ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Le ludion: pas si ludique que ça!...

Frédéric Élie

octobre 2012

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Le ludion est surtout connu comme un jouet étonnant: c'est un objet immergé dans un récipient, une bouteille par exemple, qui a la faculté de couler lorsqu'on appuie sur la bouteille, et de remonter lorsqu'on relâche la pression. En fait, il présente un grand intérêt scientifique et technique. Scientifique d'abord parce qu'il applique directement le fameux principe d'Archimède en mécanique des fluides, et nous aurons l'occasion dans cet article d'en dire deux mots. Technique aussi car l'application du principe du ludion la plus connue est le sous-marin. D'autres applications existent aussi, comme par exemple le débitmètre à ludion qui permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'un liquide dans un conduit.
Malgré son apparente simplicité, la théorie qui permet de modéliser le mouvement du ludion dans le récipient n'est pas si évidente que ça: par exemple, nous verrons que la loi qui permet de calculer la profondeur du ludion en fonction du temps (ou loi horaire) ne fait pas appel à des fonctions analytiques, en général. Il est en revanche relativement aisé de calculer la vitesse acquise à une profondeur quelconque (dans les limites d'approximation du modèle, bien sûr).
Le dispositif "expérimental" utilisé dans cet article est le suivant: le ludion est une cartouche d'encre vide, cylindrique, lestée par un petit écrou en acier; le récipient est une bouteille en verre, aux parois rigides donc, fermée par un bouchon sur lequel on imprime une pression variable. L'intérêt d'une bouteille rigide par rapport aux bouteilles en plastique couramment employées pour faire la démonstration du ludion, réside dans le fait que le volume d'eau reste invariable lorsqu'on modifie la pression, et que, par conséquent, l'effet sur le mouvement du ludion se fait sentir plus rapidement. En outre, le contrôle de la pression est plus aisé.

SOMMAIRE:

1 - Rappel du principe d'Archimède

Tout corps de masse M, immergé complètement ou non dans un liquide de masse volumique ρ, subit de la part de celui-ci une force $\mathbf{P}_A$ dirigée de bas en haut, de centre d'application C, appelé ***centre de poussée***, et dont l'intensité est égale au poids du liquide déplacé par le volume immergé V.

Dans le repère adopté (cf. figure 1), on a:

$$\mathbf{P}_A = \rho \, g \, V \, \mathbf{e_z} \qquad (1)$$

g: accélération de la pesanteur $g \approx 9{,}81 \text{ ms}^{-2}$.

Le centre de poussée C est le barycentre géométrique du volume immergé.

La démonstration du théorème d'Archimède est donnée en Annexe 1.

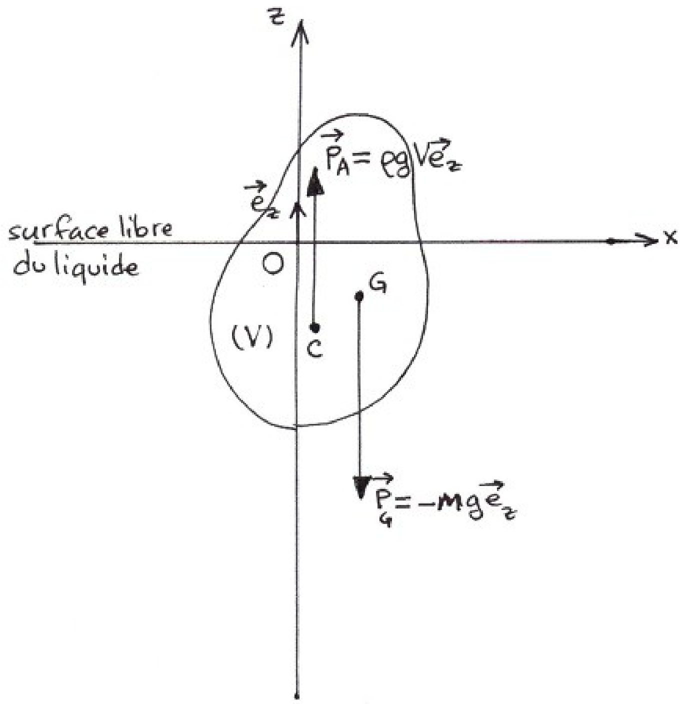

figure 1

Le bilan des forces **F** exercées sur le corps de masse M, en son centre d'inertie G, est égal à la somme de la poussée d'Archimède $\mathbf{P}_A$ et de son propre poids $\mathbf{P}_G$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_G$$

avec: $\mathbf{P}_G = -Mg\mathbf{e_z}$.

Remarque: - Dans le cas général C et G ne sont pas portés sur le même axe vertical et ne coïncident pas. Il apparaît donc un moment dynamique par rapport à C:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{GC} \wedge (\mathbf{P}_A + \mathbf{P}_G)$$

Dans l'hypothèse, adoptée ici, où G et C sont sur la même verticale Oz et où G est plus bas que C (configuration stable), on a $\mathbf{M}_C = 0$.

