ACCUEIL
Frédéric Elie on ResearchGate

Masse de la Lune

Frédéric Élie

7 mars 2004

Copyright France.com
La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : On sait que la masse de la Lune représente 1/81 masse terrestre, mais comment l'a-t-on su? Pour cela, on a employé une méthode utilisant les conséquences des lois de mouvements du centre d'inertie d'un système. Le recours aux parallaxes du soleil et de la Lune a aussi été introduit.

SOMMAIRE

1 - De l'inégalité en longitude à la masse de la Lune... (théorie de Harold Spencer Jones)
2 - Autres déterminations de la masse lunaire
Annexe 1: notion de parallaxe
A1-1 - Parallaxe lunaire par rapport à la Terre
A1-2 - Parallaxe de la Terre par rapport au soleil
A1-3 - Principe de mesure de la parallaxe du soleil
Annexe 2: deux mots sur la précession luni-solaire
Bibliographie

1 - De l'inégalité en longitude à la masse de la Lune... (théorie de Harold Spencer Jones)

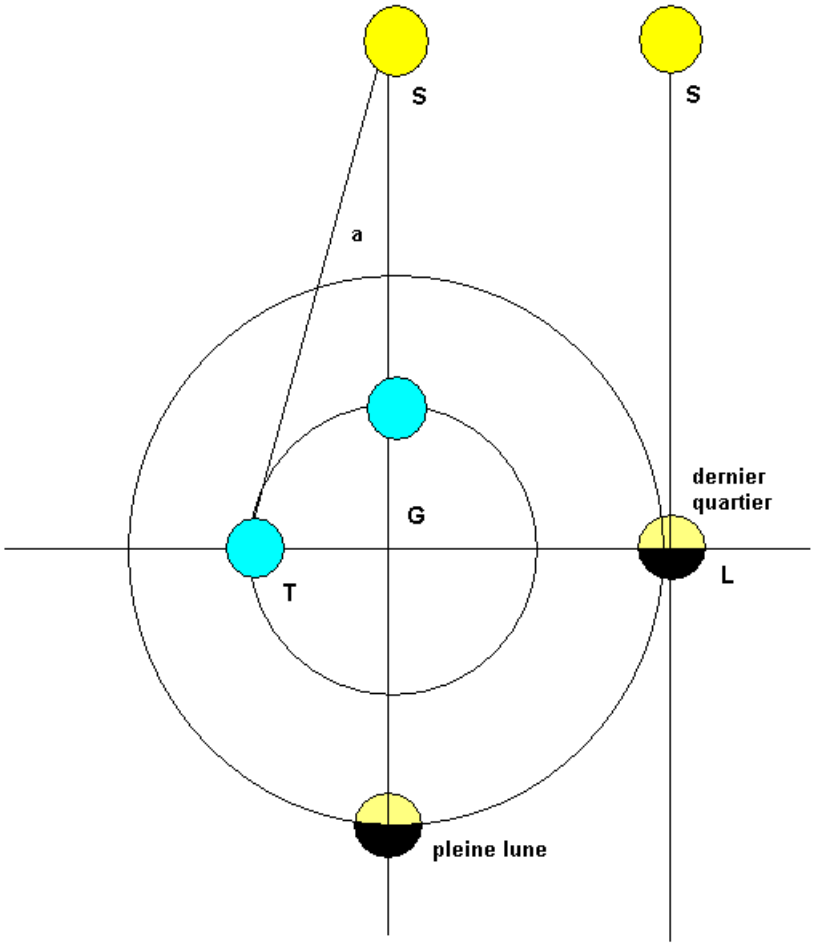
D'abord pensez-vous que la Lune tourne autour de la Terre? Oui, me répondraient beaucoup. Eh bien, en réalité, la réponse est non, et si vous croyez que c'est moi qui ne tourne pas rond, examinez ce qui suit...
Le système Terre-Lune forme un ensemble de masses suffisamment isolées du Soleil, et a fortiori de toute source de gravitation, pour être considéré mécaniquement isolé en première approximation. Par conséquent (théorème de la mécanique) on peut considérer que le système a un centre d'inertie G par rapport auquel le mouvement de chaque partie du système (Terre et Lune) peut se ramener. Désignant par M et m respectivement la masse de la Terre (ramenée à son propre centre d'inertie T) et de la Lune (ramenée à son propre centre d'inertie L), l'hypothèse précédente se traduit par l'égalité vectorielle suivante qui définit la position du centre G:

