ACCUEIL

Force d'Archimède et niveau d'eau

Frédéric Élie

(mai 2017)

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Dans cet article une expérience très simple est proposée : dans un récipient contenant de l'eau, on dispose un plus petit récipient qui flotte sur la surface libre ; lorsque l'on dépose avec précaution des billes de métal dans le petit récipient, celui-ci s'enfonce et donc le niveau d'eau monte ; mais lorsque l'on retire ces billes pour les déposer au fond du grand récipient, le niveau descend. Cette variation de niveau est explicable par la poussée d'Archimède exercée sur le petit récipient contenant les billes. La variation de niveau permet tout simplement de déduire la masse des billes, et celles-ci étant connues par ailleurs, la correspondance est bien vérifiée expérimentalement.

SOMMAIRE

1 – Observation qualitative

Soit un récipient rigide cylindrique que l'on remplit d'eau jusqu'à une hauteur initiale. Un autre récipient, cylindrique mais de diamètre plus petit, contient un solide ; il est disposé dans l'eau du grand récipient et s'y enfonce :

- Si le solide est trop lourd et/ou si le diamètre du petit récipient est trop étroit, l'ensemble coule dans le grand récipient ;
- Dans le cas contraire, le petit récipient, avec le solide qu'il contient, s'enfonce jusqu'à une certaine profondeur et la surface libre de l'eau monte et se stabilise jusqu'à une certaine hauteur ; on appelle tirant d'eau la différence de hauteur entre la nouvelle surface libre et le fond du petit récipient.

On va montrer, dans cet article, que la différence entre la nouvelle surface libre et la surface libre initiale permet de déduire la masse contenue dans le petit récipient.
Par ailleurs, lorsque l'on retire le petit récipient et que l'on immerge complètement le solide au fond du grand récipient, la surface libre obtenue est intermédiaire entre la surface libre initiale et

la surface libre lorsque le petit récipient flottait. La différence entre cette nouvelle surface libre et celle initiale fournit le volume du solide ; on déduit alors, à partir des deux manips, la densité du solide.

2 – Aspects théoriques

On s'intéresse d'abord au cas où un petit récipient cylindrique contenant un solide de masse m_S flotte sur l'eau contenue dans un grand récipient cylindrique. La géométrie et les notations sont données à la figure 1.

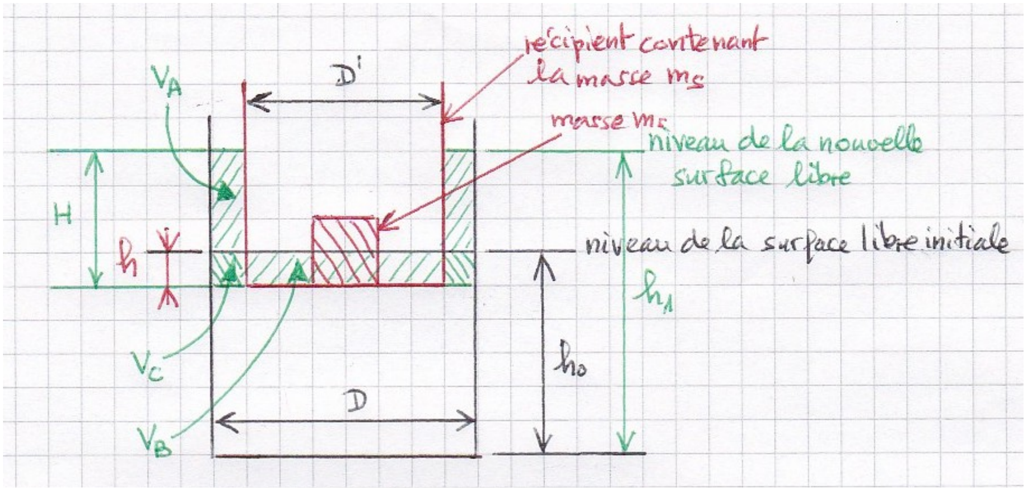


figure 1 : petit récipient cylindrique de diamètre D', contenant un solide de masse mS, flottant sur l'eau d'un récipient cylindrique de diamètre D > D'

