



Frédéric Elie on  
ResearchGate

## Les marées

Frédéric Elie

janvier 2006

CopyrightFrance.com

**La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.**

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

**Abstract :** Le phénomène des marées est observé depuis des millénaires, mais il a fallu attendre la théorie de la gravitation universelle de Newton pour fournir un premier modèle explicatif et prédictif basé sur l'hypothèse statique. Des modèles plus précis, tenant compte de la nature dynamique des perturbations de l'équilibre de la masse d'eau de la Terre, ont ensuite été développés du XVIIIe au XXe siècle (Laplace, George Darwin, Kelvin, Airy, Whewell, Chazallon, Hough, Poincaré, Roche...), ainsi que les effets dus aux formes des côtes et à la profondeur de l'eau. Au final ces études ont permis de prédire les marées tant au niveau global qu'au niveau local avec une précision satisfaisante par rapport aux besoins de la navigation. Mais le navigateur expérimenté sait qu'aux valeurs prévues il doit ajouter une marge due aux effets locaux des vents, de la pression atmosphérique, de la température de la mer... c'est ce qui s'appelle « prendre un pied de pilote ».

Le phénomène des marées intéresse aussi les astronomes. En effet, je dirai deux mots de son influence sur les mouvements de la Terre, du système Terre-Lune, notamment le fait que la Lune s'éloigne de la Terre !...

### SOMMAIRE

- 1 - Observation de la marée
- 2 - Caractéristiques et pratique de la marée
  - 2-1 - Niveau moyen et niveau de mi-marée
  - 2-2 - Etablissement du port Et
  - 2-3 - Coefficient de marée C et unité de hauteur U
  - 2-4 - Hauteurs de pleine mer Hpm et de basse mer Hbm
  - 2-5 - Niveau de réduction des sondes
  - 2-6 - Courbes de marées et calculs simplifiés de la marée
- 3 - Théories de la marée
  - 3-1 - Force génératrice de la marée en théorie statique de Newton
  - 3-2 - Théorie dynamique de Laplace (1775)
  - 3-3 - Propagation de l'onde de marée : modèle des bassins, résonances
  - 3-4 - Méthode harmonique
- 4 - Effets de la marée sur le système Terre-Lune
  - 4-1 - Allongement séculaire de la durée du jour terrestre et éloignement de la Lune
  - 4-2 - Limite de Roche
- Bibliographie
- Notes

## 1 - Observation de la marée

Les phénomènes de marée sont les mouvements de masses d'eau des océans suivant deux composantes :

- une variation du niveau de la mer en chaque point de la surface de la Terre. Cette composante est la « marée » proprement dite, et constitue la partie la plus spectaculaire du phénomène.
- un déplacement de la masse d'eau sur cette surface. Cette partie constitue le phénomène des courants de marée. Elle résulte directement du processus précédent.

Grâce aux données relatives aux marées le navigateur déterminera les heures de passage sur les hauts-fonds, les risques d'échouage, la possibilité de naviguer en une zone donnée en fonction des courants de marée.

L'observation des marées s'effectue à l'aide des échelles de marées ou des marégraphes. Pour un lieu donné, les observations sont enregistrées principalement sous forme des courbes de marées : il s'agit de courbes retraçant la hauteur d'eau en fonction du temps.

Selon la durée d'observation (la journée, le mois, l'année, plusieurs années) différentes variations de la hauteur d'eau sont identifiables :

- sur une journée la mer monte, garde un niveau maximum puis redescend. Plus précisément on observe les différentes phases (voir figure 1) :

- Le flux ou le montant : c'est la phase où la mer monte pendant environ 6 heures et au bout duquel son niveau atteint un maximum appelé pleine mer.
- L'étale de pleine mer : pendant plusieurs minutes le niveau maximum est conservé.
- Le reflux ou le perdant : la mer descend pendant 6 heures et atteint une hauteur minimale appelée basse mer.
- L'étale de basse mer : le niveau minimum est conservé pendant plusieurs minutes.
- On appelle marnage la différence de hauteur d'eau entre la pleine mer et la basse mer consécutives. On appelle heure de pleine mer l'heure du milieu de l'étale de pleine mer, et heure de basse mer l'heure du milieu de l'étale de basse mer.
- Et le cycle recommence. Entre deux pleines mer le temps écoulé est environ de 12 h 25 mn ; en presque 25 heures il y a donc à peu près deux pleines mer et deux basses mer. D'une journée à l'autre, les basses mers et les pleines mers se produisent 50 mn plus tard.
- Remarque : ce type de comportement de la marée avec une période constante entre deux pleines mer et une amplitude identique des deux pleines mers est dit marée du type semi-diurne (ou marée du type Brest). Mais il existe d'autres types de marées comme on le verra plus loin.

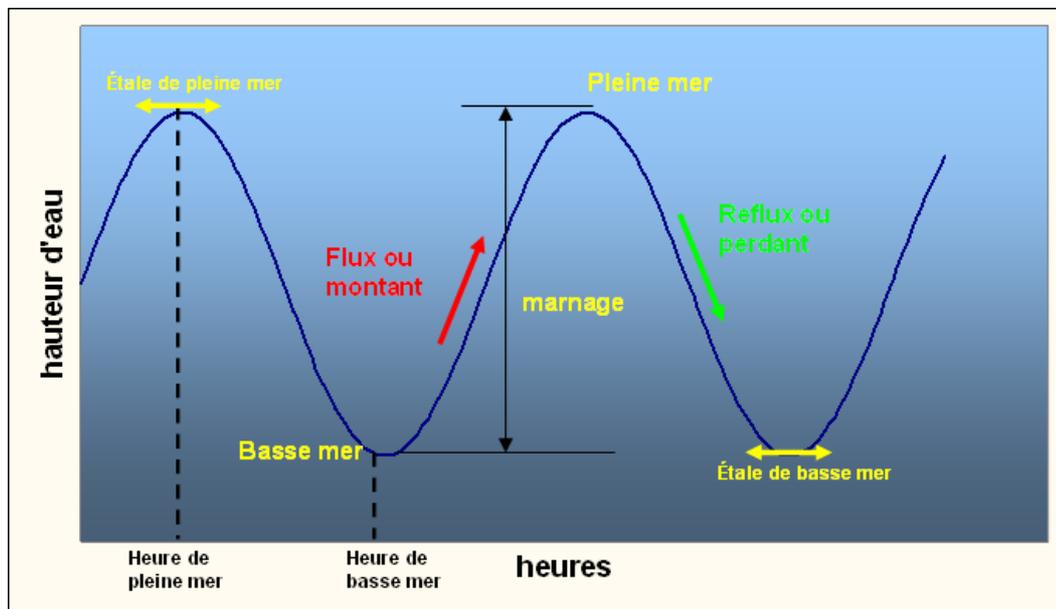


figure 1 – courbe de marée journalière (type semi-diurne)

- sur un mois :

- Jour après jour l'amplitude de la marée change. Sur le mois se succèdent une période de croissance du marnage (période de revif) et une période de décroissance du marnage (période du déchet).
- Les deux périodes, revif et déchet, ont la même durée : environ 7 à 8 jours.
- À la fin du revif, le marnage a atteint son maximum et la marée correspondante s'appelle marée de vives-eaux. Si la limite de l'eau sur la côte est matérialisée par une ligne de varechs déposés par la mer, lors d'une pleine mer cette ligne sera avancée sur la plage lors d'une marée de vives-eaux. Les limites de varechs entre la pleine mer et la basse mer sont donc éloignées lors d'une marée de vives-eaux.
- De même, à la fin du déchet, le marnage atteint son minimum et la marée correspondante s'appelle marée de mortes-eaux. Les limites de l'eau matérialisées par la ligne de varechs entre la pleine mer et la basse mer sont assez rapprochées (amplitude faible).
- Sur un mois il y a ainsi environ deux marées de vives-eaux et deux marées de mortes-eaux.

- sur une année :

- D'un mois à l'autre, les amplitudes des marées de vives-eaux changent. Elles atteignent leur maximum aux équinoxes (printemps, automne) : ce sont alors les grandes marées d'équinoxe. Par contre, elles sont minimales aux solstices (été, hiver). Entre ces extrêmes la variation de l'amplitude est régulière : croissante du solstice à l'équinoxe, décroissante de l'équinoxe au solstice.
- Sur une année il y a donc deux grandes marées d'équinoxe. A ce moment, les limites de varechs maximale et minimale, respectivement pour la pleine mer et pour la basse mer, sont séparées par une distance maximale.

- sur plusieurs années, le saros :

- D'une année à l'autre la date et l'amplitude des grandes marées changent. Mais elles retrouvent les mêmes valeurs au bout d'une période bien définie de 18 ans et 11 jours appelée le saros.
- Plus exactement la période est de 18 années juliennes (une année julienne = 365,25 jours) et  $(11+1/3)$  jours, ce qui correspond à 19 années draconitiques (une année draconitique, ou année des éclipses, est de 346,62007 jours). Cette période est celle où les éclipses se reproduisent à l'identique.

En définitive, on s'aperçoit que la variation de la hauteur d'eau près des côtes est rythmée par plusieurs périodes qui s'échelonnent de la journée aux décennies : la marée est la superposition de plusieurs phénomènes périodiques. Ceux-ci sont les différents modes de réponse de la masse d'eau à des sollicitations de forces, cette réponse étant influencée par les conditions et les contraintes aux limites auxquelles la masse d'eau est soumise : formes et profondeurs des voisinages côtiers.

La marée est assez bien décrite comme une onde progressive, de très grande longueur d'onde, se propageant dans la masse liquide, sous l'action des forces d'attraction gravitationnelle de la Lune et du soleil, et des effets de bords de la géométrie des côtes. L'onde, caractérisée par ses périodes et sa vitesse de propagation, transporte d'un point à un autre de la surface des océans les perturbations du niveau moyen de l'eau, provoquées par les forces extérieures. Il ne s'agit pas d'un déplacement des masses d'eau sur de grandes distances. La perturbation du niveau océanique est de faible amplitude loin des côtes (quelques dizaines de centimètres), par contre c'est la proximité des côtes, leurs géométries, qui créent une déformation de l'onde de marée, lui donnant alors des amplitudes significatives. Comme une vague qui déferle près des côtes à cause de la diminution de la profondeur.

La connaissance du phénomène des marées nécessite donc :

- de comprendre comment l'onde de marée se propage à la surface du globe sous l'effet des forces de gravitation luni-solaires, et des effets mécaniques liés à la rotation de la terre.

- de comprendre comment l'onde de marée se déforme au voisinage des côtes pour donner les hauteurs d'eau observées, sous l'effet de leurs géométries et d'autres facteurs locaux rattachés aux conditions atmosphériques.

Dans le premier cas, le seul qui sera détaillé dans cet article, on peut déjà noter ici que le mouvement relatif de la lune est déterminant sur le cycle journalier et que le mouvement relatif de la lune et du soleil l'est sur le cycle mensuel de la marée :

- Les deux pleines mers et les deux basses mers ont lieu non pas par jour terrestre mais par jour lunaire : 24 h 50 mn.

- Les deux marées de vives-eaux et les deux marées de mortes-eaux ont lieu non pas par mois terrestre mais par mois lunaire : 29,5 jours. Les marées de vives-eaux sont proches, dans le temps, des positions où la lune et la Terre sont alignées par rapport au soleil (pleine lune et nouvelle lune). Les marées de mortes-eaux sont proches, quant à elles, des positions où la lune est en quadrature par rapport à la Terre et au soleil (premier et dernier quartiers de lune).

Le nombre d'heures qui séparent le passage de la lune (pleine ou nouvelle) au méridien d'un lieu et la marée de vives-eaux est pratiquement constant pour le lieu considéré : on l'appelle âge de la marée. Il vaut 36 heures pour Brest.

## 2 - Caractéristiques et pratique de la marée

Avant de présenter les fondements théoriques du calcul de la marée, on s'intéresse ici aux considérations pratiques utiles pour la navigation. Ce qui importe c'est de connaître les hauteurs d'eau et les heures de leurs valeurs (courbes de marée) afin de déterminer la profondeur de l'eau près des côtes. Toutes ces notions ont besoin d'une référence par rapport à laquelle sont relevées les mesures. Cette référence est appelée niveau de réduction des sondes. Voici détaillées ci-après ces définitions, fondées sur les marées de type semi-diurne :

### 2-1 - Niveau moyen et niveau de mi-marée

En un lieu donné le niveau de la mer varie autour d'une position pratiquement fixe appelée niveau moyen Nm. Pour obtenir Nm on effectue des moyennes de hauteurs d'eau sur de longues périodes de temps : d'heure en heure, de mois en mois, d'année en année.

L'évolution du niveau moyen au cours des mois et des années résulte de divers facteurs : atmosphériques (pression (1), vents (2), saisons...), hydrologiques (salinité de l'eau, température de l'eau, courants, débit des fleuves aux embouchures...), géophysiques (tectonique des plaques, marée de l'écorce terrestre, déformation du géoïde...). Par exemple, au marégraphe de Marseille, Nm connaît une fluctuation maximale de 20 cm sur une période de mesure de 20 ans !

Le niveau de mi-marée est la moyenne des hauteurs des pleines mers et des basses mers calculées sur une période de temps donnée. Pratiquement égal à Nm, il peut s'en écarter de 20 cm à cause des effets de forces dissymétriques sur les composantes à longues périodes de l'onde de marée.

### 2-2 - Etablissement du port Et

Pour un port donné, entre le passage de la lune au méridien, pleine ou nouvelle (syzygies), et la première pleine mer qui suit s'écoulent un nombre d'heures appelé établissement du port Et (voir figure 3).

Sur les côtes atlantiques françaises Et varie de 3 h 25 mn à 3 h 46 mn.

Et caractérise en quelque sorte le gradient de montée de la hauteur d'eau jusqu'à la première pleine mer.

### 2-3 - Coefficient de marée C et unité de hauteur U

Ce sont des données majeures car elles permettent de calculer rapidement la hauteur d'eau en un lieu et à une heure donnés.

Le coefficient de marée C caractérise le marnage pour un jour donné. Ce coefficient sans dimension, compris entre 20 et 120, peut être calculé théoriquement à partir de la formule de Laplace qui donne la hauteur d'eau en fonction des positions sur le ciel du soleil et de la lune en un lieu donné (voir la formule plus loin), pour les ports où la courbe de marée est assez régulière. En pratique, on admet en première approximation que le coefficient d'une même marée est le même qu'à Brest pour tous les ports français.

Par définition, le coefficient de marée est le rapport (exprimé en centième) entre l'amplitude M du marnage théorique de la marée et l'amplitude moyenne 2U des marées de vives-eaux :

$$C = \frac{M}{2U} \times 100 \quad (1)$$

U est l'unité de hauteur du port : c'est la demi-amplitude de la plus forte marée de vives-eaux après une syzygie d'équinoxe (3).

Pour une marée donnée (marée de vives-eaux d'équinoxe, marée de vives-eaux moyennes, marées moyennes, etc.) C est connu, fourni dans le tableau 1 ci-après. U est fourni et est caractéristique du port où l'on veut calculer la marée (pour Brest on a  $U = 3,21$  m <sup>(4)</sup>). A partir de cela on peut évaluer l'amplitude de marnage M par la relation (1) :  $M = \frac{2UC}{100}$

Le tableau 2 donne quelques valeurs de marnage maximal observées dans le monde pour des marées semi-diurnes.

Coefficient de marée C	État correspondant de la marée
120	Marées extraordinaires de vives-eaux d'équinoxe
100	Marées de vives-eaux d'équinoxe
95	Marées de vives-eaux moyennes
70	Marées moyennes
45	Marées de mortes-eaux moyennes
20	Marées de mortes-eaux les plus faibles

*Tableau 1 – coefficients de marée remarquables*

lieu	Amplitude de marnage maximum M
Baie de Fundy (Canada)	18,5 m
Puerto Galleros (Argentine)	16,8 m
Embouchure du Severn (Grande Bretagne)	16,5 m
Baie Frobisher (Canada)	16,3 m
Mont Saint-Michel (France)	15,0 m

*Tableau 2 – plus grands marnages du monde*

Les marées des mers fermées ont des marnages peu significatifs (quelques dizaines de cm en Méditerranée) exceptées pour des profondeurs faibles de la mer au voisinage des côtes (par exemple le marnage peut atteindre 2 m dans le golfe de Gabès en Tunisie).

#### **2-4 - Hauteurs de pleine mer Hpm et de basse mer Hbm**

La différence entre ces deux hauteurs est égale au marnage :  $H_{pm} - H_{bm} = M$ .

D'autre part, par définition du niveau moyen Nm on a :  $N_m = (H_{pm} + H_{bm})/2$ .

Compte tenu de (1), il en résulte que les hauteurs de pleine mer Hpm et de basse mer Hbm sont reliées au coefficient de marée et à l'unité de hauteur par :

$$\left. \begin{aligned} H_{pm} &= N_m + \frac{UC}{100} \\ H_{bm} &= N_m - \frac{UC}{100} \end{aligned} \right| \quad (2)$$

#### **2-5 - Niveau de réduction des sondes**

Le niveau de réduction des sondes, ou « zéro des cartes marines », est le niveau de référence auquel sont rapportées les valeurs de niveau de la mer des cartes marines. Ces valeurs, portées sur la carte marine correspondent à l'épaisseur d'eau mesurée par rapport à la référence.

Elles peuvent être positives ou négatives (auquel cas elles sont soulignées sur la carte).

La définition du niveau de réduction des sondes est conventionnel et peut varier d'un pays à l'autre. En France il correspond par définition au niveau le plus bas des basses mers. Comme ce niveau est atteint lors des marées extraordinaires de vives-eaux d'équinoxe, il correspond à un coefficient de marée de  $C = 120$  (cf. tableau 1). Or la hauteur de basse mer  $H_{bm}$  est relié au niveau moyen  $N_m$  par la relation (2). Si par définition on le choisit comme niveau zéro ( $H_{bm} = 0$  pour  $C = 120$ ), il viendra donc :

$$N_m = \frac{U C}{100} = 1,2 \times U \quad (3)$$

autrement dit, avec ce choix de la référence pour la mesure des hauteurs d'eau, le niveau moyen de l'eau en un lieu est directement lié à l'unité de hauteur de ce lieu.

La hauteur d'eau  $h$  lors de la marée est l'épaisseur de la couche d'eau à un instant donné par rapport au zéro des cartes marines.

