ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Métronome

Frédéric Élie

décembre 2005, juillet 2021

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Dans cet article, présentation du modèle mathématique du fonctionnement du métronome mécanique (métronome à balancier) et expérience sur le pendule composé équivalent. C'est une occasion pour manipuler un peu de dynamique du solide et les notions d'oscillations...

SOMMAIRE

1 - Constitution d'un métronome mécanique à balancier
2 - Dynamique du pendule composé du métronome
3 - Comment empêcher l'amortissement du pendule ?
3-1 - En ajoutant une force de rappel au pendule à l'aide d'un ressort ?
3-2 – En imprimant au pendule une impulsion à chaque oscillation (oscillations forcées)
4 - Métronome électronique
Annexe : pendule amorti entretenu par une impulsion périodique
Bibliographie et notes

1 - Constitution d'un métronome mécanique à balancier

Le métronome fournit aux musiciens un cadencement régulier afin de leur permettre :
- d'utiliser une vitesse constante dans l'exécution d'un morceau de musique
- d'avoir une référence pour le rythme

Le premier métronome fut inventé par Etienne Loulié en 1696, il avait une hauteur de 2 mètres et n'était donc pas portatif ! L'invention du métronome moderne est attribuée à Ditrich Nikolaus Winkel en 1812 (Amsterdam), mais son perfectionnement a été réalisé par Johann Nepomuk Mälzel (1816) qui a breveté le métronome portable à balancier.

Un métronome à balancier peut fournir des battements allant de 40 à 208. Un battement est la demi-période du pendule, c'est-à-dire le demi aller-retour du balancier. Par exemple, un rythme de 120 signifie 120 battements par minute, soit 2 par seconde, ce qui équivaut à une période du pendule égale à T = 2/(2 battements/sec) = 1 seconde.

Les musiciens ont l'habitude d'indiquer en début de partition la durée d'une noire par un nombre représentant quelle partie de minute représente la noire : par exemple ♩ = 120 signifie que la noire est la 120 ième partie d'une minute soit ½ seconde, donc si la noire est encadrée par

deux battements consécutifs du métronome, celui-ci est réglé sur 120 battements à la minute (allegro).
Les rythmes des battements correspondent aux mouvements musicaux exprimés comme suit :

mouvement	Battements par minute	Période du pendule (secondes)
Prestissimo	200 – 208	0,6 – 0,57
Presto	168 – 200	0,71 – 0,6
Allegro	120 – 168	1 – 0,71
Moderato	108 – 120	1,11 – 1
Andante	76 – 108	1,58 – 1,11
Adagio	66 – 76	1,82 – 1,58
Larghetto	60 – 66	2 – 1,82
Largo	40 – 60	3 – 1,82

Tableau 1 : mouvements et battements du métronome

Le premier musicien à avoir indiqué ces marques sur ses partitions est Ludwig von Beethoven en 1817.

Le métronome à balancier est constitué :
- d'une tige verticale pivotant autour d'un point O relié à un support fixe,
- d'un curseur C pouvant coulisser sur la tige
- d'un disque B (ou balancier) relativement massif, fixé au bas de la tige
- d'un mécanisme à ressort spiral entraînant la rotation du pivot par l'intermédiaire de roues dentées, à la manière des ressorts à barillet qui, en se détendant progressivement, apportaient l'énergie mécanique au pendule oscillant des horloges. Le ressort peut être remonté à l'aide d'une clé située sur le côté.
- D'une face avant graduée indiquant les battements obtenus selon la position du curseur

Les photos ci-dessous représentent ces divers éléments (métronome de marque Taktell).

photo 1 – face avant

photo 2 – entraînement de l'axe

photo 3 – mécanisme à ressort

On se propose d'examiner :

- comment la position du curseur détermine la période du pendule ?
- quel est le rôle et l'influence du ressort sur le mouvement du pendule ?

Dans un premier temps, essayons de modéliser le mouvement du pendule sans le ressort ni le mécanisme d'entraînement. On se souvient que pour un pendule quelconque oscillant avec de faibles amplitudes, la période est toujours donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu g l}}$$

où J est le moment d'inertie du pendule, μ sa masse totale et *l* la distance entre son centre d'inertie et l'axe de rotation (voir référence A) : nous démontrerons cette relation pour le métronome plus loin... La modification de la période suite au déplacement du curseur est, par conséquent, dû à une modification de la position du centre d'inertie et à une modification du moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation. Comme le rapprochement du curseur à l'axe de rotation entraîne une diminution de la période (battements plus rapides), on déduit que J/l est une fonction décroissante de la distance OC entre le curseur C et l'axe O.

Pour vérifier cela j'ai donc monté le dispositif artisanal (photo 4) : l'ensemble tige + curseur +

disque peut tourner autour de l'axe O par son axe inséré dans un guide. On se rend vite compte de la difficulté suivante : l'ensemble n'est pas bien équilibré et les oscillations cessent très rapidement (je n'ai pas pu dépasser 10 oscillations) à cause d'une liaison imparfaite (frottement) et du déséquilibrage.

photo 4 – montage bricolé pour évaluer la période du pendule composé du métronome sans le ressort

J'ai quand même pu obtenir quelques valeurs de T en comptant la durée nécessaire t pour avoir 10 battements chaque fois que je modifiais la position du curseur, dans l'hypothèse où la modification de la période des oscillations dû à l'amortissement est contenu dans les imprécisions de mesure (en fait, on verra plus loin que l'amortissement modifie la période). La période est alors : T = 2t/10. Les résultats ont été comparés avec ceux que j'ai obtenus par la modélisation du dispositif (voir ci-après).

2 - Dynamique du pendule composé du métronome

Pour établir l'équation du mouvement du pendule nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide dans un référentiel d'inertie (*R*), par exemple celui rattaché au support fixe. Ce principe énonce : dans un référentiel galiléen le torseur dynamique du solide (S) dans le mouvement ramené à ce repère (*R*), noté $D_{(R)}(S)$ est égal au torseur des efforts extérieurs appliqués au solide, noté *A*(S). En un point P quelconque du solide (S), le torseur dynamique est représenté par :

$$\left\{D_{(R)}(S)\right\}_P=\begin{Bmatrix}\iiint_{(S)}\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(M)\,dm \\ \iiint_{(S)}\boldsymbol{PM}\wedge\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(M)\,dm\end{Bmatrix}=\left\{A_{(R)}(S)\right\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ext}}(S) \\ \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{ext,P}}(S)\end{Bmatrix}$$

où $\mathbf{R}_{ext}(S)$ est la résultante des forces extérieures exercées sur (S), $\mathbf{M}_{ext,P}(S)$ leurs moments par rapport à P, $\mathbf{a}_{(R)}(M)$ l'accélération au point M. Si l'on choisit P = G (centre d'inertie du solide) la quantité d'accélération $\iiint_{(S)}\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(M)\,dm$ est égale à $m(S)\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(G)$ où m(S) est la masse totale du solide. Par ailleurs, le moment dynamique $\iiint_{(S)}\boldsymbol{PM}\wedge\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(M)\,dm$ est égal à la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_{(\boldsymbol{R})}(P,\boldsymbol{Oz})$:

$$\iiint_{(S)}\boldsymbol{PM}\wedge\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(M)\,dm=\frac{d\,\boldsymbol{\sigma}_{(\boldsymbol{R})}(P,\boldsymbol{Oz})}{dt}\quad\text{(théorème du moment dynamique)}$$