Le corps prend une accélération donnée par le principe fondamental de la dynamique:

$$M\frac{d^2\mathbf{OG}}{dt^2}=\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_G$$

avec **OG** = $z\mathbf{e}_z$, la projection sur Oz donne:

$$M\frac{d^2z}{dt^2}=\rho\, g\, V-Mg$$

soit l'équation du mouvement:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g\left(\frac{\rho V}{M}-1\right)\qquad(2)$$

En conséquence:
- le corps reste au repos ($d^2z/dt^2 = 0$) si $M = \rho V$ (flottabilité neutre)
- il coule ($d^2z/dt^2 < 0$) si $M > \rho V$ (flottabilité négative)
- il monte ($d^2z/dt^2 > 0$) si $M < \rho V$ (flottabilité positive).

2 - Principe du ludion

Le ludion est un corps solide placé dans un liquide contenu dans un récipient entièrement fermé, avec pour particularité de changer de flottabilité lorsque la pression exercée sur le liquide change. Pour cela, le ludion renferme un volume d'air en contact avec le liquide ambiant.
Dans la suite, le liquide sera l'eau.

Le récipient est supposé rigide (bouteille en verre par exemple) mais avec une fermeture sur laquelle on peut appliquer une pression extérieure notée P: dans notre manip il s'agit d'un bouchon que l'on enfonce plus ou moins (photo figure 2).

figure 2: dispositif du ludion dans sa bouteille

Le volume d'eau dans le récipient est supposé invariable, autrement dit la densité de l'eau ne change pas sous l'effet de la pression: l'eau est très peu compressible, beaucoup moins en tous cas que l'air. Il en découle qu'une variation de la pression extérieure sur l'eau va se transmettre intégralement à l'interface air-eau du ludion, et que, du fait de la compressibilité de l'air, le volume de celui-ci variera également. Cette variation de volume d'air entraînera celle du volume du liquide déplacé et donc agira sur la flottabilité du ludion.

Remarque: - Ces hypothèses sont raisonnables. En effet, pour l'eau comme pour tout liquide classique, l'équation d'état est, au premier ordre, de la forme:

$$V(T,P)=V_0[1+\alpha_V(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)] \qquad (3)$$

où V(T,P) volume du liquide à la température T et à la pression P, et:

$\alpha_V=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ coefficient de dilatation thermique à pression constante = $2{,}6.10^{-4}$ K^{-1} pour l'eau à la température standard T = 298 K

$\chi_T=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ coefficient de compressibilité à température constante = $4{,}5.10^{-10}$ Pa^{-1} pour T = 298 K

Soit ρ = m/V(T,P) la masse volumique du liquide, et en supposant le liquide isotherme (T constante):

$$\rho(P)=\rho_0\frac{1}{1-\chi_T(P-P_0)}$$

on devrait donc s'attendre à ce que ρ augmente quand P augmente. Or pour l'air, considéré comme un gaz parfait, son coefficient de compressibilité est:

$$\chi'_T=\frac{1}{P}\approx 10^{-5}\,Pa^{-1} \quad \text{sous atmosphère normale}$$

donc l'air est beaucoup plus compressible que l'eau (bien entendu pour des pressions plus élevées, l'air cesse d'être compressible (*)).

Le fait que P se transmet quasi intégralement au volume d'air emprisonné dans le ludion a pour conséquence que la poussée d'Archimède varie dans les sens suivants:

a) La pression de l'eau augmente (P augmente):
- => le volume d'air diminue
- => le volume de liquide déplacé V diminue
- => la poussée d'Archimède P_A diminue
- => la flottabilité devient négative
- => le ludion coule

b) La pression de l'eau diminue (P diminue):
- => le volume d'air augmente
- => le volume de liquide déplacé V augmente
- => la poussée d'Archimède P_A augmente
- => la flottabilité devient positive
- => le ludion remonte

3 - Comment varie le volume d'air dans le ludion en fonction de la pression exercée sur le liquide P?

Soit V' le volume d'air dans le ludion. Le changement de volume sous l'application de P s'effectue sans

* On s'en rend compte avec l'expérience suivante: une seringue en plastique est bouchée à son extrémité (par notre doigt par exemple) tandis qu'on appuie le piston. On s'aperçoit qu'il devient impossible de pousser le piston après une certaine compression du volume d'air.

échange de chaleur: c'est donc un processus ***adiabatique***, et il vérifie:

$$PV'^{\gamma}=cste \quad (4)$$

où $\gamma = c_P/c_V$ est l'exposant adiabatique, c_P et c_V sont les capacités calorifiques à pression et à volume constant. Pour un gaz parfait, $\gamma \approx 1,4$.
La quantité (4) étant constante, elle s'applique aussi pour l'état initial t = 0, où:
$P = P_0$ pression initiale exercée sur le liquide
$V' = V'_0$ volume d'air initial dans le ludion.

NB: - P_0 n'est pas forcément la pression atmosphérique P_{atm}: elle peut être liée à la force avec laquelle le bouchon est enfoncé au départ, en tous cas on a $P_0 \geq P_{atm}$.

Il s'ensuit:

$$PV'^{\gamma}=P_0 V'^{\gamma}_0$$

d'où le nouveau volume d'air:

$$V'(P)=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma} V'_0 \quad (5)$$

(5) montre bien que le volume d'air diminue lorsque P augmente: $P > P_0 \Rightarrow V'(P) < V'_0$

Soit V_0 le volume à vide du ludion (corps du ludion et lest), il est constant car le ludion est indéformable. Le volume V de liquide déplacé est donc la somme du volume d'air et du volume à vide du ludion:

$$V=V'+V_0=\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/\gamma} V'_0+V_0 \quad (6)$$

D'après (2) les conditions de flottabilité deviennent:

- flottabilité neutre: $$P_0\left(\frac{V'_0}{\frac{M}{\rho}-V_0}\right)^{\gamma}=P$$
- flottabilité positive: $> P$
- flottabilité négative (ludion coule) $< P$

Il faut: une pression externe P suffisamment grande pour faire couler le ludion, et suffisamment petite (dépression obtenue en tirant très légèrement le bouchon) pour le faire remonter.

