



Frédéric Elie on
ResearchGate

Problème de Kepler et mouvement des planètes

Frédéric Élie

novembre 2012

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Des propriétés des forces centrales conservatives (i.e. qui dérivent d'un potentiel) on déduit une propriété importante: celle de la conservation du moment cinétique. S'en découle alors la deuxième loi de Kepler: la loi des aires, qui concerne aussi bien les interactions gravitationnelles newtoniennes que n'importe quelle autre interaction pourvu qu'elle soit centrale. Parmi elles existe la famille d'interactions dont le potentiel est de la forme $U(r) = K/r$: c'est le problème de Kepler. À noter que cette famille inclut aussi bien les forces attractives (par exemple: gravitation de Newton: $K < 0$, et forces coulombiennes entre charges de signes opposés) que répulsives (par exemple: forces coulombiennes entre charges de même signe: $K > 0$).

On montre que, pour le problème de Kepler, les trajectoires des particules soumises à ces forces sont des coniques. Ce résultat est la conséquence de l'existence de plusieurs invariants propres au problème de Kepler: la constante vectorielle v_0 (qui s'exprime avec le vecteur vitesse de la particule et le module de son moment cinétique), le vecteur excentricité et le vecteur de Runge-Lenz ou vecteur de Laplace. La nature de la conique (hyperbole, parabole, ellipse) dépend directement de l'énergie mécanique.

Dans le cas particulier des forces attractives et de l'ellipse, on montre la troisième loi de Kepler, qui lie la période de révolution au demi-grand axe de l'ellipse.

Nous nous limitons ensuite désormais au cas du mouvement elliptique des planètes autour du Soleil. Le cercle apsidal, qui est le cercle circonscrit à l'ellipse, revêt une grande importance pour permettre la détermination de la trajectoire de l'astre à partir des observations, notamment du moyen mouvement n . L'équation de Kepler, que nous démontrons, établit alors une relation entre n et l'anomalie excentrique qui définit la position angulaire sur le cercle apsidal. La résolution de cette équation, qui est une équation transcendante, nécessite des méthodes d'approximation. Une fois la solution obtenue, on peut remonter à l'anomalie vraie (la position angulaire de l'astre sur l'ellipse) ainsi qu'à son rayon-vecteur, grâce à une équation que nous démontrons aussi reliant le cercle apsidal à l'ellipse.

Ce qui précède concerne l'étude du mouvement de l'astre dans le plan de l'ellipse. Pour être complet, ce mouvement (position et vitesse de l'astre) doit être étudié dans un repère trirectangle OXYZ de l'espace, où O coïncide généralement avec le centre d'attraction. Les équations différentielles du mouvement étant d'ordre deux, il faut 6 paramètres pour déterminer une trajectoire unique. Pour des raisons liées aux observations, cet ensemble, appelé "éléments de l'orbite", est constitué de: le demi-grand axe de l'ellipse a , l'excentricité e , l'inclinaison i du plan de l'ellipse sur le plan de référence OXY, la longitude du nœud ascendant Ω , l'argument du périastre ω , et l'instant du passage au périastre ou époque τ . Nous en disons quelques mots dans cet article.

En fin d'article, une présentation succincte de la trajectoire apparente du Soleil autour de la Terre est proposée. Elle établit en particulier l' "équation de temps" qui permet d'exprimer l'anomalie excentrique en fonction du temps, en faisant intervenir le moyen mouvement n , l'excentricité e , l'inclinaison de l'axe

de rotation terrestre sur l'écliptique ε et la longitude de l'écliptique λ . Grâce à elle le jour solaire vrai, très important en astrométrie, peut être calculé comme la différence entre l'angle horaire du Soleil et l'anomalie excentrique.

SOMMAIRE

- 1 - Propriétés de la trajectoire d'une particule soumise à une force centrale: Deuxième loi de Kepler
 - 2 - Problème de Kepler (potentiel en $1/r$)
 - 3 - Cas des états liés (trajectoire elliptique): Troisième loi de Kepler
 - 4 - Cercle apsidal, anomalie excentrique et équation de Kepler
 - 5 - Éléments de l'orbite
 - 6 - Mouvement apparent du Soleil autour de la Terre: équation de temps
- Bibliographie

1 - Propriétés de la trajectoire d'une particule soumise à une force centrale: Deuxième loi de Kepler

Le moment cinétique, par rapport à un point O, d'une particule A, de masse m et de vitesse \mathbf{v}_A , soumise à une force centrale conservative est constant:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OA} \wedge m \mathbf{v}_A = cste = \mathbf{L} \quad (1)$$

PREUVE:

Force centrale conservative: $\mathbf{F} = -\text{grad } U(r) = -dU/dr \mathbf{e}_r$

où U énergie potentielle et $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = \mathbf{OA}$ dans le référentiel (R), $\mathbf{e}_r = \mathbf{OA}/OA$ étant le vecteur unitaire porté par le rayon vecteur \mathbf{OA} .

Moment de la force en O:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{OA} \wedge \left(-\frac{dU}{dr} \right) \frac{\mathbf{OA}}{OA} = 0$$

D'après le théorème du moment cinétique:

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$$

donc $\mathbf{M}_O = 0 \rightarrow \mathbf{L}_O = \text{constante}$. - CQFD

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan.

PREUVE:

\mathbf{OA} et \mathbf{v}_A sont, par définition, perpendiculaires à \mathbf{L}_O :

$$\mathbf{OA} \cdot \mathbf{L}_O = 0 \quad \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{L}_O = 0$$

D'après (1), $\mathbf{L}_O = \mathbf{L} = cste$, donc \mathbf{OA} et \mathbf{v}_A sont perpendiculaires à un vecteur constant. Soient, dans (R), les coordonnées de \mathbf{OA} , \mathbf{v}_A et \mathbf{L} :

$$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

où L_x, L_y, L_z sont constants.

$$\mathbf{OA} \cdot \mathbf{L}_O = 0 \rightarrow xL_x + yL_y + zL_z = 0$$

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{L}_O = 0 \rightarrow v_xL_x + v_yL_y + v_zL_z = 0$$

Ce sont les équations d'un même plan de vecteur normal \mathbf{L}/L . \mathbf{OA} et \mathbf{v}_A sont donc contenus dans le

même plan: la trajectoire est plane. - CQFD

On a désormais intérêt à utiliser les coordonnées polaires (O, \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_z) (figure 1).

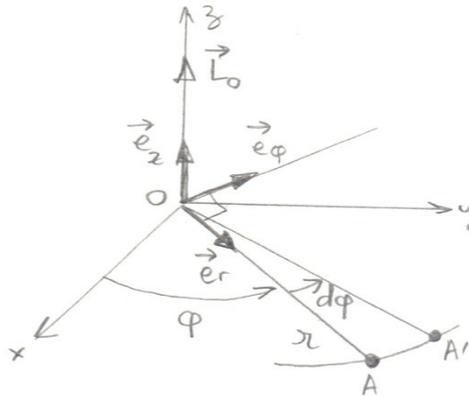


figure 1

Deuxième loi de Kepler :

La vitesse aréolaire d'une particule soumise à une force centrale est constante, autrement dit: les rayons vecteurs OA balayent en des temps égaux des aires égales Aire(OAA').

PREUVE:

En coordonnées polaires:

$$\mathbf{OA} = r \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{OA}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

Or: $\frac{d\mathbf{e}_r}{d\phi} = \mathbf{e}_\phi \rightarrow \mathbf{v}_A = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi$

De: $\mathbf{L} = \mathbf{OA} \wedge m \mathbf{v}_A = r \mathbf{e}_r \wedge m \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi \right) = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\phi = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z = L_z \mathbf{e}_z = \text{constante}$

(théorème (1)), on déduit:

$$L_z = L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{constante} \quad (2)$$

Sur la figure 1, on voit que la vitesse aréolaire est:

$$V_a = \frac{d}{dt} \text{Aire}(OAA') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 d\phi) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

On note C la **constante des aires**:

$$C = \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

C est le moment cinétique par unité de masse.

