



Frédéric Elie on
ResearchGate

Étalement des gouttes sur une surface plane : loi de Tanner

Frédéric Elie

25 mars 2017

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

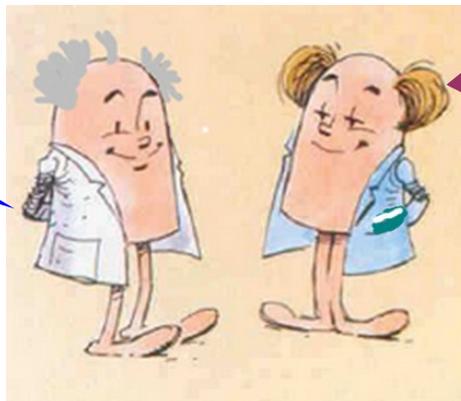
Abstract : Une goutte de liquide posée délicatement sur une surface horizontale lisse et propre s'étale très lentement selon une loi temporelle appelée loi d'étalement de Tanner. La présente manip a pour objectif de vérifier ce fait avec de l'eau, de l'alcool éthylique et de l'huile d'olive, ces trois produits ayant des propriétés de mouillage très différentes.

Malgré la simplicité apparente du processus, cette manip est très difficile à faire « sur un coin de table », ceci pour diverses raisons qui seront exposées à partir, précisément, des bases théoriques du phénomène. Celles-ci seront expliquées et l'on verra comment elles conduisent à la loi empirique établie par Tanner. Les écarts entre les résultats obtenus ici et les prédictions théoriques sont significatifs mais porteurs d'enseignement sur la rigueur qu'il faut apporter aux manipulations expérimentales, et la vigilance constante à apporter aux pièges de leur facilité apparente : en hydrodynamique, peut-être plus qu'ailleurs, on tombe volontiers dans ces pièges ; c'est sans doute l'apport intéressant du présent article.

SOMMAIRE

- 1 - Théorie : dynamique d'une goutte posée sur une surface plane horizontale
2. Manips effectuées et résultats

Mesdames et messieurs les visiteurs, notre ami Fred s'excuse d'avance d'avoir échoué sa manip !



Oui, mais il explique pourquoi, cher Photon : ça me fait penser à l'ingénieur qui construit un pont qui s'écroule, mais qui sait pourquoi, et à l'ingénieur qui construit un pont qui tient, mais il ne sait pas pourquoi !...

1 - Théorie : dynamique d'une goutte posée sur une surface plane horizontale

Les notions de tension de surface, de longueur capillaire, la loi de Young-Dupré, le critère de

mouillage de Zisman, le paramètre d'étalement, qui seront utilisées dans le présent article, ont été introduites dans l'article de notre site traitant de la capillarité, elles ne seront pas rappelées ici et seront supposées connues (1).

La dynamique d'étalement d'une goutte sur une surface plane horizontale complètement mouillable a été observée pour la première fois par un ingénieur britannique en aéronautique, L. Tanner (2). Il s'est intéressé à l'angle de contact α entre le substrat solide (le plan horizontal) et le profil de la goutte déposée sur ce substrat (figure 1) : comment évolue cet angle de contact au cours du temps lorsque la goutte s'étale sur le substrat ?

Pour répondre à cette question, L. Tanner assimile la goutte à une calotte sphérique dont l'angle de contact avec le plan solide est beaucoup plus petit que 90° , puisque le mouillage total est supposé. Par une méthode de réflexion optique, il constata que cet angle décroît très lentement avec le temps selon la loi :

$$\alpha = \text{cste } t^{-3/10} \quad (1)$$

Tant que l'on est en mouillage total (paramètre d'étalement $E > 0$), cette loi (1) est remarquablement universelle : elle s'applique aux gouttes de tous liquides (non visco-élastiques), l'angle de mouillage α étant indépendant de E !