Or le moment cinétique en P est égal à :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(R)}(P,\boldsymbol{Oz})=[J(P,\boldsymbol{Oz})]_{(S)}\boldsymbol{\Omega}_{(R)}(\boldsymbol{Oz})+m(S)\,\boldsymbol{PG}\wedge\boldsymbol{V}_{(R)}(P)$$

où [J(P,Oz)](S) est la matrice d'inertie du solide (S) en P par rapport à l'axe Oz et $\boldsymbol{\Omega}_{(R)}(\boldsymbol{Oz})$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation autour de **Oz**. La matrice d'inertie est une application linéaire antisymétrique du vecteur vitesse de rotation telle que :

$$[J(P,\boldsymbol{Oz})]_{(S)}\boldsymbol{\Omega}_{(R)}(\boldsymbol{Oz})=\iiint_{(S)}\boldsymbol{PM}\wedge(\boldsymbol{\Omega}_{(R)}(\boldsymbol{Oz})\wedge\boldsymbol{PM})\,dm$$

Si on choisit P = G (centre d'inertie du solide), le moment cinétique devient :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(R)}(G,\boldsymbol{Oz})=[J(G,\boldsymbol{Oz})]_{(S)}\boldsymbol{\Omega}_{(R)}(\boldsymbol{Oz})$$

De tout ce qui précède on déduit la marche à suivre pour établir l'équation du mouvement du pendule :

- déterminer le centre d'inertie
- calculer la vitesse du centre d'inertie, puis son accélération
- calculer la matrice d'inertie en G par rapport à l'axe de rotation Oz, en déduire le moment cinétique
- en appliquant le théorème du moment dynamique, obtenir celui-ci en dérivant le moment cinétique
- établir le bilan des forces extérieures appliquées au pendule : force de pesanteur, forces de liaison
- en appliquant le PFD (principe fondamental de la dynamique) écrire l'égalité de la quantité d'accélération et de la résultante des forces extérieures en G. En déduire les forces de liaisons
- en appliquant le PFD, écrire l'égalité du moment dynamique en G avec le moment des forces extérieures. En déduire l'équation du mouvement.

Le schéma ci-après (fig. 1) donne la géométrie du problème :

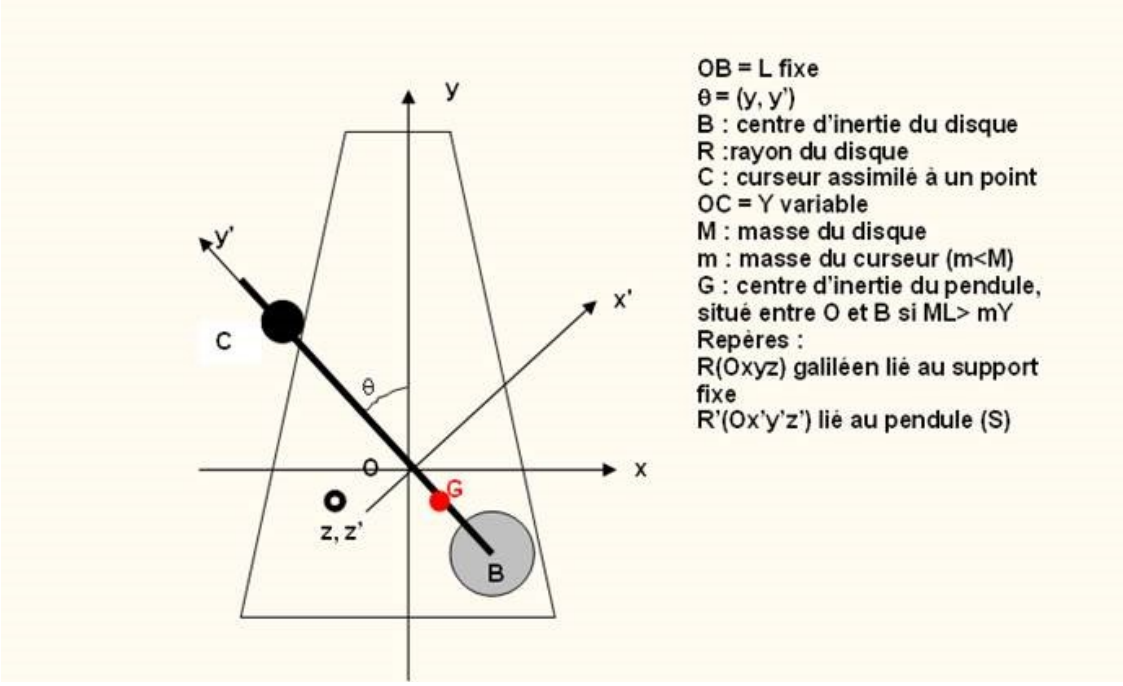

figure 1 : géométrie du problème

Nous suivons les étapes mentionnées ci-dessus :

Détermination du centre d'inertie G avec les coordonnées dans (R') :

$$(M+m)\boldsymbol{OG}=M\,\boldsymbol{OB}+m\,\boldsymbol{OC}$$
$$\boldsymbol{OB}=-L\,\boldsymbol{y}'$$
$$\boldsymbol{OC}=Y\,\boldsymbol{y}'$$

(NB : les vecteurs **x**, **y**, **z**, **x'**, **y'**, **z'** sont les vecteurs unitaires de la base de (R) et (R')). D'où :

$$\boldsymbol{OG}=\frac{m\,Y-M\,L}{m+M}\,\boldsymbol{y}' \quad (1)$$

Vitesse et accélération du centre d'inertie :

Dans (R') :

$$\boldsymbol{V}_{(\boldsymbol{R}')}(G)=\left(\frac{d\,\boldsymbol{OG}}{d\,t}\right)_{(R')}=\frac{m\,Y-M\,L}{m+M}\left(\frac{d\,\boldsymbol{y}'}{d\,t}\right)_{(R')}$$

Or :

$$\left(\frac{d\,\boldsymbol{y}'}{d\,t}\right)_{(R')}=\left(\frac{d\,\boldsymbol{y}'}{d\,\theta}\right)_{(R')}\dot{\theta}=-\dot{\theta}\,\boldsymbol{x}' \quad \text{avec} \quad \dot{\theta}=\frac{d\,\theta}{d\,t}$$

D'où :

$$\boldsymbol{V}_{(\boldsymbol{R}')}(G)=\frac{M\,L-m\,Y}{m+M}\dot{\theta}\,\boldsymbol{x}' \qquad (2)$$