4 - Établissement de l'équation du mouvement du ludion

Lorsque le ludion change de profondeur z au cours de son mouvement, il est soumis à une pression hydrostatique variable donnée par le ***théorème de Pascal***:

$$\mathbf{grad}\, P = \rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{e}_z$$

(Attention: z est compté négativement dans le repère choisi figure 1 puisque le ludion est au-dessous de l'axe Ox délimité par la surface de l'eau: z < 0).
La projection sur Oz donne alors:

$$\frac{dP}{dz}=-\rho g$$

d'où:

$$P(z)=P(0)-\rho g z \quad (7)$$

avec z < 0 (rappel), où P(0) est la valeur de la pression exercée sur le liquide à la surface z = 0; elle ne doit pas être confondue avec la pression initiale P_0 qui déterminait le volume d'air initial V'_0 dans le ludion. Il s'ensuit que c'est P(z), et non P(0), qui va agir sur le volume d'air V' à la profondeur z. Donc, à la profondeur z, dans les relations précédentes (4), (5) et (6), P doit être remplacée par (7), ce qui conduit à une poussée d'Archimède qui dépend de z puisque le volume du liquide déplacé V(z) varie avec z:

$$V(z)=\left(\frac{P_0}{P(0)-\rho g z}\right)^{1/\gamma} V'_0+V_0 \quad (8)$$

L'équation du mouvement (2) s'écrit donc:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g\left[\frac{\rho}{M}\left(\frac{P_0}{P(0)-\rho g z}\right)^{1/\gamma} V'_0+\frac{\rho}{M} V_0-1\right] \quad (9)$$

Elle est paramétrée par la pression extérieure exercée à la surface de l'eau P(0). Elle n'est pas facile à intégrer mais, à défaut de calculer la loi horaire z(t), on peut calculer la vitesse acquise par le ludion à la profondeur z: v(z) = dz/dt.
Il suffit pour cela de remarquer que d²z/dt² = dv/dt et de faire apparaître dans le second membre dz = vdt pour obtenir une intégrale de la forme $\int_0^z F(z)\,dz$ qui sera reliée à v. On multiplie donc (9) par v:

$$v\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}=v\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$\rightarrow d(v^2)=2v\,dt\frac{d^2z}{dt^2}=2\frac{d^2z}{dt^2}dz=2f(z)dz$$

où f(z) est l'expression (9) fonction uniquement de z:

$$v^2(z)=2\int_0^z f(z)\,dz$$

avec: $f(z)=g\left[\frac{\rho V'_0}{M}\left(\frac{P_0}{P(0)-\rho g z}\right)^{1/\gamma}+\frac{\rho V_0}{M}-1\right]$ qui est facilement intégrable.
Changement de variable:

$$Y=\frac{P(0)-\rho g z}{P_0} \quad \rightarrow \quad dz=-\frac{P_0}{\rho g}dY$$
$$Y(0)=P(0)/P_0$$
$$f(z)=\frac{\rho g V'_0}{M}Y^{-1/\gamma}+g\left(\frac{\rho V_0}{M}-1\right)$$

ce qui donne:

$$v^2(Y)=2\frac{P_0 V'_0}{M}\int_{Y(0)}^{Y} Y^{-1/\gamma}dY+2\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{\rho V_0}{M}-1\right)\int_{Y(0)}^{Y}dY$$
$$=2\frac{P_0 V'_0}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[Y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]_{Y(0)}^{Y}+2\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{\rho V_0}{M}-1\right)[Y]_{Y(0)}^{Y}$$
$$=2\frac{P_0 V'_0}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}Y^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+2\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{\rho V_0}{M}-1\right)Y-2\frac{P_0 V'_0}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P(0)}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-2\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{\rho V_0}{M}-1\right)\frac{P(0)}{P_0}$$

Revenant à la variable z, on trouve:

$$v(z)=\sqrt{A\left(1-\frac{\rho g z}{P(0)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+Bz-A}$$
$$avec:\qquad\qquad (10)$$
$$A=2\frac{P_0 V'_0}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P(0)}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad B=2\left(\frac{1}{\rho}-\frac{V_0}{M}\right)\rho g$$

(rappel: $z \leq 0$).

NB: - En remarquant que $V_0/M = \rho_0$ masse volumique moyenne du ludion (principalement et en pratique celle du lest), on a B généralement > 0 car le lest est en général plus dense que l'eau: $\rho_0 > \rho$.