Une façon équivalente d'évaluer l'étalement d'une goutte sur une surface plane horizontale en mouillage total, est d'observer l'évolution du rayon de la goutte au cours du temps $r(t)$. Le résultat est une évolution selon la loi (3) :

$$r(t) = \text{cste } t^{1/10} \quad (2)$$

En fait, ces comportements ne peuvent pas s'expliquer si l'on considère uniquement le ménisque que forme la goutte au contact du substrat solide : la frontière de la goutte ne se limite pas au pourtour du ménisque, mais se situe plus loin sur le solide, par un film d'épaisseur plus faible que le micron et que l'on appelle **film précurseur**. L'angle de contact α est donc un angle apparent avec la paroi de la partie visible du ménisque ou de la calotte sphérique ; on montre que l'avancée du périmètre visible de la goutte résulte de la contribution de la force par unité de longueur, le paramètre d'étalement E , à la formation du film précurseur. Sans tenir compte de ce dernier, il est impossible de justifier théoriquement la loi de Tanner (1).

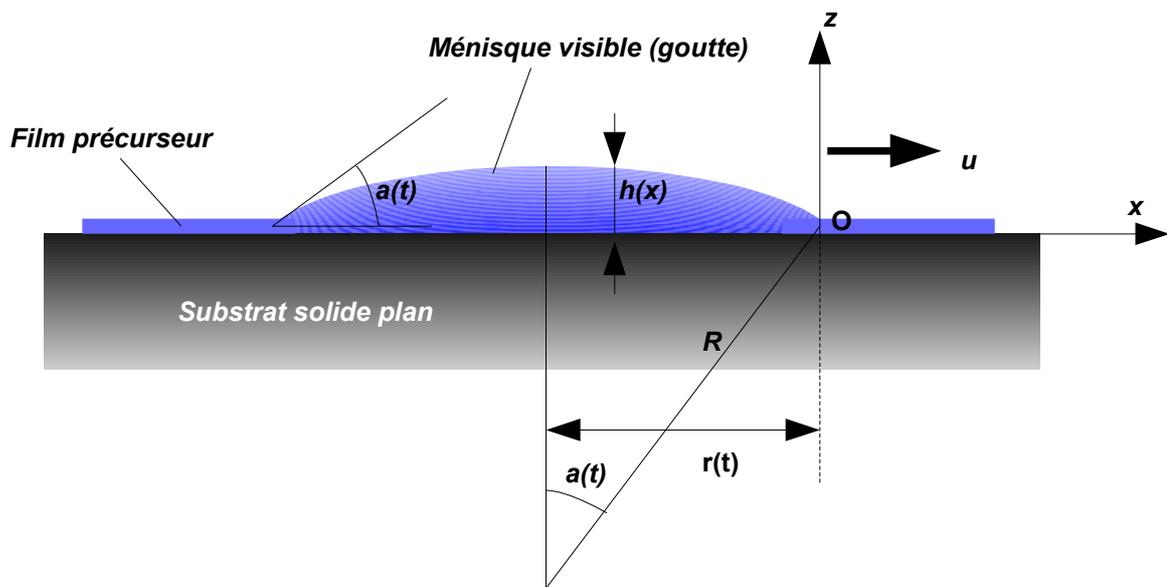


figure 1 : géométrie pour l'étude du déplacement de l'interface d'une goutte et d'un solide plan horizontal totalement mouillable, en tenant compte du film précurseur

1 Voir article : Frédéric Élie - Effets capillaires des liquides : TP sur la longueur capillaire, <http://fred.elie.free.fr>, 9 janvier 2017

2 L.H. Tanner : J. Phys. D : Appl. Phys., 12, 1473 (1979)

3 M. Lellah et A. Marmur : J. Colloid Interface Sci., 82, 518 (1981)

Les résultats de Tanner et Lellah et Marmur peuvent se retrouver théoriquement par le raisonnement suivant :

En adoptant les mêmes notations que dans notre article sur la longueur capillaire, on désigne :
 tension superficielle à l'interface solide-liquide : γ_{SL} ;
 tension superficielle à l'interface solide-air : γ_S ;
 tension superficielle à l'interface liquide-air : γ .