Le petit récipient a un diamètre *extérieur* D', et le grand récipient a un diamètre *intérieur* D > D'. On désigne :

- hauteur de la surface libre initiale (sans le petit récipient) : h_0
- hauteur de la nouvelle surface libre, en présence du petit récipient qui flotte : h_1
- hauteur entre la surface libre initiale et le fond du petit récipient : h
- tirant d'eau : $H = h + h_1 - h_0$

Lorsque le petit cylindre, avec la masse m_S, flotte la hauteur d'eau monte de h_0 à h_1. Cette ascension résulte du déplacement du volume d'eau par le flotteur, soit V le volume d'eau déplacée. Comme le volume initial de l'eau se conserve, V est aussi égale au volume correspondant à la partie du flotteur située au-dessous du niveau initial, et dont la hauteur est h. L'ascension de l'eau est donc directement liée à la géométrie des récipients, en l'occurrence leurs diamètres respectifs.
D'après le théorème d'Archimède, le poids du flotteur (petit récipient + solide) est égal (et opposé en direction) au poids du volume d'eau déplacé. On peut alors déduire la masse du flotteur (et donc celle m_S du solide) en écrivant cette égalité, et le calcul doit alors faire intervenir la densité de l'eau, les diamètres D et D' des récipients et la variation de niveau $h_1 - h_0$.
Soit ρ la masse volumique du liquide (ici : l'eau), et V le volume du liquide déplacé ; la force (ou poussée) d'Archimède s'exerce dans le sens opposé à la pesanteur, et elle est égale à :

$$\vec{F}_A = -\iiint_V \rho \vec{g}\, dV$$

Le poids du flotteur est égal à :

$$\vec{P} = \iiint_{V_F} \rho_F \vec{g}\, dV_F$$

où ρ_F et V_F désignent respectivement la masse volumique et le volume du flotteur (c'est-à-dire ici le récipient plongeur avec la masse m_S qu'il contient).
L'équilibre correspond à l'annulation des forces exercées sur le flotteur ; il est atteint pour un tirant d'eau tel que l'on ait :

$$\vec{F}_A+\vec{P}=0 \quad (1)$$

NB : le cas où cette condition ne peut être satisfaite est celui où le flotteur coule ; cela se produit lorsque sa densité est trop élevée devant celle du liquide et/ou lorsque le volume déplacé est trop petit.
Dans l'approximation 1D axisymétrique de notre problème (récipient flotteur et récipient contenant cylindriques et coaxiaux), la condition (1) se traduit par (cf. figure 1):

$$m_F=\rho V \quad (2)$$

où la masse du flotteur m_F est la somme de la masse du récipient plongeur m_R et de la masse du solide qu'il contient m_S : $m_F = m_R + m_S$.
La masse du récipient plongeur m_R est connue par ailleurs ; elle s'obtient, elle aussi, par application du théorème d'Archimède, comme on le verra plus loin. (2) permet donc de déduire m_S à partir de la mesure du volume de liquide déplacé V :

$$m_S=\rho V-m_R \quad (3)$$

Soit donc à calculer V dans la géométrie de la figure 1.
Le volume de liquide déplacé est égal à : $V = V_A = V_B$. Or on a :

$$\begin{gathered} V_A=\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)(h_1-h_0) \\ V_B=\frac{\pi}{4}D'^2 h \end{gathered} \quad (4)$$

l'égalité $V_A = V_B$ montre que h_1 dépend de h, lequel doit être calculé. Pour cela, on écrit que le volume total de liquide V_T est égal à la somme du volume déplacé V_A et du volume non déplacé V' : $V_T = V_A + V'$. Or il vient :

$$\begin{gathered} V_T=\frac{\pi}{4}D^2 h_0=V_A+V' \\ V'=\frac{\pi}{4}D^2(h_0-h)+V_C \end{gathered}$$

avec :

$$V_C=\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)h$$

on a donc :

$$V_T=V_A+\frac{\pi}{4}D^2(h_0-h)+\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)h$$