La profondeur  $z$  est l'épaisseur à un instant donné de la couche d'eau comprise entre le niveau de la mer et le fond solide. La distance entre le niveau zéro de référence et le fond est appelée la sonde, notée  $s$ . Il s'ensuit que la profondeur est la somme de la hauteur d'eau et de la sonde :

$$z = h + s \quad (4)$$

Le niveau de réduction des sondes peut être choisi, dans d'autres pays, pour un coefficient de marée inférieur à 120, donc pour des niveaux plus grands que celui des plus grandes basses mers (et par conséquent il donne des niveaux moyens plus petits que (3)) : par exemple on a  $C = 95$  pour la Grande Bretagne,  $C = 100$  pour la Belgique. Mais dans tous les cas les cartes marines sont données en utilisant la référence choisie par le pays d'origine, même si elles sont publiées en France.

Toutes ces notions sont regroupées dans la figure 2.

## **2-6 - Courbes de marées et calculs simplifiés de la marée**

### **Courbes types :**

Les annuaires de marée donnent chaque jour et pour un lieu donné les courbes (ou les tables) de variation de la hauteur d'eau, ou courbes de marée. Il y a deux courbes types systématiquement fournies pour deux coefficients de marée particuliers :  $C = 45$  et  $C = 95$ , pour des ports de référence.

Remarque : sur les cartes marines françaises, l'élévation des phares est toujours donné pour un  $C = 95$ .

Pour des marées plus complexes (exemple Le Havre, Saint-Malo, ...) les prédictions horaires sont données sous forme de tables.

Dans tous les cas, on trouve dans les annuaires ou tables, les renseignements suivants :

- basse mer : hauteur  $H_{bm}$ , heure  $t_{bm}$
- pleine mer : hauteur  $H_{pm}$ , heure  $t_{pm}$
- durée du montant (passage de la basse-mer à la pleine-mer) :  $D$ , généralement identique à la durée du perdant (passage de la pleine-mer à la basse-mer)
- marnage  $M$
- les tables ou la courbe permettent soit directement, soit par interpolation, de connaître la hauteur d'eau  $h$  pour une heure donnée  $t$  :  $h = f(t)$ .

Voir un exemple figure 4.

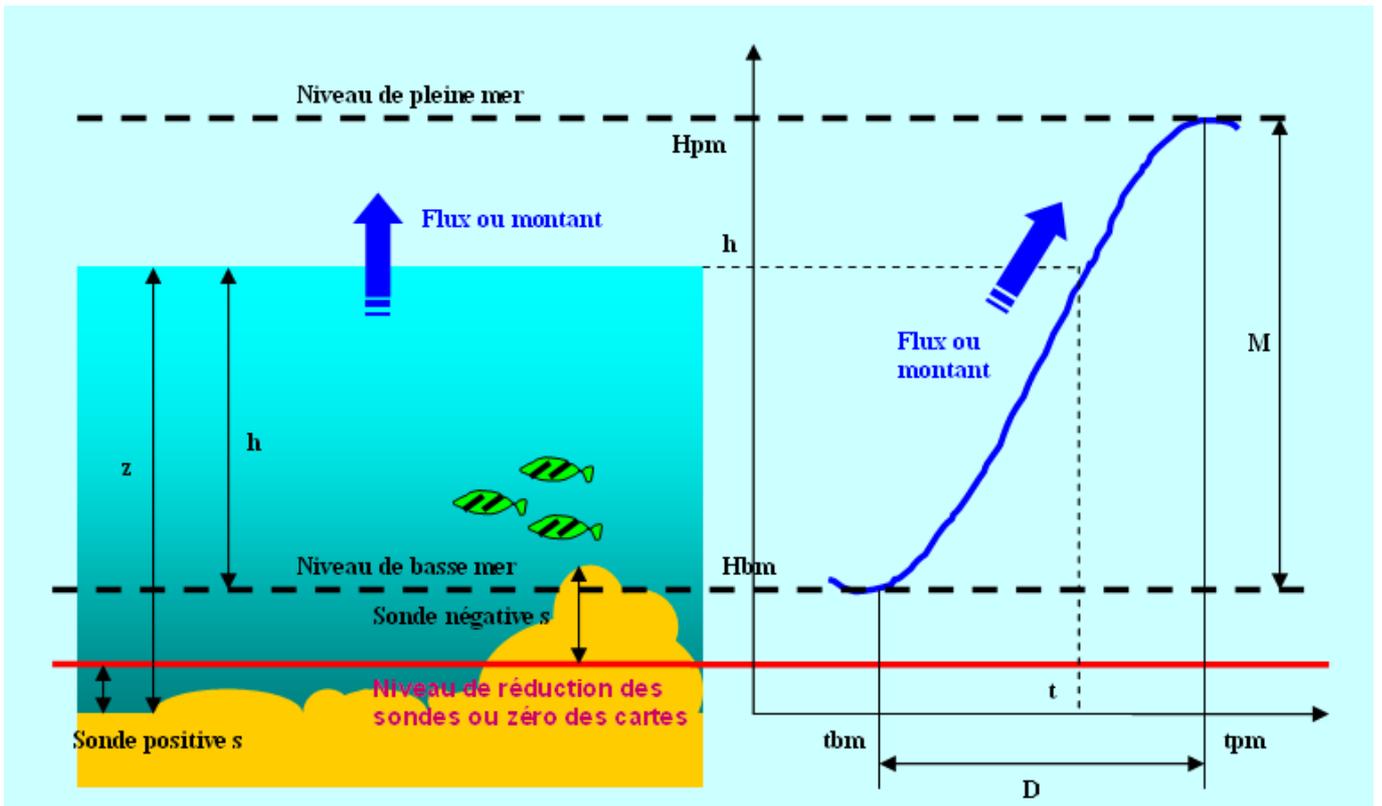


figure 2 – courbe de marée et ses paramètres :  $z$  profondeur,  $h$  hauteur d'eau,  $s$  sonde,  $H_{pm}$  hauteur de pleine mer,  $H_{bm}$  hauteur de basse mer,  $t_{pm}$  heure de pleine mer,  $t_{bm}$  heure de basse mer,  $D$  durée du montant ou flux,  $M$  marnage

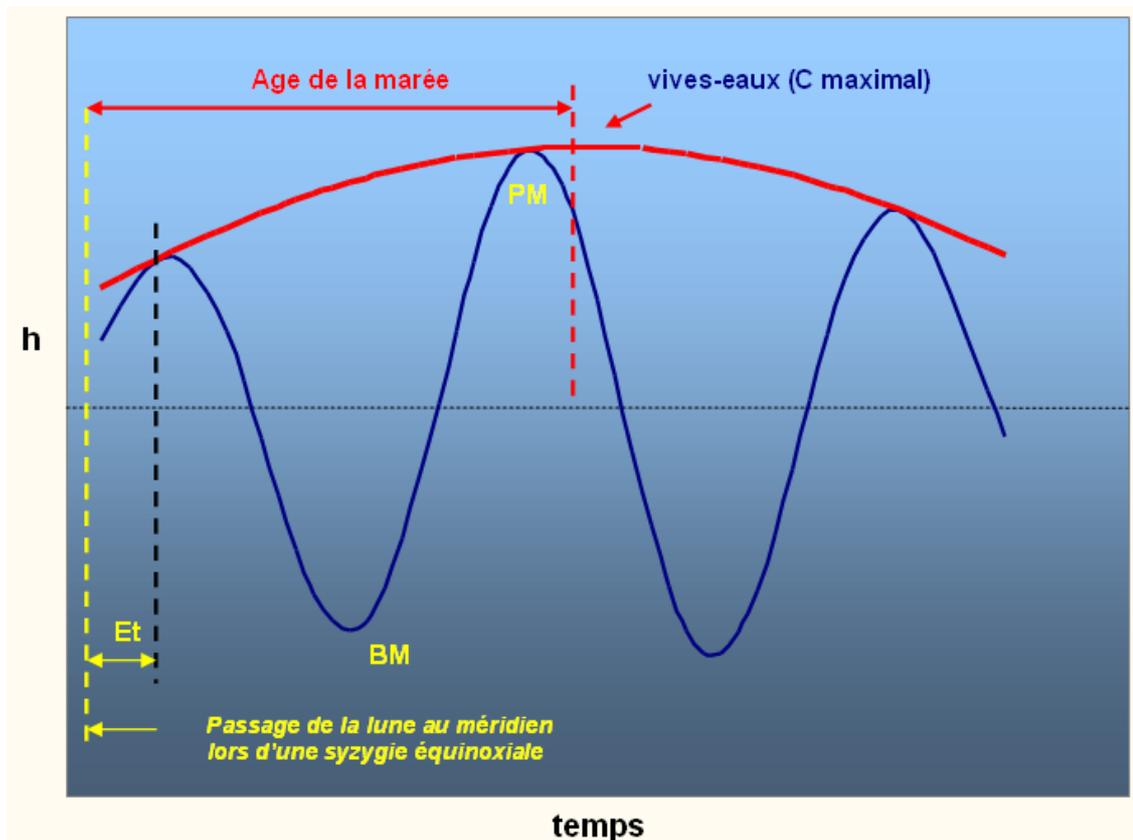


figure 3 – variation du marnage avec le temps : définition de l'établissement du port ( $E_t$ ) et de l'âge de la marée

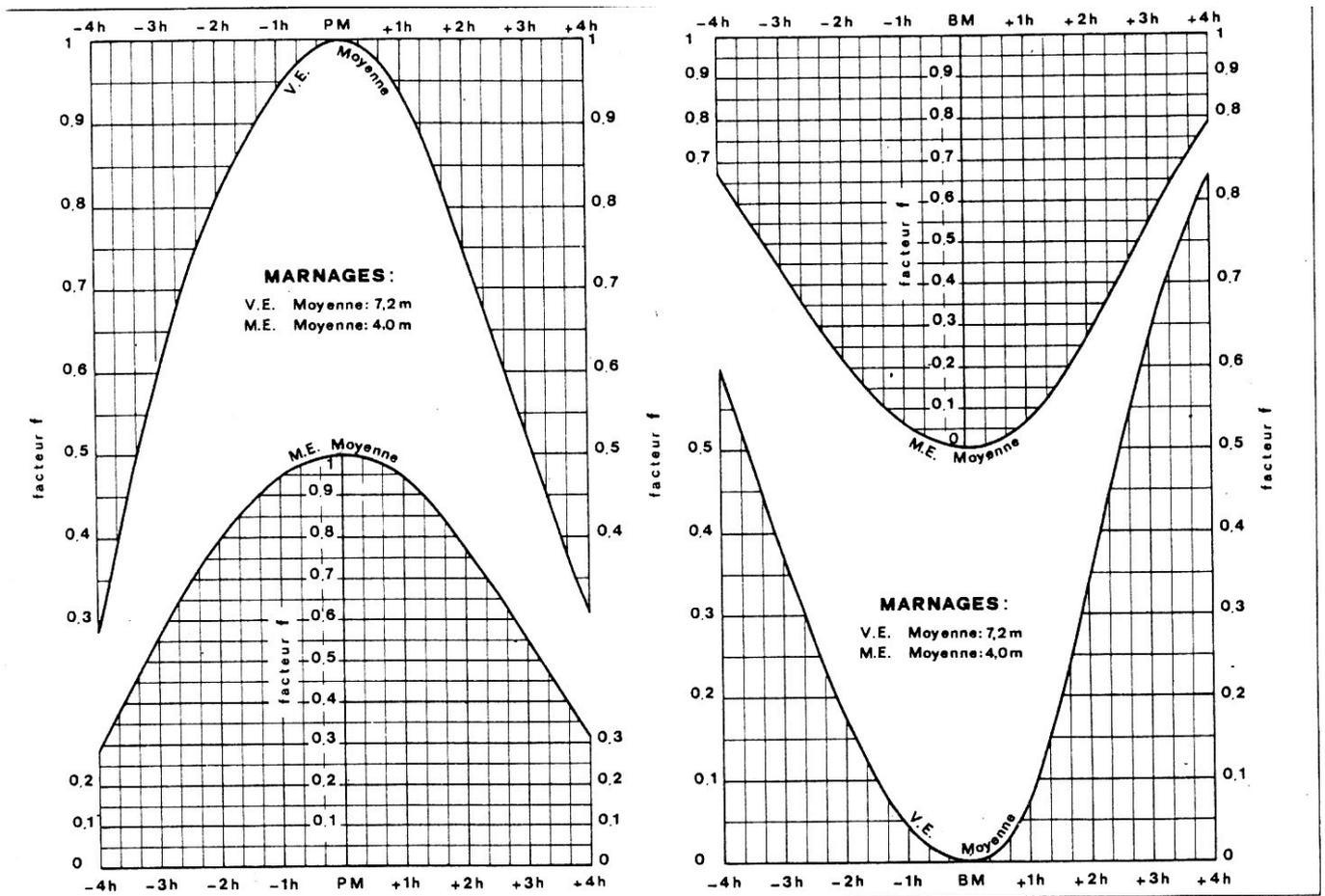


figure 4 – courbe de marée de Fécamp

La courbe ME (marées de mortes-eaux moyennes) correspond à  $C = 45$ , avec un marnage  $M = 4,0$  m.

La courbe VE (marées de vives-eaux moyennes) correspond à  $C = 95$ , avec un marnage  $M = 7,2$  m.

La lecture des courbes s'effectue ainsi : à une heure donnée (par exemple +2h après la pleine mer PM) le point de la courbe correspondant donne un facteur  $f = 0,75$ . La hauteur d'eau  $h$  est obtenue en multipliant  $f$  par le niveau ME = 4,0m s'il s'agit d'une marée de mortes-eaux (soit  $0,75 \times 4 = 3$  m), et par le niveau VE = 7,2m s'il s'agit d'une marée de vives-eaux (soit  $0,75 \times 7,2 = 5,4$  m). Entre ces deux marées extrêmes, la hauteur d'eau 2 heures après la pleine mer est donc comprise entre 3 m et 5,4 m. La hauteur d'eau est par rapport au niveau le plus bas BM de VE (pour lequel  $f = 0$ ).

(source : cours de navigation de l'Ecole Navale, Marine nationale, 1988)

### Calcul rapide de la marée par la méthode de la sinusoïde :

La courbe de marée entre une pleine mer et une basse mer est assimilée à une sinusoïde pour les marées semi-diurnes. Les paramètres de la marée donnés dans les annuaires (coefficient  $C$ , marnage  $M$ , durée du montant  $D$ ) sont utilisés pour le calcul de la hauteur d'eau  $h(t)$  à une heure  $t$  à l'aide de cette méthode.

Si l'on fixe l'origine du temps à l'heure de la pleine ou basse mer, ou, ce qui revient au même, si l'on cherche à calculer  $h$  sur uniquement l'intervalle de temps correspondant au montant ou au perdant, la variation de hauteur suit approximativement une loi de la forme :

$$h'(t) = M \sin^2\left(90 \frac{t}{D}\right) \quad (5)$$

NB :  $h'$  est ici la variation de hauteur par rapport à la basse mer ou à la pleine mer. La variation de hauteur  $h$  par rapport au niveau zéro est obtenue par :

- soit  $h = H_{pm} - h'$
- soit  $h = h' - H_{bm}$

**Exemple 1 (exercice corrigé) :**

on veut calculer la profondeur en un port à midi (12h00), le jour où la marée présente les caractéristiques suivantes :

- pleine mer : heure  $t_{pm} = 09h12mn$ , hauteur  $H_{pm} = 4 m$
- basse mer : heure  $t_{bm} = 16h00$ , hauteur  $H_{bm} = 2,9 m$
- valeur de la sonde indiquée pour ce port :  $s = 1,20 m$

*solution :*

Pour l'heure demandée (midi), on se trouve entre la pleine mer et la basse mer, donc dans la phase du perdant. Par conséquent on calculera  $h'$  par rapport à  $H_{pm}$ .

- calcul du marnage :  $M = H_{pm} - H_{bm} = 4 - 2,9 = 1,10 m$
- calcul de la durée de montant (ou du perdant):  $D = t_{bm} - t_{pm} = 16h00 - 09h12 = 6h48mn = 408 mn$
- temps du calcul :  $t = 12h00 - t_{pm} = 12h00 - 09h12mn = 02h48mn = 168 mn$
- calcul de la hauteur d'eau relative  $h'$  avec (5) :  $h'(12h00) = 1,10 \times \sin^2(90 \times 168/408) = 0,40 m$
- hauteur d'eau :  $h = H_{pm} - h' = 4 - 0,40 = 3,60 m$
- calcul de la profondeur par (4) :  $z = h + s = 3,60 + 1,20 = 4,80 m$
- résultat : **profondeur à midi = 4,80 m**

**Exemple 2 (exercice corrigé) :**

Le commandant d'un navire veut savoir à quelle heure il pourra passer par un chenal présentant un fond indiqué sur la carte par une sonde négative de  $s = 0,6 m$ . Le tirant d'eau du navire est  $T = 4,5 m$ . On ajoutera un pied de pilote  $P = 0,5 m$  à la profondeur de passage.

Les données de la marée sont :

- basse mer :  $t_{bm} = 12h00$ ,  $H_{bm} = 1,90 m$
- pleine mer :  $t_{pm} = 18h00$ ,  $H_{pm} = 8,00 m$ .

*Solution :*

- hauteur d'eau pour laquelle le passage sera possible :  $h = z - s$  avec  $z = T + P$ , soit  $h = (4,5 + 0,5) - 0,6 = 4,40 m$ .
- hauteur relative à la basse mer  $h' = h - H_{bm} = 4,40 - 1,90 = 2,50 m$
- marnage :  $M = H_{pm} - H_{bm} = 8,00 - 1,90 = 6,10 m$
- durée du montant :  $D = t_{pm} - t_{bm} = 18h00 - 12h00 = 6h00 = 360 mn$
- l'heure  $t$  à laquelle le navire pourra passer est celle où  $h' = 1,50 m = M \sin^2(90 t/D)$ , avec  $M = 1,10 m$  et  $D = 6h48mn$ , d'où :

$$t = \frac{D}{90} \arcsin \sqrt{h'/M} = (360mn/90) \arcsin(2,50/6,10)^{1/2} = 159 mn = 2h39mn$$

Heure où le passage sera possible =  $t_{bm} + t = 12h00 + 2h39 = 14h39mn$

**Règle des douzièmes :**

Si l'on décompose la période du montant  $D$  en 6 intervalles de temps égaux, la courbe de

hauteur donnée par (5) peut être approchée par une succession de droites dont la pente donne le taux d'accroissement de la hauteur d'eau pour chaque sixième partie de la durée du montant. Ce taux est égal à  $n/12$  partie du marnage  $M$ , où  $n$  dépend du rang de l'intervalle de temps  $D/6$  considéré. On obtient la règle des douzièmes (tableau 3) :

Augmentation (ou diminution) de la hauteur d'eau en fraction du marnage $M$	Intervalle de temps en 1/6 ème partie de la durée du montant (ou du perdant) $D$
H augmente (diminue) de 1/12 du marnage	pendant le 1er 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant
H augmente (diminue) de 2/12 du marnage	pendant le 2e 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant
H augmente (diminue) de 3/12 du marnage	pendant le 3e 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant
H augmente (diminue) de 3/12 du marnage	pendant le 4e 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant
H augmente (diminue) de 2/12 du marnage	pendant le 5e 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant
H augmente (diminue) de 1/12 du marnage	pendant le 6e 1/6 intervalle de la durée du montant ou perdant

*Tableau 3 – règle des douzièmes*

L'application de la règle des douzièmes nécessite de connaître le marnage ou bien le coefficient de marée à partir duquel on peut le déduire, connaissant l'unité de hauteur du port.