Accélération, dans (R'), de G :

$$\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R}')}(G)=\left(\frac{d\,\boldsymbol{V}_{(\boldsymbol{R}')}(G)}{d\,t}\right)_{(R')}=\frac{M\,L-m\,Y}{m+M}\left(\ddot{\theta}\,\boldsymbol{x}'+\dot{\theta}^2\frac{d\,\boldsymbol{x}'}{d\,\theta}\right)$$

comme : $\frac{d\,\boldsymbol{x}'}{d\,\theta}=\boldsymbol{y}'$ il vient :

$$\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R})}(G)=\frac{M\,L-m\,Y}{m+M}\left(\ddot{\theta}\,\boldsymbol{x}'+\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{y}'\right) \qquad (3)$$

Moment d'inertie et moment cinétique par rapport à l'axe de rotation Oz :

Le moment d'inertie de l'ensemble du solide (S) par rapport à l'axe **Oz'** de rotation est la somme des moments d'inertie des différentes parties du pendule par rapport à ce même axe : disque, curseur et tige :

$$\left[J(\boldsymbol{Oz}')\right]_{(S)}=\left[J(\boldsymbol{Oz})\right]_{(disque)}+\left[J(\boldsymbol{Oz})\right]_{(curseur\,C)}+\left[J(\boldsymbol{Oz})\right]_{(tige)}$$

- la masse de la tige étant supposée négligeable on a : $[J(\boldsymbol{Oz})]_{tige} = 0$
- selon le ***théorème d' Huygens***, le moment d'inertie du disque par rapport à **Oz'** est égal au moment d'inertie par rapport au centre B du disque plus le produit de la masse du disque M par le carré de la distance OB. Or le moment d'inertie d'un disque de rayon R par rapport à son centre B est $MR^2/2$, nous avons donc :

$$\left[J(\boldsymbol{Oz})\right]_{(disque)}=\left[J(\boldsymbol{Bz}')\right]_{(disque)}+M\,\boldsymbol{OB}^2=\frac{1}{2}M\,R^2+M\,L^2$$

- selon le théorème d'Huygens également, le moment d'inertie du curseur par rapport

à Oz' est égal au moment d'inertie par rapport au centre C du curseur (donc égal à 0 car le curseur est assimilé à un point) plus le produit de la masse du curseur m par le carré de la distance OC. On a donc :

$$[J(\boldsymbol{Oz}')]_{(curseur)}=[J(\boldsymbol{Cz}')]_{(curseur)}+m\boldsymbol{OC}^2=mY^2$$

En définitive le moment d'inertie de (S) par rapport à **Oz'** est donc :

$$[J(\boldsymbol{Oz}')]_{(S)}=M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2 \qquad (4)$$

NB : remarquer que, ici, la matrice d'inertie est assimilée à son terme diagonal car on se place dans l'axe principal d'inertie COB.

Le moment cinétique ramené au centre d'inertie G du solide, par rapport à **Oz'**, peut alors être calculé :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\boldsymbol{R}')}(G,\boldsymbol{Oz}')=[J(G,\boldsymbol{Oz}')]_{(S)}\boldsymbol{\Omega}_{(\boldsymbol{R}')}(\boldsymbol{Oz}')$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{(\boldsymbol{R}')}(\boldsymbol{Oz}')=\dot{\theta}\,\boldsymbol{z}'$$

J étant donné par (4), on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\boldsymbol{R}')}(G,\boldsymbol{Oz}')=\left[M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2\right]\dot{\theta}\,\boldsymbol{z}' \qquad (5)$$

Moment dynamique :

Selon le théorème du moment dynamique, on obtient celui-ci en dérivant par rapport au temps l'expression (5) :

$$\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{R}')}(G,\boldsymbol{Oz}')=\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}_{(\boldsymbol{R}')}(G,\boldsymbol{Oz}')=\left[M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2\right]\ddot{\theta}\,\boldsymbol{z}' \quad (6)$$

Torseur des efforts extérieurs appliqués sur le pendule (S) :

Nous devons maintenant obtenir le torseur des efforts extérieurs :

$$A_{(R)}(S)=\begin{Bmatrix}\sum \boldsymbol{F}_{extérieures}\\ \sum \boldsymbol{M}\end{Bmatrix}$$

où les **M** sont les moments des forces extérieures par rapport à **Oz'**, le bras de levier étant le vecteur défini par O et le point d'appui de ces forces.
Les forces extérieures appliquées au pendule sont :

- le poids du pendule $\boldsymbol{P}(G)=(m+M)\boldsymbol{g}$: point d'application G, avec $\boldsymbol{g}=-g\,\boldsymbol{y}$ où $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'\sin\theta+\boldsymbol{y}'\cos\theta$
- les forces de liaison à l'axe de rotation : $\boldsymbol{R}(O)=R_{x'}\boldsymbol{x}'+R_{y'}\boldsymbol{y}'$, point d'application O

On a donc :

$$\sum \boldsymbol{F}_{extérieures}=R_{x'}\boldsymbol{x}'+R_{y'}\boldsymbol{y}'-(m+M)\,g\,(\boldsymbol{x}'\sin\theta+\boldsymbol{y}'\cos\theta) \qquad (7)$$

Les moments des forces extérieures par rapport à Oz'sont :

- le moment des forces de liaison. Comme le point d'appui est O , ce moment est nul.
- Le moment de la force de pesanteur :

$$\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{R}')}(\boldsymbol{Oz}')=(m+M)\,\boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{GO}=-(mY-ML)\,g\,\boldsymbol{y}'\wedge\boldsymbol{y}$$ d'après (1)

et en employant $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'\sin\theta+\boldsymbol{y}'\cos\theta$, il vient en définitive :

$$\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{R}')}(\boldsymbol{Oz}')=(mY-ML)\,g\sin\theta\,\boldsymbol{z}' \quad (8)$$

Application du Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Pour les forces, nous avons : $(m+M)\,\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{R}')}(G)=\sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{extérieures}}$. De (3) et (7) on tire :

$$(ML-mY)(\ddot{\theta}\,\boldsymbol{x}'+\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{y}')=R_{x'}\boldsymbol{x}'+R_{y'}\boldsymbol{y}'-(m+M)\,g\sin\theta\,\boldsymbol{x}'-(m+M)\,g\cos\theta\,\boldsymbol{y}'$$

en projetant sur les axes Ox' et Oy' liés au pendule, cette relation fournit les composantes des forces de liaison :

$$\left.\begin{aligned} R_{x'}&=(ML-mY)\ddot{\theta}+(m+M)\,g\sin\theta\\ R_{y'}&=(ML-mY)\dot{\theta}^2+(m+M)\,g\cos\theta\end{aligned}\right| \quad (9)$$

Si on connaît la loi horaire θ(t) obtenue par ailleurs en résolvant l'équation du mouvement, on peut calculer à chaque instant les forces de liaison par les équations (9).