qui, avec V_A donné par (4), fournit :

$$V_T=\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)(h_1-h_0)+\frac{\pi}{4}D^2(h_0-h)+\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)h=\frac{\pi}{4}D^2 h_0$$

d'où l'on tire la relation entre h et h_1, c'est-à-dire la partie immergée du flotteur sous le niveau initial h_0 :

$$h=\frac{D^2-D'^2}{D'^2}(h_1-h_0)$$

ce qui fournit la hauteur de la partie immergée du flotteur sous la nouvelle surface libre h1 (que l'on a appelé le tirant d'eau) : $H = h + h_1 - h_0$

soit, en posant r = D'/D :

$$H=\frac{1}{r^2}(h_1-h_0)$$

mais $h_1 - h_0$ (élévation du niveau) dépend aussi des diamètres et de la masse totale du flotteur m_F puisque à l'équilibre (2) s'écrit :

$$V=\frac{\pi}{4}(D^2-D'^2)(h_1-h_0)=\frac{m_F}{\rho}$$

soit :

$$h_1-h_0=\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{1}{(D^2-D'^2)} \quad (5)$$

ce qui donne pour le tirant d'eau :

$$H=\left(\frac{D}{D'}\right)^2\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{1}{(D^2-D'^2)} \quad (6)$$

en exprimant $(h_1 - h_0)$ et H avec le rapport des diamètres r, les expressions (5) et (6) deviennent :

$$h_1-h_0=\frac{1}{D^2}\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{1}{(1-r^2)} \quad (7)$$

$$H=\frac{1}{D^2}\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{1}{(1-r^2)} \quad (8)$$

Remarque importante :

Si l'on trace brutalement les courbes correspondant à (7) et (8), en fixant le grand diamètre D, on verrait deux anomalies pour r = 0 :

- La variation de niveau $h_1 - h_0$ ne serait pas nulle : autrement dit pour un cylindre flotteur infiniment fin le niveau d'eau changerait quand même ; ceci ne correspond pas à la réalité : ce serait comme si le fait de plonger un thermomètre dans une piscine ferait bouger le niveau d'eau !
- Le tirant d'eau H deviendrait infini, ce qui, évidemment, n'a pas de sens physique.

Le paradoxe est levé si on fixe le petit diamètre D' au lieu de D, ce qui revient à remplacer D par D'/r dans (7) et (8), ce qui donne :

$$h_1-h_0=\frac{1}{D'^2}\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{r^2}{(1-r^2)} \quad (9)$$

$$H=\frac{1}{D'^2}\frac{4}{\pi}\frac{m_F}{\rho}\frac{1}{(1-r^2)} \quad (10)$$

Ce changement de paramètre n'est pas une manœuvre artificielle : il consiste à distinguer, dans la géométrie de la flottaison, ce qui est fixé de ce qui est susceptible de varier. En effet, avec D' fixé, le fait d'avoir r << 1 ne signifie pas que D' est infiniment fin mais que le récipient conteneur est très large par rapport au flotteur (D grand). On obtient bien en (9), pour r = 0, que $h_1 - h_0 = 0$ (pas de changement de niveau), et en (10), que H reste fini, à savoir :

$$H(0)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{D'^2}\frac{m_F}{\rho}=\frac{m_F}{\rho S'} \quad (11)$$

où S' est la section du flotteur ; le volume d'eau déplacé est donc, lorsque r = 0 :

$$V(0)=\rho S' H(0)$$

et est donc directement proportionnel au tirant d'eau ; c'est bien ce qui se passe pour un bateau de taille finie (D' ou S' fixés) flottant sur une étendue d'eau très grande (mer ou océan) (D >> D') : il s'y enfonce partiellement (tirant d'eau) et pour autant le niveau de l'océan ne change pas à son échelle ([1]).
D'ailleurs, dans (7) et (8) on retrouve ces conclusions à condition de faire aussi D = infini au voisinage de r = 0.
La figure 2 montre les courbes de (9) et (10) normalisées par H(0), donnée par (11) :

$$\begin{aligned}\frac{h_1-h_0}{H(0)}&=\frac{r^2}{1-r^2}\\ \frac{H}{H(0)}&=\frac{1}{1-r^2}\end{aligned} \quad (12)$$