Remarque: - Est-ce que, d'après (10), la vitesse du ludion atteint un maximum lors de la descente? Autrement dit, quel est le sens de variation de v(z), avec $z \leq 0$? Pour z = 0 (10) montre que v(0) = 0 donc pour z < 0 la vitesse augmente (en valeur absolue). Existe-t-il alors une profondeur $z_0 < 0$ où v atteint un maximum pour ensuite diminuer ou se stabiliser? Pour cela, il faut calculer le signe de dv/dz, ou ce qui revient au même de $d(v^2)/dz$ puisque: $dv^2/dz = 2v\, dv/dz$, qui est plus facile de calculer.
De (10) on tire:

$$\frac{dv^2}{dz}=-A\frac{\rho g}{P(0)}\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{\rho g z}{P(0)}\right)^{-1/\gamma}+B$$

dv^2/dz est > 0, donc v est croissante si:

$$z<-\frac{P(0)}{\rho g}\left[\frac{P_0}{P(0)}\left(-\frac{V'_0}{M}\frac{1}{\frac{1}{\rho}-\frac{V_0}{M}}\right)^{\gamma}-1\right]$$

or le terme entre parenthèses $V'_0/M/(1/\rho - V_0/M)$ est très petit devant 1, donc le terme entre crochets est < 0, et donc la condition est que l'on ait z < valeur positive. Comme z < 0 cette condition est toujours vérifiée. Il s'ensuit que pour z < 0 la vitesse croît depuis z = 0 où elle vaut v(0) = 0. Elle n'atteint pas de maximum.

5 - Application à un cas simple: ludion cylindrique

Le ludion utilisé (photo figure 3) est une cartouche d'encre assimilée à un cylindre de hauteur H = 35 mm et de diamètre 2R = 5 mm, lesté par un écrou en acier de masse volumique M/V_0 = 7200 kg/m^3. On suppose que la masse M du ludion est entièrement contenue dans le lest. Sa valeur est M = 0,5 g.
Au départ, le volume d'air initial V'_0 est celui du volume intérieur du cylindre, dont on néglige l'épaisseur:

$$V'_0 = \pi R^2 H = 7.10^{-7}\ \text{m}^3$$

On rappelle que P(0), pression à la surface z = 0, n'est pas la même que la pression initiale exercée sur le liquide P_0. Par exemple, P_0 peut être assimilée à la pression atmosphérique, ce qui détermine le volume d'air initial dans le ludion, tandis que P(0) est la pression que l'on applique ensuite sur le bouchon et qui fait changer ce volume d'air.
La relation (10) donnant v(z;P(0)) en fonction de la profondeur z < 0 est paramétrée par P(0), elle s'écrit alors avec les valeurs numériques fixées précédemment (avec ρ = 1000 kg/m^3 masse volumique de l'eau et P_0 = 1 atm = 10^5 Pa):

$A = 36{,}8 \times P(0)^{0{,}285}$
$\rho g/P(0) = 9810/P(0)$
B = 16,9
$(\gamma-1)/\gamma = 0{,}285$

d'où:

$$v(z\,;P(0))=\sqrt{36{,}8\,P(0)^{0{,}285}\left(1-\frac{9810}{P(0)}z\right)^{0{,}285}+16{,}9\,z-36{,}8\,P(0)^{0{,}285}} \quad (11)$$


figure 3 - Ludion utilisé

La variation de v(z), calculée avec (11), pour différentes valeurs de P(0), est représentée à la figure 4.

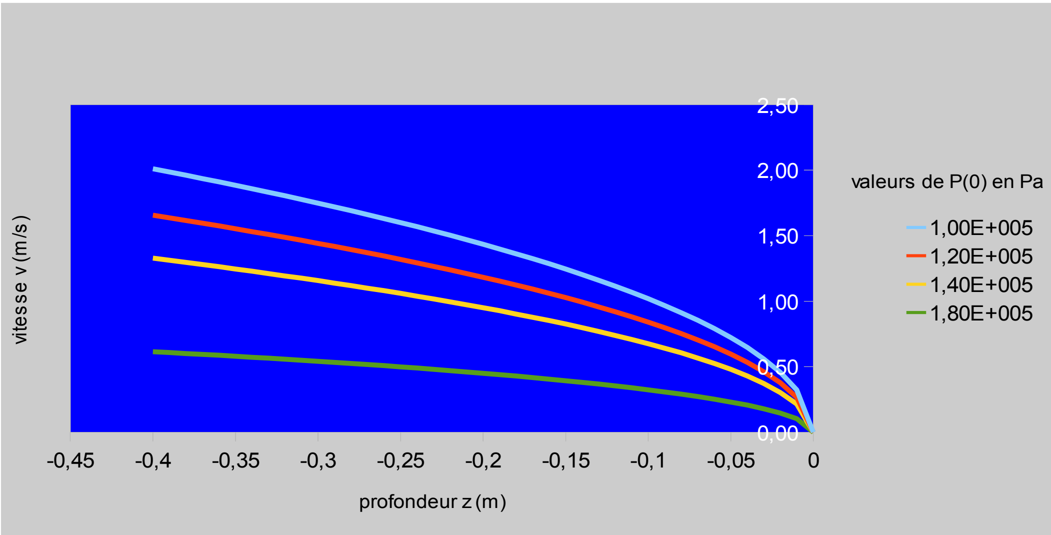

figure 4 - évolution de la vitesse d'immersion v(z) en fonction de la profondeur z pour différentes valeurs de la pression appliquée au liquide P(0)