La vitesse aréolaire s'écrit en définitive:

$$V_a = \frac{C}{2} \quad (3)$$

(3) exprime la Troisième loi de Kepler. - CQFD

Équation de l'énergie et expression de la trajectoire: - Pour une particule soumise à une force centrale conservative, l'énergie est constante et se met sous la forme:

$$E = \text{constante} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (4)$$

où U_{eff} est l'**énergie potentielle efficace**: $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

et l'équation de la trajectoire $\phi = \phi(r)$ est:

$$\phi(r) = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}})}} + \phi_0 \quad (5)$$

PREUVE:

La force étant conservative, l'énergie mécanique est constante: $E = 1/2 mv_A^2 + U(r)$

On a: $v_A^2 = \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi \right) = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2$

d'où:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U(r)$$

On fait apparaître, dans cette expression de E, l'invariant moment cinétique L (relation (2)):

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad (\spadesuit)$$

En introduisant l'énergie potentielle efficace $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + L^2/2mr^2$, et compte tenu de (\spadesuit) , l'énergie E se met sous la forme (4).

On peut encore écrire (4) comme suit, de façon à séparer les termes en r et les termes en ϕ :

$$\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r)) = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \quad \text{d'après } (\spadesuit)$$

Il vient donc:

$$\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 = \frac{L^2}{2mr^4} \frac{1}{E - U_{\text{eff}}(r)} \rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

ce qui donne par intégration le résultat (5), ϕ_0 est une constante d'intégration définie par les conditions initiales. - CQFD

Remarque: - D'après (5), la trajectoire est définie si $E > U_{\text{eff}}(r)$ (l'énergie mécanique E n'étant pas nécessairement une quantité positive !). Selon le signe de E ($E < 0$, ou $E = 0$, ou $E > 0$), et compte tenu de la définition de $U_{\text{eff}}(r)$, on obtient des conditions sur U(r) pour que la trajectoire soit définie. Si la forme de U(r) est connue, ces conditions deviennent des conditions sur r. Certaines d'entre elles sont compatibles avec la possibilité d'avoir r aussi grand que l'on veut (trajectoires ouvertes ou "état libre"), d'autres sont satisfaites uniquement si r reste borné (trajectoires fermées ou "état lié").

On peut montrer alors que la trajectoire est fermée seulement dans les deux cas suivants:

- $U(r) = K/r$ (avec $K > 0$ ou $K < 0$): il correspond au problème de Kepler. Il ne s'agit là que d'une condition nécessaire, mais pas suffisante, car on verra que, pour certaines valeurs de E et de L, il existe pour des potentiels de cette forme des trajectoires ouvertes (paraboliques ou hyperboliques).
- $U(r) = 1/2 Kr^2$ (avec $K > 0$): énergie potentielle quadratique ou problème de l'oscillateur harmonique dans un plan.

2 - Problème de Kepler (potentiel en 1/r)

On considère maintenant la force centrale en $1/r^2$, ou de manière équivalente, le potentiel U en $1/r$ dont elle dérive. C'est le problème de Kepler:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{K}{r^2} \mathbf{e}_r = -\mathbf{grad} U$$

$$U(r) = \frac{K}{r}$$

où $K > 0$ (force répulsive) ou bien $K < 0$ (force attractive).

Invariants vectoriels du problème de Kepler: - Les vecteurs suivants sont constants:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_A + \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

$$\mathbf{e} = \frac{L}{K} \mathbf{v}_0 \quad \text{vecteur excentricité} \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{L} = \mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L} + K \mathbf{e}_r \quad \text{vecteur de Runge-Lenz ou vecteur de Laplace} \quad (8)$$

PREUVE:

Principe fondamental de la dynamique:

$$m \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{K}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Remarquant que: $\mathbf{e}_r = -\frac{d\mathbf{e}_\phi}{d\phi}$ l'expression précédente s'écrit encore:

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = -\frac{K}{m r^2 (d\phi/dt)} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$$

on reconnaît au dénominateur:

$$L = m r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

et donc:

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = -\frac{K}{L} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$$

L étant constant (énoncé (1)) l'intégration de l'expression précédente donne immédiatement:

$$\mathbf{v}_A = -\frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi + \mathbf{v}_0$$

où \mathbf{v}_0 est une constante vectorielle d'intégration. Autrement dit le vecteur suivant est une constante vectorielle du mouvement:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_A + \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

Il s'ensuit que le vecteur excentricité \mathbf{e} défini par (7) est aussi constant.

Le vecteur de Runge-Lenz ou de Laplace (8) est lui aussi constant puisqu'il est le produit vectoriel de deux vecteurs constants \mathbf{v}_0 et \mathbf{L} . - CQFD

Vecteur de Runge-Lenz: - le vecteur de Runge-Lenz ou de Laplace est toujours perpendiculaire au moment cinétique \mathbf{L} qui est constant, par conséquent, il est toujours contenu dans le plan de la trajectoire \mathbf{v}_A et \mathbf{r} :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (9)$$

PREUVE:

De $\mathbf{v}_A = \frac{K}{L} \mathbf{e} - \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi$ on tire, d'après (8):

$$\mathbf{E} = K \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z - K \mathbf{e}_\phi \wedge \mathbf{e}_z + K \mathbf{e}_r = K \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z$$

puisque $\mathbf{e}_\phi \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r$. Comme $\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z$, et puisque $(\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z = 0$ (produit mixte contenant deux vecteurs identiques), il vient: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{L} = 0$ (relation (9)). - CQFD

Norme de E: - La norme E du vecteur de Runge-Lenz ou de Laplace est telle que:

$$\left(\frac{E}{K}\right)^2 = 1 + f \left(\frac{L}{K}\right)^2 \quad (10)$$

avec: $f = v_A^2 + \frac{2U}{m}$

PREUVE:

Le carré de la norme de **E** est:

$$E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L} + K \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L} + K \mathbf{e}_r) = (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) + 2K \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) + K^2$$

De: $\mathbf{v}_A = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi$ et: $\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z$ on obtient: $\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L} = -L \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_\phi + Lr \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_r$ et donc:

$$(\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) = L^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + L^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et: $\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L}) = Lr \frac{d\phi}{dt}$.

Finalement:

$$E^2 = L^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + L^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2K L r \frac{d\phi}{dt} + K^2 = L^2 v_A^2 + \frac{2K}{r} L r^2 \frac{d\phi}{dt} + K^2 = L^2 v_A^2 + \frac{2K}{mr} L^2 + K^2$$

où l'on a fait apparaître le moment cinétique $L = m r^2 d\phi/dt$.

Comme $K/r = U(r)$ est l'énergie potentielle, la quantité $f = v_A^2 + 2K/mr = v_A^2 + 2U/m$ est 2 fois l'énergie mécanique totale par unité de masse: f est donc constante. La norme du vecteur de Runge-Lenz est donc fonction uniquement du moment cinétique:

$$E^2 = f L^2 + K^2$$

CQFD.