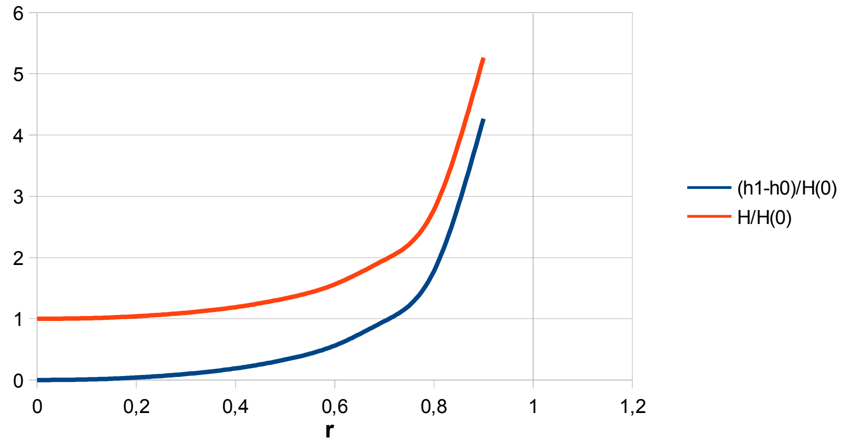


figure 2 : variation théorique du niveau et du tirant d'eau avec le rapport r des sections du corps flottant et du récipient contenant le liquide

Terminons ces aspects théoriques par la façon d'évaluer le volume de la masse solide, V_S, contenue dans le récipient flotteur. Pour cela, il suffit d'immerger jusqu'au fond du grand récipient le solide, après avoir retiré le récipient flotteur : le niveau d'eau est alors h_2, et l'on constate que l'on a toujours $h_0 < h_2 < h_1$ (figure 3). Comme la masse m_S est déterminée par les procédés décrits plus haut, on déduit la masse volumique du solide $\rho_S = m_S/V_S$.

---

1 Attention cependant de ne pas déduire trop vite pour ce qui est de l'action de la fonte des glaces sur l'élévation du niveau des océans, comme cela est pressenti (ou avéré) dans l'étude du changement climatique de la Terre. En effet, lorsque la glace provient des surfaces continentales, situées au-dessus du niveau des océans, elle constitue une arrivée en masse supplémentaire dans l'eau des océans ; si cette quantité est suffisamment importante, elle modifie le niveau des océans. De plus, le déversement de l'eau douce, provenant des glaces, dans l'eau salée des océans entraîne une modification des gradients de salinité et de température dans l'eau, avec pour effet des changements sur les courants marins (et donc les vecteurs de chaleur sur les côtes) dont le moteur sont ces gradients. Par exemple, si le Gulf Stream, qui véhicule la chaleur des zones tropicales de l'océan Atlantique vers les côtes occidentales de l'Europe, venait à s'arrêter puis de s'inverser suite aux modifications des gradients, alors ces côtes, jusqu'à présent tempérées, connaîtraient des hivers beaucoup plus rigoureux et comparables à ceux des côtes orientales du Canada, situées aux mêmes latitudes mais que ne longe pas le Gulf Stream ! Ces sujets sont largement présentés dans notre article :
Frédéric Élie : *Réchauffement climatique : bases scientifiques pour comprendre le problème* – site http://fred.elie.free.fr, novembre 2007, modifié mars 2009.