L'application de la **loi de Young-Dupré** conduit à poser, a priori, que la force par unité de longueur, de composante horizontale, à la ligne triple solide-liquide-air, est :

$$F = \gamma_S - \gamma_{SL} - \gamma \cos a \quad (3)$$

Avant que la goutte commence à s'étaler, l'angle de contact est nul : $a = 0$, et la force à cet équilibre statique (vitesse d'avancée de l'interface nulle $u = 0$) est donc elle aussi nulle : $F = 0$; mais cela est incompatible avec l'hypothèse d'un mouillage total où le paramètre d'étalement initial est strictement positif (**règle de Zisman**) :

$$E = \gamma_S - \gamma_{SL} - \gamma > 0 \quad (4)$$

Or il faut tenir compte de la présence du film précurseur, étudié pour la première fois par W. Hardy (4) : la force (3) s'applique en fait à la frontière précurseur/solide sec, pour laquelle $a = 0$, elle ne s'applique pas à la frontière calotte/solide/film, qui n'est pas, en réalité, la limite de la goutte sur le plan solide (contrairement à ce que supposait initialement L. Tanner). A cette frontière, où a n'est plus égal à 0 mais est égal à $a(u) > 0$ (u : vitesse d'avancée suivant Ox de cette frontière), la force qui contribue à la formation et au maintien du film précurseur est E. Il s'ensuit que la force qui provoque le déplacement de la frontière calotte/solide/film précurseur (la limite visible de la goutte) n'est plus F mais $F - E$:

$$F - E = \gamma(1 - \cos a) \quad (5)$$

Avec (5) on retrouve bien la possibilité d'une condition statique où $a = 0$.

Soit dx la distance parcourue par la ligne frontière calotte/solide/film, à la vitesse d'avancée u suivant le plan horizontal Ox : $dx = u dt$. Le travail élémentaire de la force résultante (5) est alors : $dW = (F - E) dx = (F - E) u dt$. La puissance correspondante avec laquelle la tension superficielle crée et maintient l'écoulement dans la calotte est alors :

$$\frac{dW}{dt} = (F - E)u = \gamma(1 - \cos a)u \quad (6)$$

Pour obtenir une relation entre la vitesse d'étalement $V = dr/dt$ et l'angle de contact $a(t)$, il nous faut connaître le débit d'écoulement $Q(x)$ à l'intérieur de la goutte, en toute section d'abscisse x comprise entre le plan $z = 0$ et la surface libre $z(x) = h(x)$. Dans cette section, le profil de vitesse de l'écoulement est noté $v_x(z)$, il ne doit pas être confondu avec la vitesse de la ligne de contact $u(t)$! (figure 2).

4 W.B. Hardy : Phil. Mag., 38, 49 (1919)

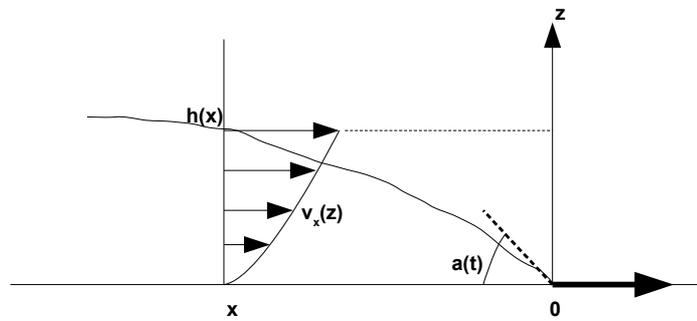


figure 2

La vitesse d'écoulement est nulle sur la paroi : $v_x(0) = 0$ et augmente avec z jusqu'à la surface libre d'épaisseur $h(x)$.

Hypothèses adoptées :

- les effets d'étalement par gravité sont négligeables : ceci suppose que le rayon $r(t)$ de la goutte n'excède pas la longueur capillaire κ^{-1} ;
- l'angle de contact apparent $a(t)$ est suffisamment petit pour négliger la courbure (R supposé grand) ; dans ce cas on a l'approximation $h(x) = a(t)x$;
- le volume du film précurseur est négligeable devant celui de la calotte ;
- la goutte conserve la forme d'une calotte parfaitement sphérique, et la ligne de contact avec le film précurseur est un cercle parfait ; cela suppose un substrat solide parfaitement lisse, propre, homogène, chimiquement neutre vis-à-vis du liquide ;
- le volume de la calotte V reste constant, ce qui suppose qu'il n'y a ni évaporation de liquide, ni assèchement du film précurseur, ni changement dans les conditions d'ambiance thermodynamiques (humidité, chaleur...), ni échange de matière entre la goutte et le film précurseur...
- on applique l'approximation de lubrification : elle permet d'écrire que, à la surface libre de la goutte (interface liquide/air), donc en $z = h(x)$, la contrainte tangentielle est nulle :