Trajectoires d'une particule soumise à une force centrale de potentiel en 1/r: - L'équation du mouvement d'une particule soumise à une force dérivant d'un potentiel en 1/r (problème de Kepler) est celle d'une conique dont l'un des foyers (ou l'unique foyer) est occupé par le centre de la force:

$$r(\phi) = \frac{p}{-\epsilon + e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (11)$$

$$K = \epsilon |K| \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1$$

$$\text{où: } p = \frac{L^2}{m|K|} \quad \text{paramètre focal} \quad (11 \text{ bis})$$

$$e = \|\mathbf{e}\| \quad \text{excentricité}$$

$$\phi - \phi_0 \quad \text{anomalie vraie}$$

PREUVE: - Projétons le vecteur de Runge-Lenz ou de Laplace **E** sur le rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OA} = r \mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{L} + K \mathbf{e}_r) \cdot r \mathbf{e}_r = L r^2 \frac{d\phi}{dt} + K r = \frac{L^2}{m} + K r$$

par ailleurs, et par définition, l'**anomalie vraie** est l'angle que fait le vecteur \mathbf{r} avec le vecteur constant \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = E r \cos(\phi - \phi_0)$$

donc:

$$E r \cos(\phi - \phi_0) = \frac{L^2}{m} + K r$$

il s'ensuit que l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires, est:

$$r = \frac{L^2/m}{-K + E \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{L^2/m|K|}{-\epsilon + \frac{E}{|K|} \cos(\phi - \phi_0)}$$

de la forme de celle d'une conique:

$$r(\phi) = \frac{p}{-\epsilon + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

avec:

$$p = \frac{L^2}{m|K|}$$

$$e = \frac{E}{|K|} = \frac{|K \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z|}{|K|} = |\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z|$$

Montrons que $e = \|\mathbf{e}\|$:

De: $\mathbf{e} = \frac{L}{K} \left(\mathbf{v}_A + \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi \right)$ on déduit: $\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z = \frac{L}{K} \left[-\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_\phi + \left(r \frac{d\phi}{dt} + \frac{K}{L} \right) \mathbf{e}_r \right]$ et par suite:

$$|\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z|^2 = \frac{L^2}{K^2} \left(v_A^2 + \frac{K^2}{L^2} + \frac{2K}{L} r \frac{d\phi}{dt} \right)$$

Calculons ensuite directement $|\mathbf{e}|^2$ et comparons le résultat avec l'expression ci-dessus:

$$|\mathbf{e}|^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \frac{L^2}{K^2} \left(\mathbf{v}_A + \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \left(\mathbf{v}_A + \frac{K}{L} \mathbf{e}_\phi \right) = \frac{L^2}{K^2} \left(v_A^2 + \frac{K^2}{L^2} + 2 \frac{K}{L} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_\phi) \right)$$

or: $\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_\phi = \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \mathbf{e}_\phi = r \frac{d\phi}{dt}$ donc on a l'identité:

$$|\mathbf{e}|^2 = \frac{L^2}{K^2} \left(v_A^2 + \frac{K^2}{L^2} + 2 \frac{K}{L} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_\phi) \right) = |\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z|^2$$

et donc: $e = \|\mathbf{e}\|$. - CQFD

Forme de la conique selon l'énergie mécanique: - La trajectoire de la particule soumise à une force d'énergie potentielle $U = K/r$ est:

- une **hyperbole** si son énergie mécanique $E_m = 1/2 mv_A^2 + K/r$ est > 0 ;
- une **parabole** si $E_m = 0$
- une **ellipse** si $E_m < 0$

PREUVE:

Comme la nature d'une conique est conditionnée par la valeur de son excentricité e , établissons d'abord

la relation entre l'énergie mécanique E_m (ou f) et e .
On a vu plus haut que:

$$e^2 = \frac{L^2}{K^2} \left(v_A^2 + \frac{K^2}{L^2} + 2 \frac{K}{L} r \frac{d\phi}{dt} \right)$$

Puisque: $r \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{m r}$ et: $v_A^2 = f - \frac{2U}{m} = f - \frac{2K}{m r}$, il en résulte que l'excentricité est reliée à l'énergie mécanique ainsi qu'au moment cinétique par:

$$e^2 = 1 + \frac{L^2}{K^2} f \quad (12)$$

Comme le moment cinétique intervient par son carré, la valeur de e par rapport à 1 dépend directement du signe de l'énergie f .

Le paramètre focal p est directement relié au carré du moment cinétique:

$$p = \frac{L^2}{m|K|}$$

il est donc évidemment toujours positif, en l'introduisant dans (12) il vient, puisque $f = 2E_m/m$:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 p E_m}{|K|}} \quad (13)$$

et les écritures équivalentes:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{|K|}{m p} (1 - e^2) \\ E_m &= -\frac{|K|}{2 p} (1 - e^2) \end{aligned} \quad (14)$$

Il en résulte les quatre cas suivants:

* **Cas répulsif:** $\varepsilon = +1 \rightarrow K > 0 \rightarrow E_m > 0 \rightarrow e > 1$

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

On peut avoir $r = +\infty$ si $e \cos(\phi - \phi_0) = 1$. La trajectoire est une hyperbole de foyer O.

* **Cas attractif:** $\varepsilon = -1 \rightarrow K < 0$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

avec les trois possibilités suivantes:

- Si $E_m > 0$ alors $e > 1$: hyperbole
- Si $E_m = 0$ alors $e = 1$: parabole
- Si $E_m < 0$ alors $e < 1$: ellipse

Les cas hyperbole et parabole sont dits états libres car la trajectoire est ouverte: r peut devenir aussi grande que l'on veut. Le cas ellipse est dit état lié car la trajectoire est fermée: r reste bornée.

L'énergie mécanique étant invariante, la nature de la trajectoire est déterminée par les conditions initiales lors de la mise en orbite: position initiale r_0 et vitesse de lancement v_0 .

- CQFD.

3 - Cas des états liés (trajectoire elliptique): Troisième loi de Kepler

On s'intéresse désormais aux états liés: $K < 0$ avec $E_m < 0$. Ce sont les mouvements elliptiques des

planètes autour du Soleil ou des satellites autour d'une planète.

Troisième loi de Kepler: - la relation entre la période de révolution T et le demi-grand axe de l'orbite elliptique " a " suit la Troisième loi de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} \quad (15)$$

PREUVE:

$E_m < 0$ avec $E_m = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{|K|}{r}$ et $K < 0$ ($K = -|K|$), et

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

Reportons-nous à la figure 2 pour la géométrie du problème (le centre d'attraction est situé à l'origine O , qui est l'un des deux foyers de l'ellipse avec F):

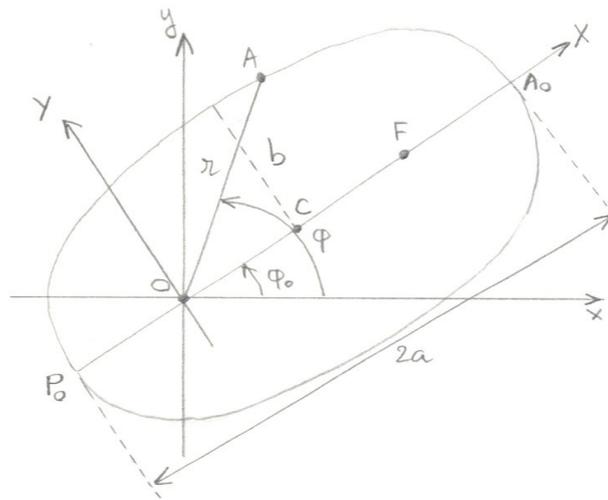


figure 2

Foyers de l'ellipse: O et F

P_0 : périastre ou périhélie ou périgée (point où l'astre est le plus proche du centre d'attraction)

A_0 : apoastre ou aphélie ou apogée (point où l'astre est le plus éloigné du centre d'attraction)

a : demi-grand axe de l'ellipse: $P_0A_0 = 2a$

b : demi-petit axe de l'ellipse

C : centre de l'ellipse: $P_0C = CA_0 = a$

O : centre d'attraction

$c = OC = CF$ distance focale

$r = OA$

A_0 et P_0 s'obtiennent respectivement pour $\phi = \phi_0$ et $\phi = \phi_0 + \pi$:

$$\phi = \phi_0 \rightarrow r = OA_0 = \frac{p}{1 - e}$$

$$\phi = \phi_0 + \pi \rightarrow r = OP_0 = \frac{p}{1 + e}$$

On a donc: $P_0A_0 = 2a = OP_0 + OA_0 = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{1 - e^2}$, donc:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (16)$$

Distance focale: $c = OC = A_0P_0 - OP_0 - CA_0 = 2a - \frac{p}{1-e} - a = ea$, soit:

$$e = \frac{c}{a} \quad (17)$$

La relation (14) entre E_m et e et p donne la relation entre E_m et a , suite à (16):

$$E_m = -\frac{|K|}{2p}(1-e^2) \rightarrow E_m = -\frac{|K|}{2a} \quad (18)$$

Relation entre les demi-axes a et b : pour cela, exprimons l'équation cartésienne de l'ellipse dans le référentiel (OXY):

$$p = r(1 + e \cos(\phi - \phi_0)) \quad \text{avec} \quad r^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{et:}$$

$$X = OA \cos(\phi - \phi_0) = r \cos(\phi - \phi_0)$$

donc: $p = eX + r \rightarrow (p - eX)^2 = r^2 = X^2 + Y^2 \rightarrow X^2 + \frac{2pe}{1-e^2}X + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$

Comme $a = \frac{p}{1-e^2}$ (relation (16)) il vient: $\frac{(X + ae)^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$, de la forme:

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

$$\text{avec: } X' = X + ea$$

$$Y' = Y$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad (20)$$

(19) et (20) montrent que l'on a une ellipse de centre C, $OC = \begin{pmatrix} c = ea \\ 0 \end{pmatrix}$, d'axes $2a$ et $2b$ où b est donnée par (20).

