ACCUEIL
Frédéric Elie on ResearchGate

Onde solitaire à la surface de l'eau
tsunamis et mascarets

Frédéric Élie

février 2009

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Voici une présentation simplifiée des processus responsables d'une onde solitaire à la surface d'un liquide, dont les exemples les plus classiques, mais aussi les plus terribles, sont les tsunamis et les mascarets. Comme nous allons le voir, ces phénomènes résultent des effets combinés de la nature dispersive des ondes de surface d'un liquide et du raidissement du front d'onde. Aussi est-il recommandé de lire d'abord *l'article sur les ondes de surface* pour une introduction de ces notions.

vague solitaire en déferlement (source : http://www.planet.fr/)

SOMMAIRE

1 - Un récit de Scott Russell (1834)

Le premier récit d'observation d'une onde solitaire est attribué à Scott Russell en 1834, écrit dans son « Report on waves » (Rep. 14th Meeting British Association for Advanced Sciences, York, pages 311-390 (1844). Le voici :

« Je crois que j'introduirai au mieux ce phénomène en décrivant les circonstances au cours desquelles j'en pris connaissance. J'étais en train d'observer le mouvement d'un bateau tiré rapidement le long d'un canal étroit par deux chevaux lorsque celui-ci s'arrêta brusquement – mais non la masse d'eau du canal qui avait été mise en mouvement ; elle s'accumula autour de la proue du navire dans un état d'agitation violente, puis soudainement, laissant le bateau derrière elle, roula au devant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire ; cette masse d'eau, ronde, lisse et bien définie, continua sa course le long du canal sans changer de forme ou ralentir apparemment. Je la suivis à cheval puis la dépassai alors qu'elle progressait toujours, à une vitesse de huit ou neuf miles par heure [13 à 14 km/h]*, préservant sa forme originale de quelque trente pieds de long et un à un pied et demi de haut* [environ 10 mètres de long et 45 cm de haut]*. Sa hauteur diminua graduellement et après une course d'un ou deux miles* [1,6 à 3,2 km]*, je la perdis dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'août 1834, ma première et fortuite rencontre avec ce beau et singulier phénomène que j'ai appelé « onde de translation », nom qu'il porte généralement depuis. »*

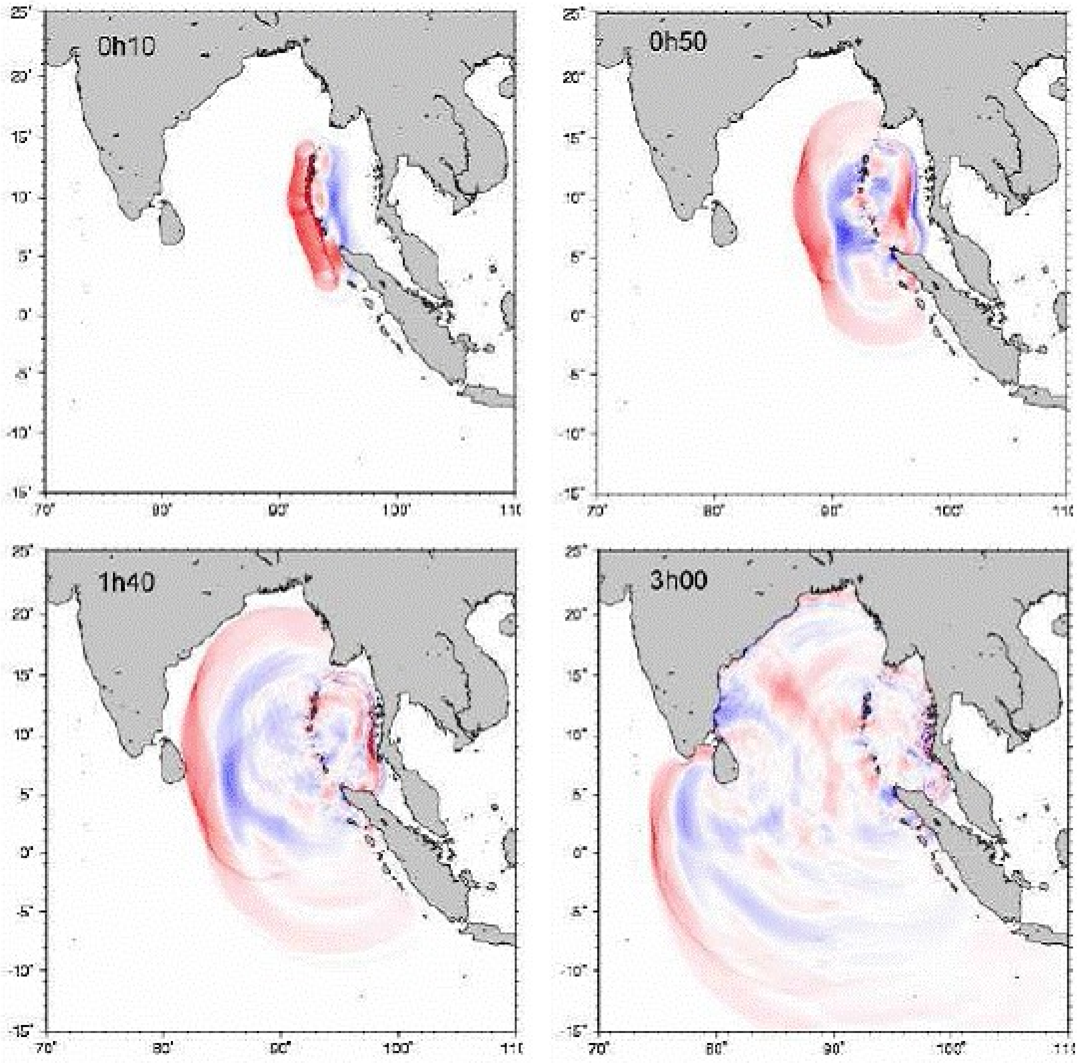
Lorsque les ondes solitaires se comportent d'une telle façon inoffensive, elles sont en effet « un beau et singulier phénomène ». En revanche, quand elles prennent des dimensions énormes et déferlent sur la côte, elles donnent des tsunamis qui sont généralement dévastateurs et meurtriers, comme l'indique cet autre récit traitant du tsunami consécutif au séisme sous-marin de Sumatra survenu le 26 décembre 2004.