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(h(x)) = 0 \quad (7)$$

où η est la viscosité dynamique (en Pa.s). Avec les hypothèses précédentes, le débit volumique d'une tranche de liquide par unité de longueur $Q(x)$ est égal à :

$$Q(x) = V h(x) \quad (8)$$

(exprimé en $m^3/s/m$).

Compte tenu de (7) et aussi de $v_x(0) = 0$, le profil de vitesse est alors de la forme :

$$v_x(z) = F(x) \left(h(x) - \frac{z}{2} \right) z \quad (9)$$

La fonction inconnue $F(x)$ est déterminée en écrivant que l'intégrale de (9) entre $z = 0$ et $z = h(x)$ est égale au débit volumique par unité de longueur $Q(x)$:

$$Q(x) \equiv \int_{z=0}^{z=h(x)} v_x(z) dz = F(x) h(x) \int_0^{h(x)} z dz - F(x) \int_0^{h(x)} \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{3} F(x) h^3(x)$$

d'où : $F(x) = 3 \frac{Q(x)}{h^3(x)}$. (9) est alors :

$$v_x(z) = 3 \frac{Q(x)}{h^3(x)} \left(h(x) - \frac{z}{2} \right) z \quad (10)$$

NB : la vitesse à l'interface liquide-air, en $z = h(x)$, est égale à $v_x(h(x)) = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{h(x)}$: elle est donc plus grande, d'un facteur $3/2 = 1,5$, que la vitesse moyenne d'écoulement $Q(x)/h(x)$. La puissance volumique est égale à la puissance dissipée par viscosité pour un écoulement dont le profil de vitesse est (10), soit par unité de volume (en Pa/s) :

$$\text{puissance volumique} = \eta (\partial v_x / \partial z)^2 \quad (11)$$

L'énergie dissipée par la viscosité (par unité de longueur de ligne de contact dans la direction perpendiculaire à Oxz) est égale à la double intégrale de cette puissance par unité de volume :

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^\infty dx \int_0^{h(x)} \eta (\partial v_x / \partial z)^2 dz \quad (12)$$

En utilisant (8), (10) et l'hypothèse vue plus haut $h(x) = a(t)x$, (12) donne :

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^\infty dx \eta \frac{u^2}{h(x)^2} h(x) = \frac{3\eta u^2}{a(t)} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \quad (13)$$

L'intégrale est divergente entre 0 et l'infini : il faut introduire des bornes finies pour qu'elle reste calculable, puisque les limites sont comprises entre les échelles moléculaires x_m et la taille de la goutte macroscopique L ; en fait, (13) s'écrit alors :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{3\eta u^2}{a(t)} \int_{x_m}^L \frac{dx}{x} = \frac{3\eta u^2}{a(t)} \ln\left(\frac{L}{x_m}\right) = \frac{3\eta u^2}{a(t)} \lambda \quad (14)$$

où $\lambda = \ln \frac{L}{x_m}$ est un paramètre ajustable lié à la dimension macroscopique de la goutte L et aux dimensions à l'échelle moléculaire du liquide x_m . En pratique le paramètre λ est de l'ordre de 15 à 20. Or dW/dt est aussi donnée par (6), l'égalité avec (14) conduit alors à :

$$\frac{dW}{dt} = \gamma (1 - \cos a) u = \frac{3\eta u^2}{a} \lambda \quad (15)$$

Avec l'hypothèse vue plus haut des petits angles de contact, $(1 - \cos a) \approx a^2/2$, (15) fournit alors la relation entre $a(t)$ et la vitesse d'étalement $u(t)$; c'est la **relation de Tanner** :

$$u(t) = \frac{1}{6\lambda} \frac{\gamma}{\eta} a^3(t) \quad (16)$$

Cette dépendance de la vitesse d'étalement avec le cube de l'angle de contact a été confirmée expérimentalement par R. Hoffmann (5).