Période de révolution: (3) permet d'exprimer la vitesse aréolaire $V_a = \frac{L}{2m} = \frac{S}{T}$, où S est l'aire de l'ellipse et T la période de révolution cherchée. Or: $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ d'après (20), et $L = \sqrt{pm|K|}$ avec $p = a(1-e^2)$, d'où:

$$T = \frac{2mS}{L} = \frac{2m\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{pm|K|}} \quad \text{soit} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{|K|} \quad \text{ou encore:}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|K|} = \text{constante}$$

qui est le résultat (15) annoncé.

- CQFD

Remarques:

1°) - Dans la troisième loi de Kepler: $T^2/a^3 = 4\pi^2 m/|K|$, m est la masse de la planète et $|K| = GMm$, où M masse du centre attractif (exemple: Soleil), on a donc:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (21)$$

qui ne dépend que de M: la relation période-distance est la même pour toutes les planètes d'un même système solaire.

2°) - On a établi les relations (13), (16), (20) entre a (ou b) et p et e. Mais p et e sont par ailleurs imposés par L et la vitesse initiale v_0 (relations (7), (11 bis), (12)):

$$e = \|e\| \text{ avec : } e = \frac{L}{K} v_0$$

$$p = \frac{L^2}{m \|K\|}$$

donc la trajectoire elliptique, pour une planète de masse m donnée, est entièrement définie par la seule donnée de sa vitesse initiale v_0 et de son moment cinétique, donc sa position initiale r_0 .

3°) - Que la période de révolution T dépende seulement du demi grand axe a (3ième loi de Kepler (15)) implique que la vitesse varie le long de la trajectoire. En particulier:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{|K|}{r} = \text{constante} = - \frac{|K|}{2p} (1 - e^2) = - \frac{|K|}{2a} \text{ donne la dépendance de la vitesse avec r:}$$

$$v_A^2 = \frac{|K|}{m} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

soit encore, puisque $|K| = GMm$:

$$v_A^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (22)$$

Donc v_A est grande quand r est petit et faible quand r est grand. Elle est maximale au périhélie P_0 et minimale à l'aphélie A_0 pour lesquelles on a respectivement: $r = OP_0 = \frac{p}{1+e}$ et $r = OA_0 = \frac{p}{1-e}$.
Compte tenu des relations (7), (11 bis) et (12) donnant e et p, on obtient donc, à partir de (22):

$$\left. \begin{aligned} v_{Amax} &= \frac{|K|}{L} + v_0 \\ v_{Amin} &= \frac{|K|}{L} - v_0 \end{aligned} \right| \quad (23)$$

d'où la relation de conjugaison entre ces deux valeurs extrêmes:

$$v_{Amax} v_{Amin} = \left| \left(\frac{K}{L} \right)^2 - v_0^2 \right| \quad (24)$$

4 - Cercle apsidal, anomalie excentrique et équation de Kepler

Définition du cercle apsidal et relation entre l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie: - Le cercle apsidal est le cercle circonscrit à l'ellipse, de rayon a et de centre C: il est donc tangent à l'ellipse aux points A_0 et P_0 (figure 3).

Soit A' le projeté orthogonal du point mobile A sur le cercle apsidal. L'anomalie vraie étant l'angle polaire $(\phi - \phi_0)$ entre OP_0 et OA, on définit l'anomalie excentrique l'angle θ entre OP_0 et OA'.

Entre l'anomalie vraie $(\phi - \phi_0)$ et l'anomalie excentrique θ on a la relation:

$$\tan \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} \right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

PREUVE:

Soit H le projeté de A' sur l'axe OX parallèlement à Oy (figure 3).

Des relations: $OH = OA \cos(\varphi - \varphi_0) = r \cos(\varphi - \varphi_0) = OC + CH = ea + CH$ (car $OC = c = ea$)

$$CH = CA' \cos \theta = a \cos \theta$$

on tire:

$$r \cos(\varphi - \varphi_0) = ea + a \cos \theta$$

$$r \cos(\varphi - \varphi_0) = a(e + \cos \theta) \quad (\spadesuit)$$

D'autre part: $AH = y_A = r \sin(\varphi - \varphi_0) = HA' - AA'$

$$HA' = y_{A'} = a \sin \theta$$

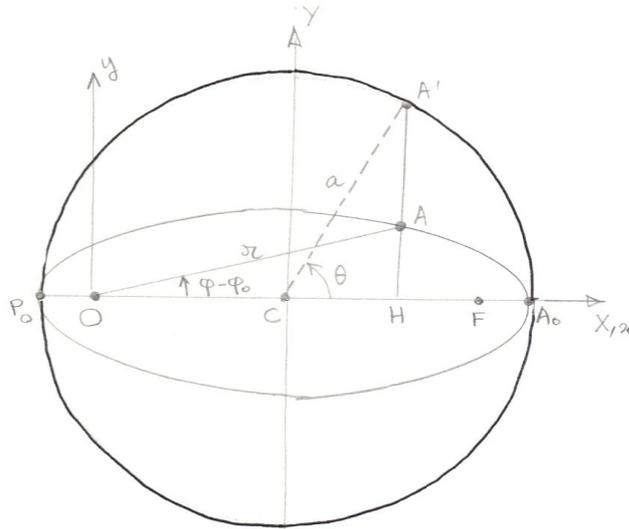


figure 3

On détermine AA' par la transformation affine du cercle apsidal en l'ellipse:

- sur le cercle apsidal (dans le repère CXY): $X_H^2 + y_{A'}^2 = a^2$

- sur l'ellipse (dans le repère CXY), avec la même abscisse X_H : $\frac{X_H^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1$

$$\text{donc: } y_{A'}^2 = a^2 - X_H^2 \rightarrow \left(\frac{y_A}{y_{A'}}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{X_H^2}{a^2}\right) \frac{1}{1 - \frac{X_H^2}{a^2}} \rightarrow \frac{y_A}{y_{A'}} = \frac{b}{a}$$

Comme $b = a\sqrt{1-e^2}$ il vient:

$$y_A = y_{A'} \sqrt{1-e^2} \quad (26)$$

Donc: on passe du cercle apsidal à l'ellipse par une transformation affine des ordonnées de rapport $\sqrt{1-e^2}$.

