_{b(\gamma)} g_{b(\gamma)} \left(\frac{T_{b(\gamma)}}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{f(\gamma)} g_{f(\gamma)} \left(\frac{T_{f(\gamma)}}{T}\right)^3 \quad (\text{A2.31})$$

avec :

$b(\gamma)$: bosons restant encore en équilibre thermique avec les photons γ

$f(\gamma)$: fermions restant encore en équilibre thermique avec les photons γ

Preuve de (A2.30) :

Pour les particules A découplées à la température T_{DA} l'entropie est conservée séparément de celle de l'univers :

$$S_A \propto \tilde{S}_A a^3 = \frac{k_B^4}{(c\hbar)^3} \frac{2\pi^2}{45} q_A T_A^3 a^3 = cste$$

d'après (A2.6), où $q_A = q(T_A)$.

Or l'entropie totale d'univers est elle aussi conservée :

$$S \propto \tilde{S} a^3 = \frac{k_B^4}{(c\hbar)^3} \frac{2\pi^2}{45} q_* T^3 a^3 = cste$$

Il s'ensuit que l'entropie des particules restant en équilibre thermodynamique avec les photons est elle aussi constante :

$$S_\gamma = S - S_A \propto \frac{k_B^4}{(c\hbar)^3} \frac{2\pi^2}{45} q_\gamma(T) T^3 a^3 = cste$$

d'où : $q_\gamma(T) T^3 a^3 = cste$, qui donne la relation température-facteur d'échelle en régime adiabatique :

$$T = cste \times q_\gamma(T)^{-1/3} \frac{1}{a} \quad (\text{A2.32})$$

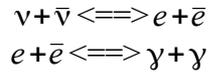
On a donc :

$$q_A(T_A) T_A^3 a^3 = cste \times \frac{q_A(T_{DA})}{q_\gamma(T_{DA})} = q_\gamma(T) T^3 a^3 \frac{q_A(T_{DA})}{q_\gamma(T_{DA})} \text{ d'où : } \left(\frac{T_A}{T}\right)^3 = \frac{q_\gamma(T)}{q_A(T_A)} \frac{q_A(T_{DA})}{q_\gamma(T_{DA})}$$

qui est (A2.30).
CQFD de (A2.30).

■ *Exemple des neutrinos :*

La réaction des neutrinos et des antineutrinos ne donne pas directement des photons, car les neutrinos sont sans charge ; elle produit d'abord des paires d'électrons et de positrons qui à leur tour donnent des photons :



La réactions des neutrinos fait intervenir l'interaction faible. Il y a équilibre des neutrinos avec les photons si $T > T_D$ température de découplage. Si l'énergie E des neutrinos vérifie :

$$m_e c^2 \ll E \ll m_W c^2$$

où m_W est la masse des bosons W qui interviennent dans l'interaction faible, et m_e masse des électrons, alors la section efficace de l'interaction faible est, pour $E < 100$ GeV :

$$\sigma_F \propto G_F E^2 \propto G_F T^2$$

où G_F est la constante de Fermi :

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_W}{m_W c^2} \right)^2 (\hbar c)^3$$

g_W : constante de couplage de l'interaction faible, m_W masse du boson W de la désintégration β ; numériquement :

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1,1663787(6) \cdot 10^{-5} (\text{GeV})^{-2} = 4,5437957 \cdot 10^{14} \text{J}^{-2}$$

Le taux de réaction :

$$\Gamma = n_\nu \langle \sigma_F v \rangle \quad (\text{dimension } [\text{T}^{-1}])$$

est, puisque $\sigma_F \propto G_F T^2$ et $n_\nu \propto T^3$ (selon A2.17) : $\Gamma \propto G_F T^5$

qui correspond à $n = 2$ dans la relation vue au début de l'Annexe 2 :

$$\Gamma_A(T) \propto n_A \sigma \propto T^{n+3}$$

Or d'après (A2.13), $H \propto T^2$ d'où :

$$\Gamma \propto G_F T^3 H$$

soit en valeur numérique :

$$\Gamma \approx \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3 H \quad (\text{A2.33})$$

► Si $\Gamma \leq 1$ il y a découplage des neutrinos avec le rayonnement.

► Si $T_A \leq T_D = 1$ MeV alors T_A (neutrinos) $\approx T_\gamma = T$ avec $T \propto a^{-1}$.