**Exemple 1 par la méthode des douzièmes :**

*Avec les données de l'exemple 1 ci-dessus, on obtient :*

- *la durée du perdant est  $D = 6h48 = 408$  mn. Chaque tranche  $D/6$  représente donc 68 mn. Sachant que  $t_{pm} = 9h12$ , l'heure de calcul (12h00) est  $2h48 = 168$  mn à compter de  $t_{pm}$ , donc dans l'intervalle :  $168/68 = 2,47$ . On est dans le 3<sup>ème</sup> sixième de la durée du perdant..*
- *Le marnage est  $M = 1,10$  m. La variation de hauteur relative  $h'$  à l'intervalle 2,47 est donc le cumul des variations obtenues dans les tranches n°1 (variation de 1/12), 2 (variation de 2/12) et 0,47 partie du n°3 (variation de  $3/12 \times 0,47$ ) :*  

$$h' = (1 + 2 + 3 \times 0,47) \times M/12 = 0,40 \text{ m}$$
- *Étant en phase de perdant, la hauteur d'eau correspondante est  $h = H_{pm} - h'$ , où  $H_{pm} = 4$  m est la hauteur de pleine mer donnée. D'où :  $h = 4,0 - 0,40 = 3,60$  m.*
- *La profondeur est  $z = h + s$  (avec sonde  $s = 1,20$  m) :  $z = 3,60 + 1,20 = 4,80$  m. Même résultat que l'ex.1.*

**Remarque : « pied de pilote » :**

Malgré la précision des tables et annuaires de marées, et a fortiori lorsque l'on procède aux calculs approchés ci-dessus, il convient de rajouter une marge de sécurité, appelée « pied de pilote », car il y va de la sécurité du navire.

En effet les perturbations locales des prédictions, dues aux conditions météorologiques et hydrologiques, peuvent introduire des écarts de l'ordre de 50 cm pour les hauteurs d'eau, et 15 minutes pour les temps.

En général, le pied de pilote devra être de 50 cm pour les marées à faible coefficient ou bien  $M/10$ ,  $M$  étant le marnage de la marée du jour, pour les marées à fort coefficient.

### 3 - Théories de la marée

#### 3-1 - Force génératrice de la marée en théorie statique de Newton

Si une particule à la surface de la Terre est soumise seulement à l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre, elle est en position d'équilibre du fait de l'égalité avec les autres forces (réaction) : elle reste immobile dans le référentiel terrestre. La présence d'un astre perturbateur, comme notamment la Lune et le Soleil, va perturber cet équilibre par la force gravitationnelle que l'astre exerce sur la particule. La Terre est elle aussi soumise à l'attraction de l'astre, mais au centre de la Terre celle-ci est légèrement différente de celle exercée sur la particule. Il en résulte que la force perturbatrice à laquelle est soumise la particule est différente de celle exercée au centre de la Terre, et sa différence avec celle-ci correspond à une accélération différentielle ou relative qui tend à déplacer la particule à la surface de la Terre : c'est la force de marée.

Ce déplacement donnera des effets significatifs si la particule peut se mouvoir librement, donc si c'est une particule fluide. Le déplacement en masse de l'ensemble des particules fluides à la surface de la Terre n'étant possible que si les particules sont liées, contrairement aux gaz, ce sont les masses liquides de la surface terrestre qui seront concernées, donc les océans.

L'accélération différentielle se décompose en une composante verticale qui est complètement négligeable, et en une composante horizontale (tangente à la surface de la Terre au point considéré) qui tend à déplacer la masse d'eau le long de cette surface.

Le développement mathématique de cette description est présenté ci-après.

#### Origine de la force de marée :

Voir la géométrie du problème figure 5.

Soit un astre A en interaction gravitationnelle avec la Terre T. Le centre de masse du système Terre-astre est O et le référentiel Ox'y'z' qui lui est rattaché est supposé galiléen (fixe par rapport aux étoiles supposées fixes) : c'est le repère absolu (R').

Le référentiel Txyz lié au centre de la Terre est celui par rapport auquel on étudie le phénomène de marée : c'est le référentiel terrestre ou relatif (R). Il n'est pas galiléen : en effet il est soumis globalement à l'accélération gravitationnelle due à l'astre A :

$$\mathbf{h}_A(T) = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{u}$$

où m masse de l'astre, r = TA distance entre la Terre et l'astre ( $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire porté par TA). Pour déterminer le mouvement d'une particule P située à la surface de la Terre sous l'action des forces qui s'exercent sur elle, dans le référentiel terrestre (R), on doit exprimer son accélération dans (R) :

$$\mathbf{a}_R(P) = \left( \frac{d^2 \mathbf{TP}}{dt^2} \right)_R$$

On veut exprimer l'accélération relative de P en fonction de l'accélération absolue de P. Celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{a}_{R'}(P) = \left( \frac{d^2 \mathbf{TP}}{dt^2} \right)_{R'} = \left( \frac{d^2 (\mathbf{TO} + \mathbf{OP})}{dt^2} \right)_{R'} = \left( \frac{d^2 \mathbf{OP}}{dt^2} \right)_{R'} - \left( \frac{d^2 \mathbf{OT}}{dt^2} \right)_{R'} = \mathbf{a}_{R'}(\mathbf{OP}) - \mathbf{a}_{R'}(\mathbf{OT})$$

Or cette accélération absolue de P (accélération de la particule à la surface de la Terre par rapport au référentiel absolu (R')) est la somme de l'accélération relative (dans (R)) et des accélérations d'entraînement et complémentaire (Coriolis) :

$$a_{R'}(P) = a_R(P) + a_e + a_c$$

avec :  $a_e = \Omega \wedge (\Omega \wedge TP) = \Omega^2 HP$  accélération d'entraînement ou centrifuge de la particule P à la latitude  $\lambda$  dans le référentiel de la Terre en rotation de vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  supposé constant, et :

$$a_c = 2\Omega \wedge \left( \frac{dTP}{dt} \right)_R = 2\Omega \wedge V_R(P)$$

accélération complémentaire, ou de Coriolis, de la particule animée d'une vitesse relative  $V_R(P)$  à la latitude  $\lambda$  dans le référentiel de la Terre en rotation (référentiel relatif).  
L'accélération relative de P dans le référentiel terrestre devient donc :

$$a_R(P) = a_{R'}(OP) - a_{R'}(OT) - \Omega^2 HP - 2\Omega \wedge V_R(P)$$

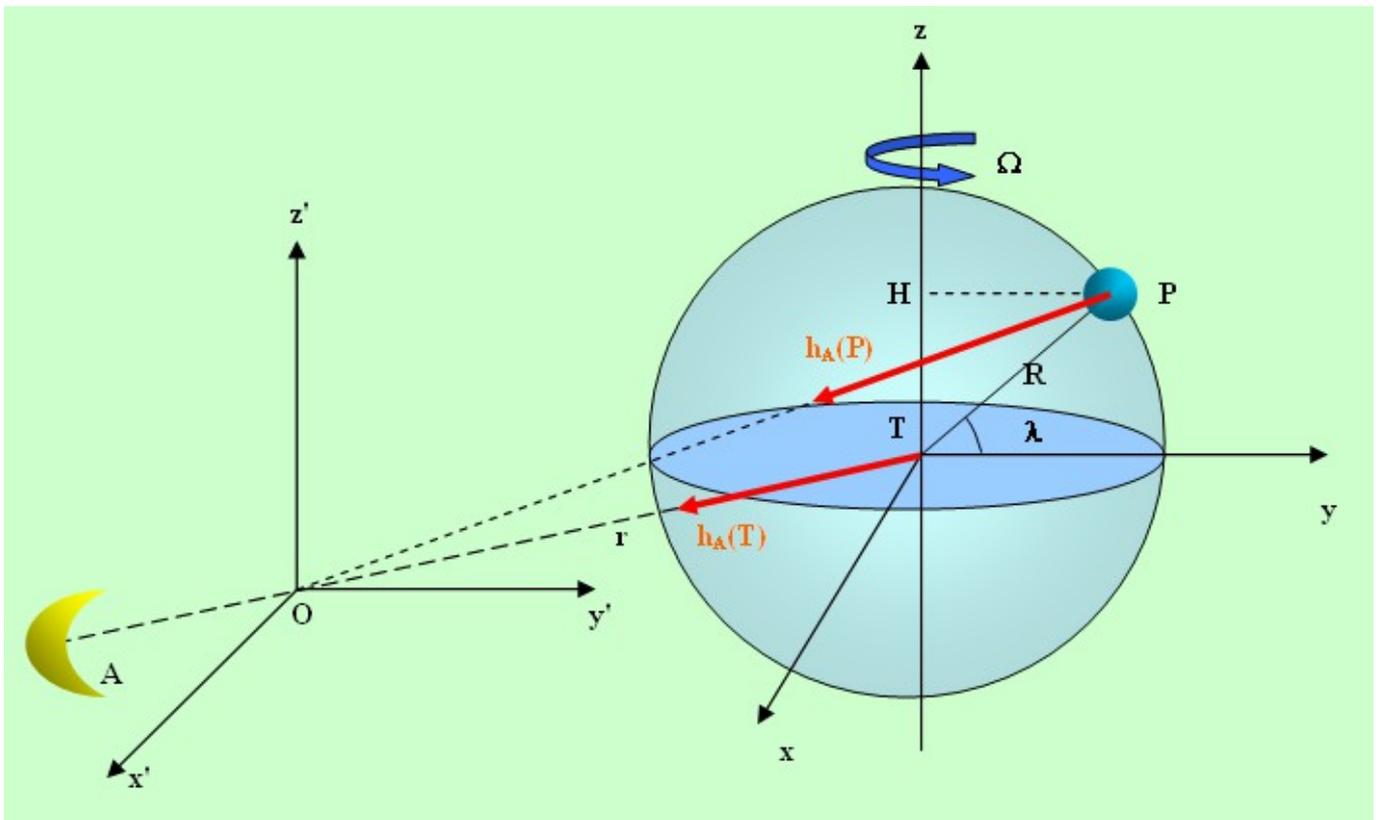


figure 5 – géométrie du problème

L'accélération de P dans le référentiel absolu ( $R'$ ),  $a_{R'}(P)$ , est la somme des forces (par unité de masse) appliquées à P. Elles se décomposent en :

- force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur P :  $g(P) = -GM R/R^3$ , M masse de la Terre. Ajoutée à la force d'inertie d'entraînement  $a_e$ , elle donne la pesanteur apparente en P :  $g(P) - \Omega^2 HP$
- forces de pression et de surface
- forces de frottement ou de viscosité
- force d'attraction de l'astre A sur P :  $h_A(P)$

En ajoutant ces forces aux forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement, on obtient comme

bilan :

- les forces de pression et de surface sont en équilibre avec la pesanteur apparente, la particule P étant supposée en équilibre. La somme (forces de pression et de surface) + (pesanteur apparente) est donc nulle.
- La particule étant supposée immobile (sans déplacement propre) les forces de frottement (qui dépendent de la vitesse) et la force de Coriolis sont toutes les deux nulles.
- Seule reste la force d'attraction de A sur P :  $\mathbf{h}_A(P)$

Quant à l'accélération absolue de T, elle est égale à la force (par unité de masse) d'attraction gravitationnelle de A sur T :  $\mathbf{a}_{R'}(T) = \mathbf{h}_A(T)$  .

En définitive, l'accélération de P dans le référentiel relatif, ou force génératrice de marée, est égale à la différence entre l'attraction gravitationnelle de A sur la particule P et l'attraction gravitationnelle de A sur le centre de la Terre T :

$$\mathbf{a}_R(P) = \mathbf{h}_A(P) - \mathbf{h}_A(T) \quad (6)$$

D'où la loi fondamentale : la force génératrice de la marée due à un astre en un point quelconque de la Terre, est la différence de l'attraction gravitationnelle exercée par cet astre en ce point et de l'attraction gravitationnelle exercée par ce même astre au centre de la Terre.

En exprimant les forces d'attraction  $\mathbf{h}_A$  par la loi de Newton en T et en P, la relation (6) donne :

$$\mathbf{a}_R(P) = -Gm \left( \frac{\mathbf{u}'}{r'^2} - \frac{\mathbf{u}}{r^2} \right) \quad (7)$$

où  $\mathbf{u}'$  vecteur unitaire porté par AP orienté de A vers P, et  $r' = AP$ , m masse de l'astre A.

La relation (7) montre que, de par les directions différentes des vecteurs unitaires  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}'$ , la force génératrice de marée n'est ni tangente à la surface de la Terre ni dirigée vers l'astre.

La force de marée déplace beaucoup plus facilement les particules à très faible inertie, donc les particules liquides au lieu des particules solides : la marée affecte les océans et les mers (il existe une marée terrestre mais d'amplitude négligeable – quelques centimètres – devant celle des océans).

### **Construction géométrique de Proctor :**

La méthode géométrique de Proctor (5) permet de représenter, en chaque point P de la surface terrestre, l'intensité et la direction de la force de marée (7) (voir la figure 6) :

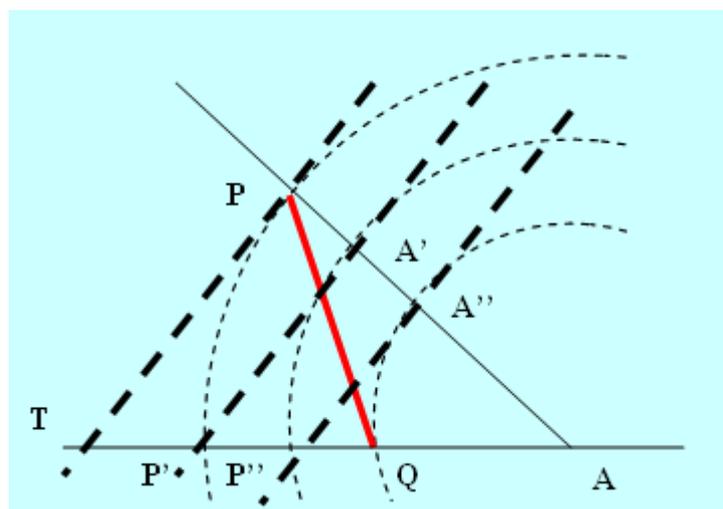


figure 6 – construction de Proctor

Mode opératoire : 1 – tracer le cercle de centre A et de rayon AP passant par P, rencontrant AT en P' ; 2 – tracer la parallèle P'A' à TP, puis le cercle de centre A et de rayon AA'. Ce cercle rencontre TA en P'' ; 3 – tracer la parallèle P''A'' à TP, puis le cercle de centre A et de rayon AA''. Ce cercle rencontre TA en Q ; 4 – le segment PQ est alors proportionnel à la force génératrice de marée et donne sa direction en P (voir explication dans le texte)

On applique le théorème de Thalès aux triangles AP'A' et ATP :  $AA'/AP' = AP/AT = r'/r = AA'/r'$  (car  $AP' = AP = r'$ ), soit  $AA' = r'^2/r$ .

On applique de nouveau le théorème de Thalès aux triangles AP''A'' et AP'A' :  $AA''/AP'' = AA'/AP' = (r'^2/r)/r' = AA''/(r'^2/r)$ , soit  $AA'' = r'^3/r^2$ .

On a  $AQ = AA''$ , et dans le triangle AQP la relation de Chasles donne :

$$PQ = PA + AQ = -r' u' + \frac{r'^3}{r^2} u = r'^3 \left( \frac{u}{r^2} - \frac{u'}{r'^2} \right)$$

expression qui est donc proportionnelle à la force génératrice de marée (7) :

$$a_R(P) = \frac{Gm}{r'^3} PQ \quad (8)$$

Si l'astre A est supposé à l'infini, la droite PA devient horizontale parallèle à AT, les arcs P'P, P''A' et QA'' deviennent des segments de droite perpendiculaires à AT en A', A'' et Q. Par conséquent les segments TA', A'A'' et A''Q sont égaux, et donc  $TQ = 3TA'$ . La construction de Proctor se fait alors comme suit (figure 7) :

- depuis P mener la perpendiculaire PA' à la droite joignant le centre de la Terre T et l'astre A
- placer Q à une distance de T égale à 3 fois la longueur TA' sur la droite TA
- tracer le segment PQ : son module est proportionnel à la force génératrice de marée, à la constante  $Gm/r'^3$  près, et son orientation donne celle de cette force.