$$m\,\boldsymbol{GL} + M\,\boldsymbol{GT} = 0$$

où ***GL*** et ***GT*** sont les rayons vecteurs joignant le centre d'inertie G respectivement aux centres d'inertie de la Lune L et de la Terre T (voir figure). En conséquence, dans le système Terre-Lune ramené au centre d'inertie commun G, la Terre et la Lune tournent autour de celui-ci: ce n'est pas le centre d'inertie de la Lune qui tourne autour du centre d'inertie de la Terre! Si les

apparences semblent affirmer le contraire, c'est parce que, comme le calcul va le montrer, le centre commun G est situé à l'intérieur de la Terre (mais pas en son centre géométrique) par suite de la faiblesse de la masse lunaire en comparaison de celle de la Terre. Comme, d'une part, les positions observées du soleil sont ramenées au centre géométrique de la Terre, et que, d'autre part, les positions théoriques du soleil sont calculées par rapport au centre d'inertie G du système Terre-Lune, des écarts existent entre les deux types de données: en particulier, l'écart sur la position en longitude du soleil, pour une même phase de la lune (disons le dernier quartier) a été ainsi déterminé et donne 6,43". Cet écart est directement relié au fait que le centre géométrique T de la Terre décrit en un mois un cercle autour du centre d'inertie G d'un rayon égal environ à 4656 km.

D'après le théorème du mouvement de centre de masse d'un système mécaniquement isolé soumis à des forces extérieures, c'est le centre G, et non T ou L, qui sous l'action de la force de gravitation du soleil accomplit une trajectoire elliptique (quasi-circulaire) autour de celui-ci. Pendant la durée de révolution de la Lune autour de G (mois lunaire), étant donnée la distance élevée du système Terre-Lune au Soleil, on peut supposer que l'éclairement par le Soleil de la Lune garde une direction fixe (ce qui est la cause des phases lunaires: pleine lune, premier quartier, première gibbosité, pleine lune, deuxième gibbosité, dernier quartier, nouvelle lune...). Il s'ensuit alors qu'un observateur fixe sur la Terre sera en avance ou en retard par rapport aux phases lunaires correspondant à l'angle que fait le rayon Terre-Lune TL avec les rayons du Soleil (voir figure): cet écart, décelable par des observations astronomiques, s'appelle inégalité en longitude du Soleil (angle a), parce que lors des quartiers lunaires la position apparente du soleil dans le ciel vue de l'observateur présente un écart "a" avec celle qu'il aurait si la terre tournait autour de son propre centre T. Il est nul lors de la pleine Lune, et maximal aux quadratures, c'est-à-dire lorsque le rayon TL fait un angle droit avec la direction des rayons du Soleil (premier et dernier quartier de la Lune). L'observation a donné a = 6,43" pour sa valeur maximale.



La relation ci-dessus donnant G permet d'exprimer le rapport des masses en fonction de cette anomalie en longitude "a" et de la distance Terre-Lune:

$$GT / TL = m/(m + M)$$

ou en faisant apparaître le rapport des masses:

$$M/m = TL / GT – 1$$

Soit R le rayon de la Terre, on sait par ailleurs que (voir annexe):

- TL = 60,27 R
- le rayon terrestre R est vu depuis le soleil sous un angle p appelé parallaxe du soleil (diamètre angulaire apparent de la terre vu depuis le centre du soleil): p = R / ST, les observations ont donné p = 8,79"

d'autre part, sur la figure, la distance entre le centre de la Terre T et le centre d'inertie Terre-Lune G est en première approximation directement reliée à l'anomalie en longitude:

$$GT = ST \tan a \approx ST\ a = Ra/p$$

on a donc en définitive:

$$M / m = 60,27\ p / a – 1$$

Avec les valeurs numériques ci-dessus on trouve : M/m = 81,4 ; comme la masse terrestre est $M = 6.10^{24}$ kg on a comme masse lunaire $m = 7,3.10^{22}$ kg. Comme GT = (6,43/8,79)R = 0,73 R on voit que le centre Terre-Lune est situé à l'intérieur de la Terre, à 0,73 rayon terrestre (soit 4656 km) du centre de la Terre, ce qui n'est pas négligeable.