Il reste à calculer AA' pour terminer le calcul de AH :

$$AA' = y_{A'} - y_A = y_{A'}(1 - \sqrt{1-e^2}) = a \sin \theta (1 - \sqrt{1-e^2}) \quad \text{d'après (26)}$$

d'où:

$$AH = r \sin(\varphi - \varphi_0) = HA' - AA' = y_{A'} - (y_{A'} - y_A) = a \sin \theta - a \sin \theta (1 - \sqrt{1-e^2}) = a \sqrt{1-e^2} \sin \theta$$

$$r \sin(\varphi - \varphi_0) = a \sqrt{1-e^2} \sin \theta \quad (\clubsuit)$$

On additionne les carrés des deux expressions \spadesuit et \clubsuit :

$$r^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + r^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) = r^2 = a^2(e + \cos \theta)^2 + a^2(1-e^2) \sin^2 \theta$$

ce qui permet d'exprimer r avec l'anomalie excentrique:

$$r = a(1 + e \cos \theta) \quad (\spadesuit)$$

Combinant \spadesuit avec \diamondsuit , on obtient: $r \cos(\phi - \phi_0) = a(1 + e \cos \theta) \cos(\phi - \phi_0) = a(e + \cos \theta)$

Combinant \spadesuit avec \clubsuit , on obtient: $r \sin(\phi - \phi_0) = a(1 + e \cos \theta) \sin(\phi - \phi_0) = a\sqrt{1 - e^2} \sin \theta$

d'où les deux relations entre les anomalies:

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad \sin(\phi - \phi_0) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

On cherche une relation unique entre les tangentes liées aux deux anomalies. Pour cela on utilise les formules de trigonométrie bien connues suivantes:

$$\cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \frac{1 + \cos(\phi - \phi_0)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \frac{1 - \cos(\phi - \phi_0)}{2}$$

où l'on remplace les cos et sin de $(\phi - \phi_0)$ par leurs expressions ci-dessus, puis on fait le rapport, ce qui donne:

$$\cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 + e \cos \theta + e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$\sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 + e \cos \theta - e - \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$\tan^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} = \frac{1 + e \cos \theta - e - \cos \theta}{1 + e \cos \theta + e + \cos \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)(1 - e)}{(1 + \cos \theta)(1 + e)}$$

or, autres formules de trigonométrie bien connues:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \theta &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 + \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \tan^2 \frac{\phi - \phi_0}{2} = \tan^2 \frac{\theta}{2} \frac{1 - e}{1 + e}$$

ce qui donne:

$$\tan \frac{\phi - \phi_0}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2}$$

qui est le résultat (25) annoncé.

- CQFD



équation de Kepler: - L'**anomalie moyenne** est l'angle M parcouru sur le cercle apsidal avec une vitesse angulaire uniforme, de même période T que le mouvement sur l'ellipse.

Le **moyen mouvement** n est la vitesse angulaire uniforme $n = 2\pi/T$ avec laquelle le cercle apsidal est parcouru en un tour complet.

Si l'on désigne par τ l'instant de passage au périastre P_0 , et par t l'instant où la planète est en un point quelconque A sur l'ellipse, par définition de l'anomalie moyenne M on a, entre M et t, la relation évidente:

$$M = n(t - \tau) \quad (27)$$

L'anomalie moyenne s'exprime en fonction de l'anomalie excentrique par **l'équation de Kepler**:

$$M = \theta - e \sin \theta \quad (28)$$

PREUVE:

On se reporte à la figure 3 précédente:

- Aire de OA_0A balayée par OA , sous-tendue par l'arc A_0A (ellipse):

$$S_1(t) = \int_{\tau}^t \frac{dS}{dt} dt$$

or $dS/dt = V_a$ est la vitesse aréolaire, constante: $V_a = \frac{L}{2m} = \frac{C}{2}$ où C est la constante des aires, alors:

$$S_1(t) = \int_{\tau}^t V_a dt = \frac{C}{2}(t - \tau) = \frac{C}{2} \frac{M}{n} \quad \text{d'après (27),}$$

où: $\frac{C}{2n} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \frac{T}{2\pi}$, et suite à la troisième loi de Kepler (21): $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$ et à la relation (11 bis)

donnant $p = \frac{L^2}{m|K|}$, on obtient: $\frac{C}{2n} = \frac{1}{2} \sqrt{p a^3}$; utilisant (16): $p = a(1 - e^2)$, on a finalement:

$$S_1(t) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} M \quad (29)$$

- Aire OA_0A' balayée par CA' , sous-tendue par l'arc A_0A' (cercle apsidal):

$$S_2 = \text{aire triangle (OHA')} + \text{aire (HA}_0\text{A')}$$

aire triangle (OHA') = $OH \times HA' / 2 = OH \times y_{A'} / 2$

aire (HA₀A') = $\int_{X_H}^{X_{A_0}} y_{A'} dX$, or d'après (26): $y_{A'} = \frac{y_A}{\sqrt{1 - e^2}}$

On a donc: $S_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left[\frac{1}{2} OH \cdot y_A + \int_{X_H}^{X_{A_0}} y_A dX \right]$

mais on remarque que: $S_1 = \text{aire triangle (OHA)} + \text{aire (HA}_0\text{A)}$, avec:

aire triangle (OHA) = $OH \times y_A / 2$

aire (HA₀A) = $\int_{X_H}^{X_{A_0}} y_A dX$

donc le terme entre crochets dans l'expression de S_2 ci-dessus est égal à l'aire S_1 , finalement:

$$S_2 = \frac{S_1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (30)$$

il résulte de (29) que:

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 M \quad (30 \text{ bis})$$

D'autre part: $S_2 = \text{aire (OA}_0\text{A')} = \text{aire (CA}_0\text{A')} + \text{aire triangle (OCA')}$, dans le cas où l'origine des

coordonnées est O.

Si, comme le suggère la définition du moyen mouvement, où la position de A est comptée à partir de périastre P₀, l'anomalie vraie est en fait le complémentaire de (φ - φ₀), et l'anomalie excentrique est celui de θ, alors on a plutôt:

$$S_2 = \text{aire}(CA_0A') - \text{aire triangle}(OCA')$$

avec: aire(CA₀A') = (θ/2π) x (aire totale du cercle apsidal) = (θ/2π) πa² = θa²/2
 aire triangle(OCA') = aire(OHA') - aire(CHA'), avec: aire(OHA') = OH x HA' /2
 aire(CHA') = CH x HA' /2
 OH = OC + CH

donc aire triangle(OCA') = OC x HA' /2

Il vient donc:

$$S_2 = \frac{1}{2} \theta a^2 - \frac{1}{2} OC \cdot HA'$$

Or: OC = c = ea et HA' = yA' = a sin θ, donc: $S_2 = \frac{1}{2} \theta a^2 - \frac{1}{2} e a^2 \sin \theta$ qui est aussi égal à (30 bis):

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 (\theta - e \sin \theta) = \frac{1}{2} a^2 M$$

par conséquent:

$$\theta - e \sin \theta = M$$

qui est l'équation de Kepler (28) annoncée.

- CQFD.

Remarques:

- **autre démonstration de l'équation de Kepler** - Nous allons montrer que la quantité suivante est une constante de mouvement, τ, appelée **époque** (c'est l'instant du passage de l'astre au périastre):

$$\tau = t - \frac{1}{n} (\theta - e \sin \theta)$$

qui est l'équation de Kepler. En effet:

Dans le repère CXY:

$$CA = \begin{pmatrix} CH \\ HA \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} CH = a \cos \theta \\ HA = y_A = b \sqrt{1 - \frac{X_H^2}{a^2}} \end{matrix}$$

or: $b = a \sqrt{1 - e^2}$ et $X_H = CH = a \cos \theta$ donc: $HA = y_A = a \sqrt{1 - e^2} \sin \theta$. On a donc:

$$CA = a \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sqrt{1 - e^2} \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{d'où la vitesse: } \mathbf{v}_A = \frac{dCA}{dt} = a \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sqrt{1 - e^2} \cos \theta \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt}$$

par conséquent:

$$v_A^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Or v_A² est aussi égal à (22): $v_A^2 = \frac{|K|}{m} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$ et $r = a(1 + e \cos \theta)$

L'égalité avec l'expression précédente conduit alors à: $dt = \sqrt{\frac{m a^3}{|K|}} (1 + e \cos \theta) d\theta$, qui s'intègre en:

$$t - \tau = \sqrt{\frac{m a^3}{|K|}} (\theta + e \sin \theta)$$

L'utilisation de la troisième loi de Kepler et de la définition (27) de l'anomalie moyenne, conduit finalement à:

$$n(t - \tau) = M = \theta + e \sin \theta$$

Cette relation est valide lorsque l'origine est en O et la date initiale est le passage à l'apoastre A_0 (configuration de la figure 3). Si la date initiale est le passage en P_0 et l'origine en F (conformément à la convention adoptée en astronomie) on doit écrire: $M = \theta - e \sin \theta$, puisque dans ce cas $r = a(1 - e \cos \theta)$.