Pour les moments, nous avons, d'après les relations (6) et (8) :

$$\boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{R}')}(G,\boldsymbol{Oz}')=\left[M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2\right]\ddot{\theta}\,\boldsymbol{z}'=(mY-ML)\,g\sin\theta\,\boldsymbol{z}'$$

En projetant sur Oz', nous obtenons l'équation du mouvement cherchée :

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0\\ &\omega^2=g\,\frac{ML-mY}{M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2}\end{aligned}\right| \quad (10)$$

Pour des amplitudes faibles on peut assimiler $\sin\theta \approx \theta$ et l'équation (10) devient celle d'un oscillateur harmonique d'équation :

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

à condition d'avoir $\omega^2 > 0$, ce qui arrive si ML > mY, comme on l'avait exigé dès le départ. Autrement dit, pour que le pendule puisse osciller il faut que son centre d'inertie G soit situé entre le disque massif et l'axe de rotation. La période d'oscillation est donnée par : $T = 2\pi/\omega$, soit :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M\left(\frac{R^2}{2}+L^2\right)+mY^2}{g(ML-mY)}} \quad (11)$$

Remarque : la période du pendule composé (S) s'écrit bien sous la forme indiquée à l'introduction :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_{(S)}\, g\, OG}}$$

où J moment d'inertie donné par (4), OG donné par (1) et $m_{(S)}$ masse totale = m+M. Cette relation est valable pour tous les pendules composés.

La période T a été calculée pour chaque position du curseur Y par (11) et comparée avec les résultats de l'expérience décrite ci-dessus. Les valeurs utilisées sont :

- masse du disque M = 25g
- masse du curseur m = 6g
- distance OB = L = 32 mm
- rayon du disque R = 9 mm

Les mesures, comparées avec les calculs théoriques, sont indiquées dans le graphique suivant :

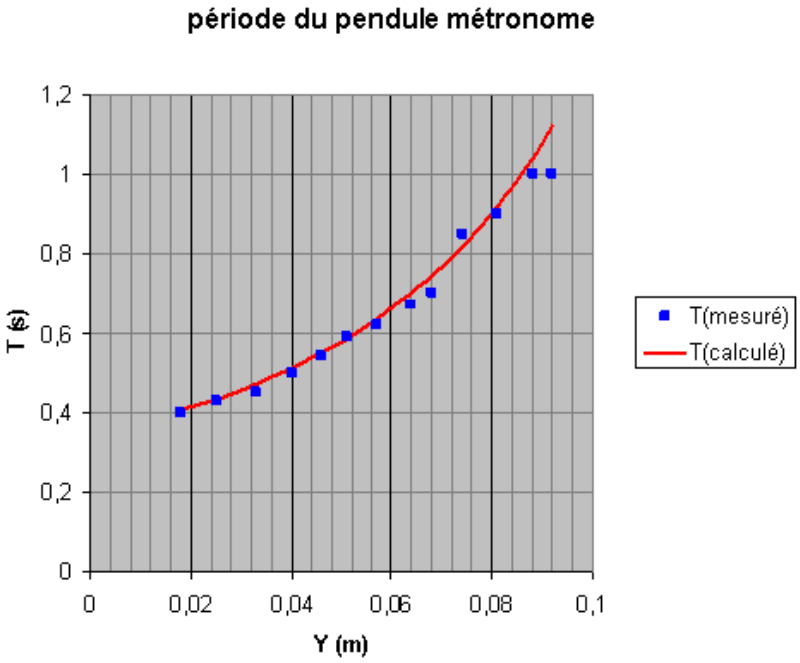

figure 2 : évolution de la période avec la distance curseur-axe pour un pendule de métronome seul

Malgré le dispositif sommaire employé les résultats théoriques et « expérimentaux » concordent bien, sauf pour les valeurs élevées de Y (curseur loin de l'axe) où le mouvement du pendule était perturbé par un important balourd. Ceci montre que les effets de l'amortissement sur la période sont négligeables pour la précision de mesure employée, bien qu'en théorie cela ne soit généralement pas vrai (voir plus loin).

Obtention de l'équation du mouvement par le théorème de l'énergie, et étude de stabilité :

On peut obtenir l'équation du mouvement (10) en utilisant le théorème de la conservation de l'énergie, mais il ne permet pas de retrouver les forces de liaison.
Le pendule étant supposé mécaniquement isolé, son énergie est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du pendule en G, et est constante :

- énergie potentielle de G calculée par rapport à O :

$$E_p(G) = -(m+M)\, g\, OG \cos\theta$$

OG est donné par (1) d'où

$$E_p(G) = -(ML - mY)g\cos\theta \quad (12)$$

- énergie cinétique de G :

$$E_c(G) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Energie mécanique totale :

$$E = E_c(G) + E_p(G) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - (ML - mY)g\cos\theta$$

Puisque le système est supposé isolé, dE/dt = 0 conduit à l'équation du mouvement :

$$J\ddot{\theta} + (ML - mY)g\sin\theta = 0$$

qui devient (10) lorsque J est donné par (4).

Conditions d'équilibre et de stabilité :
L'équilibre a lieu si l'énergie potentielle est un extrémum, donc si $dE_p/d\theta = 0$. La condition d'équilibre est donc sin $\theta = 0$ donc pour $\theta = 0$ (pendule vertical, disque en bas) ou bien $\theta = \pi$ (pendule vertical disque en haut).
L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, donc pour $d^2E_p/d\theta^2 > 0$: dans ce cas $\theta = 0$ correspond à une position stable.
L'équilibre est instable si l'énergie potentielle est maximale, donc pour $d^2E_p/d\theta^2 < 0$: dans ce cas $\theta = \pi$ correspond à une position instable.

3 - Comment empêcher l'amortissement du pendule ?

3-1 - En ajoutant une force de rappel au pendule à l'aide d'un ressort ?

La première idée qui vient à l'esprit pour augmenter le nombre d'oscillations du pendule est de lui ajouter une force de rappel, au niveau de l'axe de rotation, exercée par un ressort spiral. Disons-le tout de suite, ce ressort n'a rien à voir avec celui, remonté et tendu, placé dans le barillet (photos 2 et 3 ci-dessus) : on verra plus loin à quoi il sert...

Le ressort dont il est question ici n'est pas remonté : c'est un ressort spiral de raideur k, fixé à l'axe de rotation. Lorsque celui-ci tourne d'un angle θ, le ressort se comprime et emmagasine une énergie mécanique qu'il va ensuite restituer à la tige en le faisant tourner en sens inverse. De cette manière le balancier subit une impulsion qui lui permet de ne pas s'arrêter trop rapidement suite aux forces de frottement. Mais les forces de frottement finiront par dissiper l'énergie mécanique et le pendule s'arrêtera au bout d'un nombre d'oscillations plus grand qu'en l'absence de ressort mais néanmoins trop limité pour permettre de jouer une partition musicale sur une durée suffisante.