► Pour $T_D > T_A > m_e c^2 / k_B$ on compte 4 états de fermions e^+ , e^- de $g_e = 2$ chacun, et 2 états de bosons γ (photons) de $g_\gamma = 2$, en équilibre thermique avec les photons :

$$q_\gamma(T > m_e c^2 / k_B) = g_\gamma \left(\frac{T}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} g_e \left(\frac{T}{T} \right)^3 = g_\gamma + \frac{7}{8} (g_{e^-} + g_{e^+}) = g_\gamma + \frac{7}{8} \times 2 \times 2 = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 2$$

soit :

$$q_\gamma(T > m_e c^2 / k_B) = \frac{11}{2} \quad (\text{A2.34})$$

► Pour $T_A < m_e c^2 / k_B$ il y a la seule contribution des photons (γ) :

$$q_\gamma(T < m_e c^2 / k_B) = g_\gamma = 2 \quad (\text{A2.35})$$

Après annihilation $e + \bar{e} \rightleftharpoons \gamma + \gamma$ la relation (A2.30) donne :

$$\frac{T}{T_A} = \left(\frac{q_\gamma(T_{DA})}{q_\gamma(T)} \frac{q_A(T)}{q_A(T_{DA})} \right)^{1/3}$$

en se rappelant que pour $T < m_e c^2 / k_B$ on a $q_A(T) = q_A(T_{DA})$, et avec $q_\gamma(T_{DA}) = 11/2$ et $q_\gamma(T) = 2$, d'où :

$$\frac{T}{T_A} = \left(\frac{11/2}{2} \right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} \quad (\text{A2.36})$$

Le nombre de degrés de liberté relativiste g_* est :

$$g_* = g_\gamma \left(\frac{T_\gamma}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} N_\nu g_e \left(\frac{T_A}{T} \right)^4$$

où $N_\nu = 3$ est le nombre de familles de neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ)⁽¹⁶⁾, avec ici $T_\gamma = T$, compte tenu de (A2.36)

et des valeurs précédentes, on a : $g_* = 2 + \frac{7}{8} \times 3 \times 2 \times \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3}$ soit :

$$g_* = 3,36 \quad (\text{A2.37})$$

et :

$$q_* = g_\gamma \left(\frac{T_\gamma}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} N_\nu g_e \left(\frac{T_A}{T} \right)^3 = 2 + \frac{7}{8} \times 3 \times 2 \times \frac{4}{11}$$

soit :

$$q_* = 3,91 \quad (\text{A2.38})$$

A2.3 – Thermodynamique hors équilibre et particules reliques

■ Régimes non relativistes :

Pour les réactions en équilibre, comme pour les réactions hors équilibre, la fonction de distribution f_A d'un ensemble de particules A est solution de l'équation de Boltzmann⁽¹⁷⁾ :

$$L f_A = C f_A \quad (\text{A2.39a})$$

où C est lié aux collisions, L est l'opérateur de Liouville qui, dans une métrique quelconque d'élément métrique ds^2 , est défini par :

$$L = \frac{d}{ds} = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial}{\partial p^\mu} \quad (\text{A2.39b})$$

où $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right)$ est le symbole de Christoffel, $g_{\nu\mu}$ est le tenseur métrique

intervenant dans $ds^2 = g_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu$.

En supposant l'espace-temps homogène et isotrope : $f_A = f_A(E, t)$, donc les variables canoniquement conjuguées sont l'énergie $p^0 = E/c$ et le temps $x^0 = ct$ (correspondant à l'indice de coordonnée $\mu = 0$) ; l'opérateur de Liouville se réduit alors à :

¹⁶ Voir par exemple [33].

¹⁷ Voir par exemple [34].

$$L = p^0 \frac{\partial}{\partial x^0} - \Gamma_{\nu\lambda}^0 p^\nu p^\lambda \frac{\partial}{\partial p^0}$$

ce qui donne :

$$L f_A = \frac{E}{c^2} \frac{\partial f_A}{\partial t} - H \mathbf{p}^2 \frac{\partial f_A}{\partial E} = C f_A \quad (\text{A2.39c})$$

En utilisant (A2.8a) et (A2.39c) l'équation de Boltzmann conduit à l'équation d'évolution de la densité particulaire n_A :

$$\frac{d n_A}{d t} + 3 H n_A = C_A \quad (\text{A2.40a})$$

où C_A s'exprime par le terme de collisions C :

$$C_A = \frac{c^2}{h^3} g_A \int C(f_A(\mathbf{p}_A, t)) \frac{d^3 \mathbf{p}_A}{2 E_A} \quad (\text{A2.40b})$$