- **Coordonnées héliocentriques:** Désormais, on place l'origine des axes O en F, et F est déplacée à l'ancien O, de sorte que les positions de l'apoastre A_0 et du périastre P_0 sont elles aussi interverties (figure 4: **coordonnées héliocentriques**). Dans ce cas l'astre est en P_0 lorsque l'anomalie vraie est nulle $\varphi - \varphi_0 = 0$ et en A_0 lorsque $\varphi - \varphi_0 = \pi$. Il s'ensuit que dans ce repère, on a l'équation de Kepler (28)

$$n(t - \tau) = M = \theta - e \sin \theta$$

et que la relation (25) entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique devient:

$$\tan \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad (31)$$

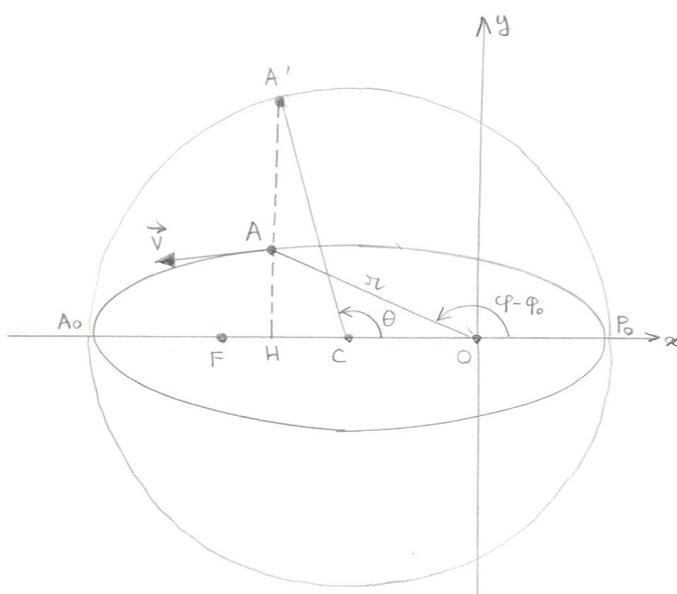


figure 4

Si l'on connaît l'excentricité de l'orbite e , l'équation de Kepler (28) permet, à un instant t donné, de calculer l'anomalie excentrique θ , puis par la relation (31) de calculer l'anomalie vraie ($\varphi - \varphi_0$). On obtient ainsi la position de la planète A sur sa trajectoire par les relations (\clubsuit) et (\diamond) réécrites dans le repère héliocentrique:

$$\left. \begin{aligned} OA = r &= a(1 - e \cos \theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ OH = x &= a(\cos \theta - e) = r \cos(\varphi - \varphi_0) \\ HA = y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin \theta = r \sin(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \right\} (32)$$

Mais pour calculer (32), il faut avoir résolu l'équation de Kepler (28) pour un instant donné t . Or celle-ci ne peut qu'être résolue par approximations successives, car il s'agit d'une équation transcendante.

5 - Éléments de l'orbite

Jusqu'à présent, nous avons défini les mouvements kepleriens dans un plan, celui qui contient la trajectoire elliptique, à l'aide de trois quantités constantes: le vecteur de Runge-Lenz ou de Laplace \mathbf{E} , le moment cinétique \mathbf{L} , et l'époque τ , c'est-à-dire la date du passage au périhélie.

Cependant, le plan de la trajectoire doit être défini et orienté par rapport à un repère de l'espace OXYZ

pris comme référence d'observation (figure 5), où l'origine O est choisie être le centre d'attraction (le Soleil s'il s'agit du mouvement des planètes). Il faut donc 6 paramètres pour déterminer l'orbite elliptique d'une planète fixées par les conditions initiales, lesquelles déterminent les constantes du mouvement, comme on l'a vu. Ces paramètres sont fonctions des constantes citées précédemment: moment cinétique, vecteur de Runge-Lenz, époque. Leurs ensemble s'appelle éléments de l'orbite.

En général, en astronomie, les six éléments de l'orbite choisis sont:

- l'inclinaison i du plan de l'orbite sur le plan OXY (par exemple, ce plan peut être le plan de l'écliptique terrestre); l'intersection du plan de l'orbite avec le plan de référence OXY est un segment de droite NN' appelé ligne des nœuds, où N est le nœud ascendant pour lequel la projection de la vitesse de la planète sur OZ passe au-dessus de OXY, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = v_z > 0$, et N' est le nœud descendant pour lequel cette projection passe en-dessous de OXY: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = v_z < 0$ (le vecteur unitaire \mathbf{k} est le vecteur porté par l'axe OZ); i est compté de 0 à 180°: pour $0 \leq i \leq 90^\circ$ le mouvement est dit direct, pour $90^\circ \leq i \leq 180^\circ$ il est dit rétrograde;
- l'angle $\Omega = (\text{OX}, \text{ON})$ appelé longitude du nœud ascendant;
- l'angle $\omega = (\text{ON}, \text{OP}_0)$ appelé argument du périastre (ou périhélie) P_0 de l'orbite elliptique;
- le demi-grand axe de l'orbite a ;
- l'excentricité e de l'orbite;
- l'époque τ .

Historiquement, c'est Lagrange qui fut le premier à introduire les 6 éléments de l'orbite pour étudier le mouvement des planètes et leurs perturbations; mais il avait choisi le paramètre de l'ellipse p au lieu de l'excentricité e , ces deux quantités étant reliées comme on l'a vu.

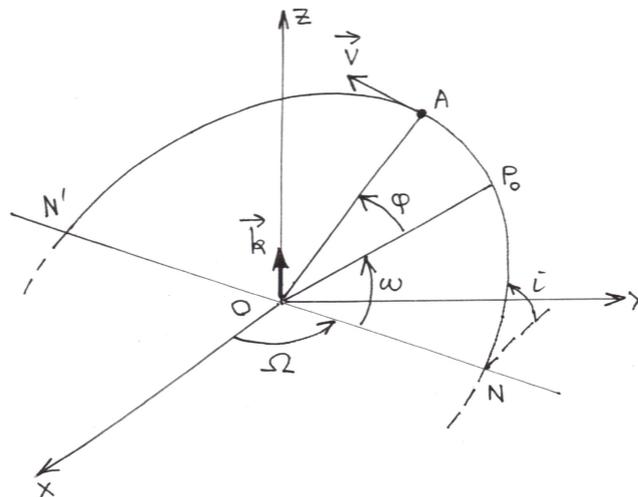


figure 5

Dans tout ce qui suit, on choisit $\varphi_0 = 0$ comme origine de l'anomalie vraie.

Il est facile de vérifier que les coordonnées de la planète A dans le repère OXYZ se déduisent de celles (r, φ) dans le plan de l'orbite, par les relations:

$$\left. \begin{aligned} X &= r(\cos \Omega \cos(\omega + \varphi) - \sin \Omega \sin(\omega + \varphi) \cos i) \\ Y &= r(\sin \Omega \cos(\omega + \varphi) + \cos \Omega \sin(\omega + \varphi) \cos i) \\ Z &= r \sin(\omega + \varphi) \sin i \end{aligned} \right\} (33)$$

On calcule (33) lorsqu'on a déterminé r et φ comme indiqué au paragraphe 4.