2 - Un autre récit : la chronologie du tsunami meurtrier de Sumatra, 26 décembre 2004

- 26 décembre 2004, à 0h58 TU (7h58 en Indonésie) : le Bureau de Géophysique de Jakarta détecte un séisme de magnitude 6,4 sur l'échelle ouverte de Richter, au nord de l'île de Sumatra. L'épicentre du séisme est localisé à 250 km dans l'océan Indien au sud-est de Sumatra.
- A 1h14 TU la station d'Hawaii détecte le séisme de Sumatra.
- Vers 1h30 TU un tsunami dont les vagues ont 10 mètres de haut atteint la province d'Atjeh (Sumatra). Plus au nord-ouest, dans le golfe du Bengale, les îles d'Andaman et Nicobar sont atteintes par des vagues géantes.
- Vers 2h TU, le sud de la Thaïlande (plages de Phuket, Kao Lak, Phi Phi…), le sud de la Birmanie, le Bangladesh sont atteints par des murs d'eau.
- Vers 3h TU, les côtes du Sri Lanka sont atteintes à leur tour par le tsunami. Peu après le sud-est de l'Inde (état de Tamil Nadu), la Malaisie et Singapour sont atteintes, mais les vagues étaient très amorties pour ces deux dernières grâce à la barrière que représente Sumatra.
- A 4h TU, les îles Maldives, et leur capitale, sont toutes inondées.
- A 4h21 TU l'Indonésie enregistre une réplique du séisme de magnitude 5,7.
- Vers 7h TU la côte orientale de l'Afrique (Somalie, Tanzanie) est atteinte, mais l'intensité des vagues est plus faible qu'en Asie.
- Vers 9h TU les îles de la Réunion, Maurice et Rodrigues sont atteintes, mais là encore l'énergie des vagues est déjà plus affaiblie.

Le nombre total des personnes tuées par ce tsunami est d'environ 230 000, les dégâts et les désordres sanitaires sont énormes.

(source : http://fr.wikipedia.org)



propagation du tsunami consécutif au séisme de Sumatra du 26 décembre 2004
(source : http://staff.aist.go.jp/kenji.satake)

On reviendra plus loin sur les tsunamis comme exemples d'ondes solitaires.

3 - Modèle explicatif de l'onde solitaire

3-1 - L'onde solitaire comme résultant de la compensation entre l'effet de dispersion et l'effet de raidissement du front d'onde

Introduction :

Pour comprendre ce qui suit, il est indispensable d'avoir assimilé les notions abordées dans l'article de mon site « ondes de surface », et en particulier le cas d'une onde se propageant à la surface d'une étendue d'eau de profondeur finie (c'est-à-dire où la profondeur devient comparable à la longueur d'onde).
L'apparition d'une onde solitaire résulte de deux effets combinés qui se compensent :

- la dispersion de l'onde : la vitesse de propagation de l'onde dépend de la longueur d'onde. Dans le cas d'une onde de surface où l'on néglige les effets de viscosité et de tension superficielle, en profondeur finie, les ondes de petites longueurs d'onde se propagent plus vite ;

- le raidissement du front d'onde, dû au caractère non linéaire du mouvement hydrodynamique : la vitesse dépend de la profondeur, donc les masses liquides situées au sommet de l'onde se déplacent avec une vitesse différente de celles des masses liquides situées à la base de la déformation. En l'occurrence, pour une onde de surface en profondeur finie, la vitesse augmente avec l'épaisseur de la déformation, d'où il résulte que le sommet tend à se déplacer plus vite que la base de la déformation.
- l'onde solitaire se développe lorsque les deux effets précédents s'équilibrent. Le résultat est que la perturbation donne une déformation de la surface de l'eau localisée sur une largeur D et d'une amplitude A non négligeables devant la profondeur H de l'eau (figure 1).

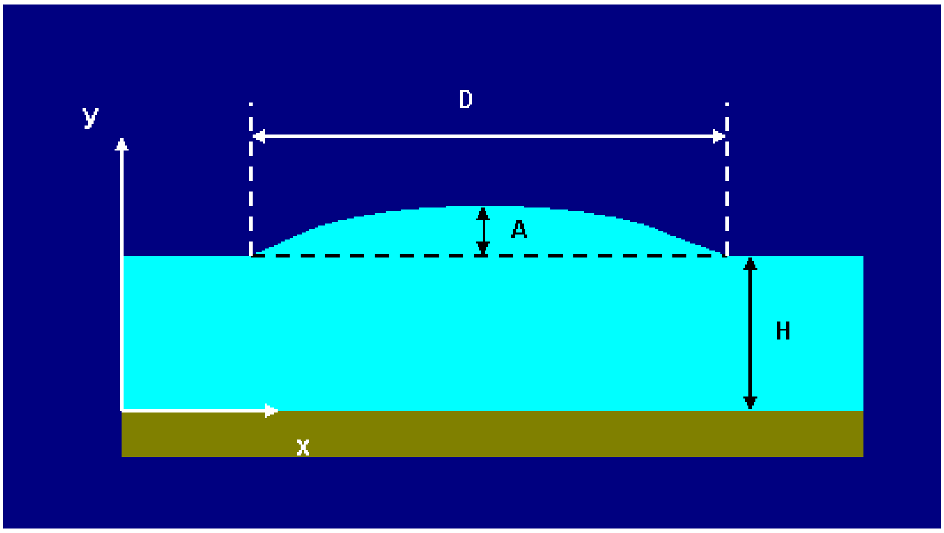


figure 1 – géométrie de l'onde solitaire

Avant d'entrer dans des calculs détaillés, essayons d'évaluer les ordres de grandeur des effets évoqués ci-dessus.