Analyse aux dimensions :

$$[L] = [C] = \text{MT}^{-1}$$

$$[C_A] = \text{L}^{-3} \text{T}^{-1}$$

$$[n_A] = \text{L}^{-3}$$

Pour des interactions du type réversible : $A+B \rightleftharpoons A'+B'$

avec la conservation de l'énergie : $E_A + E_B = E_{A'} + E_{B'}$,

et pour des régimes non relativistes $k_B T \ll E_A - \mu_A$ pour lesquels $f_A \propto \exp\left(-\frac{E_A - \mu_A}{k_B T}\right)$ on

montre que (A2.40b) devient :

$$C_A = -\langle \sigma v \rangle \left(n_A n_B - \frac{\tilde{n}_A \tilde{n}_B}{\tilde{n}_{A'} \tilde{n}_{B'}} n_{A'} n_{B'} \right) \quad (\text{A2.41})$$

où les densités particulières n_k pour un potentiel chimique non nul sont reliées aux densités particulières \tilde{n}_k pour un potentiel chimique nul par :

$$n_k \propto \tilde{n}_k \exp\left(\frac{\mu_k}{k_B T}\right) \quad (k = A, B, A', B') \quad (\text{A2.41bis})$$

On montre que $\langle \sigma v \rangle$ (où σ section efficace) est de la forme :

$$\langle \sigma v \rangle \tilde{n}_A \tilde{n}_B = \int \int \int \int \frac{\xi^2}{(2\pi)^8} \exp\left(-\frac{E_A + E_B}{k_B T}\right) \delta(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_{A'} - \mathbf{p}_{B'}) \frac{d^3 \mathbf{p}_A}{2 E_A} \frac{d^3 \mathbf{p}_B}{2 E_B} \frac{d^3 \mathbf{p}_{A'}}{2 E_{A'}} \frac{d^3 \mathbf{p}_{B'}}{2 E_{B'}} \quad (\text{A2.42})$$

où ξ est à déterminer selon le processus physique, δ est la distribution de Dirac 3D.

Lorsque la durée caractéristique des réactions est plus grande que l'expansion, $n_k \langle \sigma v \rangle \gg H$, (A2.40a) admet une solution seulement si $C_A = 0$, auquel cas $n_A(t) \propto \exp(-3Ht)$, ce qui correspond à l'équation de Saha :

$$\frac{n_A n_B}{\tilde{n}_A \tilde{n}_B} = \frac{n_{A'} n_{B'}}{\tilde{n}_{A'} \tilde{n}_{B'}} \quad (\text{A2.43a})$$

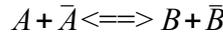
ce qui, compte tenu de (A2.41bis), donne la condition d'équilibre :

$$\mu_A + \mu_B = \mu_{A'} + \mu_{B'} \quad (\text{A2.43b})$$

Lorsque les particules et leurs réactions sont hors équilibre, (A2.43b) n'est plus vérifiée.

■ *Régimes relativistes :*

- Considérons à présent le cas des régimes relativistes $k_B T_A \gg m_A c^2$, μ_A . On a vu qu'il y a équilibre particules-antiparticules et que l'annihilation ou sa réaction inverse changent leur densité :



(où l'on peut avoir $B = \bar{B} = \gamma$). Avec l'expansion, cet équilibre ne peut pas être maintenu : au-delà d'une certaine date la densité ne varie plus à cause des réactions d'annihilation, et elle atteint une valeur résiduelle dite « densité relique ». Selon que le découplage se produit en régime relativiste ou en régime non relativiste, les densités reliques sont différentes. Dans le premier cas, on parle de reliques chaudes, dans le deuxième cas, de reliques froides.

Avant cet arrêt des annihilations, appelé « gel », on a l'équilibre et, avec $\mu_A \approx 0$, la fonction de distribution est :

$$f_A \propto \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right), \quad f_{\bar{A}} \propto \exp\left(-\frac{E_{\bar{A}}}{k_B T}\right)$$

avec conservation de l'énergie :

$$E_A + E_{\bar{A}} = E_B + E_{\bar{B}}$$

Sous ces conditions, on montre que l'équation de Boltzmann (A2.40a) devient :

$$\frac{d n_A}{d t} + 3 H n_A = \langle \sigma v \rangle (\tilde{n}_A^2 - n_A^2)$$

étant à l'ère radiative on a (A2.13b), $H(T) \propto T^2$ soit $H \propto x_A^{-2}$ où x_A est la variable réduite définie en (A2.10). En utilisant le nombre de particules A par volume comobile, $N_A \propto \frac{n_A}{\tilde{S}}$, et comme la condition d'isotropie $d(\tilde{S} a^3) = 0$ est satisfaite, on a :

$$\frac{d N_A}{d t} + 3 H N_A = \tilde{S} \frac{d n_A}{d t}$$

et l'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{d N_A}{d x_A} = \langle \sigma v \rangle (N_A^2 - N_A^2) \quad (\text{A2.44})$$

où l'on rappelle que \tilde{S} est donnée par (A2.6) à l'ère radiative.