Tout se passe bien tant que l'on considère que l'interaction Soleil-planète est un problème newtonien à deux corps où les paramètres de l'orbite sont fixés une fois pour toutes. En réalité, la planète subit l'influence gravitationnelle des autres astres, ce qui a pour effet d'apporter des perturbations à la trajectoire correspondant au problème des deux corps. Lagrange a considéré que ces perturbations se traduisent par des modifications plus ou moins lentes des paramètres de l'orbite, autrement dit des éléments de l'orbite, et ont pour effet de déformer avec le temps la trajectoire elliptique. C'est en

modélisant la façon dont ces constantes du mouvement évoluent avec le temps, suite aux perturbations, que ce savant a pu découvrir les critères de stabilité des trajectoires, et aussi, et surtout, inventer les bases de la mécanique symplectique qui régit aujourd'hui toute la physique dès lors qu'elle cherche les invariants, les moments et les symétries des systèmes, qu'ils soient mécaniques, quantiques, cosmologiques, complexes... Ainsi, Lagrange, en s'intéressant à la prédiction des mouvements planétaires, a-t-il doté l'esprit humain d'un outil de connaissance fondamentale: le formalisme symplectique! (références (2), (4), (5)).

Notons que d'autres combinaisons d'éléments de l'orbite sont aussi employées pour les calculs de mécanique céleste:

- la longitude vraie de la planète: $\lambda = \Omega + \omega + \varphi$
- la longitude moyenne de la planète: $l = \Omega + \omega + M$, où M est l'anomalie moyenne; on notera que la longitude moyenne est la somme d'angles non contenus dans le même plan; la quantité $\Omega + \omega$ est la longitude du périhélie.

Hormis l'époque, les cinq autres éléments de l'orbite, ou leurs combinaisons, sont exprimés en fonction du temps du fait des développements aux premiers ordres des perturbations, où le temps est exprimé en siècles juliens (36525 jours moyens) à compter de la date de référence 31 décembre 1899 à midi de Greenwich.

6 - Mouvement apparent du Soleil autour de la Terre: équation de temps

En appliquant ce qui précède au cas de la révolution de la Terre autour du Soleil, que peut-on déduire sur le mouvement apparent du Soleil sur la sphère céleste?

Mouvement apparent du Soleil autour de la Terre: cela signifie que, dans le cas du problème à deux corps, les mouvements sont relatifs et que, par conséquent, on peut toujours ramener la description de la révolution de la Terre autour du Soleil à la révolution du Soleil autour de la Terre, suivant une ellipse dont l'un des foyers est occupé par la Terre (figure 6).

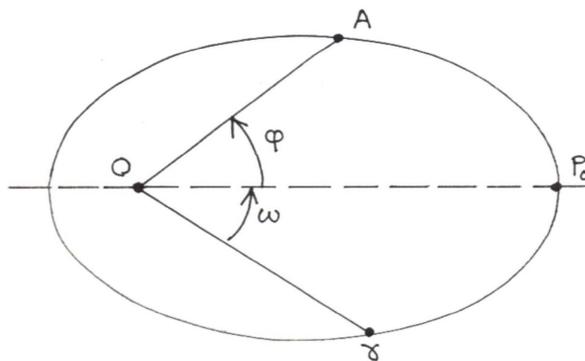


figure 6

Dans ce qui suit, la Terre est donc située en O, comme si c'était le centre d'attraction, et le Soleil joue le rôle de l'astre A mobile sur l'écliptique (la trajectoire elliptique de la Terre). L'argument du périhélie ω est l'angle entre OP_0 et la ligne des nœuds $N'N$, compté à partir du nœud ascendant N que l'on appelle encore le point vernal γ , point où le Soleil coupe l'équateur céleste au moment de l'équinoxe du printemps (cf. article (6)).

Pour simplifier on pose l'époque égale à zéro: $\tau = 0$.

Nous allons utiliser l'équation de Kepler sous la forme (28), et la relation entre les anomalies vraie et excentrique sous la forme (31) compte tenu du repère et de l'orientation choisis à la figure 6:

$$\theta - e \sin \theta = n t$$

$$\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\theta}{2}$$

Dans le cas de la Terre, ces relations peuvent être approchées par un développement limité car l'excentricité de l'orbite terrestre est assez faible: $e = 1/60$ (l'orbite terrestre est presque un cercle); on a, à l'ordre deux:

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 1 + e + \frac{1}{2}e^2 + o(e^3)$$

que l'on injecte dans la relation entre les anomalies: $\tan \frac{\phi}{2} \approx \left(1 + e + \frac{1}{2}e^2\right) \tan \frac{\theta}{2}$. posant $u = \tan(\theta/2)$ et

$\varepsilon = (e + e^2/2)u$, l'expression précédente s'écrit encore: $\tan \frac{\phi}{2} \approx u + \varepsilon u$; or ε est très petit devant 1, il s'ensuit que l'expression suivante $\phi = 2 \arctan(u + \varepsilon u)$ peut admettre un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de u :

$$\arctan(u + \varepsilon) = \arctan u + \frac{1}{1+u^2} \varepsilon - \frac{u}{(1+u^2)^2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$$

et l'on obtient:

$$\phi = \theta + e \sin \theta + \frac{e^2}{4} \sin 2\theta + o(e^3) \quad (34)$$

Pour terminer le calcul de l'anomalie vraie ϕ (34), reste à exprimer l'anomalie excentrique θ en fonction du temps t par l'équation de Kepler, celle-ci ne pouvant être résolue que par approximations successives:

- lors de la première itération $k = 1$, on néglige le terme en e dans l'équation de Kepler:

$$\theta_1 = nt + o(e)$$

- lors de la 2e itération $k = 2$, on remplace, dans l'équation de Kepler θ par θ_1 en poussant jusqu'au premier ordre de e :

$$\theta_2 = nt + e \sin \theta_1 = nt + e \sin nt + o(e^2)$$

- lors de la 3e itération $k = 3$, on remplace, dans l'équation de Kepler θ par θ_2 en poussant jusqu'à l'ordre e^2 :

$$\begin{aligned} \theta_3 &= nt + e \sin \theta_2 = nt + e \sin(nt + e \sin nt) \\ &= nt + e \sin nt + \frac{e^2}{2} \sin 2nt + o(e^3) \end{aligned} \quad (35)$$

où l'on a assimilé $\sin(e \sin t)$ à $(e \sin t)$;

- et ainsi de suite: $\theta_{k+1} = nt + e \sin \theta_k$

Mais on s'arrête à l'ordre e^2 et en injectant (35) dans (34) on obtient la variation de l'anomalie vraie en fonction du temps à l'ordre e^2 :

$$\phi = nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt + o(e^3) \quad (36)$$

La vitesse angulaire le long de l'orbite est donc:

$$\frac{d\phi}{dt} = n \left(1 + 2e \cos nt + \frac{5}{2}e^2 \cos 2nt + o(e^3) \right) \quad (37)$$

On voit qu'elle est pratiquement égale au moyen mouvement de la Terre n , qui vaut $n = 3548,1928''$ /jour, corrigé des termes d'ordres supérieurs de l'excentricité e .

De (36) on déduit que la longitude vraie du Soleil (ou longitude écliptique du Soleil) sur l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, si l'on prend la longitude du nœud ascendant $\Omega = 0$, est égale à:

$$\lambda = \Omega + \omega + \phi = \omega + nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt + o(e^3) \quad (38)$$

où la longitude du périhélie est comptée dans le sens direct depuis le point vernal γ et vaut actuellement:

$$\omega = 283^\circ$$

Reportons-nous à la figure 7, reproduite de la figure 1 de l'article (6), qui nous permettra de calculer l'évolution de l'anomalie excentrique θ , au premier ordre de l'excentricité e , en fonction du temps et de la longitude éclipstique du Soleil, et par suite, de calculer le jour solaire vrai.

On sait que l'axe de rotation de la Terre sur elle-même (ou axe des pôles) OP , est incliné sur l'axe OO' perpendiculaire au plan de l'écliptique, d'un angle $\varepsilon = 23^\circ 26'$ (cette inclinaison est responsable du phénomène de la précession des équinoxes). Il s'ensuit que la longitude vraie du Soleil $\lambda = (\gamma A)$, angle entre le point vernal γ et la position A du Soleil sur la sphère céleste compté le long de l'écliptique, est différente de l'ascension droite du Soleil $\alpha = (\gamma A_2)$, angle entre le point vernal et la projection A_2 du Soleil A sur l'équateur céleste (le plan de l'équateur fait l'angle ε avec le plan de l'écliptique).