On peut ré-exprimer (16) des deux façons suivantes :

L'une en introduisant le **nombre capillaire** $Ca = \frac{\eta u}{\gamma}$ qui représente l'importance relative des effets capillaires et des effets dus à la viscosité :

$$a^3(t) = 6 Ca \lambda \quad (17)$$

L'autre en introduisant la vitesse caractéristique des phénomènes capillaires en régime

5 R. Hoffmann : J. Colloid Interface Sci., 50, 228 (1975)

d'écoulement visqueux $V^* = \frac{\gamma}{\eta}$ (6) :

$$u(t) = \frac{V^*}{6\lambda} a^3(t) \quad (18)$$

Noter que : $Ca = \frac{u}{V^*}$. La figure 3 montre la courbe théorique correspondant à (17) ; les expériences montrent que pour des angles de contact supérieurs à 50° les écarts à la loi de Tanner sont significatifs (non représentés ici).

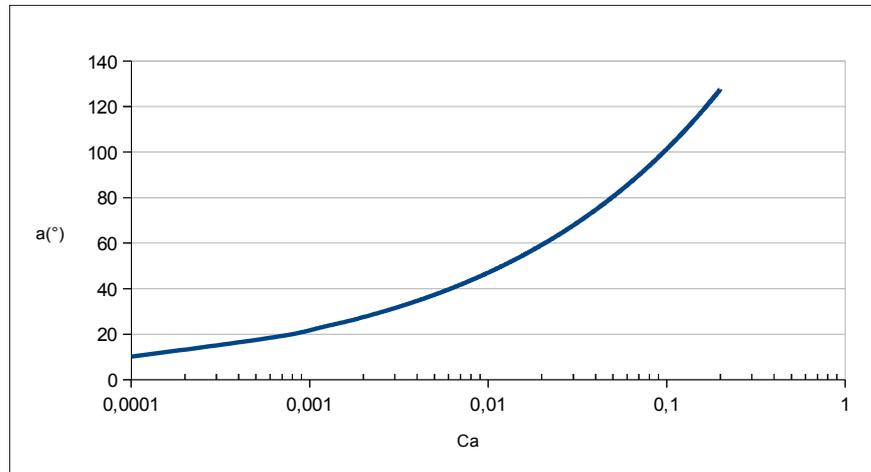


Figure 3 : variation théorique de l'angle de contact a (en degrés) en fonction du nombre capillaire Ca , en échelle semi-logarithmique. Les calculs ont été effectués à l'aide de (17) pour de l'huile silicone pour laquelle le paramètre $\lambda = 9,21$

Terminons cette partie théorique en exprimant l'évolution au cours du temps de la taille de la goutte lors de son étalement. La relation (18) va nous y conduire dès lors que l'on utilise l'une des hypothèses vues plus haut : le volume de la goutte est conservé (et le volume du film précurseur est négligeable devant celui de la goutte).

Aux faibles angles de contact, le volume V de la goutte, assimilée à une calotte sphérique de rayon r , est approximativement :

$$V = \frac{\pi}{4} r^3 a(t) \quad (19)$$

Comme $u(t) = dr/dt$ (vitesse d'étalement) et que V est une constante, (19) donne :

$$\frac{dV}{dt} = 0 = \frac{\pi}{4} \left(3r^2 \frac{dr}{dt} a + r^3 \frac{da}{dt} \right)$$

donc, par la relation (18) :

$$u = \frac{dr}{dt} = -\frac{r}{3} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{V^*}{6\lambda} a^3 \quad (20)$$

Or, dans l'approximation d'angle de contact $a(t)$ faible, on a avec (19): $V = \frac{\pi}{4} r^3 a$, mais le volume de la goutte se conservant, cette quantité V est aussi égale au volume de la sphère initiale de liquide avant dépôt sur le plan solide, de diamètre L : $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{L}{2} \right)^3$ d'où :

$$r = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} L a^{-1/3} \quad (21)$$

En injectant cette expression (21) de r dans (20) on obtient alors l'équation d'évolution