Effet de dispersion de l'onde de surface :

Reportons-nous à l'équation (19) de l'article « ondes de surface », où H est la profondeur, $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde, λ est la longueur d'onde, c(k) est la célérité de l'onde, ρ et ρ' sont les masses volumiques respectivement de l'eau et de l'air, on peut négliger celle de l'air devant celle de l'eau : $\rho' << \rho$. On a donc :

$$\omega^2 = gk.\tanh kH \quad (1)$$

En hypothèse « faible fond », kH est petit (la longueur d'onde est plus grande que la profondeur), on vérifie sans peine (exercice !) que, en faisant dans (1) le développement limité de tanh kH jusqu'à l'ordre 3 au voisinage de kH = 0, on obtient approximativement :

$$\omega^2 \approx gk^2H\,(1 - k^2H^2/3)$$

par conséquent la vitesse de phase de l'onde $c = \omega/k = [k(gH)^{1/2}(1 - k^2H^2/3)^{1/2}]$ prend l'expression approchée

$$c(k) = \sqrt{gH}\left(1 - \frac{k^2H^2}{6}\right) \quad (2)$$

L'expression (2) montre que les ondes de plus petites longueurs d'onde (k grand) se propagent moins vite que celles de grandes longueurs d'onde (k petit).
Comme les nombres d'onde qui constituent le spectre de la déformation sont compris entre 0 et 1/D (0 < k < 1/D), la différence entre la plus petite vitesse c(1/D) et la plus grande vitesse est, en utilisant (2) :

$$c(0) - c(1/D) = (gH)^{1/2} (1 - (1 - H^2/6D^2))$$

soit :

$$\Delta c = c(0) - c(1/D) = \sqrt{gH}\frac{H^2}{6D^2} \quad (3)$$

Cette étendue des vitesses est d'autant plus large que la profondeur est importante et la perturbation étroite : elle tend à étaler l'ensemble des ondes qui composent la perturbation (effet de dispersion).

Effet de raidissement du front d'onde :

D'après la relation (2), pour des kH faibles, la vitesse de l'onde croît avec l'épaisseur de la déformation : il s'ensuit que le sommet (y = H+A) se déplace plus vite que la base (y = H), créant un raidissement de l'onde (création d'un front d'onde qui peut éventuellement conduire à un déferlement) :

sommet : $c(H+A) = (g(H + A))^{1/2}$ base: $c(H) = (gH)^{1/2}$

d'où une différence des vitesses entre le sommet et la base de l'ordre de:

$$c(A+H) - c(H) \approx \frac{A}{2}\sqrt{\frac{g}{H}} \quad (4)$$

Onde solitaire : compensation des deux effets :

Si les écarts des vitesses (3) et (4) sont très différents, on ne peut pas avoir une onde régulière stable : elle se déformerait en donnant d'autres ondes du fait que la base se propage moins vite que le sommet, et que les ondes courtes sont plus lentes que les ondes longues. Si ces écarts sont du même ordre, l'étalement de l'onde dû aux effets de dispersion retarde l'apparition du front d'onde : les deux effets se compensent.
Il existe une amplitude pour laquelle cette compensation a lieu, elle est telle que l'on a égalité de (3) et (4), d'où :

$$A \approx \frac{H^3}{D^2} \quad (5)$$

Une telle amplitude sera d'autant plus facilement obtenue que la perturbation est étendue (D grand) et la profondeur faible (H petit) : c'est la condition favorable à une onde solitaire.
On s'attend donc, avec ce raisonnement qualitatif, que la vitesse de l'onde solitaire soit celle de la crête :

$$c = \sqrt{g(H+A)} \quad (6)$$

Les relations estimées (5) et (6) sont obtenues par des considérations théoriques précises que nous allons voir maintenant.

Ondes solitaires et leur déferlement sur la plage de Palavas (département de l'Hérault)

près de cette plage, l'abbaye de Maguelone de Palavas, datant du XIIème siècle ; sa dernière restauration a été réalisée par des personnes handicapées qui ont fait un travail remarquable (photos : F. Élie, avril 2009)

3-2 - Description mathématique de l'onde solitaire

Equation de base de l'onde solitaire (équation de Korteweg-De Vries) :

Comme dans l'article « ondes de surface », nous considérons une déformation de l'interface eau-air (la surface libre) pour un liquide animé d'un mouvement irrotationnel (écoulement potentiel), incompressible, non visqueux et sans effet de capillarité.
Soit H la profondeur de la masse liquide, P la pression à l'interface, ρ la masse volumique du liquide (celle de l'air est négligée devant elle), **v**(x,y,t) la vitesse de l'écoulement à la surface en un point d'abscisse x et d'altitude y, et Φ(x,y,t) le potentiel de vitesse avec **v** = **grad** Φ, nous savons que le mouvement du fluide obéit aux équations :

$$\Delta\Phi = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{P}{\rho} + g\,y = constante \quad (7)$$

avec comme conditions aux limites (figure 2):

- sur le fond y = 0, la composante verticale de la vitesse est nulle :

$$v_y\,(x, 0, t) = \partial\Phi/\partial y = 0 \qquad (8a)$$

- à la surface y = H + Y(x,t), où Y est la côte de la surface libre par rapport au plan de référence moyen situé à une distance H (profondeur) du fond pris comme origine des ordonnées Oy, on a :

- égalité de la pression avec la pression atmosphérique P = 0 dans la mesure où l'on néglige l'effet de capillarité. Avec l'équation (7), cette condition se réécrit (avec la constante prise égale à zéro):

$$\partial\Phi/\partial t + 1/2\,(\mathbf{grad}\,\Phi)^2 + Y = 0 \qquad (8b)$$

- incompressibilité du liquide : $v_y = \partial Y/\partial t + \mathbf{v}.\mathbf{grad}Y$ (8c)

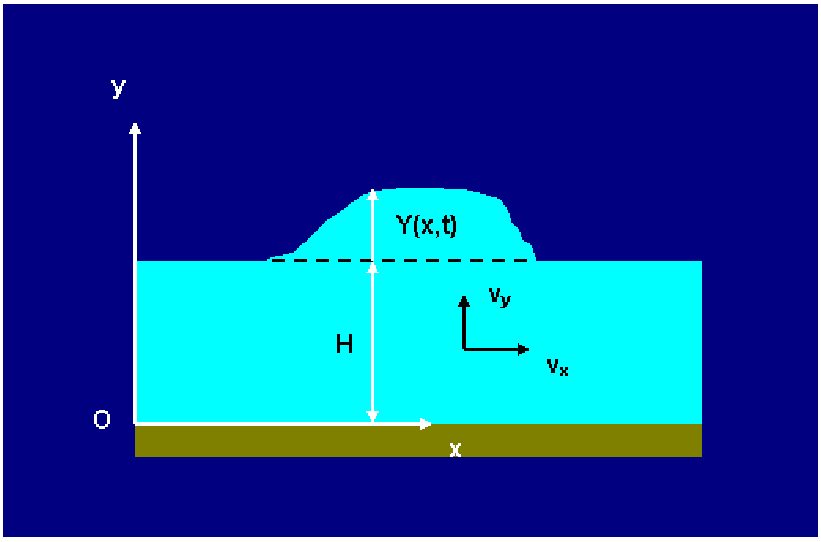


figure 2 – repères et axes

Il est commode de réécrire le système (7) et (8) en introduisant les grandeurs sans dimensions suivantes, relatives aux échelles de longueur H et de vitesse $(gH)^{1/2}$:

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{gH}}$$
$$\Phi'=\frac{\Phi}{H\sqrt{gH}}$$
$$t'=t\sqrt{\frac{g}{H}}$$
$$Y'=\frac{Y}{H}$$
$$y'=\frac{y}{H}\ ,\ x'=\frac{x}{H}$$
$$\boldsymbol{grad}'=\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'}\right)=H\,\boldsymbol{grad}$$

ce qui donne :

$$\Delta'\Phi' = 0 \quad (9)$$

- à la surface y' = 1 + Y'(x,t) :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial Y'}{\partial t'}+\mathbf{v'}.\mathbf{grad}'Y'=\dfrac{\partial \Phi'}{\partial y'}\\[2mm] \dfrac{\partial \Phi'}{\partial t'}+\dfrac{1}{2}(\mathbf{grad}'\Phi')^2+Y'=0\end{array}\right| \quad (10a)$$

qui correspondent à (8b) et (8c)

- au fond y' = 0 :

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial y'}=0 \quad (10b)$$

qui correspond à (8a)

On démontre alors (voir annexe) que les équations précédentes se réécrivent sous la forme de l'***équation de Korteweg-De Vries*** :

$$\frac{\partial Y'}{\partial t'}+\frac{3}{2}Y'\frac{\partial Y'}{\partial x'}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 Y'}{\partial x'^3}=0 \quad (11)$$

L'onde solitaire comme solution de l'équation de Korteweg-De Vries :

On cherche une solution de (11) en se plaçant dans le référentiel lié à la propagation de l'onde, donc des solutions du type Y'(x' – t'). L'équation (11) donne alors immédiatement :

$$-\frac{\partial Y'}{\partial x'}+\frac{3}{2}Y'\frac{\partial Y'}{\partial x'}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 Y'}{\partial x'^3}=0$$

qui s'intègre en cette nouvelle équation :

$$-Y'+\frac{3}{4}Y'^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 Y'}{\partial x'^2}=cste$$

La constante d'intégration doit être égale à zéro car les solutions Y' s'annulent à l'infini (ce qui signifie que l'onde est solitaire). Une astuce de calcul consiste à multiplier l'équation précédente par $\partial Y'/\partial x'$ et à intégrer le résultat :

$$-\frac{1}{2}Y'^2+\frac{1}{4}Y'^3+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial Y'}{\partial x'}\right)^2=cste=0$$

Là encore la constante d'intégration est imposée égale à zéro car les solutions s'annulent pour x' = ∞.
Les solutions de l'équation précédente vérifient alors :

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dY'}{Y'\sqrt{1-\frac{1}{2}Y'}}=x'-t'$$

On calcule aisément l'intégrale par cette autre astuce de calcul : on pose Y' = $2/\cosh^2\Psi$, d'où :

$$\Psi=-\sqrt{\frac{3}{2}}(x'-t')$$

En remplaçant Y' par se définition initiale Y = H(1 + εY'), et en revenant aux grandeurs dimensionnelles pour x' et t', on obtient alors :

$$Y=H+A\frac{1}{\cosh^2\left[\sqrt{\frac{3A}{4H^3}}\left(x-\sqrt{gH}(1+\frac{A}{2H})t\right)\right]} \quad (12)$$

où A désigne l'amplitude de l'onde, posée égale à A = 2Hε.
Le terme facteur du temps « t » dans (12) donne la vitesse de propagation de l'onde, elle vaut donc :

$$c=\sqrt{gH}\left(1+\frac{A}{2H}\right) \quad (13)$$

A partir de (13) on retrouve la valeur pressentie de la vitesse de l'onde donnée par (6) dans le cas de l'eau peu profonde, puisque :

$$\sqrt{g(H+A)}\approx\sqrt{gH}(1+\frac{A}{2H})$$

D'autre part, dans l'expression (12), le terme qui est en facteur de x donne l'inverse de la largeur de l'onde, c'est-à-dire l'inverse 1/D de la largeur de la bosse :

$$D=\sqrt{\frac{4H^3}{3A}} \quad (14)$$

On remarque là aussi, avec satisfaction, que cette expression (14) est cohérente, en ordre de grandeur, avec l'expression (5) obtenue de manière heuristique qui donnait la relation entre l'amplitude de l'onde, la largeur de sa bosse et la profondeur.

REMARQUE – Non linéarité et discontinuité :

L'équation de Korteweg-De Vries (11) a fait l'objet d'études mathématiques détaillées (rapportées par exemple dans M. Rieutord, voir référence en bibliographie). Je ne les reprendrai pas ici, signalant seulement qu'elles permettent de comprendre que le terme d'ordre 3 dans l'équation ($\partial^3 Y'/\partial x'^3$) est lié à l'existence de la dispersion des ondes pour un liquide de profondeur finie, et que le terme non linéaire $Y'\partial Y'/\partial x'$ est lié à l'existence d'une discontinuité : l'onde solitaire apparaît lorsqu'il y a une discontinuité dans la vitesse dx'/dt' = 3/2 Y', passant de 0 lorsque Y' = 0 (pas de déformation), à une valeur finie lorsque Y' > 0. L'étude montre alors que l'équation de Karteweg-De Vries dans laquelle seul intervient le terme non linéaire est analogue à l'équation de Burgers (qui est l'équation de Navier-Stokes où le terme de pression est négligé), dans laquelle la viscosité est nulle, et que ce type d'équation a toujours des solutions qui présentent des discontinuités.