2 - Autres déterminations de la masse lunaire

L'astronome américain Gerald Maurice Clemence a démontré que la masse de la Lune peut être déduite des valeurs liées aux phénomènes de précession et de nutation luni-solaires (voir ces phénomènes en annexe): il obtient 1/81,79 comme rapport masse Lune / masse Terre. La différence entre cette valeur et celle obtenue par Jones est due à l'influence de la structure interne de la Terre qui n'est pas prise en compte (les effets quantitatifs de cette influence font appel à des modèles assez compliqués faisant intervenir la déformation des corps d'élasticité finie lors de leur rotation sur eux-mêmes: théories de MacLaurin, de Jacobi, de Poincaré, de Laplace, de Clairaut, de Hamy, de Radau, de Lyapunov, de Callandreau, de Wavre, etc...!
Bien entendu, depuis ces théories, la masse de la Lune a été déterminée de manière plus directe grâce aux missions spatiales et aux sondes. Mais ceci n'enlève rien à cette faculté de l'esprit de la méthode expérimentale qui permet de déterminer les choses lointaines à partir des observations locales!...

Annexe 1: notion de parallaxe

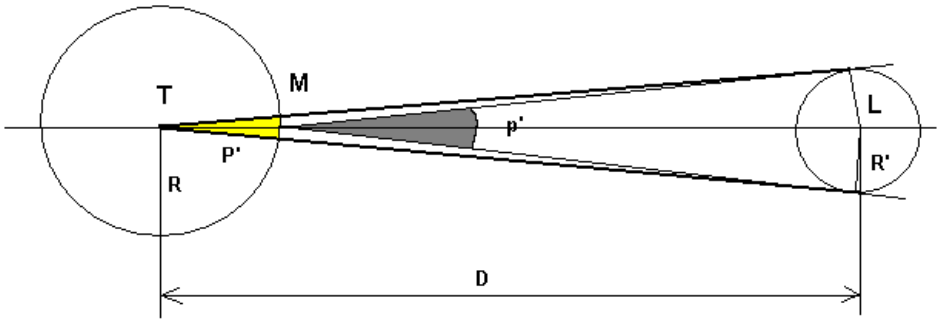
La parallaxe, ou diamètre apparent, p' est l'angle sous lequel un point M situé à la surface d'un corps sphérique A (planète, satellite, ou soleil) voit le diamètre D' d'un autre corps sphérique A'. Si l'on connaît la distance D = AA' entre les centres géométriques des deux corps, il est alors possible de déduire le diamètre réel 2R' du corps A' (où R' est son rayon). J'indique ci-après le principe d'une telle exploitation pour, d'une part, la parallaxe lunaire par rapport à la Terre, et d'autre part, la parallaxe terrestre par rapport au soleil.

A1-1 - Parallaxe lunaire par rapport à la Terre

Si le point d'observation M est situé exactement sur l'axe joignant le centre de la Terre T et celui de la Lune L, la parallaxe p' de la Lune est dite parallaxe équatoriale horizontale. Le rayon de la

Terre étant R, et la parallaxe étant très petite, un calcul simple donne le diamètre de la Lune (voir figure):

$$2R' \approx p'(D - R)$$

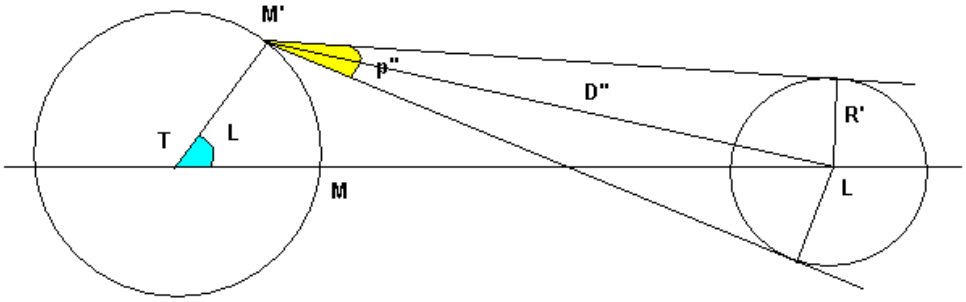


Si la parallaxe est ramenée au centre géométrique T de la Terre, elle est dite géocentrique P' et est reliée à la précédente par:

$$2R' = P'D = p'(D - R), \text{ ou encore: } P' = p'(1 - R/D)$$

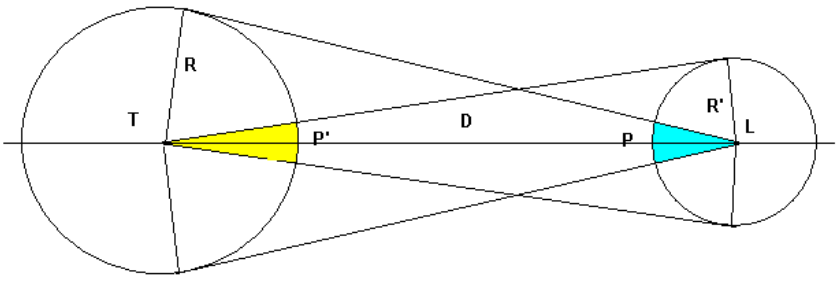
Remarques: 1°) Si le point d'observation est en M', faisant un angle M'TL = L avec l'axe Terre-Lune, la parallaxe mesurée est p". La relation dans le triangle M'TL donne alors immédiatement le lien entre p" et le diamètre 2R' de la Lune (voir figure):

$$2R' \approx p''D'' \text{ avec } D'' = ((D - R)^2 + R^2 - 2R(D - R)\cos L)^{1/2}$$



2°) On constate (figure suivante) que la connaissance de la parallaxe lunaire géocentrique P' permet de déduire celle de la parallaxe terrestre P, c'est-à-dire le diamètre apparent de la Terre vu depuis le centre L de la Lune:

$$2R' = P'D \text{ et } 2R = PD \text{ donnent: } P = P' R/R'$$



La distance moyenne Terre-Lune D est calculée en égalisant la force de gravitation exercée sur la Lune et la force centrifuge de celle-ci au cours de sa révolution autour de la Terre de période T:

$$m(2\pi/T)^2 D = GMm/D^2$$

(M: masse de la Terre = $6\ 10^{24}$ kg, m: masse de la Lune, sans importance ici, T: mois lunaire moyen ou mois synodique c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux phases identiques de la Lune = 29,53 jours, G = $6{,}67\ 10^{-11}$ unités SI)

ce qui donne: D ≈ 403000 km. En réalité, cette valeur surévalue la distance moyenne vraie qui vaut 384000 km (soit 60,27 fois le rayon terrestre moyen), obtenue par triangulation entre deux observatoires éloignés (Berlin et Le Cap) puis confirmée par réflexion radar. En fait les paramètres liés aux mouvements de la Lune sont assez complexes et ne seront pas discutés ici...

A1-2 - Parallaxe de la Terre par rapport au soleil

La parallaxe de la Terre par rapport au soleil (encore appelée parallaxe du soleil) obéit aux mêmes définitions que ci-dessus pourvu de remplacer la Lune par le Soleil. Elle joue un rôle important en astronomie puisqu'elle sert d'unité astronomique (UA) pour mesurer les distances interstellaires. Par définition, 1 UA est la longueur telle que le rayon moyen terrestre (R = 6378,388 km) serait vu du soleil sous un angle égal à la parallaxe du soleil p_0, donc l'unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil.
Plusieurs méthodes ont été utilisées pour déterminer la parallaxe du soleil. Signalons pour mémoire:

- les mesures par triangulation à partir de points éloignés sur la surface terrestre (peu précises en l'occurrence dans le cas du soleil)
- les tentatives de Arthur R. Hinks (1901) puis A. S. Jones (1930) s'appuyant sur le passage de l'astéroïde Eros devant le soleil, qui ont donné peu de satisfaction
- la méthode des inégalités parallactiques de Dirk Brouwer (1950): elle exploite le fait que la Lune, par suite des perturbations du soleil, subit des inégalités périodiques dans ses mouvements dont certaines ont pour période le mois synodique. Comme l'amplitude de ces perturbations varie comme le rapport (distance Terre-Soleil / distance Terre-Lune) on peut exprimer la parallaxe du soleil en fonction de la parallaxe de la Lune (c'est-à-dire le diamètre angulaire de la Terre vu du centre de la Lune, soit P comme indiqué plus haut).
- la méthode des perturbations planétaires (Eugen Karl Rabe, 1950): elle exploite le fait que l'astéroïde Eros a été perturbé par la masse de l'ensemble du système Terre-Lune, elle-même directement liée, comme on l'a vu dans l'article, à la parallaxe du soleil.
- d'autres méthodes modernes et plus directes, associées aux observations lors des missions et des sondes spatiales...

La valeur standard adoptée est p_0 = 8,79835" ce qui correspond à 1 UA = 149 532 000 km.