6 Cette vitesse V^* est de l'ordre de plusieurs dizaines de m/s pour la plupart des liquides.

temporelle de l'angle de contact $a(t)$:

$$\frac{da}{dt} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{V^*}{L} \frac{1}{2\lambda} a^{13/3}$$

dont l'intégration fournit la loi d'évolution temporelle de l'angle de contact:

$$a(t) = K \left(2\lambda \frac{L}{V^* t} \right)^{3/10} \quad (22)$$

où $K = (3/10)^{3/10} (2/3)^{1/10} = 0,67$; d'où l'on déduit par (21) celle du rayon de la goutte qui s'étale :

$$r(t) = K' L \left(\frac{1}{2\lambda} \frac{V^*}{L} t \right)^{1/10}$$

où le nouveau coefficient numérique $K' = (2/3)^{1/3} K^{-1/3} = (2/3)^{1/3} ((3/10)^{3/10} (2/3)^{1/10})^{-1/3} = 0,99876$ c'est-à-dire égal à 1 en pratique. Ainsi :

$$r(t) = L \left(\frac{1}{2\lambda} \frac{V^*}{L} t \right)^{1/10} \quad (23)$$

La relation (23), équivalente à la loi de Tanner, montre que l'étalement d'une goutte sur une surface solide plane parfaitement lisse et propre, en mouillage complet, est très lent. Ces relations (22) et (23) apportent une justification théorique aux lois d'observation (1) et (2).

Rappelons cependant que ces résultats sont uniquement valides si les effets de la gravité n'interviennent pas, c'est-à-dire si seuls les processus capillaires interviennent : pour cela le rayon de la goutte doit rester de l'ordre de la longueur capillaire. Au-delà, on démontre que les gouttes larges s'étalent suivant une loi temporelle en $t^{1/8}$ et non plus $t^{1/10}$, ce que confirment en effet les expériences ⁽⁷⁾.

Les courbes de la figure 4 résultent des calculs de (23) que nous avons effectués pour différents liquides : l'eau, l'éthanol, l'huile d'olive, avec les valeurs de L telles qu'utilisées dans notre manip (taille de la goutte initiale), et à titre de comparaison, l'huile silicone largement étudiée par ailleurs ⁽⁸⁾.

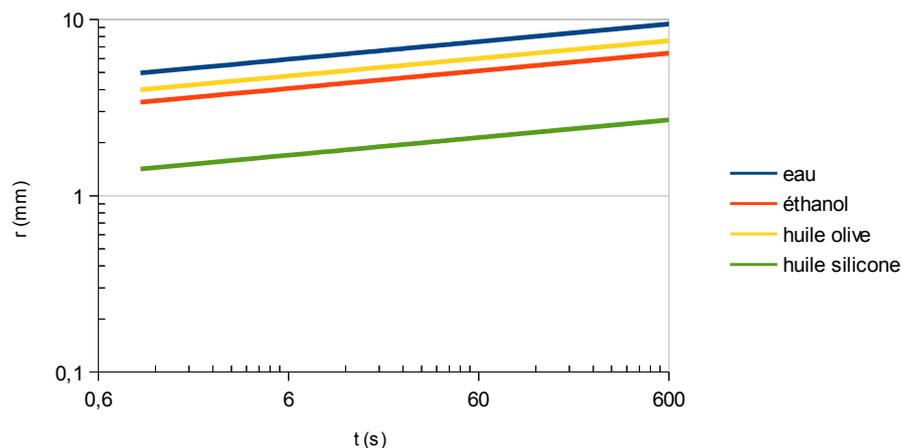


figure 4 : courbes théoriques, en coordonnées log-log, de l'évolution de $r(t)$ pour différentes gouttes liquides, pour lesquelles nous avons fixé $\lambda = 15$ et avec des dimensions initiales différentes L correspondant aux manip effectuées dans le cadre du présent article avec l'eau ($L = 2,5$ mm), l'éthanol ($1,6$ mm) et l'huile d'olive ($L = 3,5$ mm), le cas de l'huile silicone étant montré à titre de comparaison (avec $L = 1$ mm)

7 Voir : E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit : Hydrodynamique physique – CNRS éditions, EDP Sciences, 2001

8 idem

2. Manips effectuées et résultats

Pour observer l'étalement des gouttes, nous avons utilisé un rétroprojecteur sur le plateau duquel a été disposée une pièce de référence, de dimension connue, pour servir d'étalon de mesure du diamètre de la goutte, et les gouttes des différents liquides. L'image est projetée sur un écran et donne une bonne visibilité des dimensions relatives de la goutte (figure 5).