3-3 - Tsunamis et mascarets

Rôle de la profondeur et tsunamis :

La vitesse de l'onde solitaire est plus élevée en eau profonde qu'en faible fond (équation (13)). Si l'on considère une onde d'extension infinie suivant la direction Oz (c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation), le produit AD représente, en ordre de grandeur le volume de la masse d'eau qui se propage. Avec (14), ce volume (par unité de longueur transversale) est donc égal, en ordre de grandeur, à :

$$V \approx AD \approx (AH^3)^{1/2}$$

Le fluide étant incompressible (aux échelles qui nous intéressent), cette quantité V se conserve, l'amplitude de l'onde (la hauteur de la vague) croît comme $1/H^3$. En eau profonde la vague aura alors une faible hauteur, tandis que, lorsqu'elle se rapproche des côtes, où la profondeur diminue à cause du talus continental, la hauteur va augmenter considérablement. L'amplitude étant très importante, les conditions de compensation entre les effets de dispersion et de raidissement du front d'onde ne sont plus assurées : le sommet de la vague avance plus vite que sa base, créant une instabilité dans l'énergie potentielle qui est responsable du déferlement de la vague.
C'est ce qui se passe pour les tsunamis. Le déferlement se fait avec une puissance telle que la masse d'eau peut submerger temporairement les zones côtières sur plusieurs kilomètres à l'intérieur.
Une onde solitaire peut se propager sans faiblir sur des milliers de kilomètres à la surface d'un océan relativement profond, car elle est pratiquement pas amortie. Ainsi, pour un océan de profondeur moyenne H = 3000 m, la célérité de l'onde peut être de l'ordre de 600 km/h. Par exemple, lors du séisme de Sumatra le 26 décembre 2004, l'onde de surface a mis 8 heures pour traverser l'Océan Indien et atteindre les côtes africaines orientales.
S'agissant de l'amplitude près des côtes, des ondes de quelques mètres en pleine mer peuvent atteindre des hauteurs de 30 mètres (voire exceptionnellement 60 mètres !).

On observe, et on démontre que, à l'approche des côtes, lorsque la profondeur diminue, le mouvement de l'onde solitaire devient plus complexe : à son mouvement de translation se superpose un mouvement d'oscillation horizontale suivant l'axe Ox, de part et d'autre de la position moyenne du sommet de la bosse. Ce mouvement supplémentaire s'appelle le « courant de Stokes ». La vitesse des oscillations est égale à :

$$c' = 2c\,(A/2H)^2$$

Cette vitesse du courant de Stokes peut être très importante, de l'ordre de plusieurs dizaines de km/h. L'énergie cinétique qu'elle véhicule (proportionnelle au carré de cette vitesse) est le principal responsable des dégâts occasionnés sur les zones côtières. Compte tenu de la conservation du volume linéique de la vague, la relation précédente montre que la vitesse du courant de Stokes augmente très rapidement lorsque la profondeur diminue.

Arrivée du tsunami du 26 décembre 2004 à Malé, capitale des îles Maldives (source : Wikipedia)

Magnitude des tsunamis :

Il existe différentes magnitudes pour mesurer l'importance d'un tsunami. Citons par exemple la classification de Imamura et Iida, fondée sur la hauteur maximale théorique des vagues à la côte Hm, et qui prévoit 6 niveaux :

$$Hm \text{ (mètres)} = \frac{1}{2} \exp (M), \text{ M étant la magnitude}$$

M	description
-1	tsunami mineur
0	au large, vagues de 10 cm, sur la côte hauteur de 1m – pas de dégâts
1	au large, hauteur des vagues 25 cm, sur la côte 2à 3m – quelques dégâts aux bateaux et maisons
2	au large, hauteur des vagues 50 cm, sur la côte 7 m – dégâts importants, victimes humaines
3	au large, hauteur des vagues 1 m, sur la côte 20 m – côtes détruites sur 200 km
4	au large, hauteur des vagues 2 m, sur la côte > 30 m – côtes détruites sur 500 km

Mascarets :

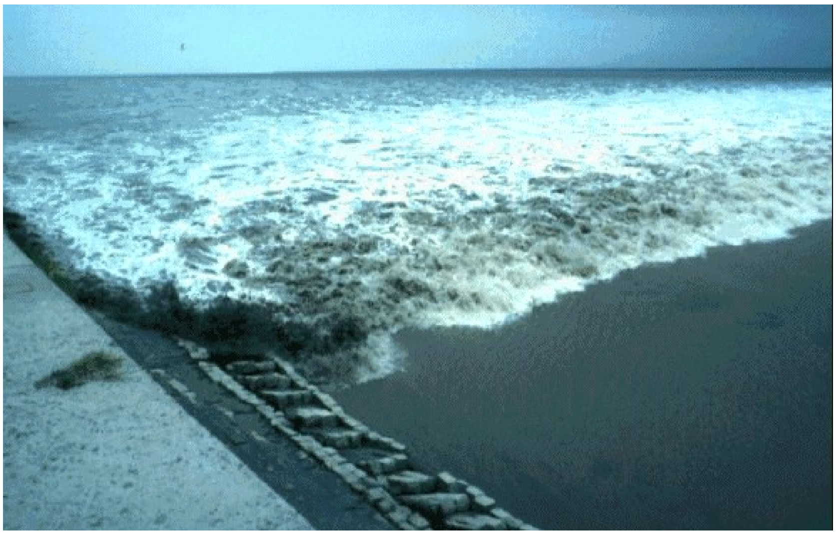
Lorsque la marée remonte, ou flot (voir article sur les marées dans ce site), l'onde de marée qui entre dans un estuaire ralentit du fait de la diminution de la profondeur (comme indiqué dans l'article sur les ondes de surface). Il se produit donc une accumulation de masse d'eau en provenance de l'océan, les ondes qui suivent rattrapant les premières. Le résultat est la formation d'une onde d'une hauteur supérieure à celle de l'eau de l'estuaire, qui se propage en sens inverse des eaux provenant du fleuve. La différence de hauteur conduit à la formation d'un ressaut hydraulique (voir article sur le ressaut hydraulique), et l'onde de marée déferle généralement à l'entrée de l'estuaire. Le ressaut hydraulique remonte l'estuaire en s'atténuant progressivement et finit par donner lieu à un train d'ondes solitaires.

Pour qu'il y ait formation d'un mascaret il faut donc :

- un estuaire qui se rétrécit assez rapidement,
- un estuaire présentant une forte pente à son embouchure (pour que l'amplitude des eaux varie fortement, avec même un déferlement) suivie d'une pente très faible vers l'intérieur (pour que l'onde conserve ensuite sa vitesse et son amplitude,
- une embouchure de faible capacité, donc incapable de recevoir la quantité des eaux issues de la marée montante.