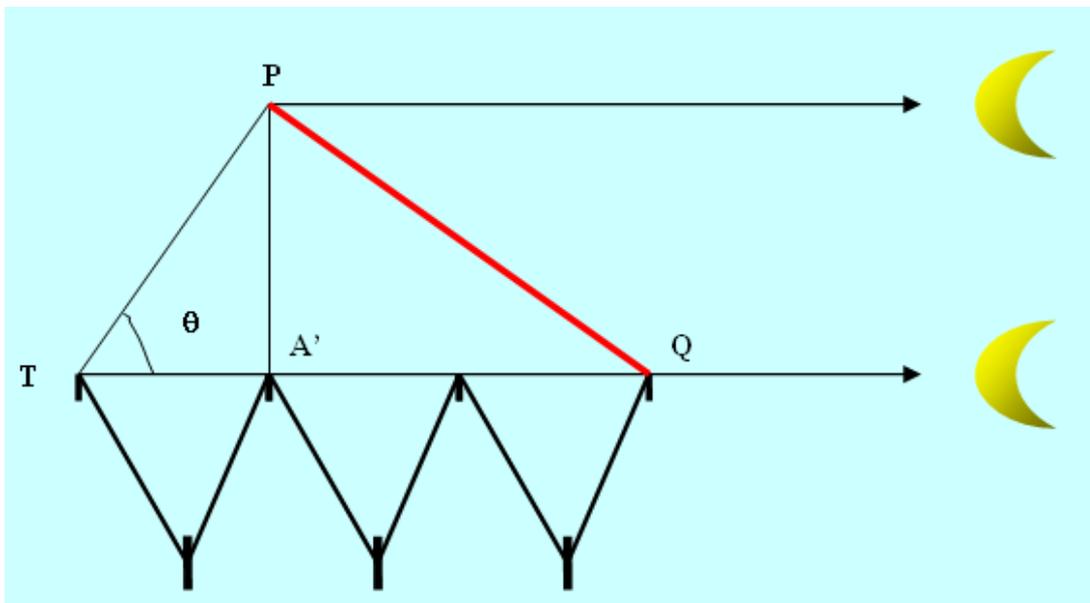


figure 7

La règle de Proctor permet de simplifier le calcul de PQ, en effet dans le triangle TPQ on a :

$$PQ^2 = PT^2 + TQ^2 - 2 PT \cdot TQ \cos \theta = R^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

où  $\theta$  est la distance zénithale de l'astre en P (elle est nulle quand l'astre est au zénith et égale à  $90^\circ$  lorsque l'astre est à l'horizon). En introduisant l'accélération de la pesanteur terrestre en P,  $g = GM/R^2$ , et en supposant  $r' \approx r$ , la relation (8) se réécrit dans ce cas :

$$a_R(P) = g \frac{m}{M} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (9)$$

ainsi : la force génératrice de marée varie comme la masse de l'astre  $m$  et en raison inverse du cube de sa distance à la Terre. Elle est minimale pour une distance zénithale de  $90^\circ$  (astre à l'horizon) et maximale pour une distance zénithale nulle (astre au zénith).

Usuellement on exprime la force de marée en unité de  $g$  (pesanteur terrestre) en ordre de grandeur :  $(m/M)(R/r)^3$ . Avec les données pour la Lune et le Soleil, on a :

- Lune :  $m/M = 1/81,30$  ;  $R/r = 1/60,27$  d'où : force de marée pour la Lune =  $5,6 \cdot 10^{-8}$  pesanteur terrestre.

- Soleil :  $m/M = 1/332946$  ;  $R/r = 1/23455$  d'où : force de marée solaire =  $2,6 \cdot 10^{-8}$  pesanteur terrestre.

On remarque alors que :

- les forces de marée dues à la Lune et au Soleil sont du même ordre de grandeur et que celle due à la Lune est deux fois plus forte que celle due au Soleil.

- Les forces de marées sont très faibles devant la pesanteur terrestre. Leur composante verticale est donc négligeable devant  $g$  et leur composante horizontale est la seule responsable du mouvement des particules d'eau à la surface.

### **Potentiel luni-solaire**

A partir de la relation (6), compte tenu de l'expression (7), il est facile de montrer que les deux forces d'attraction en un point P de la surface terrestre,  $\mathbf{h}_A(P)$ , et au centre T de la Terre,  $\mathbf{h}_A(T)$ , dues à l'astre A, dérivent d'un potentiel V et V' (voir figure 8) :

$$\mathbf{h}_A(T) = \nabla V$$

avec :

$$V = -\frac{Gm}{r} - \frac{Gm}{r^2} R \cos \theta$$

$$\mathbf{h}_A(P) = -\nabla V'$$

avec :

$$V' = \frac{Gm}{r'}$$

La force génératrice  $\mathbf{a}_R(P) = \mathbf{h}_A(P) - \mathbf{h}_A(T)$  dérive alors du potentiel  $V + V'$  :

$$\mathbf{a}_R(P) = \nabla W$$

avec :

$$W = Gm \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{R}{r^2} \cos \theta \right)$$

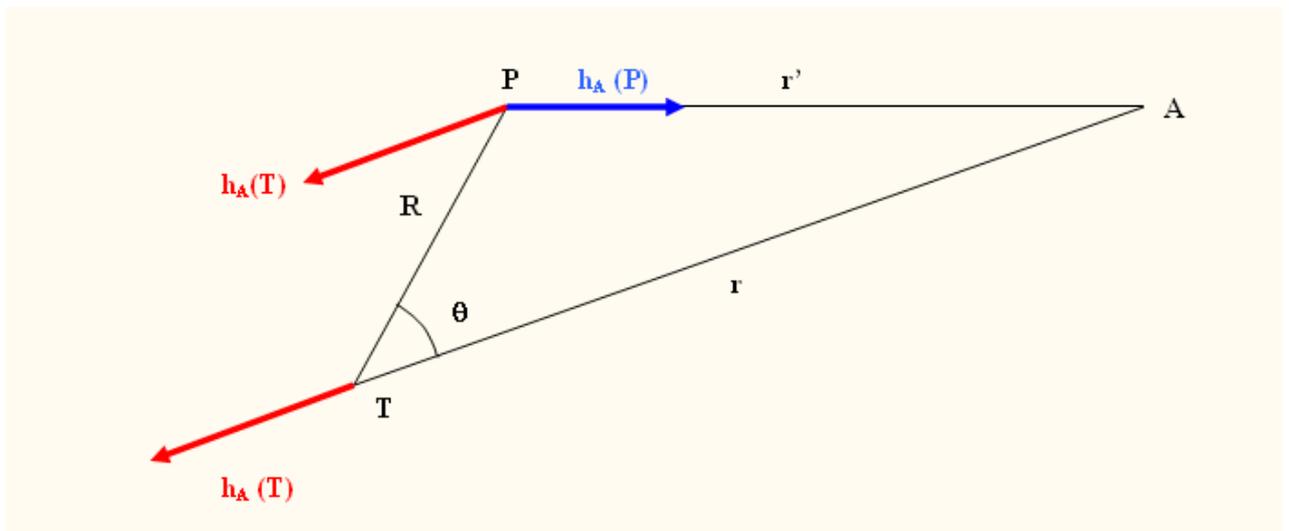


figure 8

Or  $r'$  s'exprime à partir de  $r$ ,  $R$  et la distance zénithale  $\theta$  par la relation du triangle PTA :

$$r'^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta \quad \text{soit encore :}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{r} \cos \theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

qui peut se développer en série de polynômes de Legendre, puisque  $R/r \ll 1$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{r} \cos \theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

où les polynômes de Legendre sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1 \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_{n+1}(\cos \theta) &= \frac{2n+1}{n+1} \cos \theta \cdot P_n(\cos \theta) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\cos \theta) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$W = Gm \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{R}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

où le développement en série démarre à  $n = 2$  (puisque les premiers termes s'éliminent avec  $1/r + R/r^2 \cdot \cos \theta$ ). Que ce soit pour la Lune ou le Soleil, le rapport  $R/r$  étant très faible, les premiers termes  $n = 2, 3, 4, \dots$  sont conservés et en première approximation le potentiel générateur de marée est donné pour  $n = 2$ , avec :

$$W = \frac{1}{2} \frac{m}{M} g \frac{R^4}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (10)$$

Le potentiel de marée total est la somme du potentiel de marée due à la Lune et du potentiel de

marée due au Soleil, chacun ayant la forme (10) : c'est le potentiel luni-solaire.

### Forme de la surface libre des océans

On suppose que la surface des océans est à chaque instant en équilibre sous l'action des forces de marée. Celles-ci dérivant d'un potentiel, cela revient à supposer que la surface libre des océans est une équipotentielle.

En l'absence de force de marée une particule P de la surface de la Terre serait soumise au seul potentiel de la gravitation terrestre : elle serait sur la surface d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

où R est le rayon de la surface des océans, supposée être une surface sphérique entourant la Terre ; les axes x et y sont tels que définis à la figure 9.

En présence des forces de marée, la particule liquide P se trouve à un potentiel différent de celui de la seule gravitation terrestre : elle est située à une hauteur z relative à la surface de la Terre, telle que le potentiel W y est égal à celui de la pesanteur puisqu'elle est en position d'équilibre :  $W = gz$ .

Or le potentiel de marée est donné par (10), il s'ensuit que la hauteur de la particule d'eau par rapport à la surface de la Terre est :

$$z = A(3 \cos^2 \theta - 1)$$

avec :  $A = \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{R^4}{r^3}$  (on remarquera que  $A = f.R$ , où f ordre de grandeur de la force de marée, donc A potentiel de celle-ci à la surface terrestre).

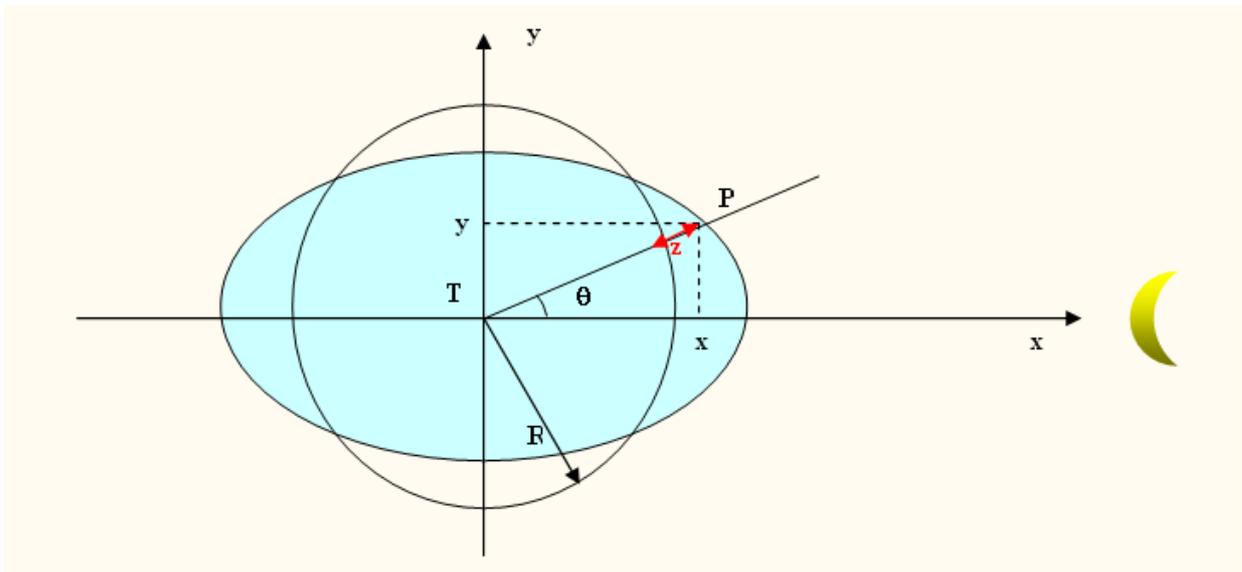


figure 9

La particule liquide P est en équilibre sur la surface d'équation :

$$x^2 + y^2 = (R + z)^2$$

qui, compte tenu du fait que la hauteur z est très petite devant le rayon terrestre R, peut se simplifier en :

$$x^2 + y^2 \approx R^2 + 2 R z$$

Par ailleurs  $x = TP \cos \theta$ , soit :  $\cos \theta = \frac{x}{R+z} \approx \frac{x}{R}$ , d'où l'équation de la surface libre :

$$x^2 \left(1 - \frac{6A}{R}\right) + y^2 = R^2 \left(1 - \frac{2A}{R}\right)$$

c'est une ellipse d'équation approchée :

$$\frac{x^2}{1 + \frac{4A}{R}} + \frac{y^2}{1 - \frac{2A}{R}} = R^2 \quad (11)$$

Son grand axe, de demi-longueur  $R\sqrt{1+4A/R}$ , est toujours aligné avec TA, donc dirigé vers l'astre A (en l'occurrence la Lune). Les déformations de la surface libre dues à la marée sont symétriques par rapport au grand axe et au petit axe de l'ellipse. La surface libre est constituée de zones où les molécules sont en dépression par rapport à la surface des océans sans marée ( $z < 0$ ) et en surélévation ( $z > 0$ ). Les molécules situées à l'opposé de l'astre sont en surélévation tout comme celles situées en face de l'astre, et non en dépression.

Il y a ainsi un bourrelet liquide, de forme ellipsoïdale, tout autour de la surface terrestre. En toute rigueur cette déformation affecte à son tour le potentiel de gravitation. L'observation et les théories plus précises montrent qu'il entraîne une augmentation de la hauteur de marée  $z$  de 10%.

Les points de surélévation maximale correspondent à la pleine mer, et les points de dépression correspondent à la basse mer, leurs lieux étant décalés de  $90^\circ$ .

### ***Variations de la marée dues aux positions horaires de l'astre (déclinaison et angle horaire)***

En théorie statique de Newton, l'amplitude de la marée (ou ce qui revient au même le potentiel de marée) en un point de la surface terrestre P dépend, par l'intermédiaire de la distance zénithale  $\theta$ , de la position apparente de l'astre, ainsi que de la latitude du lieu.

La position apparente d'un astre sur la sphère céleste en un lieu P de latitude  $\lambda$  est définie par ses coordonnées horaires :

- L'angle horaire H : c'est l'angle entre le plan méridien de P et le plan horaire de l'astre. Le plan horaire de l'astre est le plan passant par l'axe des pôles de la Terre et contenant le rayon TA (voir figure 10). H est compté en heures, minutes et secondes (1 heure =  $15^\circ$ ) positivement vers l'ouest (sens rétrograde) le long du cercle équatorial céleste (qui est divisé en 24 heures).

- La déclinaison  $\delta$  : c'est l'angle entre le parallèle passant par l'astre et l'équateur céleste. Comprise entre 0 et  $\pm 90^\circ$ , elle est comptée positivement vers le nord.

- La latitude  $\lambda$  est l'angle entre le zénith (verticale du lieu) et l'équateur céleste.

La déclinaison reste constante au cours de la rotation de la Terre, contrairement à l'angle horaire. Elle varie avec la position de la Terre sur son orbite et avec la position relative de l'astre par rapport à la Terre.

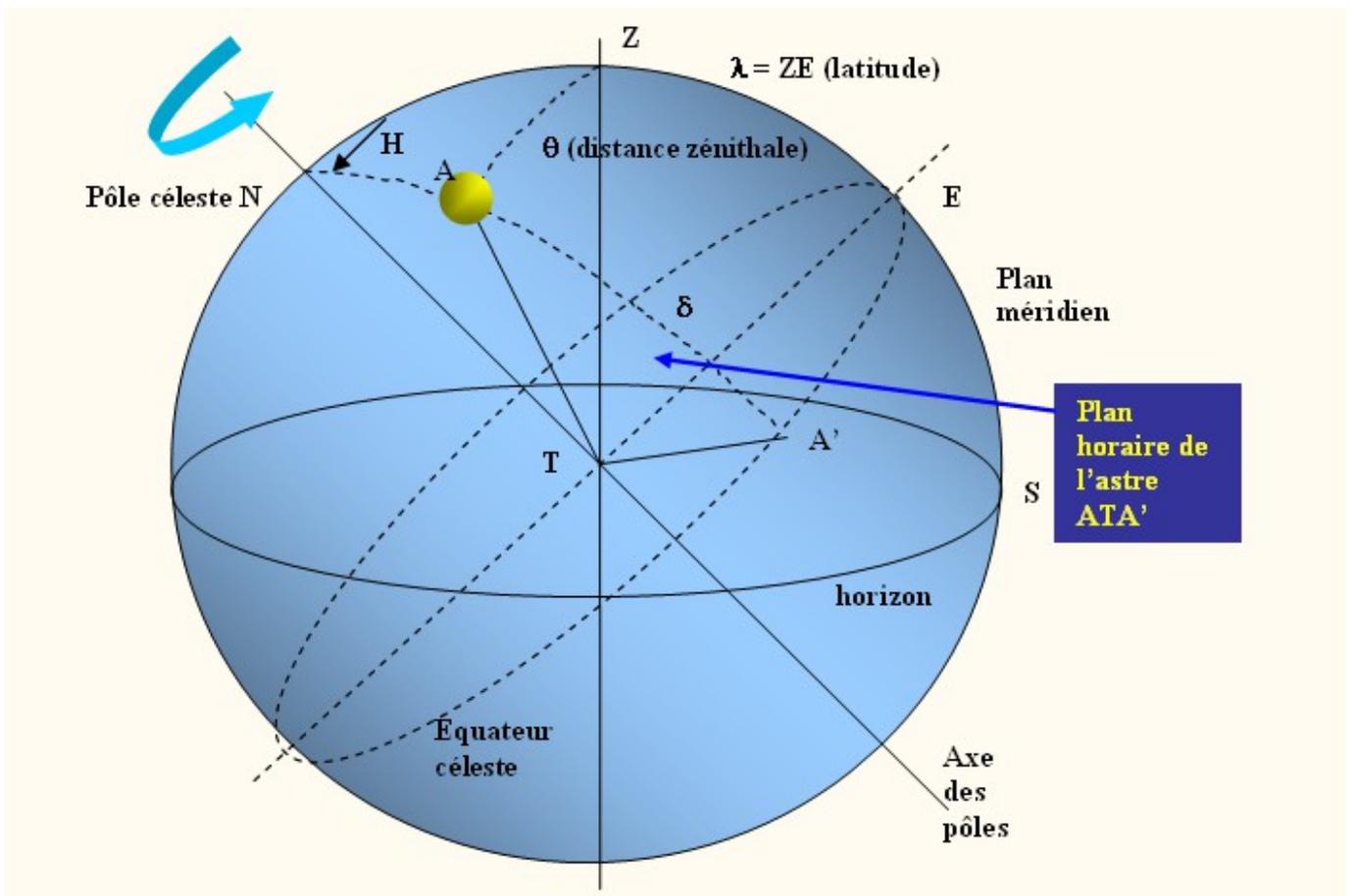


figure 10 – coordonnées horaires d'un astre

Exprimons la distance zénithale en fonction de la latitude de P, de l'angle horaire et de la déclinaison de l'astre. Un calcul facile de trigonométrie sphérique donne (exercice !) :

$$\cos \theta = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos H$$

le remplacement dans (10) conduit à l'expression du potentiel luni-solaire en fonction des coordonnées horaires, qui fait apparaître la contribution de trois termes de périodes :

$$W(\delta, H, \lambda) = W_{LP}(\lambda, \delta) + W_D(\lambda, \delta, H) + W_{SD}(\lambda, \delta, H) \quad (12)$$

où les termes sont :

- Terme à longue période :

$$W_{LP} = \frac{3}{2} g A \left( \sin^2 \lambda - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \quad (13a)$$

varie lentement avec la déclinaison de l'astre <sup>(6)</sup>. Comme  $\delta$  dépend directement de la période de révolution de l'astre, la période de  $W_{LP}$  en est la moitié : 14 jours environ pour la Lune, 6 mois pour le soleil. Cette composante du potentiel luni-solaire s'annule aux points de latitudes telles que  $\sin^2 \lambda = 1/3$ , soient  $\lambda = \pm 35^\circ 16'$ . La contribution de cette composante du potentiel est une dépression aux latitudes comprises entre ces deux valeurs, et une surélévation au-delà : c'est pourquoi on dit que ce terme longue période est « zonal » (figure 11).