Remarque importante: - Les courbes de la figure 4 présentent un paradoxe: plus P(0) augmente, moins v(z) est élevée. Cela tient à deux choses:
- D'abord, la vitesse d'immersion ne dépend pas tant de P(0) mais de la vitesse avec laquelle on a appliqué P(0) au liquide, car cette dynamique initiale induit des surpressions sur un laps de temps bien plus importantes que si on impose une pression statique au fluide pendant une durée théoriquement infinie. Cette situation n'est pas prise en compte dans (10) et (11);
- Ensuite, en fait la paramétrisation par P(0) ne signifie pas grand chose: en effet, dès que P(0) atteint une certaine valeur minimale P_{min}, dont on verra plus loin qu'elle est

$$P(0)\geq P_{min}=P_0\left(\frac{V'_0}{\frac{M}{\rho}-V_0}\right)^{\gamma}$$

la flottabilité du ludion devient négative et le ludion coule avec une vitesse qui est fixée par cette valeur, et qui augmente avec la profondeur z. Ainsi, pour une géométrie donnée du ludion et les conditions

initiales de sa flottabilité une seule pression appliquée au liquide entraîne le début de la descente du ludion. La "bonne" courbe est celle obtenue pour P_{min}: il n'y a alors pas de sens de parler de plusieurs valeurs possibles de P(0) qui est maintenue pendant tout le mouvement.
Par contre, si P(0) change au cours du mouvement, alors il faut reconsidérer l'équation du mouvement avec les nouvelles conditions initiales qui correspondent à l'ancienne valeur de P(0) et au volume d'air dans le ludion V' au moment du changement, et dans ce cas, on a affaire à une nouvelle dynamique avec de nouveaux coefficients A et B.
Il reste que la figure 3 enseigne que, pour une pression P(0) donnée, la vitesse d'immersion croît assez lentement avec la profondeur z.

La hauteur de l'eau dans le cylindre du ludion renseigne directement sur la valeur de la pression à l'interface air-eau, et joue en quelque sorte le rôle de manomètre. Il est donc intéressant de calculer cette hauteur, notée X en fonction de P(0) et de z (figure 5).

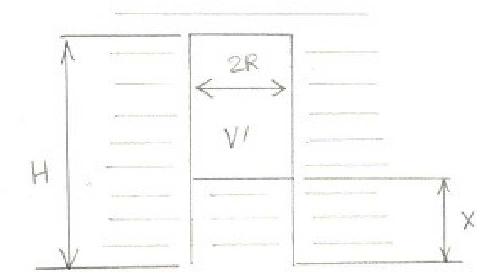

figure 5

On utilise la relation (5) où P est donnée par (7):

$$V'(z)=\left(\frac{P_0}{P(0)-\rho g z}\right)^{1/\gamma} V'_0$$

or: $V' = V'_0 - \pi R^2 X$ et $V'_0 = \pi R^2 H$ par hypothèse, d'où:

$$X(z)=H\left[1-\left(\frac{P_0}{P(0)-\rho g z}\right)^{1/\gamma}\right] \quad (12)$$

(rappel: $z \leq 0$).

(12) montre bien que, pour z = 0 le niveau d'eau est: $X(0)=H\left[1-\left(\frac{P_0}{P(0)}\right)^{1/\gamma}\right]$

NB: - la relation (12) est la base du principe du débitmètre à ludion: P(0) est fournie par la pression dynamique dans la dérivation duquel on a placé un ludion dont on mesure le niveau d'eau X; et comme P(0) est relié au débit de l'écoulement (théorème de Bernoulli), celui-ci peut se déduire directement de cette mesure.

Il est clair que, si au début P(0) reste égale à la pression initiale P_0, on a X = 0 (pas d'eau dans le ludion) conformément au choix que nous avons fait pour V'_0, à savoir l'air emplit tout le cylindre. Mais pour que le ludion descende il faut bien imprimer une pression P(0) plus élevée que l'initiale P_0, et plus précisément il faut $P(0) > P_{min}$, comme dit dans la remarque précédente.
La variation de X avec la profondeur z < 0 est donnée figure 6 pour un P(0) = 2 atm (2.10^5 Pa), avec les données choisies: H = 35 mm, P_0 = 1 atm = 10^5 Pa

$$\frac{X}{H}=1-\left(\frac{10^5}{2.10^5-9810\,z}\right)^{1/1,4}$$

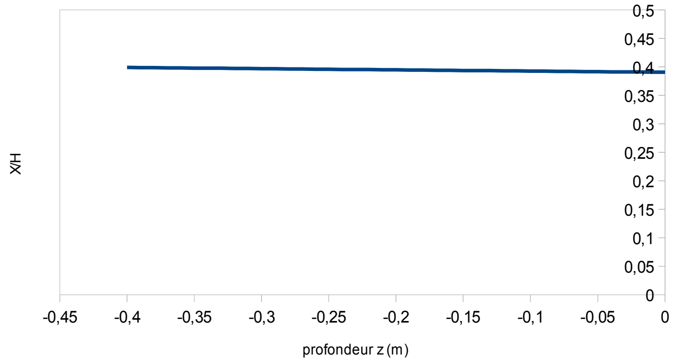

figure 6 - variation de la hauteur d'eau dans le ludion

On s'aperçoit que X ne varie pratiquement pas avec z: le ludion n'est pas un indicateur de profondeur, en revanche il exprime bien la valeur de la pression imposée au liquide P(0).
Les photos de la figure 7 montrent les différentes phases du mouvement du ludion:

(a) - Ludion flottant à la surface avant application d'une surpression extérieure. A l'instant initial, le liquide est pratiquement soumis à la seule pression atmosphérique P_0.