Les principaux exemples de mascarets, avant que ne fussent aménagés les abords des estuaires, sont :

- Angleterre : le Severn près de Bristol
- Chine : le Qiantang
- Alaska : Turnagain Arm près d'Anchorage
- Inde : le Gange
- Fleuve Amazone : le Pororoca
- Brésil : Rio Araguari
- France: embouchure de la Garonne (Gironde)



mascaret du fleuve Qiantang en Chine, un des plus spectaculaires au monde
(caractéristiques : vague de 9 m de haut, vitesse 40 km/h)
source : http://lettres-histoire.ac-rouen.fr/histgeo/mascarets.htm

4 - Expérience

J'ai essayé de produire une onde solitaire afin de vérifier, à l'aide d'un camescope, si je pouvais retrouver les valeurs théoriques de la vitesse de l'onde ainsi que la largeur de la vague (équations (13) et (14)).
La question principale était alors : comment produire une telle onde dans une cuve rectangulaire de dimensions finies ? C'est le récit de Scott Russell qui m'inspira la réponse : à l'aide d'un objet plan (telle une règle plate), de même largeur que la cuve, provoquer un mouvement de translation subitement arrêté au bout de quelques centimètres de déplacement de la règle. Cette perturbation de la surface de l'eau était comparable à celle qui consistait à arrêter rapidement le halage du bateau par les chevaux situés de part et d'autre de la rivière sur la berge (voir figure 3).

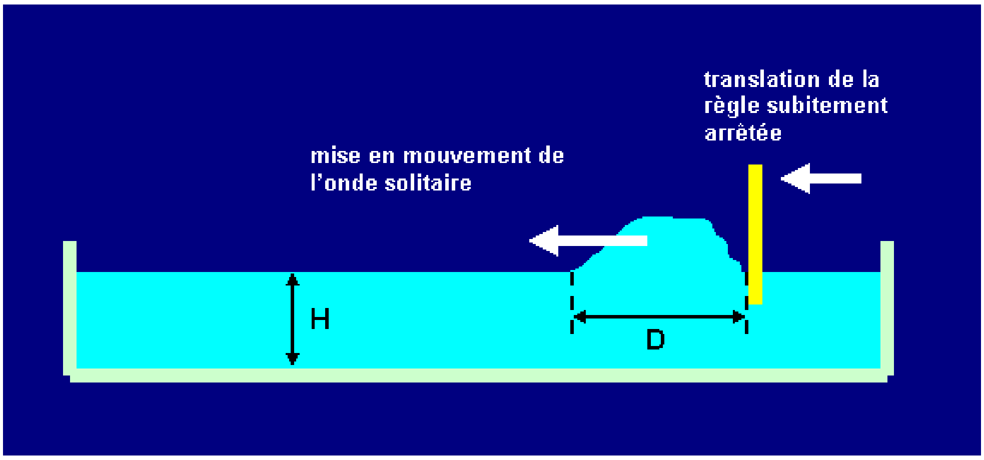
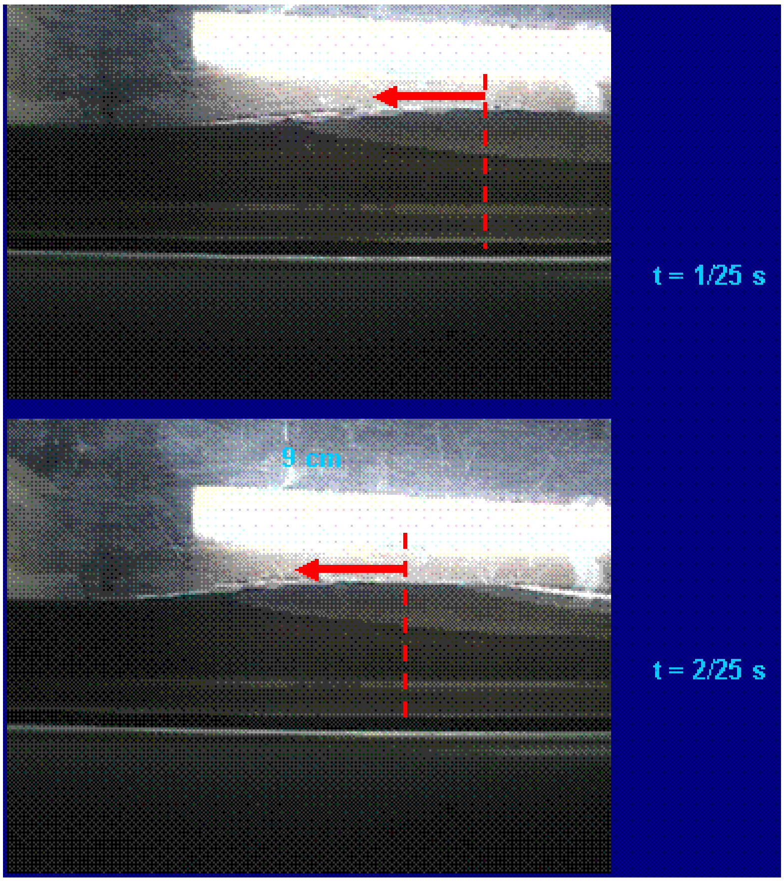
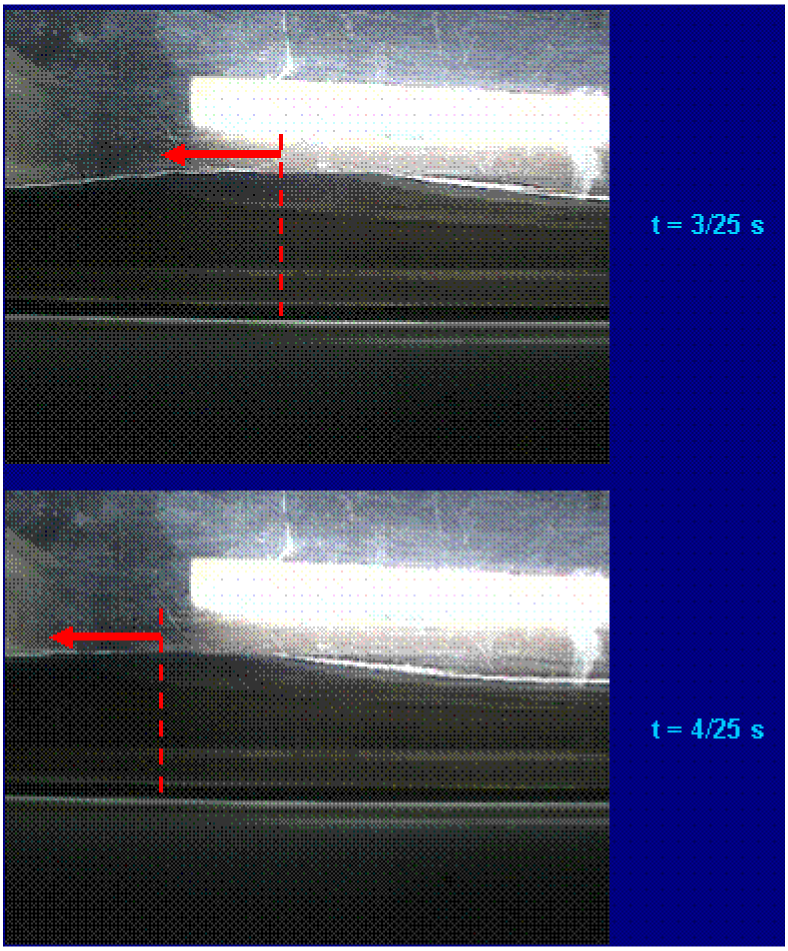