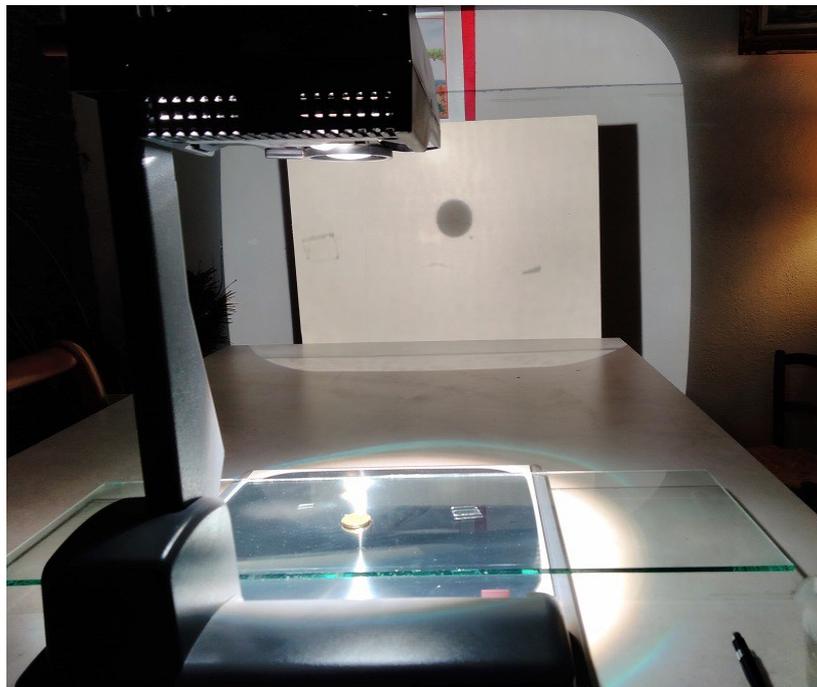


figure 5 : dispositif employé pour « mesurer » le diamètre des gouttes qui s'étalement sur une vitre posée sur le plateau réfléchissant du rétroprojecteur

Les liquides employés pour les gouttes sont :

- eau : $\eta = 1006 \cdot 10^{-6}$ Pa.s ; $\gamma = 72,75 \cdot 10^{-3}$ N/m (donc $V^* = 72$ m/s) ; $L = 2,5$ mm
- éthanol (alcool éthylique 95%) : $\eta = 248 \cdot 10^{-6}$ Pa.s ; $\gamma = 22 \cdot 10^{-3}$ N/m (donc $V^* = 89$ m/s) ; $L = 1,6$ mm
- huile d'olive : $\eta = 84 \cdot 10^{-3}$ Pa.s ; $\gamma = 33 \cdot 10^{-3}$ N/m (donc $V^* = 0,39$ m/s) ; $L = 3,5$ mm.

Pour chacun des liquides, on a suivi l'évolution de la taille de l'image de la goutte posée sur la vitre, au moyen d'un écran sur lequel était aussi projetée l'image d'une pièce circulaire témoin de dimension connue (diamètre 2,3 cm) destinée à évaluer le diamètre de la goutte. La figure 6 montre, aux premières secondes de l'étalement, chacune de ces images.