Malgré ces insuffisances, saisissons l'occasion d'étudier ici le comportement de l'oscillateur harmonique amorti qu'est le système pendule + ressort spiral. En présence du ressort qui exerce une force de rappel sur l'axe de rotation, il faut tenir compte de celle-ci.

a) forces de frottement négligées :

Dans un premier temps, négligeons les forces de frottement. Dans ce cas, on peut utiliser le

théorème de l'énergie pour obtenir l'équation du mouvement du pendule ([1]). A l'énergie potentielle du pendule due à la gravité (relation (12)) s'ajoute celle de la force de rappel du ressort : ½.kθ², où k est la raideur du ressort. L'énergie mécanique totale s'écrit alors cette fois :

$$E' = E'_c(G) + E'_p(G) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - (M L - m Y) g \cos\theta + \frac{1}{2} k \theta^2$$

De dE/dt = 0 on tire l'équation du mouvement :

$$J \ddot{\theta} + (M L - m Y) g \sin\theta + k \theta = 0$$

Pour de faibles amplitudes angulaires, cette équation devient celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω' :

$$\left| \begin{array}{c} \ddot{\theta} + \omega'^2 \theta = 0 \\ \omega'^2 = \dfrac{k + (M L - m Y) g}{J} \end{array} \right.$$

Le pendule oscille avec une période T' égale à :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{M\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) + m Y^2}{k + (M L - m Y) g}} \qquad (13)$$

La nouvelle période, en présence du ressort, est plus petite que celle sans ressort d'un facteur tel que :

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{k}{(M L - m Y) g}}} < 1 \qquad (14)$$

En présence du ressort le pendule oscille à une cadence plus rapide.
Cette remarque montre que l'emploi d'un ressort pour introduire une force de rappel de la tige du balancier n'est pas satisfaisant pour l'usage du métronome en musique. En effet le tableau 1 montre que le musicien a besoin de périodes pouvant aller jusqu'à 3 secondes. Si le pendule avec ressort a des périodes propres inférieures à celles du pendule seul, cela entraînerait que pour obtenir 3 s il faudrait que la tige ait une longueur importante : le métronome aurait des dimensions encombrantes, ce qui n'est pas satisfaisant.

Stabilité :

La nouvelle énergie potentielle est $E'_p(G) = \frac{1}{2} k \theta^2 - (M L - m Y) g \cos\theta$. La position d'équilibre est obtenue pour :

$$\frac{d E'_p}{d \theta} = 0 = k \theta + (M L - m Y) g \sin\theta$$

Pour de petites amplitudes, cette condition est assurée lorsque θ = 0. En ce point la dérivée seconde de l'énergie potentielle est :

$$\left(\frac{d^2 E'_p}{d \theta^2} \right)_{\theta = 0} = k + (M L - m Y) g \cos\theta$$

qui est > 0 (stable) si k + (ML-mY)g > 0 : cette condition est automatiquement assurée lorsque ML > mY comme déjà adoptée;
qui est < 0 (instable) si k + (ML-mY)g < 0: cette condition peut être obtenue lorsque mY > ML, auquel cas le système ne peut pas être un oscillateur harmonique, puisque ω est imaginaire.

b) forces de frottement prises en compte :

On ne peut plus appliquer le théorème de l'énergie car les forces de frottement ne dérivent pas d'un potentiel : elles ne sont pas conservatives. Appliquons alors le PFD : pour cela le moment des forces est la somme du moment de la force de pesanteur (comme en (8)), du couple de la force de rappel du ressort $\mathbf{C}_R$, et du couple résistant des forces de frottement $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{F}}=-f\dot{\theta}\boldsymbol{z}'$.
L'équation du mouvement est donc :

$$J\ddot{\theta}=(mY-ML)g\sin\theta\ -k\theta\ -f\dot{\theta}$$

qui, pour de faibles amplitudes angulaires, est de la forme d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{\theta}+a\dot{\theta}+\omega'^2\theta=0 \qquad (15)$$

dans laquelle : $a=\frac{f}{J}$, et $\omega'^2=\omega^2+\frac{k}{J}$ est le carré de la pulsation propre du pendule avec le ressort, ω étant la pulsation propre du pendule seul donnée par (10).
Pour résoudre (15) on cherche des solutions de la forme :

$$\theta(t)=A\exp rt$$

En réinjectant dans (15) on obtient l'équation caractéristique en r :

$$r^2+ar+\omega'^2=0$$

c'est une équation du second degré dans **C** (corps des nombres complexes) dont les solutions sont :
avec $\Delta = a^2 - 4\omega'^2$, et $f_c = 2J\omega'$ (amortissement critique),

- si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $a = 2\omega'$ (soit $f = f_c$) : $r = -\omega' \rightarrow$ régime d'amortissement critique : le pendule s'amortit sans osciller.

- si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $a > 2\omega'$ (soit $f > f_c$) : deux solutions $r=-\omega'(\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-1})$, avec $\varepsilon = f/f_c$. Le régime d'amortissement est sur-critique ou sur-amorti : le pendule s'amortit sans osciller selon deux lois horaires possibles. Cette situation arrive pour des frottements importants, supérieurs au frottement critique.

- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $a < 2\omega'$ (soit $f < f_c$) : deux solutions complexes conjuguées $r=-\omega'(\varepsilon\pm j\sqrt{1-\varepsilon^2})$. Le régime est sous-critique ou sous-amorti : le pendule s'amortit avec des mouvements oscillatoires dont les pulsations sont égales à la partie imaginaire de r :

$$\Omega=\omega'\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sqrt{\omega'^2-\left(\frac{f}{2J}\right)^2} \qquad (16)$$

et l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement avec le temps (partie réelle de r)

comme exp(-ω'εt). La relation (16) montre qu'en présence d'amortissement la période du pendule est plus grande que celle du pendule idéal, sans amortissement. Dans l'expérience réalisée avec le pendule seul du métronome, pour toutes les positions du curseur relevées, nous étions manifestement en régime sous-amorti puisque le pendule oscillait tout en étant amorti. Dans ces conditions le coefficient de frottement f était suffisamment faible, plus faible en tous cas que $2J\omega$, quelle que soit la position Y du curseur, y compris celle pour laquelle $f_c = 2J\omega$ est la plus faible. La période du pendule amorti est donc peu différente de celle du pendule idéal.

Conclusion de ce paragraphe (3-1) : dans tous les cas on ne maintiendra pas les oscillations du pendule à l'aide d'un couple de rappel de torsion d'un ressort.
Pour entretenir les oscillations du pendule du métronome il leur faut une impulsion à chaque aller-retour. Cette impulsion est apportée mécaniquement par un moteur constitué d'un ressort enroulé et remonté à l'intérieur d'un barillet comme nous allons le voir ci-après.