figure 3 – dispositif expérimental

Le résultat obtenu n'est pas trop mal, qualitativement : les photos suivantes (figure 4), espacées de 1/25 seconde, montrent une onde solitaire qui se propage de manière assez uniforme. La position du camescope était telle que le champ filmé avait une longueur de 9 cm. Entre l'entrée de l'onde dans le champ et sa sortie du champ il y eut 6 images, soit une durée de 6/25 = t = 0,24 seconde pour parcourir x = 9 cm, ce qui donne une vitesse de c = x/t = 0,375 m/s. La profondeur de l'eau dans la cuve était H = 1,5 cm. Bien entendu, les premières images devaient être obtenues avant que l'onde se réfléchisse sur la paroi opposée.


t = 1/25 s
9 cm
t = 2/25 s


t = 3/25 s
t = 4/25 s

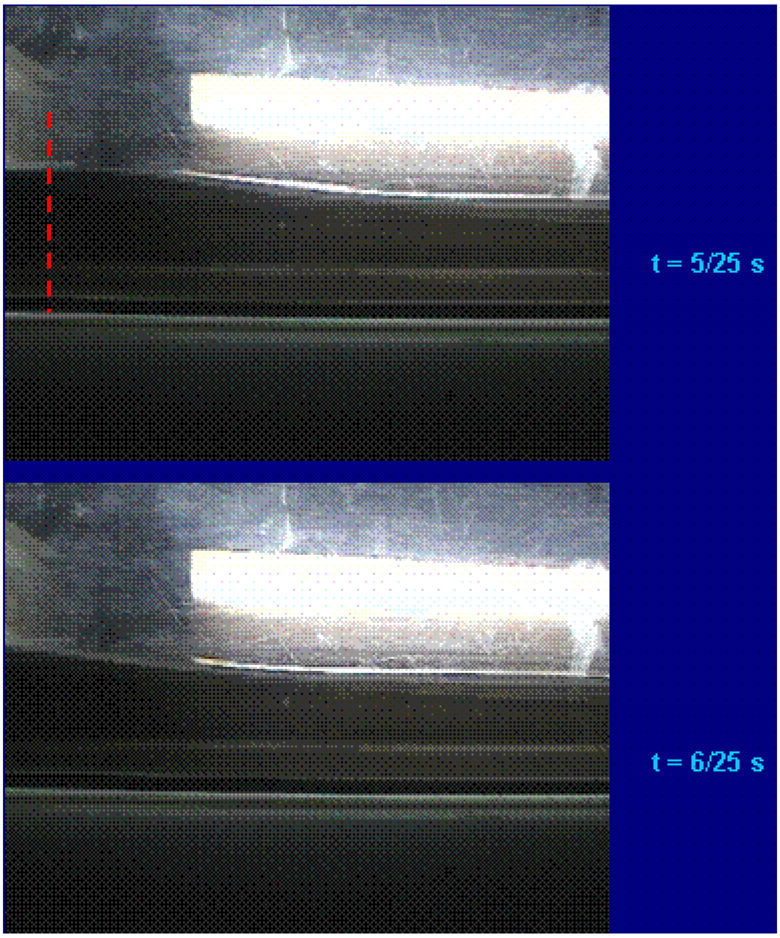


figure 4 – création d'une onde solitaire dans une cuve rectangulaire
(photos : F. Elie)

L'exploitation géométrique des images donne comme amplitude de l'onde environ A = 4 mm, et comme largeur de la bosse environ D = 5 cm. L'utilisation des formules (13) et (14) pour la vitesse de l'onde et l'amplitude donne comme valeurs théoriques :

- célérité de l'onde $c = (9{,}81 \times 0{,}015)^{1/2} (1 + 0{,}004/2/0{,}015) = 0{,}436$ m/s (à comparer avec la valeur estimée 0,375 m/s) ;
- largeur de la bosse $D = (4 \times 0{,}015^3/3/0{,}004)^{1/2} = 0{,}034$ m = 3,4 cm (à comparer avec la valeur estimée 5 cm).

Considérant les imprécisions de la manipulation effectuée (règle pas parallèle à la face de la cuve, irrégularité dans la mise en impulsion de la règle et de son arrêt, erreurs d'évaluations visuelles et de mesure du temps, etc.), les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs « observées » ne sont pas surprenants : mais nous avons des ordres de grandeur satisfaisants. Ce qui importe ici, c'est que, après avoir pris conscience des imprécisions de l'expérience, nous ayons touché du doigt les arguments théoriques expliquant l'onde solitaire.