• Reliques chaudes :

Le découplage du plasma cosmique, pour les reliques chaudes, se produit lorsqu'elles sont encore relativistes ($T_{DA} \gg m_A$). On montre alors que leur densité relique *actuelle* (à t_0) est, dans l'hypothèse d'un univers adiabatique après le découplage :

$$n_{A0} = 776,8 \left(\frac{q_{*0}}{3,91} \right) \varepsilon \frac{g_{DA}}{q_*(x_{DA})} \Theta_{2,7}^3 (\text{cm}^{-3}) \quad (\text{A2.45})$$

où $\varepsilon = 1$ si A sont des bosons, $\varepsilon = 3/4$ si A sont des fermions, et $x_{DA} = m_A c^2 / k_B T_{DA}$ est la limite du découplage.

Si m_A est plus grande que la température du CMB actuelle, c'est-à-dire si $m_A > k_B T_0 / c^2$, alors on montre que le paramètre densité est :

$$\Omega_{A0} h_0^2 = 0,739 \left(\frac{q_{*0}}{3,91} \right) \left(\frac{m_A}{10 \text{ eV}} \right) \varepsilon \frac{g_{DA}}{q_*(x_{DA})} \quad (\text{A2.46})$$

En particulier pour les particules dont la température de découplage est $T_{DA} = T_\gamma = 1 \text{ MeV}$ (leptons : neutrinos, électrons...), on a :

$$q_*(x_{DA}) = q_*(T = 1 \text{ MeV}) = g_\gamma + \frac{7}{8} (n_\nu g_e + n_e g_e) = 2 + \frac{7}{8} \times (3+2) \times 2 = 10,75$$

puisque $n_\nu = 3$ (3 familles de neutrinos), $n_e = 2$ (électrons et positrons), $g_\gamma = 2$, $g_e = 2$, d'où, d'après (A2.46) :

$$\Omega_{A0} h_0^2 = \frac{m_A}{91,5 \text{ eV}} \quad (\text{A2.47})$$

(A2.45) ou (A2.46) montrent que la densité relique chaude est d'autant plus grande que $q_*(x_{DA})$ est petite, ce qui signifie que les particules A sont d'autant plus abondantes que leur découplage s'effectue plus tôt. À l'inverse, leur densité relique chaude et leur température sont très faibles par rapport aux photons du CMB si $q_*(x_{DA}) \gg 1$ au moment du découplage.

• Reliques froides :

Pour les reliques froides, le découplage avec le plasma cosmique s'effectue lorsqu'elles sont non relativistes ($T_{DA} < m_A$). On montre que leur densité relique froide est :

$$n_{A0} = 1,09 \cdot 10^4 \frac{\sqrt{g_*(x_{DA})}}{q_*(x_{DA})} \left(\frac{q_{*0}}{3,91} \right) \Theta_{2,7}^3 \frac{1}{m_A m_p \sigma_0} \left(\int_{x_{DA}}^{\infty} \frac{\varphi(x_A)}{x_A^2} dx_A \right)^{-1} \text{ (cm}^{-3}\text{)} \quad (\text{A2.48})$$

où m_p masse de Planck, σ_0 et $\varphi(x_A)$ interviennent dans l'expression de $\langle \sigma v \rangle$:

$$\langle \sigma v \rangle = \sigma_0 \varphi(x_A)$$

En supposant $g_*(x_{DA}) \approx q_*(x_{DA})$, (A2.48) donne, pour le paramètre densité relique froide de l'espèce A :

$$\Omega_{A0} h_0^2 \approx 0,31 \left(\frac{g_*(x_{DA})}{100} \right)^{-1/2} (n+1) x_{DA}^{n+1} \left(\frac{q_{*0}}{3,91} \right) \Theta_{2,7}^3 \left(\frac{\sigma_0}{10^{-38} \text{ cm}^2} \right)^{-1} \quad (\text{A2.49})$$

En général on a $n = 0$ ou $n = 1$ selon le type d'annihilation.