A1-3 - Principe de mesure de la parallaxe du soleil

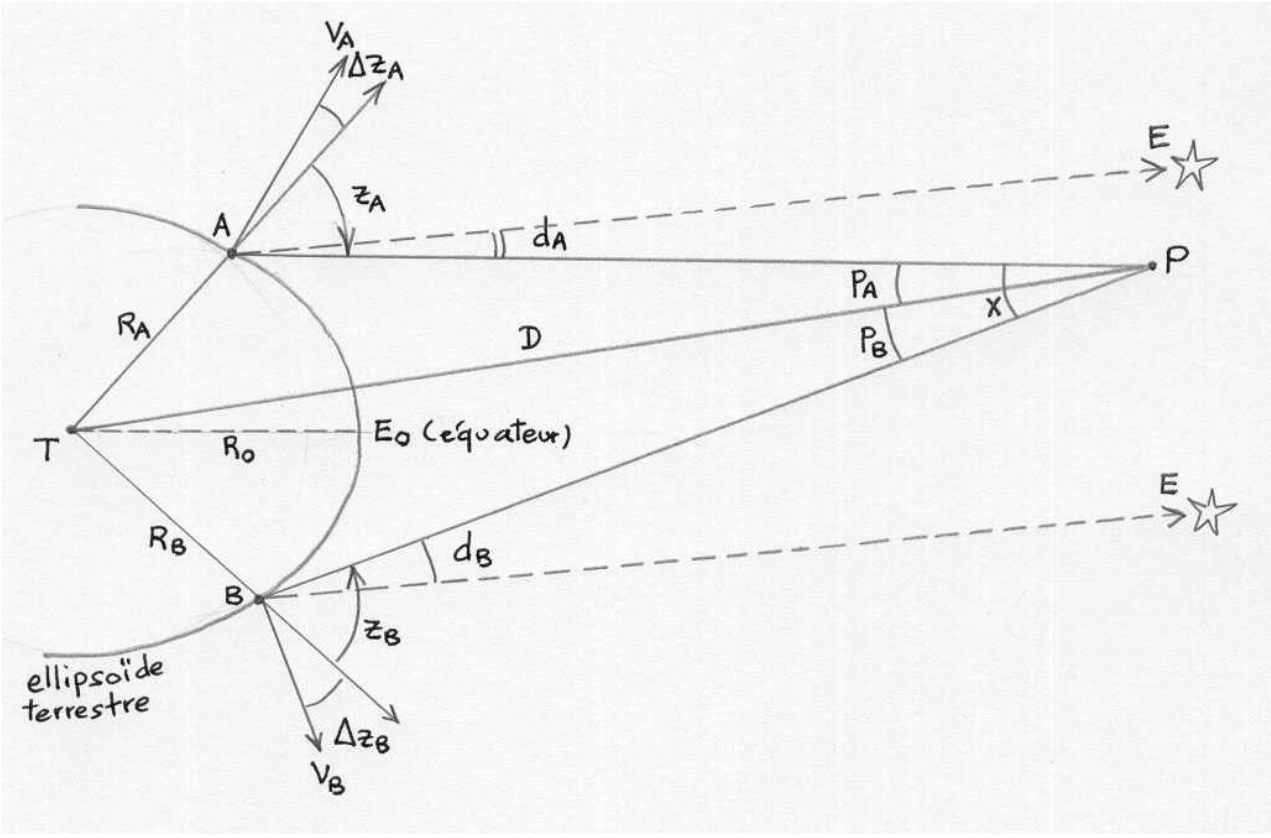
Ce principe nécessite en fait des notions de géodésie: celle-ci considère que la surface de la Terre peut être caractérisée de trois manières différentes:

- La surface topographique, c'est-à-dire la surface définie par la zone de contact avec l'atmosphère, donc présentant toutes les irrégularités liées aux terrains et aux reliefs: son étude s'appelle la topographie;