Annexe : Obtention de l'équation Korteweg-De Vries

On cherche à établir les équations (9) et (10) par l'emploi de petites perturbations, dans le domaine faiblement non-linéaire et peu dispersif (grandes longueurs d'onde) où la compensation des effets de dispersion et de raidissement de l'onde est la plus facile à obtenir.
Dans le référentiel qui se déplace avec elle, l'onde solitaire est stationnaire, en première approximation. Dans ce référentiel on cherche donc des solutions sur des grandes échelles de temps, en employant les changements de variables suivants :

$$Y^* = \varepsilon Y'$$

$$x^* = \varepsilon^{1/2}.(x' - t')$$
$$t^* = \varepsilon^{3/2} t'$$
$$\Phi^* = \varepsilon^{1/2}\,\Phi$$

d'où les équations :

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y'^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{(A1.1)}$$

qui correspond à (9)

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon^2 \left(\dfrac{\partial Y^*}{\partial t^*} + \dfrac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \dfrac{\partial Y^*}{\partial x^*} \right) - \varepsilon \dfrac{\partial Y^*}{\partial x^*} = \dfrac{\partial \Phi^*}{\partial y'} \\ \varepsilon \dfrac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} - \dfrac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi^*}{\partial y'} \right)^2 + \dfrac{\varepsilon}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right)^2 + Y^* = 0 \end{array}\right| \quad \text{(A1.2)}$$

qui correspond aux conditions (10a)

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial y'} = 0 \quad \text{(A1.3)}$$

qui correspond à la condition (10b)

où ε représente une petite perturbation. Les grandeurs Y* et Φ* sont alors développées en puissances de cette perturbation ε :

$$\Phi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x^*, y', t^*)\varepsilon^n$$
$$Y^* = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x^*, t^*)\varepsilon^n$$

L'injection de ces développements dans (A1.1) donne alors pour les premiers ordres n = 0, 1, 2… :

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y'^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^{*2}}$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^{*2}} = 0$$

la condition aux limites (A1.3) pour y' = 0 donne alors

$$\Phi^* = f_0(x^*, t^*) + \varepsilon \left(f_1(x^*, t^*) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{*2}} y'^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^{*4}} \frac{y'^4}{24} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^{*2}} \frac{y'^2}{2} + f_2(x^*, t^*) \right) + \ldots$$

où les f_k (x*, t*) sont des fonctions inconnues. Les conditions (A1.2) donnent

- au premier ordre en ε:

$$\frac{\partial Y_0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{*2}}$$

- au deuxième ordre :

$$\frac{\partial Y_0}{\partial t^*}+\frac{\partial f_0}{\partial x^*}\frac{\partial Y_0}{\partial x^*}-\frac{\partial f_1}{\partial x^*}=-\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{*2}}Y_0+\frac{1}{6}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^{*4}}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^{*2}}$$

ainsi que :

- à l'ordre zéro :

$$Y_0=\frac{\partial f_0}{\partial x^*}$$

- au premier ordre :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t^*}-\frac{\partial f_1}{\partial x^*}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^{*3}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^{*2}}+f_1=0$$

En combinant les trois équations précédentes, on obtient l'équation pour l'ordre zéro du développement de Y*, f_0, qui conduit à l'équation (11) pour Y' après transformation inverse des variables.

Bibliographie

sur la théorie des ondes solitaires :

- L. Landau, E. Lifchitz : Physique théorique, Mécanique des Fluides – éd. Mir, traduction française Ellipse, 1994
- M. Rieutord : Une introduction à la dynamique des fluides – Masson 1997
- E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit : Hydrodynamique physique – Savoirs actuels, CNRS éd., EDP Sciences, 2001
- sous la direction de M. Hug : Mécanique des fluides appliquée – Eyrolles, 1975

sur le grand tsunami de Sumatra (26 décembre 2004) :

- http://www.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/s1/tsunami.sumatra.htm
- Ablain, M., J. Dorandeu, P-Y. Le Traon, A. Sladen, The Indian Ocean Tsunami of December 26, 2004, High Resolution Altimetry Reveals New Characteristics of the December 2004 Indian Ocean, Tsunami, Geophys. Res. Lett., 33 (21), 2006.
- Ablain, M., J. Dorandeu, P-Y. Le Traon, A. Sladen, The Indian Ocean Tsunami of December 26, 2004, Observed by Multi-satellite Altimetry, 15 years of progress in radar altimetry Symposium, Venice, Italy, 2006.

sur les tsunamis :

- http://www.insu.cnrs.fr/a1279,tsunami.html
- Smith, W.H.F., R. Scharroo, V.V. Titov, D. Arcas, and B.K. Arbic, Satellite altimeters measure tsunami. Oceanography, 18(2), 11-13, 2005.
- Okal, E., A. Piatanesi, and P. Heinrich, Tsunami detection by satellite altimetry. J. Geophys. Res. 104 (B1), 1999.
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Tsunami
- Centre International d'Information sur les tsunamis (CIIT), Commission océanographique intergouvernementale (UNESCO) : *Glossaire sur les tsunamis*
- Abe, K., Size of great earthquakes of 1837-1974 inferred from tsunami data, J. Geophys. Res., 84, 1561-1568, 1979.
- Abe, K., Physical size of tsunamigenic earthquakes of the northwestern Pacific, Phys. Earth Plantet. Inter., 27, 194-205, 1981.

- Ambraseys, N.N., Data for the investigation of the seismic sea-waves in the Eastern Mediterranean, BSSA (p. 895-913) , 1962.
- Iida, K., D.C. Cox and G. Pararas-Carayannis, Preliminary catalog of tsunamis occurring in the Pacific Ocean, Data Report No. 5, HIG-67-10, Hawaii Institute of Geophysics, University of Hawaii, August, 1-270, 1967.
- Kanamori, H. Mechanism of tsunami earthquakes, Phys. Earth Plantet. Inter., 6, 346-359, 1972.
- International Conference on Tsunamis (Conférence internationale sur les tsunamis), Paris , France 1998, CEA, 1999.
- Numerical modeling of water waves, Mader, C. L., Los Alamos series in basic and applied sciences, 1988.
- Seismic Sea Waves Tsunamis , T. S. Murty Fisheries and Environment, bulletin n° 198, Canada, 1977.
- Tsunamis in the World. Fifteenth International Tsunami Symposium (1991), Advances in Natural and Technological Hazards Research, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Tsunamis : Their Science and Engineering, International Tsunami Symposium (1981), Advances in Earth and Planetary Sciences, D. Reidel Publishing Company, 1983.
- Tsunamis : 1992-1994, Their generation, dynamics, and hazard, Pure and Applied Geophysics, 144, 1995.
- Tsunami (2nd edition) W. Dudley and Min Lee's (University of Hawaii Press, 1998).
- Tsunamigenic earthquakes and their consequences, Advances in GEOPHYSICS, vol. 39, Academic press, 1998.

sur les mascarets:

- http://lettres-histoire.ac-rouen.fr/histgeo/mascarets.htm