*
* *

Annexe 3 : Oscillations acoustiques

A3.1 – Perturbations de densité dans un espace statique

On assimile le nuage de gaz à un fluide sans viscosité pour lequel la conservation de matière et la dynamique sont décrites par les équations de continuité et d'Euler :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A3.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \quad (\text{A3.2})$$

où Φ est le potentiel du champ auquel le gaz est éventuellement soumis, \mathbf{v} est le champ de vitesse du gaz, ρ la masse volumique du gaz, P sa pression. Pour les fluctuations de densité $\varepsilon = \delta \rho / \rho_0$ autour

d'une valeur moyenne ρ_0 , générant une fluctuation de pression $\eta = \delta P / P_0$, (A3.1) et (A3.2) deviennent, en l'absence de gravitation ($\Phi = 0$) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{P_0}{\rho_0} \nabla^2 \eta + \operatorname{div} \left[(1+\varepsilon)(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \mathbf{v} \right] = 0 \quad (\text{A3.3})$$

Preuve de (A3.3) :

L'équation de continuité (A3.1) s'écrit : $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{v}) = 0$ et l'équation d'Euler (A3.2) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{1+\varepsilon} \nabla \eta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

En remplaçant dans l'équation de continuité précédente $\partial v / \partial t$ par son expression ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + (1+\varepsilon) \operatorname{div} \left(- \frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{1+\varepsilon} \nabla \eta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla \varepsilon \cdot \left(- \frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{1+\varepsilon} \nabla \eta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} + \left(\nabla \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{v} = 0$$

qui donne le résultat annoncé.

CQFD de (A3.3).

En supposant l'écoulement linéaire (terme $\mathbf{v} \cdot \nabla$ négligeable) et les fluctuations de densité spatialement uniformes, (A3.3) devient :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{P_0}{\rho_0} \nabla^2 \eta = 0 \quad (\text{A3.4})$$

On fait intervenir seulement la variable ε ; pour cela on utilise une équation d'état qui relie la pression et la densité, et en supposant l'écoulement adiabatique elle est :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cste}$$

où $\gamma = C_P / C_V$ est l'exposant adiabatique, rapport des capacités calorifiques. Alors :

$$\frac{\delta P}{P_0} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} \rightarrow \eta = \gamma \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$

Soit $\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$ le coefficient de compressibilité adiabatique, on a donc :

$$\gamma \frac{P_0}{\rho_0} = \rho_0 \chi_S = c_S^2$$

où c_S est la vitesse du son dans le gaz. Il vient donc, dans (A3.4) : $\frac{P_0}{\rho_0} \nabla^2 \eta = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \nabla^2 \varepsilon = c_S^2 \nabla^2 \varepsilon$.

On obtient l'équation d'onde :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - c_S^2 \nabla^2 \varepsilon &= 0 \\ c_S^2 &= \rho_0 \chi_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \end{aligned} \right\} (\text{A3.5})$$

Les fluctuations se propagent avec une amplitude constante à la vitesse du son c_S dans le gaz.

En présence d'un champ de gravitation de potentiel Φ , (A3.2) donne :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = - \operatorname{div} \left(\frac{P_0}{\rho_0} \frac{1}{1+\varepsilon} \nabla \eta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Phi \right)$$

Or $\text{div } \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \approx 4\pi G \rho_0 \varepsilon$ qui est l'équation de Poisson, d'où la nouvelle équation d'onde, avec les mêmes hypothèses adoptées :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - c_S^2 \nabla^2 \varepsilon = 4\pi G \rho_0 \varepsilon \quad (\text{A3.6})$$

Les fluctuations de densité peuvent se décomposer en ondes planes de différents modes \mathbf{k} :

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

qui, injectées dans (A3.6) donnent :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \omega^2(\mathbf{k}) \varepsilon = 0 \quad (\text{A3.7a})$$

avec la relation de dispersion :

$$\omega^2(\mathbf{k}) = c_S^2 \mathbf{k}^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (\text{A3.7b})$$

Dans le texte, (A3.7a) et (A3.7b) sont (7.13) et (7.14).

La fréquence des fluctuations s'annule $\omega = 0$ pour la longueur d'onde de Jeans λ_J :

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_S \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \quad (\text{A3.8})$$

qui est (7.15). Selon les valeurs des longueurs d'onde des fluctuations on obtient deux sortes d'évolution :

- vibrations acoustiques si $\omega^2 > 0$ (ω réel), soit $\lambda < \lambda_J$ (gravité négligeable), et l'on a :

$$\omega \approx c_S k \quad (\text{A3.9})$$

- amplification exponentielle des perturbations si $\omega^2 < 0$ (ω imaginaire), soit $\lambda > \lambda_J$ (gravitation dominante aux grandes longueurs d'onde) :

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{A3.10a})$$

avec τ temps caractéristique de l'effondrement gravitationnel du gaz :

$$\tau \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \quad (\text{A3.10b})$$

■ Densité volumique d'énergie des fluctuations :