3-2 – En imprimant au pendule une impulsion à chaque oscillation (oscillations forcées)

Lorsque le ressort est remonté dans le barillet à l'aide de la clé (photo 3) il s'est enroulé de façon serrée et l'énergie élastique qu'il a emmagasinée ne demande qu'à se libérer spontanément si le ressort est laissé livré à lui-même : il se déroule en libérant sous forme d'énergie cinétique l'énergie potentielle accumulée.
Sur l'axe de rotation solidaire du pendule une bague possède deux dents de profil particulier décalées sur sa périphérie de manière à laisser passer et à arrêter les dents d'une roue dentée entraînée par le déroulement du ressort. Lorsque le pendule fait une oscillation la première dent sur l'axe se retire et laisse passer une dent de la roue dentée, celle-ci rencontre ensuite la deuxième dent sur l'axe. Chaque fois qu'une dent de la roue rencontre une dent sur l'axe elle lui fournit une impulsion parce que la roue reçoit l'énergie du ressort libérée par étape lorsque que le passage est libre. Par ce mécanisme le ressort se déroule par à-coups successifs espacés par une période qui dépend de la période propre du pendule : ainsi l'oscillation du pendule est régulée et entretenue jusqu'à ce que le ressort se soit complètement détendu.
On peut comparer ce mécanisme au régulateur d'une horloge. En terme de dynamique cela revient à imposer au pendule une sollicitation extérieure périodique, comme une impulsion que l'on donnerait à chaque aller-retour d'une balançoire. On dit que le pendule est soumis à des oscillations forcées. En toute rigueur il s'agit d'impulsions périodiques, et non de force sinusoïdale. Mais si l'on considère que tout signal périodique peut se décomposer en fonctions sinusoïdales (théorème de Fourier), mathématiquement cela revient à adopter comme source régulatrice un couple de la forme $C_0 \cos \Omega t$. On cherche alors à étudier comment varie la réponse du système (l'angle du pendule) en fonction de la pulsation d'entrée Ω (étude de la fonction de transfert).

Pour cela on applique le PFD en considérant dans le bilan des moments dynamiques :
- le moment de la force de pesanteur (relation (8)),
- le couple résistant dû au frottement sur la jonction pendule-axe de rotation $\boldsymbol{C_F} = -f\dot{\theta}\boldsymbol{z'}$
- le couple exercé par la sollicitation du ressort sur l'axe via la roue dentée $C_0 \cos\Omega t\, \boldsymbol{z'}$

et l'on en déduit immédiatement l'équation du mouvement :

$$J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + (ML - mY)g\theta = C_0 \cos\Omega t \quad (17)$$

Il est plus commode de considérer que le terme source C_0 cos Ωt est la partie réelle de la fonction complexe C_0 exp $j\Omega t$, et donc de chercher les solutions sous forme complexe :

$$\theta(t) = \theta_0 \exp j(\Omega t + \phi)$$

En réinjectant dans (17) on obtient la relation entre les amplitudes de la source et de la réponse :

$$\theta_0(-J\Omega^2 + j f \Omega + (M L - m Y) g) = C_0$$

Le rapport des amplitudes $H(\Omega) = \theta_0/C_0$ est la ***fonction de transfert*** du système linéaire du second ordre pour la réponse en position (on pourrait également déterminer celle pour la réponse en vitesse angulaire ou en accélération angulaire). On a :

$$H(\Omega) = \frac{1}{(M L - m Y) g} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + 2 j \varepsilon \frac{\Omega}{\omega}}$$

où ω est la pulsation propre du pendule idéal donnée par (10) et $\varepsilon = f/2J\omega$, où $f_c = 2J\omega$ est l'amortissement critique. La fonction de transfert ci-dessus s'écrit encore, en faisant apparaître son amplitude et sa phase :

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| \exp j\,\psi(\Omega)$$

avec :

- amplitude de la fonction de transfert :

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{(M L - m Y) g} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (18)$$

- phase de la fonction de transfert :

$$\tan \psi(\Omega) = - \frac{f \Omega}{(M L - m Y) g - J \Omega^2} \quad (19)$$

On peut montrer (exercice !) que :

- L'amplitude de la fonction de transfert présente un maximum seulement pour des frottements suffisamment faibles : $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.
- Le maximum de la fonction de transfert est atteint pour la pulsation de résonance en position :

$$\Omega_0 = \omega \sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \quad (20)$$

- La phase passe de $-\pi/2$ à $\pi/2$ pour une pulsation égale à $\Omega = \omega$ (résonance en phase)

Remarque : on montre tout autant facilement (exercice !) que si l'on considère les fonctions de transfert en vitesse et en accélération : $H'(\Omega) = j\Omega\theta_0/C_0$ et $H''(\Omega) = -\Omega^2\theta_0/C_0$, leurs résonances ont lieu respectivement pour :

$$\Omega'_0 = \omega$$
$$\Omega''_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}$$

La relation (20) montre qu'à la résonance le pendule oscille avec une période plus grande que

celle du pendule libre. On constate, après avoir relevé l'évolution des périodes du métronome avec la position Y du curseur, que les périodes obtenues sont plus grandes que celles de la courbe de la figure 2 (voir figure 3 ci-dessous) :

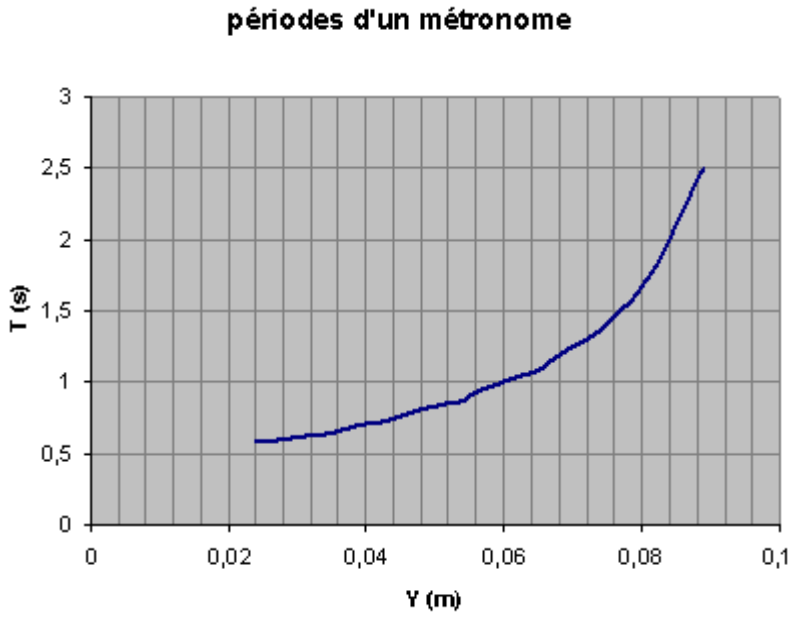

figure 3 : évolution des périodes avec la position du curseur pour le métronome complet

Mais la comparaison avec la figure 2 ne donne pas un rapport des pulsations des périodes T/T_0 constant $\sqrt{1-2\varepsilon^2}$ pour toute la gamme des positions Y. Il est pratiquement constant et égal à 1,5 jusqu'à Y = 8 cm environ (andante) puis il croît jusqu'à 1,8. Ceci laisse supposer que le mécanisme à ressort qui fournit l'impulsion introduit un couple résistant, par l'intermédiaire de ses rouages, dont le coefficient de frottement f devient important aux grandes périodes, c'est-à-dire pour de grands Y.

Remarque : dans les calculs précédents j'ai considéré que la sollicitation imposée par le ressort et les roues dentées était continue et sinusoïdale. En fait, et c'est le cas pour tout mécanisme régulateur d'horlogerie, la force excitatrice est celle d'une impulsion augmentant la vitesse angulaire du pendule d'une quantité $B\omega$ à chaque intervalle de temps t_0. Les calculs détaillés du mouvement sont donnés en annexe : ils concluent sur le fait que les impulsions sont données au pendule de manière synchrone si $\omega t_0 = \pi/2$, c'est-à-dire si la pulsation du système coïncide avec la pulsation propre du pendule seul (condition de réglage des pendules).