(a) - Bouchon peu enfoncé, liquide pratiquement à P_{atm}

(b) - Pression sur le bouchon jusqu'à atteindre le seuil P_{min}

(c) - Pression P(0) dépasse la pression P_{min}: le ludion coule

(d) - Ludion au fond, pression P(0) maintenue constante

(e) - La pression P(0) est diminuée et devient plus faible que P_{min} (bouchon légèrement retiré): le ludion remonte

Figure 7 - mouvements du ludion

(b) - On applique une pression $P(0) > P_0$. Tant qu'elle n'entraîne pas une diminution suffisante du volume d'air V'_0 dans le ludion, celui-ci continue de flotter parce que la poussée d'Archimède P_A reste supérieure au poids du ludion P_G. A noter que l'eau commence à pénétrer dans la ludion initialement vide, avec une hauteur X(0) donnée par la formule (12) pour z = 0. Cette hauteur d'eau X(0) fournit directement la valeur P(0) de la pression appliquée au liquide par l'enfoncement du bouchon (formule (12)).

(c) - Pour une pression suffisante P(0), le poids commence à l'emporter sur la poussée d'Archimède parce que le volume d'air V' est devenu suffisamment petit. Cette valeur suffisante est P_{min}; Elle se déduit directement à partir de (2):

$$P_{min} = P_0 \left(\frac{V'_0}{\frac{M}{\rho} - V_0} \right)^{\gamma} \quad (13)$$

On a $V'_0 = \pi R^2 H$ (par hypothèse) et M/V0 est la masse volumique ρ_0 du ludion (pratiquement celle de son lest), donc pour que le ludion descende il faut que:

$$P(0) > P_{min} = P_0 \left(\frac{\pi R^2 H}{M \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)} \right)^{\gamma}$$

Avec les données précédentes, et P_0 = 1 atm, on obtient comme valeur minimale de la pression appliquée pour amorcer la descente du ludion:

$$P(0) > P_{min} = 1\, atm \left(\frac{\pi \times (5 \times 10^{-3}/2)^2 \times 35.10^{-3}}{0{,}5.10^{-3} \times \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{7200} \right)} \right)^{1{,}4} = 1{,}9\, atm$$

soit une surpression de 0,9 atm en plus de la pression atmosphérique.
Le goulot de la bouteille où le bouchon est enfoncé a un diamètre D = 2 cm. On augmente la pression en disposant dessus un objet de masse m_e, ce qui crée une pression égale à $m_e g/(\pi D^2/4)$. Pour que cette pression soit égale au minimum à la valeur requise pour que le ludion coule, soit 0,9 atm, il faut donc une masse au moins égale à:

$$m_e = (0{,}9.10^5/g)(\pi D^2/4) = 0{,}9.10^5/9{,}81 \times \pi \times 0{,}002^2/4 = 2{,}9 \text{ kg}$$

Dans la manip réelle, un poids de 2 kg suffit déjà à faire descendre le ludion. Cette valeur plus faible que la valeur théorique de 2,9 kg s'explique par le fait que le bouchon, au contact de la surface de l'eau dans la bouteille (pas de lame d'air entre le bouchon et l'eau) est déjà un peu enfoncé, donc génère une surpression non nulle. D'ailleurs, on observe, bouchon un peu enfoncé, que l'eau pénètre un peu dans le ludion (X(0) n'est pas nulle en réalité). Il s'ensuit qu'une pression supplémentaire moindre que celle théorique de 0,9 atm est nécessaire pour faire descendre le ludion.

Remarque: - Il y a donc toujours un peu d'eau dans la cavité du ludion, même lorsque celui-ci est à la surface et que la pression supplémentaire est nulle (le bouchon étant cependant encore légèrement enfoncé comme au début). Lorsque l'on retire lentement le bouchon du goulot, il se crée alors une dépression par rapport à P(0) qui entraîne une augmentation du volume d'air dans le ludion (l'air, compressible, se détend), jusqu'au moment où l'air parvient à sortir par l'ouverture du ludion dans l'eau: une bulle se forme. Elle est bien visible sur la photo de la figure 8.

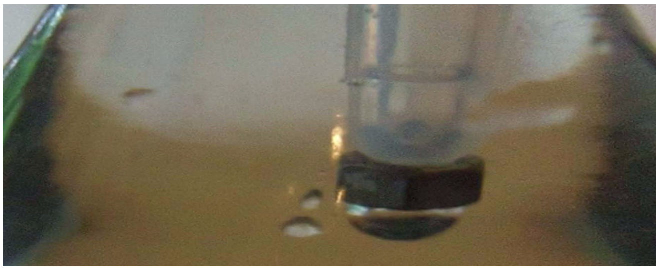

Figure 8 - Formation de la bulle à la sortie du ludion lorsque $P < P(0)$

6 - Accroissement de la pression P(0) par augmentation de la température de l'eau de la bouteille au contact d'une source chaude

On peut aussi accroître la pression P(0) de l'eau contenue dans la bouteille autrement qu'en appliquant une pression sur le bouchon: en chauffant l'eau de la bouteille, sa pression augmente du fait de l'incompressibilité de l'eau, et son effet sur le volume d'air dans le ludion est le même qu'auparavant.
Si l'on dispose le fond de la bouteille, initialement à la température ambiante T_1, dans un récipient contenant une eau à la température $T_0 = 100°C$, on constate qu'au bout de quelques secondes le ludion, initialement à la surface, se met à couler (photos de la figure 9).