- Terme diurne :

$$W_D = \frac{3}{2} g A \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos H \quad (13b)$$

sa variation est principalement quotidienne par son lien direct avec H, modulée par la variation longue période due à la déclinaison. Pour la Lune la périodicité est d'environ 24h50mn et pour le soleil 24 h. Cette composante du potentiel est maximale pour  $H = 0$  (culmination de l'astre dans le plan méridien), ce qui arrive chaque jour, ainsi que pour une déclinaison maximale ( $\delta = 23^\circ$  pour le soleil et  $28^\circ$  pour la Lune). Elle est maximale aux latitudes  $\pm 45^\circ$  et nulle à l'équateur terrestre où elle change de signe. C'est un terme tesséral car, ainsi que l'on vient de le voir, la surface des océans est divisée en secteurs d'amplitudes antisymétriques entre l'hémisphère nord et l'hémisphère sud et entre les hémisphères situés de part et d'autre du plan méridien de l'astre (figure 12).

- Terme semi-diurne :

$$W_{SD} = \frac{3}{2} g A \cos^2 \lambda \cos^2 \delta \cos 2H \quad (13c)$$

par l'argument  $2H$ , sa périodicité est la moitié de celle de l'astre, l'amplitude étant modulée en longue période par la moitié de celle de la déclinaison. Elle admet deux minimums et deux maximums par jour environ (deux par 24h pour le soleil, deux par 24h50mn pour la Lune). Cette composante du potentiel s'annule pour des méridiens  $H = \pm 45^\circ$  par rapport au plan méridien de l'astre, ces méridiens divisent la surface des océans en zones de surélévation et en zones de dépression. Elle s'annule dans tous les cas aux pôles. C'est pourquoi cette composante semi-diurne est dite sectorielle (figure 16).

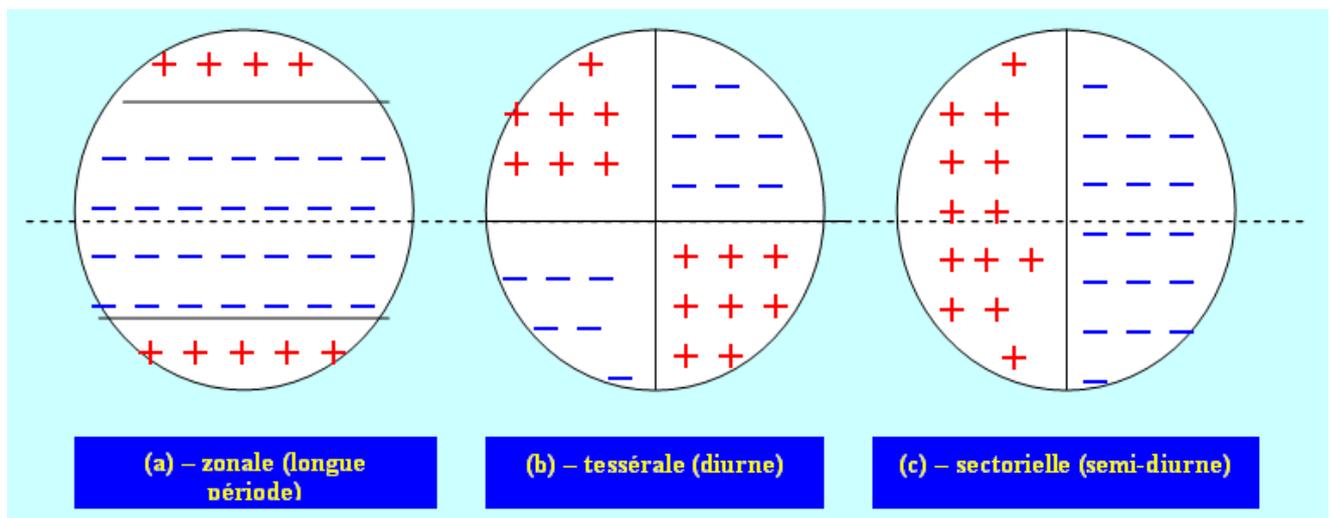


figure 13 – termes périodiques de la marée  
(+ : zones de surélévation, - : zones de dépression)

Ainsi, pour un astre considéré isolément (la Lune seule, ou bien le Soleil seul, sources de la force de marée), les variations de la force génératrice de marée sont :

- **variations dues à la rotation de la Terre** (pour le cas d'un seul astre A) : ces variations interviennent par les potentiels  $W_{SD}$  et  $W_D$  qui dépendent de l'angle horaire H.

Si la déclinaison de l'astre est nulle ( $\delta = 0$ , astre sur l'équateur céleste) seule subsiste la composante semi-diurne (puisque la composante diurne est nulle). Dans ce cas, la force de marée retrouve une même valeur à chaque demi-parcours de la sphère céleste par l'astre, donc pour deux points d'une même parallèle diamétralement opposés : tous les 12h25mn pour la Lune, et tous les 12h00 pour le Soleil (une pleine mer et une basse mer avec ces périodes). C'est la **marée semi-diurne**.

Si, par contre, la déclinaison est non nulle, la variation diurne, due au potentiel  $W_D$ , se superpose à la variation semi-diurne. Par cette composante diurne, deux points symétriques sur la même parallèle n'ont pas la même force génératrice de marée, celle-ci reprend une même valeur au bout d'une rotation complète de l'astre sur la sphère céleste. Les périodes diurnes sont 24h50mn pour la Lune, et 24h00 pour le Soleil.

Comme la composante semi-diurne ne s'annule jamais, à la marée semi-diurne se superpose une modulation de période diurne de l'amplitude. L'amplitude de pleine mer atteint un maximum avec une période diurne, ce que l'on appelle **marée à inégalité diurne**.

- **Variations dues au changement de la déclinaison de l'astre** (toujours pour le cas d'un seul astre) : ces variations interviennent par le potentiel WLP (longue période) qui dépend uniquement de la déclinaison pour une latitude fixée. Comme la déclinaison varie au cours des mois, la force de marée aura la même valeur à chaque demi-période de la déclinaison : soit 14 jours pour la Lune, et 6 mois pour le Soleil. Cette variation d'amplitude longue période module avec ces périodes celles des marées diurnes et semi-diurnes.

La figure 14 montre un exemple de marée semi-diurne modulée par une variation longue période due à la Lune, donc fonction des positions relatives de la Lune sur la sphère céleste (déclinaison, phases de la Lune).

La figure 15 montre différents types de marée : marée semi-diurne, marée semi-diurne à inégalité diurne, marée mixte (marée dont une période est semi-diurne, puis diurne), marée diurne, toutes étant modulées par la composante longue période.

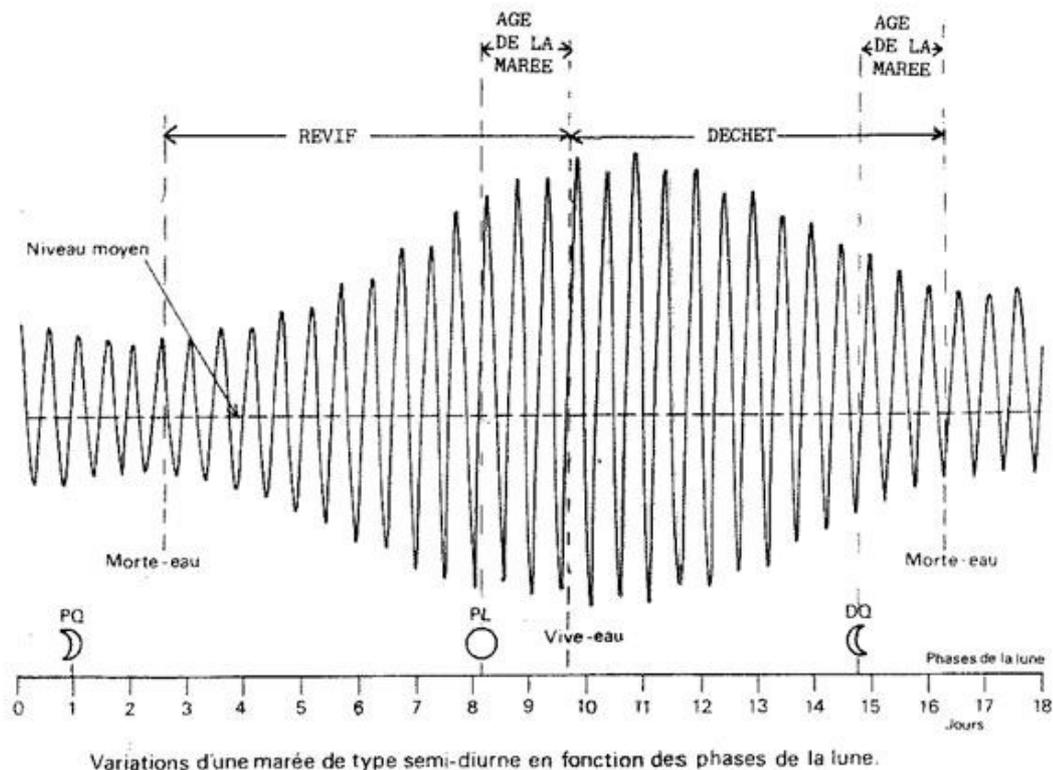


figure 14 – marée semi-diurne modulée par la composante longue période lunaire (source : cours du SHOM les marées)

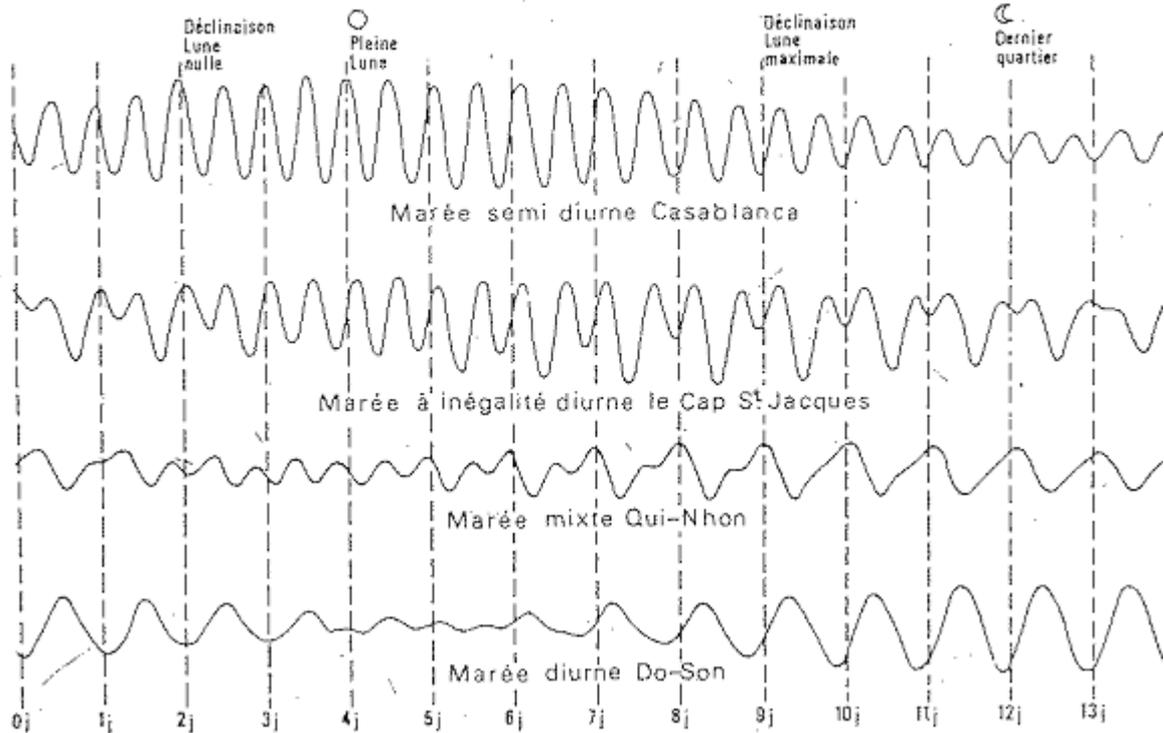


figure 15 – marées semi-diurne, à inégalité diurne, mixte, et diurne, modulées par la composante longue période lunaire (source : cours du SHOM les marées)

A ces variations, pour un astre donné, dues à la rotation de la Terre et à la déclinaison, s'ajoutent celles dues à l'orbite elliptique de l'astre. Les distances de la Terre au soleil ou de la Terre à la Lune ne sont pas constantes : elles passent par un maximum appelé apogée pour la Lune et aphélie pour le Soleil, ainsi que par un minimum appelé périgée et périhélie respectivement pour la Lune et le soleil. Il s'ensuit que de par sa dépendance en  $1/r^3$  la force génératrice de marée sera maximale aux périgée ou périhélie, et minimale aux apogée ou aphélie.

Il apparaît alors une composante de la force génératrice dont la période coïncide avec celle de la révolution de la Lune autour de la Terre (1 mois lunaire) ou de la Terre autour du soleil (annuelle).

### **Effets combinés de la Lune et du Soleil, quadratures et syzygies**

Lorsque l'on prend en compte les effets de marée dus au Soleil et à la Lune ensemble, il faut, dans l'expression (12) du potentiel de la force génératrice de marée, ajouter les potentiels du Soleil et de la Lune.

En indiquant par (S) et par (L) les termes relatifs au soleil et à la Lune, on obtient six termes pour le potentiel total :

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{3}{2} g \left( \sin^2 \lambda - \frac{1}{3} \right) \left( A_S \left( \sin^2 \delta_S - \frac{1}{3} \right) + A_L \left( \sin^2 \delta_L - \frac{1}{3} \right) \right) \\
 & + \frac{3}{2} g \sin 2 \lambda \left( A_S \sin 2 \delta_S \cos H_S + A_L \sin 2 \delta_L \cos H_L \right) \\
 & + \frac{3}{2} g \cos^2 \lambda \left( A_S \cos^2 \delta_S \cos 2 H_S + A_L \cos^2 \delta_L \cos 2 H_L \right)
 \end{aligned} \quad (14)$$

Pour un point situé à une latitude constante, et si l'on suppose les déclinaisons nulles (astres à

l'équateur), ce qui ne change rien à la conclusion générale, ce sont les valeurs relatives des angles horaires du soleil et de la Lune (donc leurs positions relatives sur l'équateur céleste) qui vont affecter  $W$ . Soit donc à considérer les deux derniers termes de  $W$  ci-dessus :

$$W = C + C'(A_S \cos 2H_S + A_L \cos 2H_L)$$

où  $C$  et  $C'$  sont des constantes dépendant uniquement de la latitude, des masses et des distances des astres. Deux cas remarquables se présentent (figure 16):

- Le soleil et la Lune sont en **quadrature** : les angles formés valent  $STL = \pm \pi/2$ . Ils sont alors sur deux méridiens célestes perpendiculaires, ou, ce qui est équivalent, la différence entre leurs angles horaires est de  $\pi/2$  ( $90^\circ$  ou 6 heures sur la sphère céleste). On a par exemple :

$$H_L = H_S + \pi/2$$

Par conséquent  $\cos 2H_L = -\cos 2H_S$ , et le potentiel  $W$  est minimal et vaut

$$W = C + C'(A_S - A_L) \cos 2H_S$$

Les effets conjugués de la Lune et du soleil se retranchent lorsqu'il y a quadrature.

- Le soleil et la Lune forment une **syzygie** (en opposition ou en conjonction) : on a  $STL = 0$  ou  $\pi$ . La lune et le soleil sont sur le même méridien, soit diamétralement opposés soit en coïncidence (situation de l'éclipse). La différence entre leurs angles horaires est 0 ou  $\pi$ , et dans les deux cas  $\cos 2H_L = \cos 2H_S$ . le potentiel  $W$  est alors maximal :

$$W = C + C'(A_S + A_L) \cos 2H_S$$

Les effets conjugués de la Lune et du Soleil s'ajoutent en syzygie.

Pour la configuration en quadrature on a les marées de mortes eaux (amplitudes faibles) : elles correspondent au premier et au dernier quartier de Lune.

Pour la configuration en syzygie on a les marées de vives eaux (amplitudes élevées) : elles ont lieu à chaque demi-révolution de la Lune autour de la Terre, lorsqu'elle est alignée avec celle-ci et le soleil (approximativement), donc à la pleine Lune ou à la nouvelle Lune.

Les marées de vives eaux et les marées de mortes eaux sont donc espacées dans le temps d'environ  $\frac{1}{4}$  de mois lunaire.