Aux fluctuations de densité $\varepsilon = \delta \rho / \rho_0$ correspondent des fluctuations de volume de chaque domaine élémentaire du gaz. Si la position \mathbf{x} d'une particule du gaz oscille de $\delta \mathbf{x}$ à la vitesse $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ on a, suite à la conservation de sa masse :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) + \text{div } \mathbf{u} = 0$$

soit $d\varepsilon = -\text{div } \mathbf{u} dt$, donc : $\varepsilon = -\text{div } \mathbf{x}$ que l'on remplace dans (A3.7a) compte tenu de (A3.7b) :

$$-\frac{d^2}{dt^2} \text{div } \mathbf{x} - c_S^2 k^2 \text{div } \mathbf{x} + 4\pi G \rho_0 \text{div } \mathbf{x} = 0$$

soit :

$$-\text{div } \frac{d\mathbf{u}}{dt} - c_S^2 k^2 \text{div } \mathbf{x} + 4\pi G \rho_0 \text{div } \mathbf{x} = 0$$

En intégrant cette expression sur le volume, en utilisant la relation d'Ostrogradski, on a :

$$\rho_0 \int_V \operatorname{div} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + c_S^2 k^2 \mathbf{x} - 4\pi G \rho_0 \mathbf{x} \right) dV = \rho_0 \int_S \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + c_S^2 k^2 \mathbf{x} - 4\pi G \rho_0 \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{n} dS = cste \quad (\text{A3.11})$$

où chaque terme est :

$$\int_S \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS = \int \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot r d\mathbf{x} = \int r \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt = r \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \frac{1}{2} r \mathbf{u}^2 ,$$

$$\int_S 4\pi G \rho_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi G \rho_0 \int \mathbf{x} \cdot r d\mathbf{x} = 4\pi G \rho_0 r \cdot \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 ,$$

$$\int_S c_S^2 k^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS = \int c_S^2 k^2 \mathbf{x} \cdot r d\mathbf{x} = \frac{1}{2} c_S^2 k^2 r \cdot \mathbf{x}^2$$

L'énergie par unité de volume est le travail de la force volumique $\rho d\mathbf{u}/dt$ sur le déplacement $d\mathbf{x} = \mathbf{u} dt$:

$$\begin{aligned} \rho_E &= \int \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \int \rho_0 (1+\varepsilon) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \\ &= \rho_0 \int \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} + \rho_0 \int \varepsilon \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \rho_0 \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} + \rho_0 \int \varepsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \int \varepsilon d(\mathbf{u}^2) \end{aligned}$$

Les trois termes donnés précédemment, lorsqu'on les considère par unité de longueur $r = 1$, sont les différentes composantes linéiques de l'énergie par unité de volume linéique, c'est-à-dire par unité de surface $\rho_E(r = 1)$:

$$\rho_E = \rho_{EC} + \rho_{EA} + \rho_{EG}$$

avec $\int_V \rho_E dV = E$ qui est la constante de l'égalité (A3.11) signifiant que l'énergie se conserve.

Comme $\mathbf{u} = \omega \mathbf{x}$, où ω est donnée par la relation de dispersion (A3.7b), les trois composantes de ρ_E (avec $r = 1$) sont :

- densité d'énergie cinétique : $\rho_{EC} = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}^2$
- densité d'énergie acoustique, ou élastique : $\rho_{EA} = \frac{1}{2} \rho_0 c_S^2 k^2 \mathbf{x}^2$
- densité d'énergie gravitationnelle : $\rho_{EG} = -\frac{1}{2} \rho_0 (4\pi G \rho_0) \mathbf{x}^2$

qui donnent, avec (A3.8) :

$$\rho_E = \frac{1}{2} \rho_0 (\omega^2 + c_S^2 (k^2 - k_J^2)) \mathbf{x}^2 \quad (\text{A3.12})$$

A3.2 – Perturbation de densité dans un espace en expansion

Dans un espace en expansion de facteur d'échelle $a(t)$, le vecteur déplacement \mathbf{x} est une coordonnée comobile qui correspond à une distance physique \mathbf{D} par :

$$\mathbf{D}(t) = a(t) \mathbf{x}$$

Le champ de vitesse est donné par (4.4a) et (4.4b) :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{v}_{rec} + \mathbf{v}_{propre}$$

où \mathbf{v}_{rec} est la vitesse de récession due à l'expansion :

$$\mathbf{v}_{rec} = \frac{da}{dt}(t) \mathbf{x} = H a \mathbf{x} = H \mathbf{D} \quad (\text{A3.13a})$$

et \mathbf{v}_{propre} la vitesse propre de la particule de gaz :

$$\mathbf{v}_{propre} = a(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} \quad (\text{A3.13b})$$

où le vecteur \mathbf{u} de (A3.13b) remplace ici le vecteur \mathbf{u} du point A3.1.