Bouteille disposée dans un récipient contenant de l'eau qui vient de bouillir: le ludion est encore à la surface car l'eau de la bouteille n'est pas encore suffisamment chaude

L'eau de la bouteille s'est suffisamment réchauffée pour générer une pression qui atteint P_{min}: le ludion coule et reste au fond

L'eau se refroidit au cours du temps: la température de l'eau de la bouteille, et par suite sa pression diminuent: P(0) repasse en-dessous du seuil P_{min} et le ludion remonte

Figure 9 - Augmentation de la pression par réchauffement

La température obtenue dans la bouteille, à partir de laquelle la pression P(0) est suffisante pour faire couler le ludion, est notée T_f. Elle est liée à P(0) par (démonstration en Annexe 2):

$$T_f - T_1 = \left(\frac{\chi_T}{\alpha_V}\right)(P(0) - P_0)$$

où P(0) doit vérifier la condition (13) pour que le ludion coule.
On montre aussi en Annexe 2 que la constante de temps de montée en température, notée τ, dépend de la masse d'eau dans la bouteille m, de la géométrie de celle-ci (rayon r, hauteur L pour une bouteille assimilée à un cylindre) et les propriétés thermodynamiques: capacité calorifique à volume constant de l'eau c_V et coefficient de transfert thermique q: $\tau = \frac{m\, c_V}{2\pi r L q}$

Annexe 1 - Démonstration du théorème d'Archimède

Soit un corps solide, délimité par une surface (S) fermée, immergé dans un liquide en équilibre dans un champ de pesanteur **g**. En chaque point M de la surface (S) un vecteur normal **n**(M) orienté vers l'extérieur du solide est défini. La résultante des forces de pression sur le solide s'écrit alors:

$$\boldsymbol{F}=-\iint_{(S)} P\,\boldsymbol{n}(M)\,dS(M)$$

où P est la pression du fluide s'exerçant sur le solide.
Or le théorème de Green-Ostrogradsky (ou "théorème de la divergence") permet de transformer cette intégrale de surface en une intégrale de volume. Si (V) est le volume occupé par le solide délimité par la surface (S) on a:

$$\boldsymbol{F}=-\iint_{(S)} P\,\boldsymbol{n}\,dS=-\iiint_{(V)} \boldsymbol{grad}\,P.dV$$

Or le théorème de Pascal relie le gradient de pression au poids volumique du liquide:

$$\boldsymbol{grad}\,P=\rho\,\boldsymbol{g}$$

où ρ masse volumique du liquide. Il vient donc:

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{g}\iiint_{(V)} \rho\,dV$$

où l'on constate que la quantité $m=\iiint_{(V)} \rho\,dV$ est la masse du liquide qui occuperait le volume V du solide, autrement dit mg est le poids du liquide déplacé.
En particulier, si la résultante des forces de pression F équilibre la poids $\mathbf{P}_G$ = M**g** du solide, on obtient:

$\mathbf{P}_G$ + **F** = 0, c'est-à-dire M**g** - m**g** = 0

qui est l'expression classique du théorème d'Archimède pour un corps flottant. **F** est la poussée d'Archimède encore notée $\mathbf{P}_A$.

Le point d'application de la poussée d'Archimède, C, ne coïncide pas généralement avec le centre d'inertie G du corps solide. Pour déterminer la position de C, on écrit que le moment des forces de pression par rapport à un point d'origine O quelconque est égal au moment, par rapport à C, de la poussée d'Archimède. En effet, cette égalité est une conséquence directe du théorème de Pascal:

Moment des forces de pression:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}=-\iint_{(S)} \boldsymbol{OM}\wedge P\,\boldsymbol{n}(M)\,dS$$

Or, toujours en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}=-\iint_{(S)} \boldsymbol{OM}\wedge P\,\boldsymbol{n}(M)\,dS=\iiint_{(V)} \boldsymbol{rot}(P.\boldsymbol{OM})\,dV$$

D'après l'identité:

$$\boldsymbol{rot}(a\,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{grad}\,a\wedge\boldsymbol{u}+a\,\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{u}$$

on a:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}=\iiint_{(V)} \boldsymbol{grad}\,P\wedge\boldsymbol{OM}\,dV$$

Mais d'après le théorème de Pascal: **grad** P = ρ **g** d'où:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}=\iiint_{(V)} \rho\,\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{OM}\,dV=\boldsymbol{g}\wedge\iiint_{(V)} \rho\,\boldsymbol{OM}\,dV$$

Or le centre de volume C du volume liquide est, par définition:

$$m\,\boldsymbol{OC}=\iiint_{(V)}\rho\,\boldsymbol{OM}\,dV$$

On a donc:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}=-\iint_{(S)}\boldsymbol{OM}\wedge P\,\boldsymbol{n}(M)\,dS=-\boldsymbol{OC}\wedge m\,\boldsymbol{g}=\boldsymbol{OC}\wedge\boldsymbol{P}_A \quad (14)$$

qui s'énonce ainsi:

Le moment de la résultante des forces de pression par rapport à un point quelconque O est égal au moment de la poussée d'Archimède appliquée au centre de poussée C qui est le centre de volume du liquide déplacé.

