ACCUEIL

Groupe de l'analyse dimensionnelle

Jean-François Lahaeye

6 juin 2011

Abstract : Déjà à l'école élémentaire, on apprend aux enfants qu'il ne faut pas additionner des entités de nature différente, des pommes et des haricots, des mètres et des kilogrammes. Cependant les mêmes enfants se familiarisent très tôt avec la possibilité et même la permission de multiplier et diviser entre elles des unités physiques : des mètres carrés pour les aires, des mètres cubes pour les volumes, des mètres par seconde pour les vitesses.
Cette propriété multiplicative des unités reflète grossièrement les multiplications présentes dans les formules, mais seulement grossièrement. Si, en effet, on définit l'énergie cinétique W = ½ mv^2, on définit le joule en kg m^2 s^{-2} mais le facteur ½ a disparu dans le système des unités. Heureusement d'ailleurs sans quoi on ne pourrait totaliser l'énergie de masse et l'énergie cinétique dans le développement limité de l'énergie relativiste, et toute analyse hamiltonienne serait impossible. Il reste que les unités physiques ont une propriété qualitative invariante dans toutes les manipulations mathématiques qu'on peut en faire et cette invariance se manifeste à travers l'existence d'un groupe.

°°°

Les dimensions, ici notées par leurs unités SI (Système International) sont ici, jusqu'à nouvel ordre, les éléments de base, les générateurs du groupe. On pourrait aussi bien les représenter sous forme de crochets avec les initiales des grandeurs [L], [M], etc. On admet (jusqu'à nouvel ordre) cinq unités de base, plus une qui fournira l'élément neutre, appelé nombre et ici noté *N*. Ce sont :

Le mètre (m)
Le kilogramme (kg)
La seconde (s)
L'ampère (A)
Le kelvin (K)
Le neutre (*N*)

1 - Pour chaque dimension d, il existe un inverse d^{-1} tel que : d d^{-1} = N
2 - Le neutre est un nombre indéterminé tel que : d N = d
3 - La loi de composition, notée de façon multiplicative, est associative.
4 - La loi est commutative.

On engendre une infinité de dimensions dérivées par combinaison des éléments de base. Par exemple: le newton peut s'écrire N = kg m s^{-2}

On a donc affaire à un groupe infini discret (ou dénombrable) : en particulier, chaque générateur engendre un sous-groupe.

Le même groupe pourrait se construire à partir d'autres unités de base, celles du système CGS par exemple, ou bien à partir des unités de Planck. On pourrait encore le construire à partir des cinq constantes usuelles qui permettent d'accéder aux unités de Planck et on aurait ainsi :

La constante de Planck : $\hbar$
La constante de gravitation : G
La vitesse de la lumière : c
La permittivité du vide : ε (on peut préférer la charge élémentaire e)
La constante de Boltzmann : k
Le neutre (*N*)

Si on s'en tient aux unités de base (générateurs du groupe) on remarque que toute unité ou dimension de base supplémentaire devrait faire apparaître une nouvelle constante et réciproquement, à toute constante dimensionnée supplémentaire devrait correspondre une nouvelle unité[1].

Le groupe est infini mais n'a pas la puissance du continu, à moins de pouvoir envisager l'existence de dimensions fractales. *Pour les exposants usuels* d'une dimension de base, il a la même puissance que le groupe multiplicatif des nombres rationnels. Il est frappant que les dimensions se conservent dans toutes les manipulations algébriques qu'on peut en faire en dépit des facteurs numériques qui apparaissent et disparaissent au gré du calcul différentiel. C'est pourquoi le neutre est ici défini comme un nombre pur, mais indéterminé.

La conservation des dimensions est aussi un fait physique : c'est grâce à elle qu'on peut toujours envisager la mesure d'une grandeur non directement accessible. L'analyse dimensionnelle fait donc apparaître la *conservation qualitative* de toutes les dimensions présentes dans un problème par l'entremise d'un groupe multiplicatif abélien qui les relie dans une structure unique[2]. Il est intéressant de noter que le théorème de Noether relie la *conservation quantitative* de certaines grandeurs à l'existence de groupes de symétrie (qui sont des groupes de Lie).

Y a-t-il un lien à découvrir entre ces modes de conservation ?

NOTES

(1) Les constantes angulaires peuvent s'introduire *a priori* pour compléter le système. Mais on peut, si on veut, à partir des constantes de Planck, réduite et non réduite, déduire les radians avec 2p = h/$\hbar$ et les stéradians en partant de la pulsation de Planck ω_p et de la densité de Planck ρ_p insérées dans les relations de Bayo avec $4\pi = 3\omega_p^2 / G\rho_p$.

(2) En vue de prendre en compte les cas non commutatifs de la physique quantique, M. Élie m'a suggéré de prendre en considération une généralisation non commutative de ce groupe où l'on aurait [p] [x] ¹ [x] [p] dans l'écriture des dimensions elles-mêmes : on peut sans doute envisager un groupe non commutatif, mais cela n'est guère éclairant car on affaiblit considérablement la structure et les cas commutatifs de la physique classique semblent devenir purement fortuits. J'ai alors proposé une analogie forte avec les espaces vectoriels qui me semble répondre au besoin de généralisation suggéré par M. Élie.

Dans les formules de physique comme dans l'écriture des résultats de calcul, en fait aussi bien dans les mesures que dans les calculs, on « multiplie » les dimensions (ou les unités physiques) par des nombres. Cela ressemble à une loi de composition externe qui permet de définir un espace vectoriel. Il y a cependant une différence : un espace vectoriel sur un corps K est conçu comme un groupe *additif* pour les vecteurs. J'envisage alors ce que j'appellerai (faute de mieux) un « espace dimensionnel » sur un corps K (et peut-être sur une algèbre non commutative) comme un groupe *multiplicatif*, qui doit cependant rester abélien pour ses éléments (les dimensions, au sens physique du terme). Les propriétés non commutatives se logeraient alors dans les entités auxquelles on a affaire dans la multiplication externe : si on multiplie les dimensions (ou les unités physiques) par des rationnels, par des réels ou par des complexes, la commutativité est conservée. Mais la multiplication par des matrices (et peut-être par des quaternions) pourrait justifier *de façon externe* l'émergence des propriétés non commutatives des opérateurs de la physique quantique. Il convient de relever que si on conserve la propriété abélienne du groupe de l'analyse dimensionnelle, la notion d'espace dimensionnel se laisse concevoir comme une espèce de généralisation de celle d'espace vectoriel (dont les « vecteurs » seraient définis par un groupe abélien multiplicatif au lieu du groupe abélien additif habituel) : à cette nuance près, l'espace dimensionnel se définit donc de la même façon qu'un espace vectoriel. Du point de vue du groupe de l'analyse dimensionnelle, la non commutativité arrive donc *de l'extérieur* ; ou bien encore : on la voit à l'intérieur d'une structure plus vaste, l'espace dimensionnel apparenté à un espace vectoriel.