4 - Métronome électronique

On l'aura compris, surtout après la lecture de l'annexe, un métronome peut être l'objet d'imprécisions importantes : forces de frottement variables avec la géométrie, dépendance de la pulsation avec l'amplitude des impulsions, instants de l'impulsion pas parfaitement réguliers, etc. Mais le charme des montages mécaniques, hormis leurs intérêts « esthétiques » et historiques, réside justement dans la finesse des problèmes qui ne manquent pas de montrer une certaine complexité et de se familiariser avec les notions de dynamique du solide.

Si l'on recherche le pragmatisme et de s'affranchir de ces problèmes, on peut construire un métronome électronique dont je propose le montage ci-après :

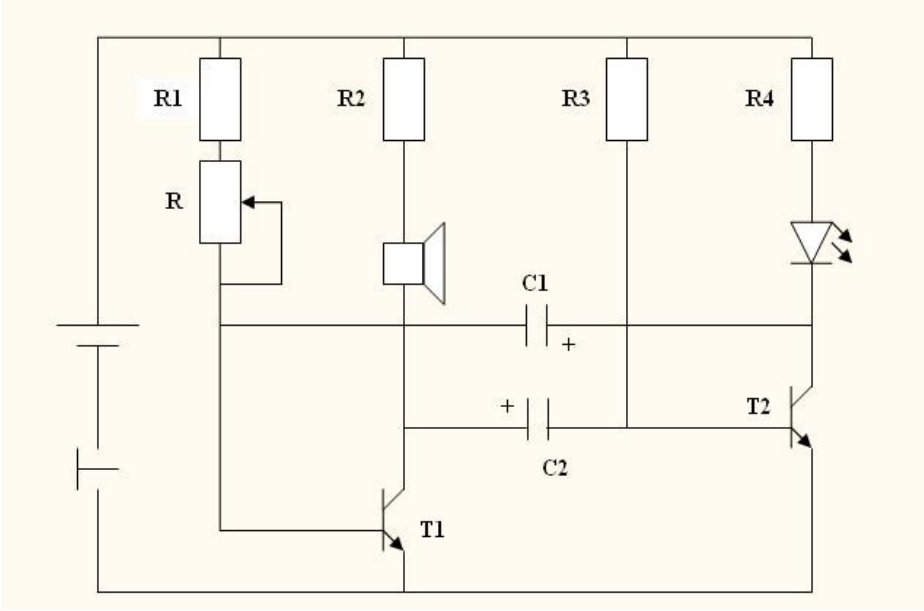

figure 4 : schéma d'un métronome électronique sommaire

On reconnaît à la figure 4 le montage d'une bascule astable :

- lorsque l'on ferme le circuit, les deux condensateurs C1 et C2 se chargent par les résistances R4 et R2, et les transistors T1 et T2 saturent : la tension collecteur-émetteur est quasi-nulle, l'intensité de collecteur est maximale, par conséquent le haut parleur émet un son car parcouru par un courant élevé, et la LED s'allume pour les mêmes raisons.
- Supposons que T1 se sature en premier. Le condensateur C2 se décharge alors par la jonction collecteur-émetteur de T1, passante, et attaque la jonction base-émetteur de T2 en sens inverse. T2 se bloque alors car la tension collecteur-émetteur y est maximale : la jonction collecteur-émetteur de T2 se comporte comme un circuit ouvert.
- C1 se charge via R4, et T1 est maintenu saturé par R et R1. C2 est chargé en sens inverse par R3 et T2 va se trouver saturé. C2 bloque T1 car il impose aux bornes collecteur-émetteur une tension élevée.
- T2 est maintenu saturé par R3 et C1 est chargé en sens inverse par R1 et R. Puis C1 saturera T1 et le cycle recommence.
- Chaque fois que T1 sature (et donc T2 bloqué) l'intensité est maximale dans le haut-parleur, et chaque fois que T1 se bloque (et donc T2 sature) l'intensité est minimale (quasi-nulle) dans le haut-parleur.
- On obtient ainsi une alternance de sons du haut-parleur dont la période dépend de la résistance de charge variable R. La durée t_1 du blocage de T1 est en effet donnée par :

$$t_1 = 0{,}7(R_1 + R)C_1$$

tandis que la durée t_2 du blocage de T2 est égale à :

$$t_2 = 0{,}7\,R_3 C_2$$

Les signaux (tension aux bornes de R2 et du haut-parleur) sont de forme carrée, de valeur maximale sur une durée t_2 et minimale sur une durée t_1. La période des signaux sonores est $T = t_1 + t_2$.

On rappelle qu'un transistor est saturé si $R_B < \beta R_C$, où R_B et R_C sont respectivement les résistances du côté base et du côté collecteur, et ou $\beta = I_C/I_B$ est le rapport d'amplification entre l'intensité collecteur et l'intensité base. Pour T1 on a R_B = R1 + R et R_C = R2, et pour T2 : R_B =

R3 et R_C = R4.

Application pratique : R variable de 0 à 100 kΩ, R1 = 10 kΩ, R2 = 100 Ω, R3 = 100 kΩ, R4 = 470 Ω, C1 = C2 =10 μF, β = 1000. On obtient : T compris entre $0{,}7(R_1C_1 + R_3C_2) = 0{,}8$ s (allegro) et $0{,}7(R_1 + 100000)C_1 + 0{,}7R_3C_2 = 1{,}5$ s (andante).

Annexe : pendule amorti entretenu par une impulsion périodique

Reprenons l'équation du mouvement (17), mais avec une force d'excitation non plus sinusoïdale mais sous forme d'une impulsion fournie au pendule toutes les t_0 secondes :

$$J\left(\ddot{\theta} + \frac{f}{J}\dot{\theta} + \omega^2\theta\right) = F(t)$$

avec :

- f/J = 2ωε, où f_c = 2Jω est l'amortissement critique,
- ω est la pulsation propre du pendule idéal, donnée par la relation (10)
- F(t) est la force de l'impulsion donnée toutes les t0 secondes et augmentant la vitesse angulaire d'une quantité égale à ±Bω

On réécrit donc l'équation du mouvement sous la forme :

$$J\left(\ddot{\theta} + 2\varepsilon\omega\dot{\theta} + \omega^2\theta\right) = F(t)$$

Avant d'être attaqué par l'impulsion de la roue dentée régulatrice, le pendule oscille avec une pulsation dépendant de l'amortissement et donnée par (16), et avec une amplitude décroissant exponentiellement avec le temps selon exp (-ωεt) :

$$\theta(t) = \theta_0 \exp(-\omega\varepsilon t)\cos\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t\right)$$

Pour des ε petits (frottements faibles), la vitesse angulaire est alors, à l'état libre :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega\exp(-\varepsilon\omega t)\sin\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t + \varepsilon\right)$$