Pour transformer les équations dynamiques (A3.1) et (A3.2) en tenant compte de l'expansion (termes contenant $a(t)$), on utilise les correspondances entre la dérivée temporelle où $a = 1$ (sans expansion) et celle où $a = a(t)$, et entre le gradient où $a = 1$ et celui où $a = a(t)$, sachant que $\mathbf{D} = a\mathbf{x}$ et $\mathbf{v} = H a \mathbf{x} + \mathbf{u}$, avec $\mathbf{u} = a \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ et $H = (1/a) da/dt$:

- $\nabla_{\mathbf{D}} = \partial/\partial \mathbf{D}$, qui intervenait sous l'écriture ∇ dans les équations sans expansion précédentes, devient ici, avec la définition de \mathbf{D} :

$$\nabla \rightarrow \nabla_{\mathbf{D}} = \nabla_{a\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}}$$

- $(\partial\rho/\partial t)_{a=1}$ qui intervenait sous l'écriture $(\partial\rho/\partial t)$ dans les équations sans expansion précédentes, devient ici :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} + \frac{\partial\rho}{\partial \mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

comme $\mathbf{D}(x, t) = a(t)\mathbf{x}$ on a $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{da(t)}{dt} \mathbf{x}$ d'où :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} + \nabla_{\mathbf{D}} \rho \cdot \frac{da}{dt} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \rho \cdot \frac{da}{dt} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} + H \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho$$

soit :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) \rightarrow \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_a - H \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho$$

La conservation de la masse devient alors :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{a=1} + \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_a - H \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho \mathbf{v})$$

or :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho H \mathbf{D}) + \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ &= H \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{D}} \rho + \rho H \nabla_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{D}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = H \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) \end{aligned}$$

puisque $\nabla_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} = 3$ d'où :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_a + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A3.14a})$$

L'équation du mouvement devient :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{a=1} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{D}}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{D}} P - \nabla_{\mathbf{D}} \Phi = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_a - H(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{D}}) \mathbf{v}$$

comme $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_a = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, $\mathbf{v} = H a \mathbf{x} + \mathbf{u}$ et $(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{D}}) \mathbf{v} = \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}$ il vient, après développement :

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{u}}{dt} - H(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{D}}) \mathbf{v} \\ &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} - H^2 a(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{x} - H(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u} + H^2 a(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{x} + H(\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u} + H(\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{x} + \frac{1}{a} (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

et puisque $H(\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{x} = H \mathbf{u}$ on obtient :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{a}(\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u} + H\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho a} \nabla_{\mathbf{x}} P - \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \quad (\text{A3.14b})$$

La densité du gaz s'exprimant avec ses fluctuations : $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(t)(1 + \varepsilon(\mathbf{x}, t))$, (A3.14a) devient :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((1 + \varepsilon)\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A3.15})$$

où l'on a appliqué (A3.14a) à l'amplitude ρ_0 : $\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a + 3H\rho_0 + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$. L'équation (A3.15), combinée avec (A3.14b), donne l'équation d'évolution suivante, qui remplace (A3.3) :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2H \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\rho a^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 P + \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((1 + \varepsilon) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) + \frac{1}{a^2} \partial_k \partial_j ((1 + \varepsilon) u^k u^j) \quad (\text{A3.16})$$

Le potentiel gravitationnel Φ est toujours déterminé par l'équation locale (équation de Poisson) qui prend la forme :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0 a^2(t) \varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A3.17})$$

de solution :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -G \rho_0 a^2 \int \frac{\varepsilon(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (\text{A3.18})$$

Dans l'approximation de faibles amplitudes de fluctuation ($\varepsilon \ll 1$) et de gradient faible, (A3.16) donne, compte tenu de l'équation d'état du fluide vue au point 3.1 :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2H \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{c_S^2}{a^2} \nabla^2 \varepsilon + 4\pi G \rho_0(t) \varepsilon \quad (\text{A3.19})$$

Comme $\nabla^2 \varepsilon = -k^2 \varepsilon$ on obtient (7.19) :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2H \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2 \varepsilon = 0 \quad (\text{A3.20a})$$

avec :

$$\omega^2 = \frac{c_S^2 k^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0(t) \quad (\text{A3.20b})$$

où ω donné par (A3.20b) diffère de son expression statique (7.14) par la présence de $a(t)$ et la dépendance de $\rho_0(t)$ avec le temps. Il s'ensuit que la longueur d'onde de Jeans, qui marque la transition vers l'effondrement gravitationnel, dépend elle aussi du temps cosmique :

$$\lambda_J(t) = \frac{c_S}{a(t)} \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0(t)}} \quad (\text{A3.21})$$

*
* *

Références :