- La surface dite de référence, ou ellipsoïde de référence: c'est la figure d'équilibre de la Terre considérée comme un corps élastique en rotation; sa détermination dimensionnelle fait l'objet de plusieurs modèles dynamiques assez compliqués. C'est cette forme qui est prise en compte pour prévoir les forces de marées, les perturbations luni-solaires (précession et nutation, etc...), les perturbations du système Terre-Lune, la dynamique des satellites artificiels, les trajectoires balistiques, le positionnement par satellites (GPS...), l'observation et le repérage dans le ciel de tout objet céleste, etc... Sa connaissance est donc fondamentale et fait l'objet de l'un des grands chapitres de la science géodésique. Selon elle, la Terre n'est pas sphérique mais est un ellipsoïde de révolution présentant un aplatissement aux pôles et un renflement à l'équateur. Les valeurs du demi-grand axe (demi-diamètre de l'équateur, noté a) et du demi-petit axe (distance entre le centre de la Terre et l'un des pôles, noté b) de cet ellipsoïde sont des données qui se précisent au cours des années, aussi j'indique ici l'une des valeurs possibles adoptée en 1979 lors du congrès de l'Union Internationale de Géodésie et de Géophysique: a = 6 378 137 m, b = 6 356 734 m, définissant un aplatissement α = (a - b)/a = 1/298, soit une différence de 21 km entre les demi-axes équatorial et polaire.
- Les surfaces de niveau. Par définition, une surface de niveau est perpendiculaire en chacun de ses points à la direction de la pesanteur locale, matérialisée par le fil à plomb. A priori celle-ci n'a aucune raison de passer par le centre géométrique de la Terre car à la force de gravitation qui en est largement responsable s'ajoutent les effets liés à la rotation de la Terre (forces d'inertie...) et ceux dus aux irrégularités de la densité de la Terre. Par conséquent ces surfaces de niveau ne sont pas sphériques et ne présentent pas de symétries. Tout point d'une même surface de niveau passant par un point donné M est soumis à la même intensité de pesanteur que lui. La surface de niveau qui passe par un point particulier admis comme référence (ou cote zéro) noté Z_0 s'appelle le géoïde. Comme le niveau moyen des océans est nécessairement une surface équipotentielle, le géoïde contient cette surface et est une prolongation de celle-ci à l'intérieur des continents, déterminée en principe par les lignes de champ de pesanteur en ceux-ci (définition de Listing, géophysicien allemand). Le point d'origine doit donc être situé sur le niveau moyen des océans. En France, le point d'origine Z_0 adopté est situé au Marégraphe de Marseille et est comparé avec le niveau moyen de la Méditerranée.

Ces notions étant posées, et elles suffisent ici, le problème du positionnement des astres sur la sphère céleste est lié à la différence qui existe, en un point d'observation, entre la verticale géographique (normale à l'ellipsoïde de référence par rapport auquel on ramène toute mesure) et la verticale physique (normale au géoïde, par rapport auquel on relève les distances zénithales des astres par comparaison avec la pesanteur du lieu ou fil à plomb). Dans le cas de la détermination de la parallaxe du soleil, il s'agit de passer d'une représentation obtenue par rapport à l'ellipsoïde de référence à une représentation par rapport au système solaire, sachant qu'au départ la verticalité par rapport à laquelle se font les observations est une donnée liée au géoïde!
Pour cela (voir figure), soit P l'astre (le soleil en l'occurrence ici) dont on veut déterminer la parallaxe p, c'est-à-dire l'angle sous lequel est vu le demi-grand axe équatorial R_0 depuis le centre P, situé à une distance D = TP du centre T de l'ellipsoïde terrestre:

$$p = R_0 / D$$



Dans le problème p est l'inconnue mais on ne veut pas faire intervenir D (puisqu'il doit être déduit de la parallaxe!). On effectue alors les observations de P à partir de deux points A et B supposés situés sur le même méridien de l'ellipsoïde, lors du passage de P à ce méridien (midi pour le soleil). En exploitant les relations dans chacun des triangles TAP et TBP, on obtiendrait les angles parallactiques p_A et p_B par:

$$\sin p_A / R_A \approx p_A / R_A = \sin (PTA)/D \text{ et } \sin p_B / R_B \approx p_B / R_B = \sin (PTB)/D$$

donc:

$$p_A/(R_A \sin (PTA)) = p_B/(R_B \sin (PTB)) \text{ avec } p_A + p_B = p \text{ si l'on choisit A et B tels que } AB = R_0$$

il suffirait donc de mesurer les distances zénithales de P en A et B, $Z_A = 180° - TAP$ et $Z_B = 180° - TBP$ pour obtenir p. Malheureusement, comme on l'a vu, ces mesures sont ramenées à la verticale du lieu V_A et non à la normale TA à l'ellipsoïde (idem en B) introduisant alors une erreur ΔZ_A par définition inconnue. Pour s'affranchir de cette difficulté on utilise une étoile intermédiaire E, d'écart angulaire faible avec P, mesuré en A et B pour donner d_A et d_B. Comme E est très éloignée, ses rayons qui atteignent A sont parallèles à ceux qui atteignent B, par conséquent:

$$d_A + d_B = p_A + p_B$$

Les relations plus haut donnent par ailleurs:

$$p_A = R_A \sin Z_A / D = (R_A/R_0)p \sin Z_A \text{ et } p_B = (R_B/R_0)p \sin Z_B$$

on a donc:

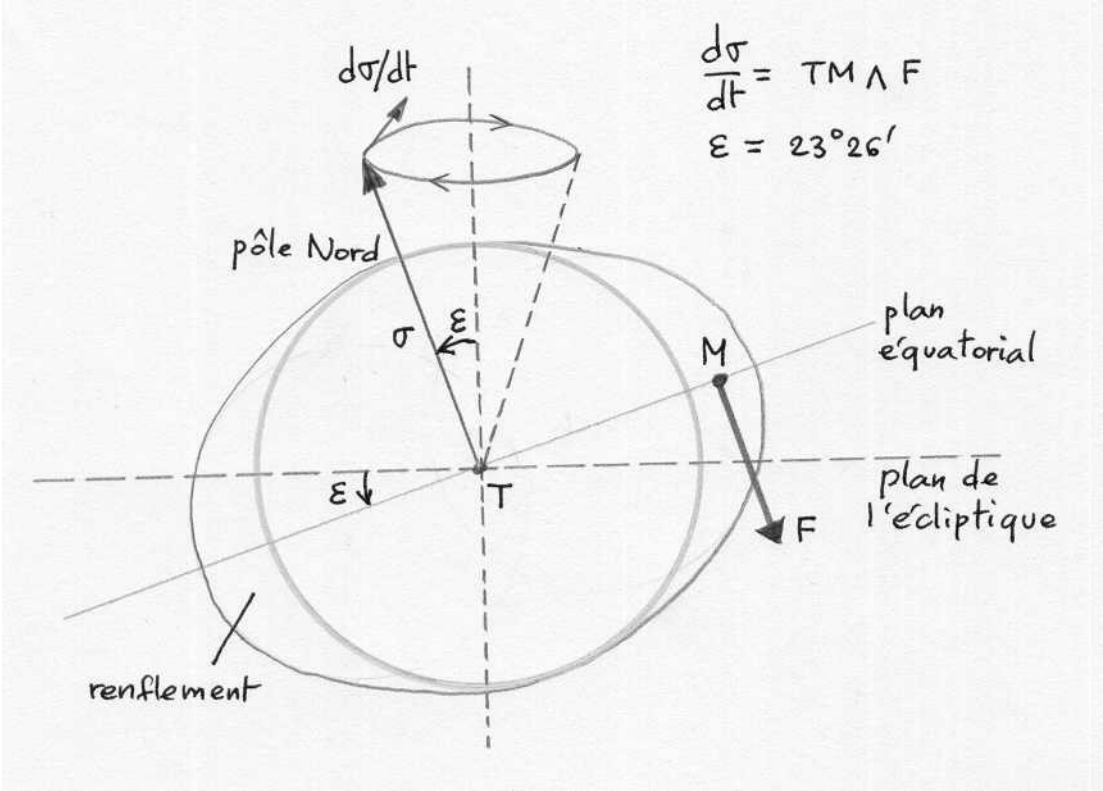
$$d_A + d_B = p ((R_A/R_0)\sin Z_A + (R_B/R_0)\sin Z_B)$$

ce qui fournit p. Par rapport à la méthode précédente, celle-ci, bien que faisant encore intervenir les distances zénithales, est moins sensible aux erreurs dues à la déviation des verticales parce

qu'elle fait intervenir une somme de leurs sinus. Elle présente aussi l'avantage que les points d'observation peuvent être séparés d'une distance quelconque pourvu qu'ils soient suffisamment éloignés.

Annexe 2: deux mots sur la précession luni-solaire

On sait que, du fait de sa rotation sur elle-même et de sa constitution interne dotée d'une élasticité finie, la Terre prend, comme figure d'équilibre, la forme d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe joint les deux pôles et est porté par l'axe de rotation. Le grand axe est tout diamètre de l'équateur. La Terre présente donc un renflement au niveau des régions équatoriales et un aplatissement aux pôles. La forme de la Terre fait l'objet d'études compliquées dont une des applications est la géodésie (ou la topographie) et les mouvements des satellites artificiels...
D'autre part, on sait aussi que l'axe des pôles est incliné d'un angle ε = 23°26' sur le plan de révolution de la Terre autour du Soleil (appelé plan de l'écliptique), et que ceci est la cause des saisons.
Or la Lune et le Soleil exercent chacun un couple de force sur le bourrelet équatorial qui tend à faire coïncider le plan équatorial avec le plan de l'écliptique (autrement dit à diminuer ε), et ceci de manière différentielle (voir figure).