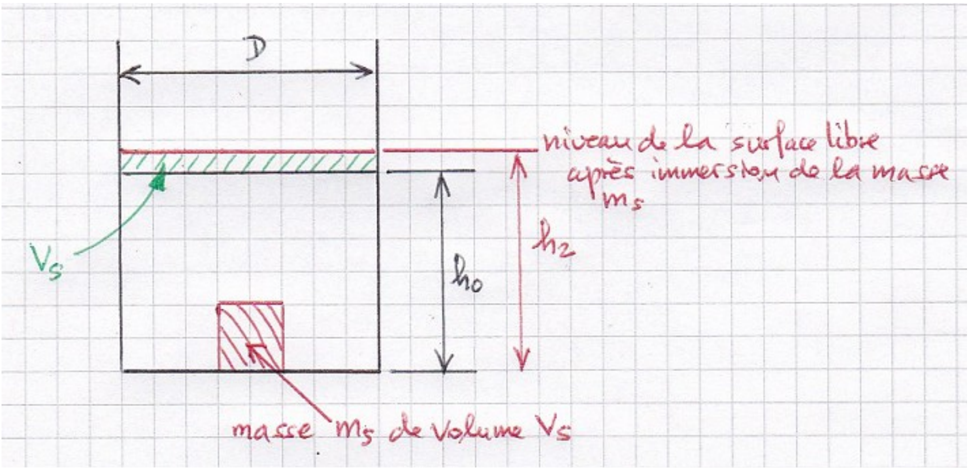


Figure 3 : évaluation du volume d'un solide

Par conservation du volume total de l'eau, le volume du solide est le même que celui de la colonne d'eau d'épaisseur $h_2 - h_0$, donc :

$$V_S = (h_2 - h_0)\frac{\pi}{4}D^2 \quad (13)$$

La relation (13) s'écrit encore :

$$V_S = ((h_2 - h_1) + (h_1 - h_0))\frac{\pi}{4}D^2$$

où $h_1 - h_0$ est obtenu par (7), ce qui donne :

$$h_2 - h_1 = \frac{4}{\pi D^2}V_S - (h_1 - h_0) = \frac{4}{\pi D^2}\left(V_S - \frac{m_F}{\rho}\frac{1}{1-r^2}\right) = \frac{4}{\pi D^2}\left(V_S - \frac{V}{1-r^2}\right) \quad (14)$$

puisque $m_F = \rho V$. Sous quelle condition a-t-on $h_2 < h_1$? Pour cela on utilise :

$m_S = \rho_S V_S = \rho V - m_R$ soit encore : $\rho V = \rho_S V_S + m_R$ ce qui montre que $\rho V > \rho_S V_S$

Si $\rho_S > \rho$ (donc si le solide contenu dans le récipient flotteur est plus dense que le liquide), on a : $\frac{V_S}{V} < \frac{\rho}{\rho_S} < 1$. Dans ce cas, dans (14), $V/(1-r^2) > V$ (puisque $r > 1$) entraîne que $V_S < V/(1-r^2)$ donc $h_2 - h_1 < 0$.

D'autre part (14) entraîne aussi que $h_2 - h_1 = \frac{4}{\pi D^2}V_S - h_1 + h_0$ soit : $h_2 = h_0 + \frac{4}{\pi D^2}V_S > h_0$

En conclusion, on a montré que, si $\rho_S > \rho$ (solide plus dense que le liquide), on a toujours :

$$h_0 < h_2 < h_1 \quad (15)$$

Quant à la mesure de m_R (masse du récipient flotteur seul), elle s'obtient aussi à partir du théorème d'Archimède : on fait flotter le récipient et on repère le niveau h_1 correspondant (que l'on notera h_{1R} pour éviter les confusions de notation) ; soit D_R le diamètre *extérieur* du flotteur (que l'on peut confondre avec D' si ses parois sont minces), la masse du récipient flotteur seul est alors :