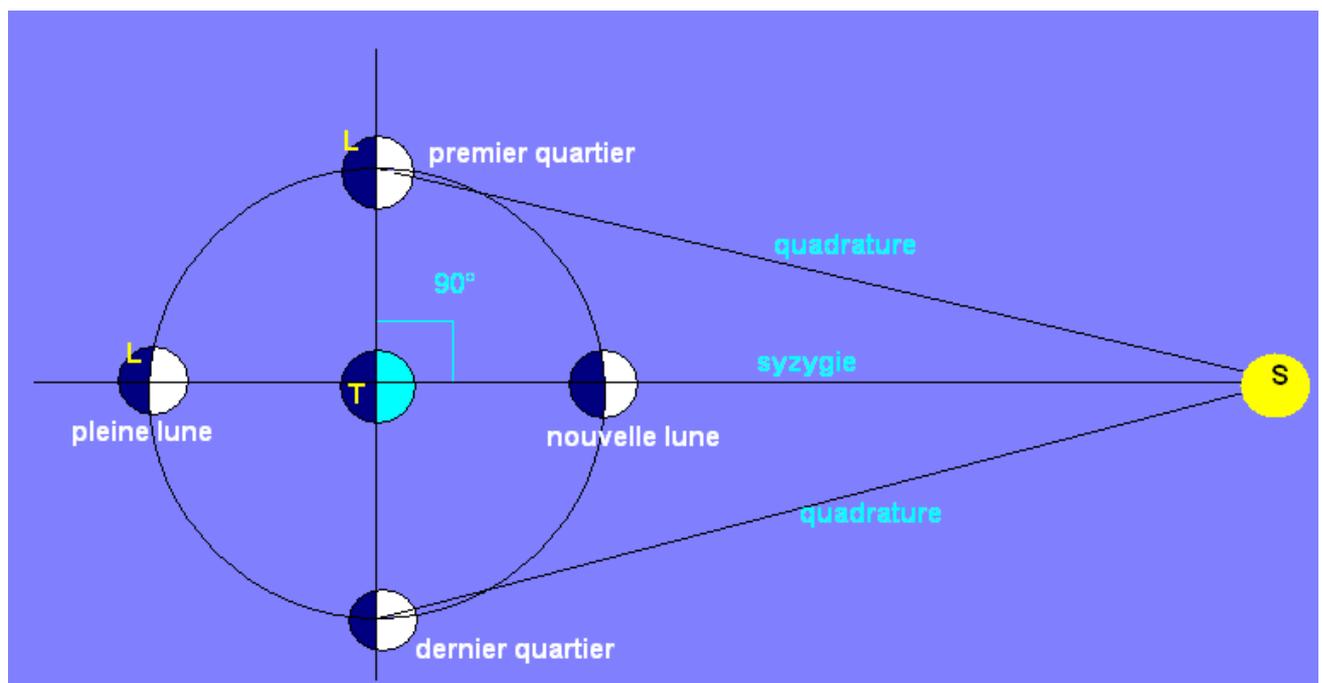


figure 16 – quadratures et syzygies

Remarque :

On arrive aux mêmes conclusions en remarquant que, à partir de la relation (11) :

- Lors des quadratures, les grands axes des ellipsoïdes de la marée due au soleil et due à la Lune sont perpendiculaires d'où il suit que les hauteurs se retranchent.
- Lors des syzygies, les deux grands axes sont alignés, les hauteurs s'ajoutent.

### **3-2 - Théorie dynamique de Laplace (1775)**

#### ***Insuffisance de la théorie statique***

Si on calcule les amplitudes de marée à partir de la théorie statique on obtient des valeurs largement sous-évaluées par rapport aux valeurs observées, notamment près des côtes. En effet, tous calculs faits, on trouve que la hauteur d'eau due aux effets cumulés de la Lune et du Soleil n'excède pas 50 cm. La réalité est bien différente : on observe des marnages de plus de 10 m dans certaines baies, comme on l'a vu.

La théorie statique présente aussi des contradictions vis-à-vis des points suivants :

- Existence de l'âge de la marée (retard entre la syzygie équinoxiale et l'apparition de la marée de vives eaux en résultant) qu'elle ne prédit pas (voir figure 3).
- Existence de l'établissement du port (retard entre le passage au méridien de la Lune et l'apparition de la pleine mer qui en résulte) qu'elle ne prédit pas non plus.
- Non prise en compte des continents et de leurs effets de bord.
- L'hypothèse qu'à chaque instant les particules d'eau sont en équilibre sous l'action des forces de marée n'est pas compatible avec le fait qu'il existe une inertie dans leur mise en mouvement par rapport à la vitesse à laquelle se produit le déplacement apparent de l'astre.

Par contre la théorie statique de Newton (1687) eut le mérite d'expliquer les raisons pour lesquelles il existe une période de 12 heures lunaires, une corrélation entre les phases de la Lune et la hauteur d'eau, ainsi qu'avec l'inégalité diurne.

Pour répondre partiellement à ces objections, il faut considérer que les forces de marée agissent sur l'ensemble du volume des océans en mettant en mouvement une déformation d'amplitude  $z(x,y,t)$  qui se propage comme une onde. C'est ce que fait la théorie de Laplace (1775), perfectionnée par la suite par d'autres théories : c'est l'approche dynamique qui se résume comme suit :

- L'état des mouvements des particules liquides et les forces d'inertie qui agissent sur elles sont prises en compte.
- La réponse aux forces génératrices de marée est de forme ondulatoire, et la propagation des ondes s'effectue avec une célérité qui dépend de la profondeur. Comme tout phénomène ondulatoire, les ondes de marée se réfléchissent, se réfractent, se diffractent, interfèrent en fonction du milieu de propagation et des conditions de bord. Ainsi certains modes de propagation, et donc les amplitudes peuvent être amplifiés ou au contraire atténués.
- On peut montrer qu'au cours de la propagation d'une onde de marée, une particule d'eau décrit une trajectoire fermée ayant la forme d'une ellipse allongée, le grand axe étant dans le sens horizontal et le petit axe dans le sens vertical. Le courant de marée est alors la composante du déplacement dans le sens horizontal, l'amplitude de marée est la composante verticale du déplacement.

#### ***Principes de la théorie dynamique***

En résumé la théorie dynamique s'appuie sur les principes suivants :

- Principe des oscillations forcées : à chaque composante périodique de la force génératrice de marée engendrée par l'astre correspond une onde de marée de période identique
- Principe de linéarité : l'amplitude de chaque onde de marée est proportionnelle à l'amplitude de la composante de la force de marée qui lui a donné naissance. Cette amplitude dépend

toutefois des périodes de résonance propre du bassin océanographique et des positions par rapport aux lignes des noeuds de vibrations propres du bassin

- Principe des effets d'inertie : il existe un retard (ou déphasage) entre la mise en mouvement de la déformation du niveau de la mer par rapport à l'action de la force génératrice qui en est la cause. Ce retard est supposé constant et dépend de la géométrie du bassin et des conditions de fond (frottements).
- Principe de la superposition des petits mouvements : la déformation de la surface des mers due à toutes les composantes de la force génératrice de marée est la somme des déformations partielles générées par chacune d'elles.

Le principe de linéarité est en fait très bien vérifié pour des marées type Brest, celles qui ont servi de référence au modèle de Laplace, et plus généralement aux marées de type semi-diurne. Les annuaires de marée qui en ont découlé (dès Chazallon en 1839) fournissent des termes correctifs (semi-empiriques) par rapport au modèle fondamental basé sur ces hypothèses et qui est rassemblé dans la « formule de Laplace », pour différentes marées dans des ports de référence.

Sans entrer dans les détails, l'application des principes précédents conduit à la formule de Laplace pour le calcul de la hauteur de marée due au potentiel luni-solaire :

$$z(\delta, H) = i_L^3 \left[ C_L \cos^2 \delta_L \cos 2(H_L - \lambda_L) + B_L \sin 2\delta_L \cos(H_L - \mu_L) + A_L (1 - 3 \sin^2 \delta_L) \right] + i_S^3 \left[ C_S \cos^2 \delta_S \cos 2(H_S - \lambda_S) + B_S \sin 2\delta_S \cos(H_S - \mu_S) + A_S (1 - 3 \sin^2 \delta_S) \right] \quad (15)$$

La formule (15) ressemble à la formule (14) de la théorie statique, mais l'amplitude  $z$  n'est pas proportionnelle à celle de la force génératrice de marée à cause des différents coefficients  $C$ ,  $\lambda$  (qui n'est pas la latitude ici !),  $\mu$ ,  $B$ ,  $A$ , indicés par  $L$  (Lune) ou  $S$  (soleil), et qui sont déterminés semi-empiriquement et par de nombreuses observations en un lieu donné. Le coefficient  $i$  est le rapport de la parallaxe de l'astre  $R/r$  à sa valeur moyenne (donc presque égal à 1).

Valeurs des coefficients à Brest :

- composantes lunaires :  $C_L = 2,346\text{m}$  ;  $B_L = 0,108\text{m}$  ;  $A_L = 0,084\text{m}$  ;  $\lambda_L = 48^\circ$  ;  $\mu_L = 35^\circ$
- composantes solaires :  $C_S = 0,782\text{m}$  ;  $B_S = 0,036\text{m}$  ;  $A_S = 0,028\text{m}$  ;  $\lambda_S = 67^\circ$  ;  $\mu_S = 54^\circ$

Entre les amplitudes des composantes lunaires et solaires de même nature (diurnes, semi-diurnes, longue période) le rapport est toujours le même :  $C_L/C_S = B_L/B_S = A_L/A_S = 3$ , ce qui montre que l'influence de la Lune est plus importante que celle du soleil dans tous types de marée (même conclusion qu'en théorie statique).

Par contre, le rapport des amplitudes des marée diurne et semi-diurne se conserve pour la composante solaire et la composante lunaire :  $C_L/B_L = C_S/B_S = 22$ , et est très différente de la théorie statique.

Ainsi, la théorie de Laplace prévoit que les marées semi-diurnes ont une amplitude bien supérieure à celle des marées diurnes, et comme sur les côtes françaises, et en particulier à Brest, c'est la cas, rien d'étonnant à ce que la théorie de Laplace s'y applique bien.

### **Marées d'équinoxe en théorie dynamique**

Pour une marée de type semi-diurne luni-solaire seuls subsistent dans (15) les termes en  $C_L$  et  $C_S$  :

$$z(\delta, H) \approx i_L^3 C_L \cos^2 \delta_L \cos 2(H_L - \lambda_L) + i_S^3 C_S \cos^2 \delta_S \cos 2(H_S - \lambda_S) \quad (16)$$

On cherche alors pour quelle déclinaison du soleil l'amplitude de marée est maximale. Pour

cela on calcule :  $\frac{\partial z}{\partial \delta_S} = i_S^3 C_S 2 \cos \delta_S \sin \delta_S \cos 2(H_S - \lambda_S) = 0$  pour  $\delta_S = 0$  ou  $\pi/2$ .

Comme la déclinaison du soleil est comprise entre  $-23^\circ 27'$  et  $+23^\circ 27'$ , seule convient  $\delta_S = 0$  : autrement dit, l'amplitude de marée due à la force génératrice solaire est maximale aux équinoxes pour les marées de type semi-diurne. Elle vaut à ce moment-là :

$$z_{max} \approx i_L^3 C_L \cos^2 \delta_L \cos 2(H_L - \lambda_L) + i_S^3 C_S \cos 2(H_S - \lambda_S) \quad (17)$$

### 3-3 - Propagation de l'onde de marée : modèle des bassins, résonances

La présence des continents et des fonds sous-marins de profondeurs diverses entraîne que le traitement des ondes de déformation de la surface océanique est global : on ne peut pas considérer une hauteur d'eau en un point et un instant donnés de manière indépendante de ce qu'elle est à un instant et un point différents et voisins. La modélisation de la propagation de l'onde de marée reste néanmoins relativement aisée dans des cas simples, mais assez courants, de mers semi-fermées et d'étendue faible devant celle des océans (modèle des bassins). En effet, dans ces cas limites, on peut considérer que le bassin réagit seulement à la sollicitation dynamique exercée par l'onde de marée incidente en provenance de l'océan, du côté ouvert, et on peut négliger les effets de la force de marée qui prendraient naissance directement dans le bassin.

Comme étendues pouvant être assimilées à des bassins citons par exemple : la Manche, la mer du Nord, la mer Rouge, la baie de Fundy, la mer d'Okhostk, le golfe du Mexique, etc...

Les premiers à s'être intéressés à la propagation des ondes de marée dans les océans, des baies ou des canaux (bras de mers) sont Whewell et Airy, ainsi que Harris (1904) pour les phénomènes de résonance.

#### Équations de base

On s'intéresse alors à la modélisation de la réponse d'une particule de l'océan à l'excitation due au potentiel générateur de marée, lequel est ici supposé connu comme une donnée d'entrée du problème, et dans un bassin de faible profondeur  $H$ . L'eau des océans étant supposée un fluide newtonien, les équations de la dynamique qui régissent son mouvement sont les **équations de Navier-Stokes**.

Notations et hypothèses (figure 17):

- le fluide est incompressible, de masse volumique constante  $\rho$
- les effets de la viscosité sont négligés
- la pression atmosphérique au-dessus de la surface est uniforme,  $P$  ; de plus on néglige les phénomènes de tension superficielle, de sorte que la pression juste au-dessous de la surface est aussi  $P$
- le fond du bassin est à la cote  $Z = 0$ , le niveau moyen au repos est à  $Z = H$ . La cote de la particule d'eau sur la surface déformée par rapport au repos est  $z(X,Y,t)$ , donc par rapport au fond du bassin on a :  $Z(X,Y,t) = H + z(X,Y,t)$ .
- la surface du fond est supposée plane et parallèle au plan de l'horizon. Sur ce plan, les points sont repérés dans le référentiel (OXY) où les axes OX et OY horizontaux sont perpendiculaires. Ce repère est supposé galiléen.
- La vitesse de la particule P située à la surface de l'océan est notée  $\mathbf{v}(X,Y,Z,t)$ . Elle est supposée à composantes horizontales  $v_X$  et  $v_Y$ , la composante verticale étant nulle  $v_Z = 0$ .
- La surélévation  $z(X,Y,t)$  vérifie les hypothèses suivantes (hypothèse des ondes longues):
  - $|z(X,Y,t)| \ll H$  (déformations faibles devant la profondeur)

- $|\partial z/\partial X| \ll 1$  et  $|\partial z/\partial Y| \ll 1$  (déformations peu dépendantes de la position horizontale) ou hypothèse du fluide barotrope : sur une même verticale les particules ont même vitesse de déformation

- Les ondes considérées sont des ondes de gravité : mouvements ondulatoires d'un liquide à surface libre placé dans un champ de pesanteur. Les forces extérieures auxquelles est soumise la particule d'eau sont la pesanteur apparente, les forces de frottement et la force de Coriolis. Le bassin étant de faible profondeur, les échelles caractéristiques sur lesquelles varie la surélévation  $z(X,Y,t)$  sont grandes devant la profondeur. Ceci revient à admettre que les longueurs d'onde de la propagation des déformations est grande devant  $H$ .

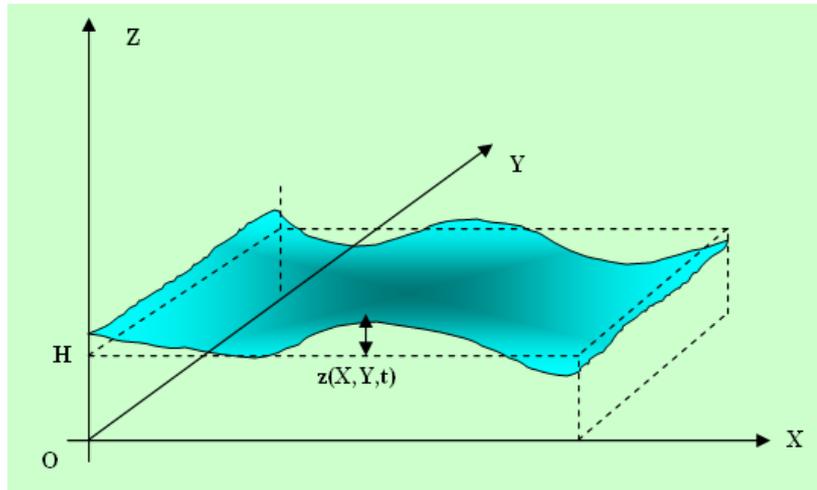


figure 17 – onde de gravité en eau peu profonde

Sous ces hypothèses, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla W - \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (18)$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est la vitesse angulaire de la rotation terrestre (qui intervient dans la force de Coriolis,  $\mathbf{F}$  la force de frottement, et  $W$  le potentiel générateur de marée.

Puisque la vitesse verticale est supposée nulle le théorème de l'hydrostatique s'applique :

$$P = \rho g z(X,Y,t) + \text{cste}$$

D'où il suit que

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} + \rho g \nabla z(X, Y, t)$$

Par ailleurs l'adoption de l'hypothèse linéaire conduit à assimiler la dérivée particulière à sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

(18) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g \nabla z - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla W - \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (19)$$

L'équation de continuité pour un fluide incompressible de vitesse d'écoulement  $\mathbf{V}$  s'écrit  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , mais ici cette vitesse n'est pas égale à  $\mathbf{v}$  (vitesse des déformations supposée horizontale, hypothèse des ondes longues), il faut lui rajouter la vitesse de variation de la cote de la particule  $\partial z/\partial t$  et par l'hypothèse des déformations faibles assimiler la quantité  $\partial/\partial Z(\partial z/\partial t)$  à  $1/H \cdot (\partial z/\partial t)$ . Ainsi l'équation de continuité est, non pas  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , mais :

$$H \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

On cherche des solutions sous forme harmonique :

$$\begin{aligned} z(X, Y, t) &= f(X, Y) \exp j \omega t \\ v_X(X, Y, Z, t) &= u(X, Y) \exp j \omega t \\ v_Y(X, Y, Z, t) &= w(X, Y) \exp j \omega t \end{aligned}$$

Supposons que les forces de frottement sur le fond de la mer sont de la forme de Chézy :  $F = C_f \mathbf{v}$ , où  $C_f$  coefficient de frottement. A partir de l'équation (20) qui s'écrit encore :

$$\frac{du}{dX} + \frac{dw}{dY} + \frac{j \omega f}{H} = 0$$

et compte tenu que les composantes du vecteur vitesse angulaire de rotation terrestre est :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix}$$

les équations (19) et (20) aboutissent aux équations du mouvement :

$$\left. \begin{aligned} u &= - \frac{g}{(C_f + j \omega)^2 + \Gamma^2} \left[ (C_f + j \omega) \frac{\partial f}{\partial X} + \Gamma \frac{\partial f}{\partial Y} \right] \\ w &= \frac{g}{(C_f + j \omega)^2 + \Gamma^2} \left[ (C_f + j \omega) \frac{\partial f}{\partial Y} - \Gamma \frac{\partial f}{\partial X} \right] \\ \nabla^2 f - \frac{j \omega [(C_f + j \omega)^2 + \Gamma^2]}{g H (C_f + j \omega)} f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

où l'on a posé  $\Gamma = 2 \Omega \sin \lambda$ . Le potentiel générateur n'a pas été explicitement pris en compte, on le retrouve via les conditions aux limites sur la vitesse à la frontière séparant le bassin et l'océan où l'onde générée par ce potentiel est imposée :

- sur les contours terrestres du bassin (côtes) le vecteur vitesse normal est nul
- à la frontière séparant le bassin de l'océan le vecteur vitesse est égal à la vitesse imposée par l'océan et résultant de la force génératrice de marée

donc : si la normale au contour est parallèle à  $u$ , on a  $u = 0$ , soit :

$$(C_f + j \omega) \frac{\partial f}{\partial X} + \Gamma \frac{\partial f}{\partial Y} = 0$$

et si la normale au contour est parallèle à  $w$ , on a  $w = 0$ , soit :

$$(C_f + j \omega) \frac{\partial f}{\partial Y} - \Gamma \frac{\partial f}{\partial X} = 0$$

### **Ondes de Kelvin, lignes cotidales et points amphidromiques**

On va appliquer, à titre d'exemple, les équations précédentes au cas d'une onde de marée qui se propage dans un canal infini d'axe  $Ox$ , de profondeur  $H$  et de largeur  $2L$  constantes (figure

18). Ce cas d'école nous permettra d'introduire les lignes cotidales et les points amphidromiques. On suppose que les frottements sont négligeables, ce qui revient à considérer que l'on est éloigné des côtes.