Annexe 2 - Augmentation de la pression et du niveau d'eau dans le ludion par réchauffement de l'eau

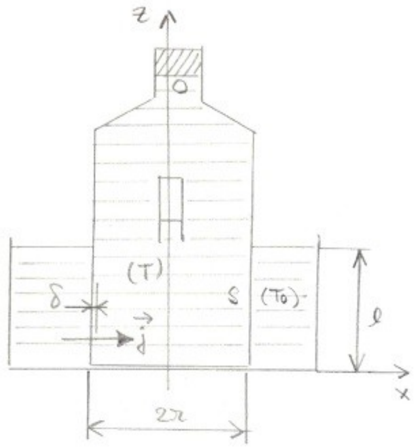

figure 10

Le flux de la puissance thermique transmise du réservoir, à la température T_0, au liquide de la bouteille, initialement à la température T_1, obéit à la loi de Fourier:

$$J\,(W/m^2)=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$$

où λ est la conductivité thermique. Si δ regroupe l'épaisseur de la paroi de la bouteille et la couche limite thermique du liquide développée le long de cette paroi, la relation précédente s'écrit approximativement:

$$J\approx-\lambda\frac{T-T_0}{\delta}=q\,(T_0-T)$$

où T est la température du liquide dans la bouteille et q le coefficient de transfert thermique:

$$q\,(W/m^2/K)=\frac{\lambda}{\delta}$$

La puissance thermique totale transmise au liquide de la bouteille à travers la surface (S) au contact du liquide du réservoir est donc:

$$W\,(watt)=\iint_{(S)}J\,dS=2\pi\,r\,L\,J=2\pi\,r\,L\,q\,(T_0-T)$$

Or cette puissance est égale, à volume constant, à la quantité de chaleur dQ transmise au liquide de la bouteille par unité de temps. Or $Q = mc_V (T - T_1)$ où m et c_V sont la masse de l'eau dans la bouteille et sa capacité calorifique à volume constant. Il vient donc:

$$W=\frac{dQ}{dt} \quad soit: \quad mc_V\frac{dT}{dt}=2\pi rLq(T_0-T)$$

dont l'intégration, avec les conditions initiales t = 0, $T = T_1$, donne la loi du réchauffement de l'eau dans la bouteille:

$$T(t)=T_0-(T_0-T_1)e^{-t/\tau} \quad (15)$$

τ étant la constante de temps d'atteinte de l'équilibre thermique:

$$\tau=\frac{mc_V}{2\pi rLq} \quad (16)$$

On note que l'on a bien:
t = 0 → $T(0) = T_1$ température initiale de l'eau dans la bouteille
t = +∞ → $T(+\infty) = T_0$: l'eau de la bouteille est en équilibre thermique avec l'eau du réservoir supposé être une source infinie.

On a vu en (3) que le volume d'eau est relié à la pression et à la température selon l'équation d'état:

$$V(T,P)=V_0[1+\alpha_V(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)]$$

L'eau étant incompressible, on a V(T,P) pratiquement constante, par suite:

$$\frac{dV}{V_0}=0=\alpha_V dT-\chi_T dP$$

d'où:

$$dP=\left(\frac{\alpha_V}{\chi_T}\right)dT$$

on en déduit que la pression de l'eau s'accroît avec la température, et l'on a:

$$P-P_0=\left(\frac{\alpha_V}{\chi_T}\right)(T-T_1)$$

P_0, T_1: pression et température initiales de l'eau dans la bouteille.
Il existe donc une température T_f, et donc un instant t_f donné par (15), à partir de laquelle P atteint la valeur P_f suffisante pour rompre l'équilibre du ludion telle que selon (13):

$$P_f=P_0+\left(\frac{\alpha_V}{\chi_T}\right)(T_f-T_1)\geq P_0\left[\frac{\pi R^2H}{M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)}\right]^{\gamma}$$

or d'après (15):

$$P_0+\left(\frac{\alpha_V}{\chi_T}\right)(T_0-(T_0-T_1)\exp(-t_f/\tau)-T_1)\geq P_0\left[\frac{\pi R^2H}{M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)}\right]^{\gamma}$$

ce qui donne la durée au bout de laquelle le ludion commence à couler sous l'effet du réchauffement:

$$t_f \geq \tau \ln \frac{1}{1+\frac{P_0}{T_0-T_1}\left(\frac{\chi_T}{\alpha_V}\right)\left[1-\left(\frac{\pi R^2 H}{M\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)}\right)^{\gamma}\right]} \quad (17)$$

avec les données numériques adoptées on obtient $t_f \geq 2{,}1.10^{-3}\tau$. La constante de temps se calcule par (16) en adoptant:
c_V = 4185 $JK^{-1}kg^{-1}$ pour l'eau liquide
q = 100 W/m²/K en ordre de grandeur pour l'eau
diamètre de la bouteille 2r = 7 cm
hauteur trempée L = 8 cm
masse de l'eau dans la bouteille m = 1 kg
On trouve: τ = 2380 s, soit t_f = 5 s (valeur observée en ordre de grandeur du temps au bout duquel le ludion commence à couler).

Bien entendu, ces calculs sont très approximatifs: on n'a pas pris en compte la convection thermique, la conduction dans le verre, les pertes thermiques, etc. Il reste que le principe de la manip peut offrir un moyen de déterminer expérimentalement τ, et donc q, par la mesure de t_f.