$$m_R = \rho\frac{\pi}{4}(D^2 - D_R{}^2)(h_{1R} - h_0) \quad (16)$$

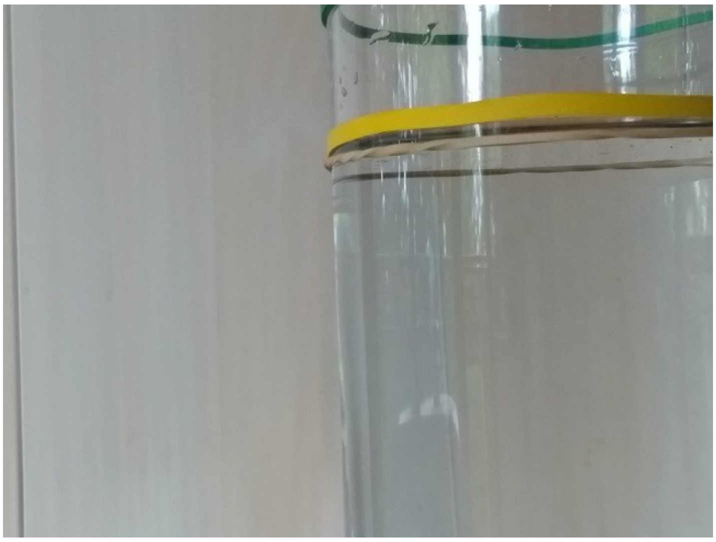
3 – Manip n°1 : bécher contenant des billes de masse inconnue, plongeant dans un grand tube en verre cylindrique

Cf. photos de la figure 4. Dans un bécher de dimensions connues (D' = 5,5 cm) on dispose 35 billes identiques, en métal, dont on veut évaluer la masse m_S . Les différents niveaux que l'on obtiendra seront repérés par des élastiques de couleur pour faciliter la lecture : niveau initial h_0 (élastique beige), niveau après plongement du flotteur h_1 (élastique vert), niveau après immersion du solide seul h_2 (élastique jaune). Le récipient contenant de l'eau est en verre, cylindrique, de diamètre intérieur D = 8,8 cm ; on y verse de l'eau jusqu'à une hauteur stabilisée h_0 = 21 cm.

(a) niveau initial h_0 de l'eau dans le grand récipient : repéré par un élastique beige

(b) nouvelle hauteur de la surface libre h_1 après plongement du bécher contenant les 35 billes métalliques : repérée par un élastique vert

(c) niveau h_2 après immersion complète des billes au fond du grand récipient : repéré par un élastique jaune



(d) zoom sur le niveau h_2, on s'aperçoit qu'il est juste au-dessus de h_0

Figure 4 : évaluation des niveaux h_0, h_1, h_2 pour un grand récipient cylindrique en verre D = 8,8 cm où flotte un bécher D' = 5,5 cm contenant 35 billes métalliques identiques de masse m_S

On fait flotter le bécher contenant les billes en veillant à ce que celles-ci ne se déplacent pas trop pour éviter le chavirement du bécher : pour cela on a disposé au fond du bécher un morceau de papier essuie-tout, de masse négligeable, sur le quel on pose les billes. Malgré cette précaution, l'image (b) de la figure 4 montre que le bécher reste incliné, moins, certes, qu'en l'absence du fond en papier.
La masse m_R du bécher seul a été préalablement évaluée comme indiqué à la fin du point 2, et moyennant la relation (16). On a mesuré : $h_{1R} - h_0$ = 1 cm, et en assimilant D_R = D', (16) fournit :

$m_R = \rho\pi/4\ (D^2 - D'^2)(h_{1R} - h_0) = 1000 \times \pi/4\ (0{,}088^2 - 0{,}055^2) \times 0{,}01 = 3{,}7.10^{-2}$ kg = 37 g

Une fois le bécher, contenant les billes, plongé dans l'eau du grand récipient, le niveau monte et atteint h_1 = 24,8 cm. Avec r = D'/D = 5,5/8,8 = 0,625, et $h_1 - h_0$ = 0,248 – 0,210 = 0,038 m (3,8 cm), la relation (9) donne m_F :

$$m_F = \frac{\pi}{4} D'^2 \rho (h_1 - h_0) \frac{1-r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4} \times 0{,}055^2 \times 1000 \times 0{,}038 \times \frac{1-0{,}625^2}{0{,}625^2} = 1{,}41.10^{-1}\,kg = 141\,g$$

d'où la masse des 35 billes : $m_S = m_F - m_R$ = 141 – 37 = 104 grammes.
Le volume des billes V_S et obtenu en les immergeant dans le grand récipient et en repérant h_2, on obtient h_2 = 21,3 cm et (13) donne :