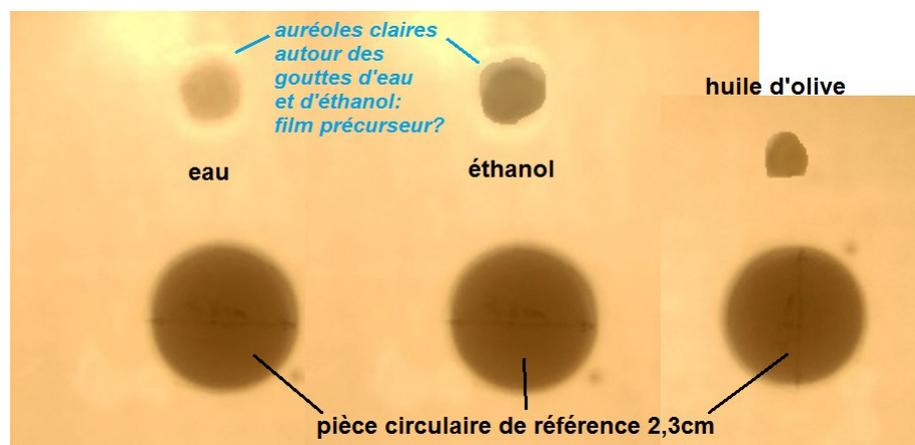


Figure 6 : image des gouttes d'eau, d'éthanol et d'huile d'olive sur l'écran, comparées à la taille d'une pièce circulaire de diamètre connu

Premiers constats :

- sauf peut-être pour l'eau, les gouttes n'ont pas la forme circulaire espérée : elles se déforment au cours du temps ; on est donc gêné pour relever un diamètre fiable $2r$ de la goutte.
- autour des gouttes d'eau et d'éthanol il semblerait qu'une auréole plus claire existe, elle est quasiment non apparente pour l'huile d'olive : cela pourrait être tout ou une partie du film précurseur ; l'huile d'olive étant très peu mouillante, ce serait donc normal que le film précurseur soit très restreint.

Les différentes valeurs du diamètre $2r$ des gouttes relevé au cours du temps sont dans le tableau ci-après, elles sont comparées aux valeurs théoriques prédites par (23) utilisant les données adoptées plus haut.

t(s)	eau		éthanol		Huile d'olive	
	2r (mm) relevé	2r (mm) calculé par (23)	2r (mm) relevé	2r (mm) calculé par (23)	2r (mm) relevé	2r (mm) calculé par (23)
2	10,2	9,94	9	7,26	9	8,56
10	10,5	12,5	10	8,54	9	10,05
20	11,5	13,4	10	9,16	9	10,78
30	11,5	14	10	9,54	9	11,22
40	11,5	14,36	10	9,8	10	11,56
50	11,5	14,7	9	10,04	10	11,8
60	11,5	15	Non mesurable	10,22	Non mesurable	12

Commentaires et critiques :

- Les ordres de grandeur sont respectés mais des écarts importants se forment au cours du temps, notamment pour l'eau ;
- Pour l'éthanol, on constate même une rétractation de la goutte au-delà de 50 secondes : cela s'explique par le fait que les conditions climatiques de l'expérience ne sont pas maintenues constantes, l'éthanol s'évapore, son film précurseur doit vraisemblablement s'assécher, d'autant que l'effet de chauffage par la lampe du rétroprojecteur se fait sentir ;
- Les liquides mouillants comme l'eau et l'éthanol sont sensibles à la propreté et à la régularité de la vitre : l'écart à la loi de Tanner est donc d'autant plus prononcé que, avec les moyens utilisés, ces conditions ne pouvaient pas être parfaites ;
- Pour l'huile d'olive, sa viscosité est telle que la goutte se déforme rapidement avec la moindre aspérité, et ceci gêne énormément le relevé exact du diamètre de la goutte, comme mentionné plus haut ;
- La taille initiale de la goutte, L , n'est pas mesurée avec rigueur, ce qui peut fausser les valeurs théoriques ;
- Enfin, le diamètre des gouttes, $2r$, est au-delà des longueurs capillaires : comme indiqué, les effets de la gravité interviennent et la loi de tanner doit être remplacée. Quoi qu'il en soit, nos « mesures » montrent plutôt un comportement beaucoup plus lent que la loi en $t^{1/8}$ correspondant à ces effets.

En conclusion, une telle manip n'est pas aussi évidente qu'elle ne semblait : elle nécessite des conditions de laboratoire irréprochables. C'est la condition indispensable pour caractériser, en R&D des matériaux, les propriétés d'étalement et de rhéologie des liquides et mélanges dans les différents domaines comme : la cosmétique, la pharmacie, le packaging, la plasturgie, la métallurgie, les revêtements (peintures...), etc., pour lesquels la connaissance de l'étalement des gouttes représente un enjeu industriel et technique important et quotidien.