La déclinaison du Soleil est l'angle sphérique $\delta = (A\gamma A_2)$. les coordonnées équatoriales du Soleil sur la sphère céleste sont (α, δ) .

A noter qu'aux équinoxes: $\delta = 0$, et qu'aux solstices $\delta = \pm \varepsilon$.

Le mouvement diurne est repéré par la rotation de la sphère céleste autour de l'axe des pôles OP perpendiculaire à l'équateur céleste: il faut donc repérer le mouvement apparent du Soleil au moyen de sa projection A_2 sur l'équateur.

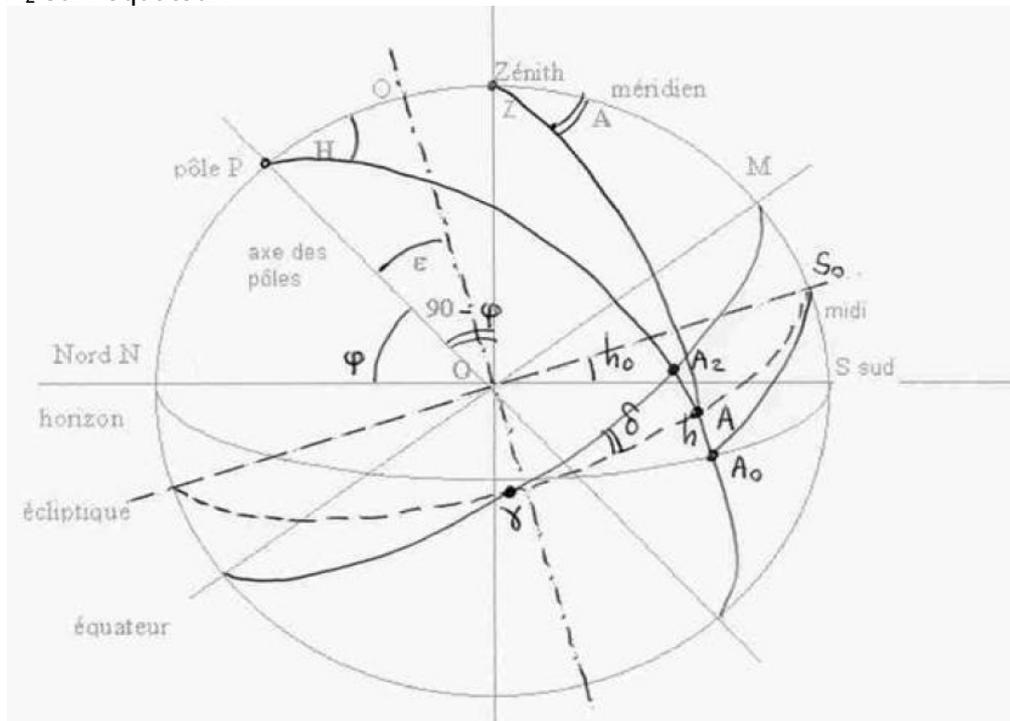


figure 7

Dans le triangle sphérique γAA_2 :

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \sin \lambda \cos \varepsilon &= \cos \delta \sin \alpha \end{aligned}$$

d'où:

$$\tan \alpha = \tan \lambda \cos \varepsilon$$

soit encore:

$$\sin(\alpha - \lambda) = -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin(\alpha + \lambda)$$

Comme α et λ sont proches, on peut assimiler $\sin(\alpha - \lambda) \approx \alpha - \lambda$ et $\sin(\alpha + \lambda) \approx \sin 2\lambda$, d'où:

$$\alpha \approx \lambda + R$$

$$\text{où: } R = -\tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2\lambda$$

Le terme correctif R s'appelle réduction à l'équateur. En exprimant λ avec (38), on obtient finalement pour l'ascension droite:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \omega + nt + C + R \\ \text{avec: } C = 2e \sin nt + \frac{5}{4} e^2 \sin nt \\ \text{et: } R = -\tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2\lambda \end{array} \right| (39)$$

(39) décrit le mouvement apparent du Soleil par rapport à l'équateur céleste, donc son ascension droite α en fonction du temps et des quantités connues: l'excentricité e , le moyen mouvement n , la longitude écliptique λ .

Le terme:

$$\bar{\alpha} = \omega + nt$$

est l'ascension droite moyenne apparente du Soleil. Elle diffère de l'ascension droite "vraie" α de la quantité $C + R$ qui s'appelle "**équation du temps**":

$$\alpha - \bar{\alpha} = C + R = 2e \sin nt - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2\lambda \quad (40)$$

qui représente le terme correctif dû à l'excentricité de l'orbite et à l'inclinaison de l'axe des pôles sur l'écliptique.

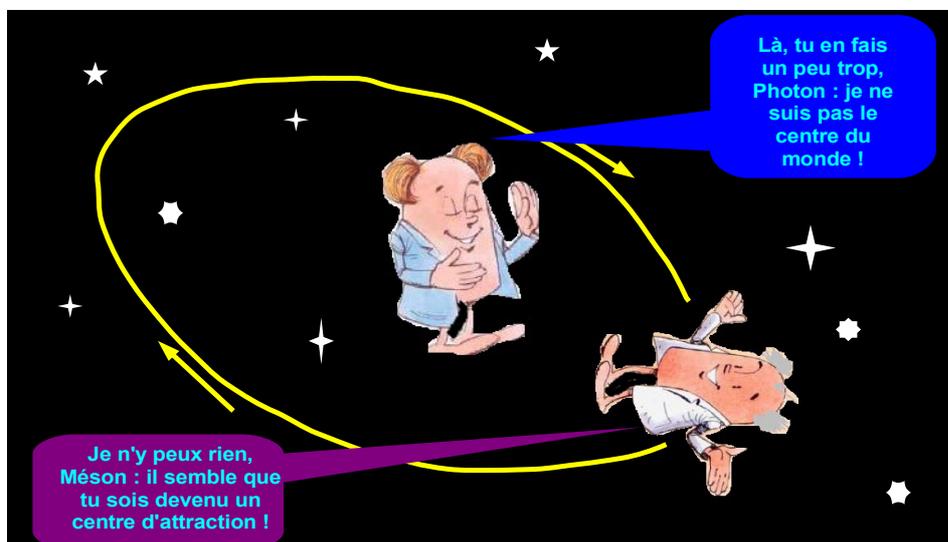
Le temps sidéral T_s est la somme de l'angle horaire H et de l'ascension droite α (figure 7). lorsqu'on utilise l'ascension droite moyenne $\bar{\alpha}$ à la place de α , l'angle horaire correspondant sert à définir le jour solaire moyen: c'est le temps entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien du lieu S_0 (figure 7) en supposant que le Soleil se déplace sur l'équateur céleste avec un mouvement uniforme n :

$$\bar{H} = T_s - \bar{\alpha} = T_s - \omega - nt \quad (41)$$

tandis que l'angle horaire vrai sert à définir le jour solaire vrai; il est égal à la différence entre l'angle horaire moyen et l'anomalie excentrique, prenant donc en compte l'irrégularité de la vitesse de la Terre sur son orbite autour du Soleil, parce que à cause d'elle l'intervalle de temps entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien varie au cours de l'année:

$$H = \bar{H} - \theta \quad (42)$$

où θ est obtenu avec une assez bonne précision par (35) à partir de l'équation de Kepler.



Références:

- (1) Gianni Pascoli: *Éléments de mécanique céleste*, Masson, Paris 1997
- (2) Patrick Iglesias: *Symétries et moment* – Hermann, 2000
- (3) José-Philippe Pérez: *Mécanique* – Dunod 2001
- (4) Joseph-Louis Lagrange: *Mécanique analytique* - éd. Courcier 1811, librairie A. Blanchard, Paris, 1965
- (5) Jean-Marie Souriau: *Structure des systèmes dynamiques* - Dunod, Paris, 1970
- (6) Frédéric Élie: *Cadrans solaires* - site <http://fred.elie.free.fr>, mai 1995