$$V_S = \frac{\pi}{4} D^2 (h_2 - h_0) = \frac{\pi}{4} \times 0{,}088^2 \times (0{,}213 - 0{,}210) = 1{,}82.10^{-5}\,m^3$$

d'où une masse volumique de : $\rho_S = m_S/V_S = 0{,}104/1{,}82.10^{-5}$ = 5700 kg/m^3. Cette valeur est proche de celle de l'étain gris (5750 kg/m^3) ; cela correspond bien au matériau des billes employées.
Vérifions aussi que le volume de chaque bille individuelle, dont le diamètre a été préalablement mesuré, correspond bien aux prévisions théoriques :
Sur un échantillon de 250 billes supposées identiques, on a trouvé un diamètre moyen d = 0,9 cm, sachant que les billes ne sont pas toutes rigoureusement sphériques. Comparons cette valeur moyenne avec le diamètre qu'aurait chaque bille à partir de la connaissance de sa masse volumique :
soit m'_S la masse d'une bille, on a évidemment $m'_S = m_S/35$ = 0,104/35 = 0,003 kg = 3 g. Le diamètre correspondant théorique est alors $d = (6/\pi\ m'_S/\rho_S)^{1/3} = (6/\pi\ 0{,}003/5700)^{1/3}$ = 0,01 m = 1 cm ce qui est du même ordre de grandeur, considérant les incertitudes accumulées dans cette manip.
Le tirant d'eau H a été difficile à mesurer à cause de l'inclinaison du bécher contenant les billes ; sa valeur théorique donnée par (10) est :

$$H = \frac{1}{D'^2} \frac{4}{\pi} \frac{m_F}{\rho} \frac{1}{1-r^2} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{0{,}055^2} \frac{0{,}141}{1000} \frac{1}{1-0{,}625^2} = 0{,}097\,m = 9{,}7\,cm$$

4 – Manip n°2 : éprouvette cylindrique en plastique contenant un poids de balance de 10 grammes, plongeant dans le bécher

Cf. photos de la figure 5.

Dans cette manip, c'est le bécher de la manip n°1 qui sert de grand récipient, avec donc approximativement D = 5,5 cm. On y verse de l'eau jusqu'à une hauteur h_0 = 4,3 cm (repère par élastique beige).
Le récipient flotteur est une éprouvette cylindrique en plastique de diamètre extérieur D' = 2,4 cm. On y dispose un poids de balance, en laiton, de masse m_S = 10 grammes. Étant donnée sa faible valeur de masse, en comparaison de celle de l'éprouvette, la masse de celle-ci doit être bien prise en compte : elle est connue par ailleurs et vaut m_R = 3 grammes.
Le flotteur, avec son contenu (la masse de 10 grammes) est plongé dans l'eau du bécher et laissé en flottaison. Le niveau d'eau monte et atteint h_1 = 5 cm (repère élastique vert).

(a) niveau d'eau initial h_0 dans le bécher (repère élastique beige)

(b) nouvelle hauteur d'eau h_1 après plongement de l'éprouvette contenant la masse de 10g (repère élastique vert)

Figure 5 : évaluation des niveaux h_0, h_1, pour un bécher D = 5,5 cm où flotte une éprouvette en plastique D' = 2,4 cm contenant une masse m_S = 10 grammes

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{D'^2} \frac{4}{\pi} \frac{m_F}{\rho} \frac{r^2}{(1-r^2)}$$

On cherche à vérifier si la masse déduite des observations correspond bien à sa valeur réelle. Pour cela on utilise (9), avec : D' = 2,4 cm ; r = 2,4/5,5 = 0,44 ; $h_1 - h_0$ = 5 – 4,3 = 0,7 cm, d'où

$$m_F = \frac{\pi}{4} D'^2 \rho (h_1 - h_0) \frac{1-r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4} \times 0{,}024^2 \times 1000 \times 0{,}007 \times \frac{1-0{,}44^2}{0{,}44^2} = 1{,}32 . 10^{-2}\, kg = 13{,}2\, g$$

et l'on obtient : $m_S = m_F - m_R$ = 13,2 – 3 = 10,2 g (très proche donc des 10 grammes du poids).