Soit F la force perturbatrice sur le bourrelet équatorial, son moment M par rapport au centre de la Terre T est relié au moment cinétique de rotation de la Terre σ par le théorème du moment cinétique:

$$M = d\sigma /dt = TM \wedge F$$

ce moment a pour effet de faire décrire à l'axe de rotation de la Terre un cône de demi-angle au sommet égal à ε : c'est le phénomène de précession (comme pour les toupies ou les gyroscopes). La période de précession est de 25700 ans. L'origine des coordonnées sphériques d'un astre sur la sphère céleste est choisi égal au point vernal γ : c'est le point où le soleil marque l'équinoxe du printemps, ou ce qui revient au même, le point d'intersection entre l'écliptique et l'équateur céleste. Du fait de la précession, le point vernal rétrograde très lentement le long de l'écliptique (c'est pourquoi on appelle aussi ce phénomène la précession

de l'équinoxe, constatée déjà par le savant grec Hipparque au IIème siècle avant JC). De la période de la précession il découle que la rétrogradation du point vernal est de:

$$\Delta \psi = 360° / 25700 \text{ ans} = 50,4" \text{ par an}$$

Les calculs et les observations montrent que les coordonnées angulaires équatoriales des astres sur la sphère céleste varient suite à la précession de l'équinoxe d'origine luni-solaire mais aussi suite aux variations de l'inclinaison ε dues aux perturbations par les autres planètes, Jupiter notamment (théorie de Newcomb et améliorations). Ces coordonnées sont l'ascension droite α , comptée le long de l'équateur céleste à partir de γ , et la déclinaison δ , comptée à partir de l'équateur céleste. Les corrections sont données par les formules suivantes, pour une variation du temps Δ t en années n'excédant pas cinq ans, et dont les valeurs initiales sont prises en 1900:

$$\Delta \alpha = (m + n \sin \alpha \text{ tg } \delta) \Delta t$$

$$\Delta \delta = n \cos \alpha \Delta t$$

avec m = 46,08506" et n = 20,04685" par an (ce qui donne bien environ $\Delta \alpha = 360°$ en 25700 ans).
Au phénomène de précession se superpose celui de nutation, de période beaucoup plus courte (18,60 ans) due au fait que l'orbite de la Lune n'est pas contenue dans le plan de l'écliptique et que le grand axe de cette orbite fait un tour complet sur lui-même en 18,6 ans. Du fait de cette variation, l'axe des pôles de la Terre décrit en 18,6 ans un cône de section elliptique de faible amplitude, dont les petit et grand axes valent respectivement b = 6,84" et a = 9,20". Ce phénomène de nutation a été découvert par James Bradley en 1747. Le mouvement de l'axe des pôles selon la nutation, considérée seule, a pour effet d'entraîner des évolutions sur l'ascension droite et la déclinaison de tout astre, de la forme:

$$\Delta \alpha ' = \Delta \psi '(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \text{ tg } \delta) - \Delta \varepsilon \cos \alpha \text{ tg } \delta$$

$$\Delta \delta ' = \Delta \psi ' \sin \varepsilon \cos \alpha + \Delta \varepsilon ' \sin \alpha$$

où les variations en longitude du point vernal et de l'inclinaison de l'axe des pôles terrestre sur l'écliptique sont respectivement:

$$\Delta \psi ' = - 17,234" \sin \theta - 1,272" \sin 2S - 0,204" \sin 2L + ...$$

$$\Delta \varepsilon ' = 9,210" \cos \theta - 0,551 \cos 2S + 0,089" \cos 2L + ...$$

dans lesquelles θ est la longitude du nœud de la Lune (intersection entre l'orbite lunaire et le plan de l'écliptique), S la longitude du soleil et L celle de la Lune, en un instant donné. Les corrections dues à la seule précession et à la seule nutation doivent alors s'ajouter pour un même astre à la même date.

Bibliographie

- A. Danjon: *Astronomie générale*, Paris, 1959
- Astronomie populaire, Paris, 1955
- sous la direction d'Evry Schatzman: *Astronomie*, La Pléiade, 1962
- Gianni Pascoli: *Éléments de mécanique céleste*, Masson, Paris 1997