[1] Frédéric Élie : *Le vide quantique et ses fluctuations*, site <http://fred.elie.free.fr>, 2021

[2] Planck Collaboration : *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astronomy & Astrophysics, July 18, 2018, © ESO 2018

- [3] S. Perlmutter et al, The Supernova Cosmology Project : *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, accepted for publication in The Astrophysical Journal, 1999
- [4] Adam G. Riess et al : *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, To Appear in the Astronomical Journal, 1998
- [5] Wikipedia : *Fond diffus cosmologique*, Contenu soumis à la licence CC-BY-SA 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.fr>) Source : Article Fond diffus cosmologique de Wikipédia en français (http://fr.wikipedia.org/wiki/Fond_diffus_cosmologique), version du 18 juin 2019
- [6] W-M. Yao et al : *Review of Particle Physics*, 2006, Particle Data Group
- [7] Dicke, R. H. ; Peebles, P. J. E. ; Roll, P. J. ; Wilkinson, D. T. (July 1965). "Cosmic Black-Body Radiation". *Astrophysical Journal Letters*. 142 : 414–419.
- [8] Robert Jastrow : *Des astres, de la vie et des hommes*, Seuil, 1972
- [9] Frédéric Élie : *Loi de l'émission du rayonnement (loi de Planck): une démonstration quantique* - 2003, article édité en avril 2014 sur <http://fred.elie.free.fr>
- [10] Patrick Peter, Jean-Philippe Uzan : *Cosmologie primordiale*, éd. Belin 2005
- [11] https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Constante_de_Hubble&oldid=158807445
- [12] <https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm>
- [13] <https://uclouvain.be/fr/chercher/actualites/la-loi-de-hubble-rebaptisee-en-loi-de-hubble-lemaitre.html>
- [14] E. Hubble (1929), *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae* in Proceedings of the National Academy of Sciences
- [15] Jee et al., *A measurement of the Hubble constant from angular diameter distances to two gravitational lenses*, *Science* 365, 1134–1138 (2019)
- [16] Agnès Acker : *Astronomie, Astrophysique : introduction*, Cours, Dunod 2005
- [17] Jean-Pierre Luminet : *L'écume de l'espace-temps*, éd. Odile Jacob, octobre 2020
- [18] Gilles Cohen-Tannoudji : *Les constantes universelles*, Hachette Littératures, Collection Pluriel, 1998
- [19] Hubert Reeves : *Dernières nouvelles du cosmos, I – Vers la première seconde*, éd. Seuil septembre 1994
- [20] Hubert Reeves : *Dernières nouvelles du cosmos, II – La première seconde*, éd. Seuil septembre 1995
- [21] Frédéric Élie : *Quaternions et rotations en mécanique quantique*, site <http://fred.elie.free.fr> , juin 2020
- [22] Frédéric Élie : *Spineurs et algèbre vectorielle en physique quantique ; application à l'équation de Dirac*, site <http://fred.elie.free.fr> , octobre 2017
- [23] Frédéric Élie : *Introduction aux équations de Lagrange en mécanique analytique*, site <http://fred.elie.free.fr> , octobre 2011
- [24] Alan Guth : *Inflationary universe : a possible solution to the horizon and flatness problems*, *Phys. Rev. D* 23, 347, 1981
- [25] Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics (LUNA) : *The baryon density of the Universe from an improved rate of deuterium burning*, 11 novembre 2020, *Nature* 587, 210–213(2020)
- [26] J.A. Peacock : *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999
- [27] Frédéric Élie : *Pendule de Foucault* – site <http://fred.elie.free.fr> , juillet 2011
- [28] Stephen Hawking, Roger Penrose : *La nature de l'espace et du temps*, présentation de Marc Lachièze-Rey, éd. Gallimard, 1997

- [29] Leonard Susskind : *Trous Noirs*, Robert Laffont, 2008
- [30] S. Hawking : *L'univers dans une coquille de noix*, Odile Jacob, 2001
- [31] Jean-François Lahaeye : *Corps noirs et Trous noirs, une question de température*, L'École d'Autarcique Parc – Questions de Cours de Récré – N° 2, 3 décembre 2014, édité sur le site <http://fred.elie.free.fr> en avril 2015
- [32] Jean-François Lahaeye : *Trou noir univers, une question de cohérence des unités physiques*, L'École d'Autarcique Parc – Questions de Cours de Récré – N° 3, 21 décembre 2014, édité sur le site <http://fred.elie.free.fr> en avril 2015
- [33] Chanfray Guy, Smadja Gérard : *Les particules et leurs symétries* – Masson 1997
- [34] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet : *Physique statistique* – Hermann 2001