A l'instant t_0, l'impulsion augmente la vitesse angulaire de la quantité -Bω (le signe « moins » vient de ce que l'impulsion donne un mouvement au pendule en sens inverse) ; à partir de cet instant le pendule suit la loi de mouvement :

$$\theta'(t) = \theta'_0\exp(-\omega\varepsilon(t-t_0))\cos\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}(t-t_0) + \varphi\right)$$

$$\dot{\theta}'(t) = \frac{d\theta'}{dt} = -\theta'_0\omega\exp(-\varepsilon\omega(t-t_0))\sin\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}(t-t_0) + \varepsilon + \varphi\right)$$

La position angulaire après l'impulsion θ'(t) doit coïncider avec celle d'avant l'impulsion θ(t) à l'instant t = t_0, ce qui conduit aux conditions de raccordement :

$$\theta(t_0) = \theta'(t_0)$$

$$\dot{\theta}'(t_0) = \dot{\theta}(t_0) - B\omega$$

soit :

$$\left.\begin{aligned}\theta'_0\cos\varphi&=\theta_0\exp(-\varepsilon\omega t_0)\cos(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t_0)\\ \theta'_0\sin\varphi&=\frac{B}{\cos\varepsilon}+\theta_0\sin(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t)\exp(-\varepsilon\omega t_0)\end{aligned}\right| \quad (21)$$

Pour déterminer l'amplitude θ'_0 et la phase φ on se place dans la configuration où le pendule oscille de manière harmonique. Dans ce cas, l'amplitude s'annule aux instants t' tels que $\cos(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}(t'-t_0)+\varphi)=0$, donc pour :

$$t'=t_0+\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

et l'amplitude est maximale (en valeur absolue) aux instants t'' tels que $\cos(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}(t''-t_0)+\varphi)=-1$, donc pour :

$$t''=t_0+\frac{\pi-\varphi}{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

l'amplitude maximale vaut alors :

$$\theta'_{max}=\theta'(t'')=\theta'_0\exp(-\varepsilon\omega(t''-t_0))\cos\pi=-\theta'_0\exp\left(-\frac{\varepsilon(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

Or le régime est harmonique (oscillations sinusoïdales du pendule) si, à l'amplitude maximale atteinte pour t'', la position angulaire en régime forcé est en opposition de phase avec l'amplitude angulaire maximale du pendule en régime libre, soit :

$$\theta'_{max}=-\theta_0$$

d'où la condition d'harmonicité :

$$\frac{\theta'_0}{\theta_0}=\exp\left(-\frac{\varepsilon(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) \quad (22)$$

En éliminant θ'_0 entre (22) et (21), on obtient les équations qui permettent de calculer l'amplitude du pendule libre et la phase due à l'impulsion :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\theta_0\cos\varepsilon\exp(-\varepsilon\omega t_0)}{B}\right)^2\left[\exp(2\varepsilon\omega t_0-2(\pi-\varphi)\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}})-1\right]-2\frac{\theta_0\cos\varepsilon\exp(-\varepsilon\omega t_0)}{B}\sin(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t_0)&=1\\ \tan\varphi=\frac{\frac{B}{\theta_0\cos\varepsilon\exp(-\varepsilon\omega t_0)}+\sin(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t_0)}{\cos(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t_0)}&\end{aligned}\right.$$

(23)

et ensuite l'amplitude du pendule après impulsion θ'_0 est calculée par (22). Toutes ces valeurs sont paramétrées par l'instant de l'impulsion t_0 ainsi que par le moment d'inertie du pendule, et donc la position Y du curseur, par l'intermédiaire de la pulsation propre du pendule libre idéal ω.

Le cadencement du pendule soumis à oscillations forcées par impulsions correspond à la période séparant deux positions angulaires maximales identiques du balancier. Sa pulsation vaut donc :

$$\Omega = \frac{2\pi}{(2t'')}$$

soit :

$$\Omega = \omega \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi - \varphi + \omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t_0} \quad (24)$$

La relation (24), compte tenu de (23), montre que la période T' = 2t'' = $2\pi/\Omega$ du métronome (considéré comme un pendule soumis à des impulsions répétées) n'est pas en général une fonction simple des paramètres géométriques du pendule (dont Y) et de l'instant des impulsions t_0.

Néanmoins, si l'on peut négliger les frottements ($\varepsilon \approx 0$) toutes ces relations se simplifient considérablement. On peut alors vérifier (exercice !) que la phase φ et la pulsation Ω augmentent avec l'amplitude d'impulsion B :

- la phase augmente de ωt_0 à $\pi/2$ lorsque B varie de 0 à ∞ ;
- la pulsation augmente de ω à

$$\Omega_{max} = \frac{2\omega}{1 + \frac{2\omega t_0}{\pi}} \quad (25)$$

D'après (25), on peut éliminer la dépendance de la pulsation du pendule entretenu avec l'amplitude des impulsions, en faisant en sorte que $\Omega_{max} = \Omega = \omega$. Il suffit de régler le pendule et les instants des impulsions de façon à avoir : $\omega t_0 = \pi/2$, donc pour :

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{M\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) + mY^2}{(ML - mY)g} \quad (26)$$

où T est la période propre du pendule seul non amorti. La condition de réglage (26) est obtenue par exemple lorsque l'on dispose les contacts entre la roue dentée et l'axe de rotation de façon adaptée, ou pour une horloge ou une montre mécaniques, lorsque les régulateurs (échappements, etc) sont adaptés : dans le cas où la géométrie du dispositif ne change pas, ces réglages permettent de rendre la période du pendule indépendante de l'impulsion apportée par l'énergie mécanique du moteur (ressort à barillet avec sa fusée pour certaines horloges, poids attaché à une corde enroulée autour de l'axe du cadran des aiguilles pour une pendule, etc...) : ceci permet alors de conserver la régularité des aiguilles indiquant l'heure. Mais lorsque, comme c'est le cas pour un métronome, la géométrie du pendule change (en modifiant la position du curseur), et donc lorsque la pulsation propre change, le réglage ne peut pas être le même pour toute la gamme des mouvements musicaux du tableau 1. Et c'est l'équation générale (24) qu'il faut malheureusement appliquer.

Le comportement du pendule monté en métronome n'est donc pas aussi régulier que pour le pendule en montage libre, et les écarts entre les courbes de la figure 2 et de la figure 3 peuvent en résulter. A défaut de calculs de haute précision, la loi du métronome mécanique à balancier, et sa conception, nécessitent donc un certain empirisme.

Bibliographie et notes

- référence A : pendule quelconque (F. Élie, 27 septembre 2003)

Notes :

[1] On peut également appliquer le PFD en remarquant que, pour tenir compte de la force de rappel du ressort, il suffit d'ajouter au moment des forces donné par (8) le couple de torsion du ressort :

$$\boldsymbol{C_R} = -k\,\theta\,\boldsymbol{z}$$

Il vient ainsi : $J\ddot{\theta} = (mY - ML)g\sin\theta - k\,\theta$, projeté sur Oz', et pour de faibles amplitudes angulaires, nous avons l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation w' donnée par : $\omega'^2 = \omega^2 + \frac{k}{J}$, où $\omega^2 = \frac{ML - mY}{J}g$ est le carré de la pulsation propre du pendule seul.