Les conditions aux limites précédentes s'écrivent :  $j\omega \frac{\partial f}{\partial Y} - \Gamma \frac{\partial f}{\partial X} = 0$  en  $Y = \pm L$ .

On démontre alors très facilement (exercice !) que la solution qui vérifie l'équation du mouvement et les conditions aux limites est :

$$\left. \begin{aligned} z(X, Y, t) &= z_0 \exp\left(-\frac{\Gamma Y}{\sqrt{gH}}\right) \exp j\omega \left(t - \frac{X}{\sqrt{gH}}\right) \\ u(X, Y, t) &= z_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \exp\left(-\frac{\Gamma Y}{\sqrt{gH}}\right) \exp j\omega \left(t - \frac{X}{\sqrt{gH}}\right) \\ w(X, Y, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ces relations (22) montrent que l'amplitude de l'onde de marée varie exponentiellement d'un bord à l'autre du canal.

Les ondes de cette forme sont appelées « **ondes de Kelvin** ».

La célérité de ces ondes est :

$$c = \sqrt{gH} \quad (23)$$

Les ondes de marée dans un canal peu profond sont plus rapides en eau profonde qu'en eau peu profonde.

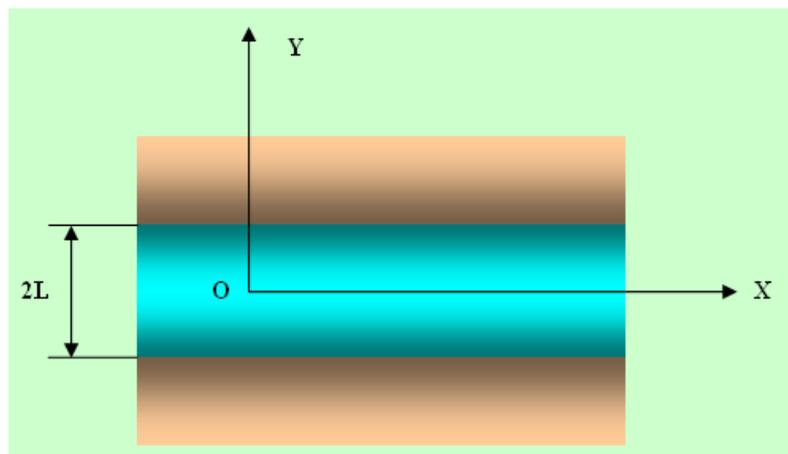


figure 18 – géométrie du canal

Les lignes d'égales amplitudes vérifient  $Y = \text{cste}$  : ce sont donc des lignes parallèles à l'axe du canal.

On appelle ligne cotidale le lieu des points où l'amplitude de marée identique est atteinte au même instant (plus exactement c'est le lieu des points où la pleine mer se produit au même instant). Mathématiquement cela revient à chercher les lignes d'égales phases. Dans l'exemple du canal ce sont donc les lignes  $X = \text{cste}$  : les lignes cotidales sont normales à l'axe du canal.

En fait, du fait de la présence des bords les ondes de marée se réfléchissent et se propagent dans des sens opposés. En un point donné se superposent alors une onde de marée incidente et une onde de marée réfléchie dont l'amplitude est une fraction  $A$  de la première :

$$z(X, Y, t) = z_0 \exp j\omega t \cdot \left[ \exp\left(-\frac{\Gamma Y + j\omega X}{\sqrt{gH}}\right) + A \exp\left(\frac{\Gamma Y + j\omega X}{\sqrt{gH}}\right) \right]$$

dont l'amplitude a pour module :

$$|z(X, Y, t)| = z_0 \exp\left(-\frac{\Gamma Y}{\sqrt{gH}}\right) \sqrt{\left(1 + A \exp\frac{2\Gamma Y}{\sqrt{gH}} \cos\frac{2\omega X}{\sqrt{gH}}\right)^2 + A^2 \exp\frac{4\Gamma Y}{\sqrt{gH}} \sin^2\frac{2\omega X}{\sqrt{gH}}} \quad (24)$$

Cette expression de l'amplitude de l'onde de marée permet d'introduire la définition des points amphidromiques, c'est-à-dire les points de marnage nul :  $|z| = 0$ . D'après (24) ils vérifient :

$$X = (2n+1)\pi \frac{\sqrt{gH}}{2\omega} = (2n+1) \frac{\Lambda}{4}$$

$$Y = \frac{\sqrt{gH}}{2\Gamma} \ln A$$

où  $\Lambda = 2\pi c / \omega$  est la longueur d'onde. Les points amphidromiques sont donc situés sur la droite d'ordonnée :

$$Y = \frac{\Lambda \omega}{4\pi \Gamma} \ln A \quad (25)$$

en des points d'abscisses :

$$X = (2n+1) \frac{\Lambda}{4} \quad (25 \text{ bis})$$

séparés d'une distance égale à la demi longueur d'onde  $\Lambda/2$ .

Toutes les lignes cotidales passent par les points amphidromiques. Le courant de marée circule en sens inverse le long du canal de part et d'autre des points amphidromiques.

L'existence des points amphidromiques ne pouvait pas être prédite par la théorie statique : celle-ci prévoyait une propagation de la marée vers l'ouest du fait que l'ellipsoïde garde une orientation fixe pratiquement lors d'une journée lunaire tandis que la Terre tourne d'ouest en est. L'observation montre au contraire des cas où cela ne se produit pas : la marée s'oriente d'ouest en est dans la Manche, ou du sud au nord dans l'Atlantique nord... C'est un effet de la présence des continents qui ne pouvait être pris en compte que par la modélisation ondulatoire. La découverte des points amphidromiques est due pour la première fois à Whewell (1836) lors de ses observations en mer du Nord.

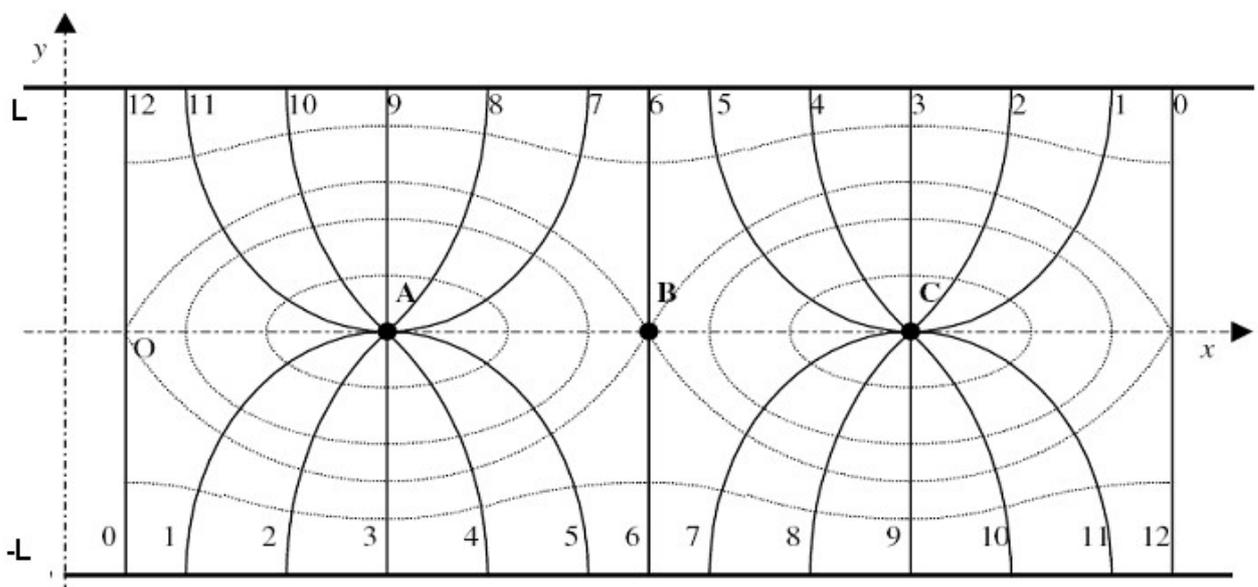


figure 19 – points amphidromiques (marnage nul), lignes cotidales (isophases \_\_\_\_\_) et lignes d'égale amplitude (-----) pour un canal, avec  $A = 1$

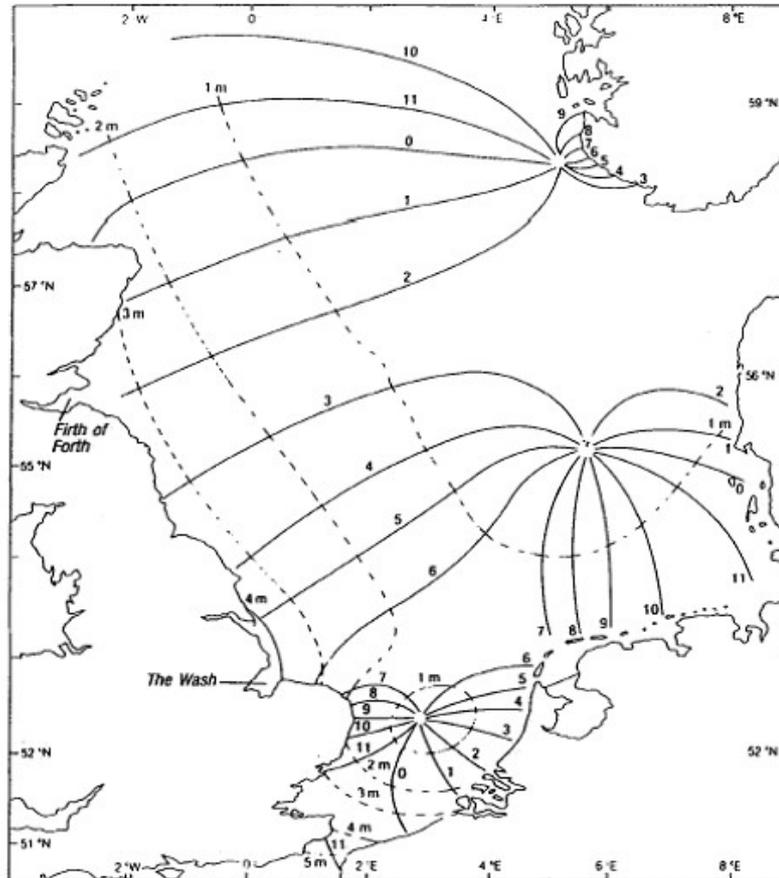


figure 20 – points amphidromiques, lignes cotidales et lignes d'égale amplitude en mer du Nord

### Résonances dans les bassins

Comment se comporte une onde de marée dans un bassin assimilé à un chenal de longueur  $L$ , fermé à un côté (en  $X = L$ ) et ouvert sur l'océan (en  $X = 0$ ), supposé allongé (les dimensions transversales suivant  $Y$  sont négligées) (figure 21) ?

Les problèmes réels sont bien plus compliqués mais ce petit modèle permet de comprendre ici un phénomène que la théorie statique ne pouvait pas prévoir : la résonance du bassin.

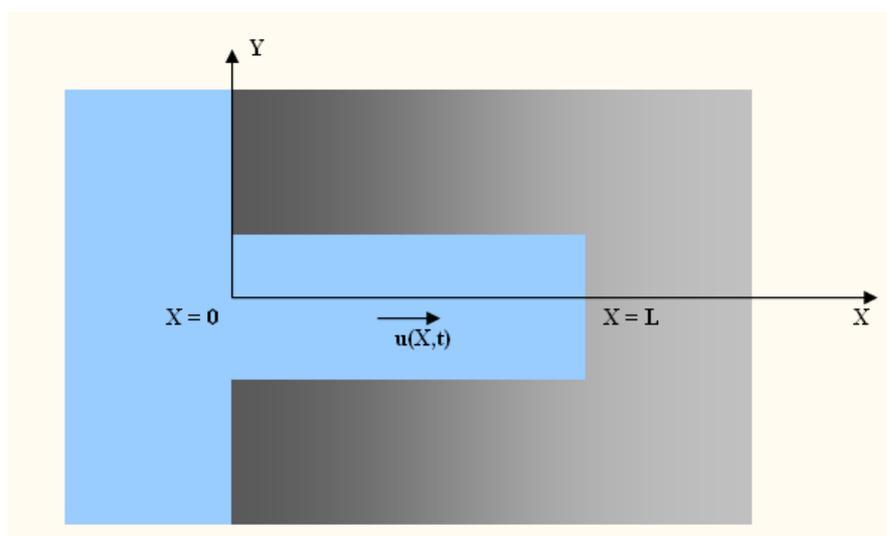


figure 21 – modèle du chenal

Avec les mêmes hypothèses qui ont conduit aux équations (19) et (20), et en omettant la force

de Coriolis, les forces de frottement et la force génératrice de marée agissant directement sur le bassin, et supposant le modèle unidimensionnel suivant OX (on néglige donc  $w$ ), ces équations se simplifient en :

$$\left. \begin{aligned} H \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial z}{\partial X} \end{aligned} \right| \quad (26)$$

qui se combinent pour donner l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0 \quad (26 \text{ bis})$$

où  $c$  est la célérité de l'onde donnée par (23).

Les conditions aux limites sont :

- à l'entrée du bassin ( $X = 0$ ) : déformation imposée par la marée océanique, soit

$$z(0, t) = z_0 \exp j \omega t \quad (27a)$$

- au fond du bassin ( $X = L$ ) : vitesse nulle, soit

$$\left. \begin{aligned} u(L, t) &= 0 \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial t} = j \omega u(L, t) = 0 &\rightarrow \frac{\partial z(L, t)}{\partial X} = 0 \end{aligned} \right| \quad (27b)$$

En cherchant des solutions sous forme d'une superposition d'onde directe et réfléchie,

$$z(X, t) = z^+ \exp j(\omega t + k X) + z^- \exp j(\omega t - k X) \quad \text{avec } k = \omega/c \text{ nombre d'onde,}$$

les conditions aux limites (27) donnent pour les amplitudes  $z^+$  et  $z^-$  :

$$\left. \begin{aligned} z^+ &= \frac{z_0 \exp j k L}{2 \cos k L} \\ z^- &= -\frac{\exp(-j k L)}{2 \cos k L} \end{aligned} \right| \quad (28)$$

Les amplitudes deviennent infinies (résonances) lorsque  $\cos kL = 0$  donc lorsque la fréquence de l'onde de marée océanique excite l'eau du bassin pour des dimensions ( $L, H$ ) telles que :

$$k L = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{c'est-à-dire : } \omega = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{gH}}{L} (2n+1) \quad (29)$$

Un bassin très allongé ( $L$  grand) et peu profond ( $H$  petit) entrera donc facilement en résonance avec des ondes de marée océaniques de faibles fréquences (grandes longueurs d'onde), les plus répandues. C'est le cas par exemple de la baie de Fundy (figure 22), dont la longueur est environ  $L = 200$  km et la profondeur maximale  $H = 67$ m : on obtient le mode d'excitation fondamental à  $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , soit à peu près le double de la fréquence de rotation de la Terre ( $1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ), ce qui rend cette baie, assimilée à un chenal, en résonance avec les ondes semi-diurnes.

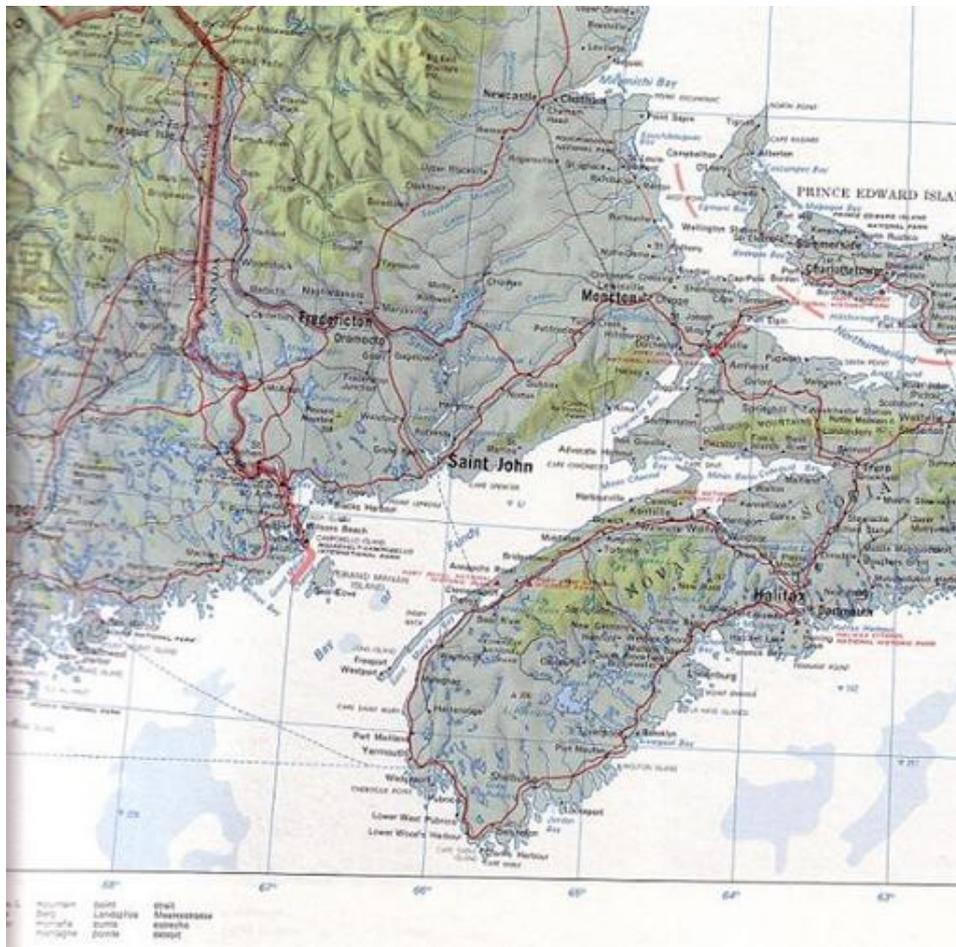


figure 22 – baie de Fundy

Par effet de résonance de bassin, le marnage de la baie de Fundy atteint 18,5 m (valeur la plus élevée du monde, celle du mont Saint-Michel, créée aussi par la résonance de bassin, étant de 15 m).

Remarque : bien entendu en réalité, à la résonance, les amplitudes ne sont pas infinies car les effets d'amortissement et de frottement interviennent, un modèle plus fin consiste à assimiler le bassin à un système soumis à des oscillations forcées en présence d'amortissements. De plus les effets de la force de Coriolis se font sentir aux bords des côtes par les dénivelés qu'ils provoquent, mais ceci suppose que l'on ne puisse plus négliger les dimensions latérales du bassin.

### 3-4 - Méthode harmonique

Les arguments des fonctions trigonométriques qui interviennent dans l'expression du potentiel de marée dans la formulation de Laplace (15) ne sont pas reliés linéairement avec le temps, aussi la formule de Laplace n'est pas un développement harmonique en fonction du temps et ne fait pas apparaître dans les forces génératrices des termes rigoureusement périodiques. Pour palier à cet inconvénient et faire en sorte que les forces génératrices puissent se calculer comme des fonctions harmoniques du temps, dès 1867 Kelvin mit au point une décomposition de ces forces en séries harmoniques, c'est-à-dire périodiques dans le temps. Il remplaça dans le potentiel luni-solaire les grandeurs  $H$  (angle horaire),  $r$  (distance entre la Terre et l'astre) et  $\delta$  (déclinaison), qui ne sont pas proportionnelles au temps, par des fonctions de la seule variable temps  $t$  considérée comme le temps moyen. Dans cette décomposition certaines fonctions varient proportionnellement au temps (termes en  $q_k t$ ) mais d'autres ( $\alpha_k$ ) varient très lentement avec le temps sur une période annuelle. On obtient une décomposition en une centaine de termes dont 7 sont les plus importantes :

$$W = \sum_k G_k S_k \cos(q_k t - \alpha_k) \quad (30)$$

où :

$G_k$  est un coefficient géographique fonction seulement de la latitude du lieu

$S_k$  est un coefficient astronomique fonction de la position relative de l'astre (constante pour le soleil)

$q_k$  est liée à la vitesse angulaire de l'astre par rapport à la Terre

$\alpha_k$  est un terme lentement variable avec le temps à l'échelle de l'année.

A chacun des termes correspond une marée partielle de même fréquence ( $q_k$ ) dont l'amplitude et le déphasage sont obtenus par l'observation ; la superposition des marées partielles donne la marée réelle.

En 1883 sir G. H. Darwin perfectionna cette méthode et obtint la hauteur d'eau  $z$ , comme réponse de la surface océanique à la sollicitation par le potentiel (30), sous forme d'un développement quasi-harmonique :

$$z(t) = z_0 + \sum_k f_k A_k \cos(q_k t + V_{0k} + u_k - K_k) \quad (31)$$

où :

-  $z_0$  : niveau moyen autour duquel oscille le niveau de l'eau,

-  $A_k$  et  $K_k$  : constantes harmoniques relatives au port considéré, affectant respectivement l'amplitude et la phase

-  $f_k$  et  $u_k$  : éléments astronomiques (ou termes nodaux), relatifs à l'astre perturbateur, fonctions lentes du temps (leur période est voisine de 18 ans 2/3, c'est-à-dire le saros), supposées constantes à l'échelle de l'année. Ils sont introduits pour corriger l'incomplétude du développement harmonique limité à une période d'observations annuelles.

-  $V_{0k}$  : valeur de l'argument astronomique à l'instant initial  $t = 0$

-  $q_k$  : fréquence de la composante d'onde de marée.

Chacune de ces composantes indicées par  $k$  est elle-même composée d'ondes élémentaires de périodes voisines qui ne peuvent être isolées qu'au bout d'une longue durée d'observations (supérieure à un an). En tenant compte de cela Doodson (1921) obtint une expression de la hauteur de marée selon la « formule harmonique de la marée » :

$$z(t) = z_0 + \sum_i A_i \cos(V_i - G_i) + SD \quad (32)$$

où :

-  $SD$  : fonction aléatoire appelée surcote-décote incluant les variations d'origine météorologique

-  $A_i$  : amplitude de l'onde composante  $i$ , qui ne dépend que du port considéré

-  $G_i$  : situation de l'onde composante  $i$ . Elle représente le retard angulaire par rapport à la composante correspondante du potentiel exciteur (prise en compte du délai de réponse de la déformation par rapport à sa cause astronomique). Pour exprimer le retard en unité de temps il faut diviser  $G_i$  par  $dV_i/dt$ . Le retard angulaire  $G_i$  dépend seulement du port considéré.

-  $V_i$  : argument astronomique dans le développement harmonique du potentiel générateur de marée.

Les corrections nodales étant intégrées cette fois dans l'argument astronomique, seule  $V_i$  dépend du temps, sur une échelle de quelques siècles, par l'intermédiaire de six paramètres indépendants (exprimés en degrés d'angle) décrivant les mouvements relatifs de la Terre, de la

Lune et du Soleil, ainsi que la rotation terrestre :

- le temps lunaire moyen local :  $\tau$
- la longitude moyenne de la Lune :  $s$
- la longitude moyenne du Soleil :  $h$
- la longitude moyenne du périhélie lunaire :  $p$
- opposée de la longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune :  $N'$
- longitude moyenne du périhélie solaire :  $p_1$

L'argument astronomique  $V_i$  est relié à ces 6 paramètres par une combinaison linéaire à coefficients entiers  $n$  :

$$V_i = n_{1i} \tau + n_{2i} s + n_{3i} h + n_{4i} p + n_{5i} N' + n_{6i} p_1 + n_{7i} \frac{\pi}{2} \quad (33)$$

où les  $n_{1i}$ ,  $n_{2i}$ , etc sont des nombres entiers. Les paramètres varient avec le temps,  $T$ , exprimé en siècles juliens de 36525 jours de temps moyens, écoulés depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2000 à midi heure locale (donc une journée est la 1/36525 ième partie d'un siècle julien = 0,0000274), selon les relations :

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 15t + h - s \\ s &= 218,3165 + 481267,8804 T - 0,0016 T^2 \\ h &= 280,4661 + 36000,7698 T + 0,0003 T^2 \\ p &= 83,3535 + 4069,0215 T - 0,103 T^2 \\ N' &= 234,555 + 1934,1363 T + 0,0021 T^2 \\ p_1 &= 282,9384 + 1,7195 T + 0,0005 T^2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

où  $t$  est ici l'heure dans la journée exprimée en temps civil local.

## 4 - Effets de la marée sur le système Terre-Lune

### 4-1 - Allongement séculaire de la durée du jour terrestre et éloignement de la Lune

On a vu que l'accélération différentielle, la force génératrice de marée, allonge symétriquement le volume des océans en direction de l'astre perturbateur, en l'occurrence la Lune (dont l'effet est prédominant sur celui du soleil) : d'où l'ellipsoïde que forme la surface océanique. On a vu également que, par suite de la rotation de la Terre, les grands et petits axes de l'ellipsoïde passent deux fois par jour en un même point de la surface terrestre, ce qui explique que, en théorie, chaque jour il y ait deux marées (marées semi-diurnes). On a vu aussi enfin que, en réalité, pour ne considérer que le cas des marées semi-diurnes, un retard dû aux phénomènes d'inertie et de frottements s'installe entre la déformation de la surface océanique en un point et la force génératrice qui en est la cause. Par conséquent le renflement des océans n'est pas aligné avec l'axe Terre-Lune mais est légèrement en avance sur lui. D'où l'apparition d'un couple mécanique dû aux frottements sur le fond océanique, qui agit sur la rotation terrestre :

- en la retardant si la période de révolution de la Lune autour de la Terre est supérieure à 24h : ce qui est le cas puisqu'elle est de 24h50mn. Il en résulte un ralentissement de la rotation terrestre, au demeurant infime, qui entraîne un éloignement de la Lune que l'on se propose de calculer.
- en l'accélérant si la période de révolution de la Lune autour de la Terre était inférieure à 24h. La durée du jour diminuerait dans ce cas. Cette situation existe pour d'autres systèmes planète-satellite comme Phobos un des satellites de Mars.

Le ralentissement séculaire de la rotation terrestre observé est :  $\Delta\Omega = -10^{-14} \text{ s}^{-1}/\text{an}$ , soit 0,00164

seconde/siècle (Spencer Jones).

A partir de cette donnée on peut évaluer l'ordre de grandeur de l'éloignement de la Lune de la Terre. En effet, si l'on suppose que le système Terre-Lune est mécaniquement isolé (ce qui est faux en réalité à cause de l'influence du Soleil et dans une moindre mesure des autres planètes), la conservation du moment cinétique global fait que si celui de la Terre diminue (ralentissement), alors celui de la Lune augmente. Comme celui-ci est directement relié à la distance Terre-Lune, celle-ci augmente aussi (éloignement).

Soit donc  $r$  la distance Terre-Lune,  $M$  la masse de la Terre,  $m$  celle de la Lune,  $R$  le rayon de la Terre. Désignons par  $\sigma$  et  $\sigma'$  les moments cinétiques respectivement de la Terre et de la Lune. On pose comme hypothèse que le moment cinétique de la Terre est entièrement dû à la rotation de la Terre sur elle-même (vitesse angulaire de rotation terrestre :  $\Omega = 7,25 \cdot 10^{-5}$  rad/s), et que celui de la Lune est entièrement dû à la révolution de la Lune autour de la Terre (la rotation propre de la Lune est donc négligée). On suppose de plus que le plan de l'orbite lunaire est confondu avec celui de l'équateur terrestre (ce qui est évidemment faux puisqu'il est incliné de  $28^\circ$ ).

De la conservation du moment cinétique global :  $\sigma + \sigma' = \text{cste}$ , on déduit que la diminution de l'un entraîne l'augmentation de l'autre :  $d\sigma = -d\sigma'$ .

Or on a :

- moment cinétique dû à la rotation terrestre, approximativement égal à :  $\sigma = \frac{2}{5} M R^2 \Omega$

- moment cinétique dû à la révolution de la Lune autour de la Terre :  $\sigma' = \sqrt{GMm^2r}$  (on obtient cette relation en écrivant que la Lune est en équilibre sur son orbite, la force d'inertie centrifuge  $mv^2/r$  est égale à la force d'attraction de la Terre sur la Lune  $GMm/r^2$ , et que le moment cinétique de la Lune est  $\sigma' = mvr$ ,  $v$  étant la vitesse orbitale de la Lune).

Il vient donc :

$$d\sigma = -d\sigma' \rightarrow dr = -\frac{4}{5} \sqrt{\frac{Mr}{Gm^2}} R^2 d\Omega \quad (35)$$

On a donc un éloignement de la Lune en présence du ralentissement de la Terre, qui, avec les données suivantes  $r = 3,8 \cdot 10^8$  m,  $R = 6,4 \cdot 10^6$  m,  $m/M = 1/81$ ,  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg, a comme valeur approchée :

$$dr \approx 3 \text{ cm/an}$$

valeur assez proche des observations.

#### 4-2 - Limite de Roche

L'attraction de la Terre sur la Lune contribue à l'accélération différentielle exercée sur un point de la surface lunaire, de la même manière que pour la force de marée exercée par la lune ou le soleil sur la Terre. La Lune n'étant pas recouverte d'eau, l'ellipsoïde de déformation affecte directement sa surface solide et un allongement est provoqué de l'ordre de 1 km.

Comme la Lune tourne sur elle-même avec exactement la même période que celle de sa révolution autour de la Terre (c'est la rotation synchrone, responsable du fait que la Lune présente la même face à la Terre), l'axe du renflement est toujours dirigé vers le centre de la Terre.

L'allongement du renflement dépend de la distance Terre-Lune. Si celle-ci diminue, les contraintes mécaniques créées par une déformation plus importante ne seraient plus contrebalancées par celles dues à la gravitation du satellite sur lui-même, et le satellite se disloquerait. La distance où cela se produirait s'appelle la **limite de Roche** (1850).

On peut évaluer la limite de Roche comme suit :

Hypothèses :

- le satellite et la planète autour de laquelle il gravite sont de forme sphérique, leurs densités

sont homogènes

- le plan de l'orbite du satellite coïncide avec le plan équatorial de la planète, et l'axe de rotation du satellite lui est perpendiculaire
- le satellite a une rotation synchrone avec sa révolution
- les seules forces en présence sont les forces de marée de la planète exercée sur le satellite, la force d'attraction gravitationnelle par la planète sur le satellite, la force d'inertie centrifuge du satellite lors de sa révolution.

Dans ces conditions, posant  $M$  masse de la planète,  $m$  masse du satellite,  $r$  distance planète-satellite,  $R$  rayon de la planète,  $R'$  rayon du satellite,  $\rho$  densité de la planète,  $\rho'$  densité du satellite,  $\Omega'$  vitesse angulaire de rotation du satellite, on a :

- force de marée due à la planète sur le satellite exercée sur une particule située à la surface du satellite : on utilise (9) pour une distance zénithale nulle, et où les variables sont transposées correctement :

$$a = g' \frac{M}{m} \left( \frac{R'}{r} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} = \left( \frac{Gm}{R'^2} \right) \frac{M}{m} \left( \frac{R'}{r} \right)^3 \sqrt{4} = \frac{2GM R'}{r^3}$$

- force centrifuge d'une particule à la surface du satellite :  $R' \Omega'^2$

- force d'attraction gravitationnelle du satellite exercée sur la particule :  $\frac{Gm}{R'^2}$

La cohésion est assurée au niveau d'une particule à la surface du satellite tant que la somme de sa force de marée et de sa force centrifuge reste inférieure à la force d'attraction du satellite, soit :

$$\frac{2GM R'}{r^3} + R' \Omega'^2 < \frac{Gm}{R'^2}$$

D'après l'hypothèse de la rotation synchrone  $\Omega'$  est la même que celle de la révolution du satellite, ce qui d'après la troisième loi de Kepler donne :  $\Omega'^2 = \frac{GM}{r^3}$

d'où en remplaçant dans l'inégalité précédente, la limite de Roche :

$$r > r_R = \left( 3 \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} R'$$

et avec l'hypothèse de densités homogènes :

$$r > r_R = \left( 3 \frac{\rho}{\rho'} \right)^{\frac{1}{3}} R \quad (36)$$

En fait le calcul de la limite de Roche est bien plus compliqué : il tient compte des modèles sur la variation de la densité à l'intérieur des astres, du fait qu'ils n'ont pas une forme sphérique, de la géométrie des orbites, etc. Mais l'ordre de grandeur trouvé en (36) n'est pas mauvais en comparaison de la valeur exacte pour le système Terre-Lune :

$$r_R = 2,44 \left( \frac{\rho}{\rho'} \right)^{\frac{1}{3}} R$$

Pour le système Terre-Lune, le rayon de Roche est bien plus faible que la distance Terre-Lune : il est de l'ordre de 40000 km, soit dix fois plus proche que la Lune. Si la Lune se trouvait à cette

distance de la Terre elle se disloquerait et ses morceaux formeraient une ceinture de roches et de poussières tournant autour de la Terre.

D'autres systèmes de planète et satellites n'ont pas cette chance : le cas de Saturne et de son anneau en est une illustration. Les anneaux de Saturne proviennent des restes de dislocation de satellite ayant atteint la limite de Roche.



## Bibliographie

- Cours de navigation de l'Ecole Navale, Marine Nationale, 1988
- Site du SHOM : <http://www.shom.fr> on y trouvera des cours sur les marées, des logiciels et des données pour de nombreux ports du monde
- Fabien Lefevre : *Modélisation des marées océaniques à l'échelle globale*, thèse de doctorat Université Toulouse III Paul Sabatier, 22 septembre 2000 – On y trouvera une étude poussée et les modélisations récentes sur les marées
- Pour les principes des théories mathématiques plus poussées sur les effets des forces de marée sur la stabilité des satellites, et plus généralement l'équilibre des astres en rotation : *Astronomie*, sous la direction d'Evry Schatzman, encyclopédie La Pléiade, 1962

## Notes :

(<sup>1</sup>) - Une variation de la pression atmosphérique de 1 cm de mercure correspond à une variation de hauteur d'eau de 13,35 cm (puisque  $1013,37 \text{ mbar} = 1 \text{ atm} = 75,9 \text{ cm Hg} = 10 \text{ m d'eau}$ ). Si la pression atmosphérique diminue de 1 cm Hg (13,35 mbar), le niveau d'eau augmente de 13,35 cm, mais pas immédiatement à cause d'un effet d'inertie de l'eau : elle le fait avec un retard pouvant aller jusqu'à 6 heures.

(<sup>2</sup>) - L'effet du vent peut conduire à des variations exceptionnelles de 1,5 m. Une variation de 50 cm est assez courante.

(<sup>3</sup>) - Lors d'une syzygie d'équinoxe la lune, le soleil et la Terre sont alignés dans le même plan de l'équateur, la lune et le soleil étant à leurs distances moyennes de la Terre.

(<sup>4</sup>) - Ce qui signifie que l'amplitude du niveau d'eau entre la basse mer et la pleine mer (marnage) pour la plus forte marée de vives-eaux suivant juste la syzygie d'équinoxe (donc à l'âge de la marée, soit 36 heures) est de 6,42 m à Brest, ce qui est considérable.

(<sup>5</sup>) - Proctor, Richard Anthony, astronome britannique, né à Chelsea (23 mars 1837), mort à New York (12 septembre 1888).

(<sup>6</sup>) - La déclinaison  $\delta$  varie, pour le Soleil, de  $23^\circ$  à  $-23^\circ$  (plus exactement  $23^\circ 27'$ , qui représente l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de l'écliptique), et pour la Lune, de  $28^\circ$  à  $-28^\circ$  (le plan de révolution de la Lune autour de la Terre étant incliné de  $5^\circ$  sur le plan de l'écliptique, ce qui fait que le plan de l'équateur terrestre est incliné de  $23^\circ + 5^\circ = 28^\circ$  sur le plan de l'orbite lunaire (voir figure ci-après) :

