ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Ondes de surface des liquides

Frédéric Élie

février 2009

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Dans cet article sont exposés les éléments théoriques qui modélisent les ondes qui se développent à la surface libre des liquides. L'exemple le plus courant est évidemment les vagues ou les rides qui se propagent dans une mare lorsqu'on y jette un caillou. Nous distinguons les cas où la profondeur peut être considérée infinie (par rapport aux longueurs d'onde) ou bien finie, voire faible, et nous traitons aussi de l'influence des effets de capillarité sur la propagation des ondes. Ces modèles nous montrent que dans la plupart des cas, les ondes sont dispersives, c'est-à-dire que leur vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde.
En seconde partie, des essais effectués « sur un coin de table » n'ont pas d'autre ambition que celle d'illustrer concrètement ces différents cas et de se confronter à ces phénomènes. Malgré le côté rudimentaire de la méthode, et l'approximation des résultats, l'existence de ces différentes configurations peut être convaincante.
Comme c'est l'habitude dans ce site, au fond, on peut se forger une conviction théorique sur des faits que l'on peut toucher du doigt, même, et c'est ce qui importe, on peut raisonner juste sur des opérations approximatives dès lors que l'on est conscient de leurs limites et de leurs imperfections.

SOMMAIRE

1 - Ondes de gravité de surface
1-1 - Origine des ondes de surface d'un liquide
1-2 - Ondes de surface pour un liquide de profondeur infinie
1-3 - Ondes de surface pour un liquide de profondeur finie
1-4 - Effets de la tension superficielle : ondes capillaires
2 - Expérimentation sommaire
2-1 - Essai n°1 : ondes de surface en eau peu profonde avec effet de tension superficielle (ondes capillaires)
2-2 - Essai n°2 : ondes de surface en eau peu profonde sans effet de tension superficielle
2-3 - Essai n°3 : ondes de surface en eau profonde sans effet de tension superficielle
2-4 - Essai n°4 : ondes de surface en eau profonde avec effet de tension superficielle
2-5 - Conclusion
Annexe 1 : Grands fonds et petits fonds
Annexe 2 - Comportement ondulatoire des perturbations de la surface libre
Bibliographie

1 - Ondes de gravité de surface

1-1 - Origine des ondes de surface d'un liquide

Les ondes de gravité à la surface d'un liquide sont des vagues qui se propagent à la surface du liquide, sous l'action de diverses impulsions : énergie du vent pour les vagues de la mer, perturbations apportées par des obstacles ou des apports d'énergie dus par exemple à la chute d'un corps dans l'eau. On dit de ces ondes qu'elles sont « de gravité » parce que la seule force extérieure qui est considérée dans leurs dynamiques est la pesanteur, les autres forces, telles les forces de viscosité ou les forces de tension superficielle, sont négligeables (sous certaines conditions).
Lorsqu'une onde se propage, ce n'est pas un déplacement de matière, mais c'est une variation de l'état dynamique (énergie, pression, amplitude, etc.) en fonction du lieu et du temps considérés pour une partie du liquide, cette variation étant périodique dans le temps et dans l'espace. La perturbation de l'état dynamique du liquide se propageant de manière périodique, l'intervalle temporel et l'intervalle spatial au bout desquels le liquide se retrouve dans un même état dynamique sont respectivement la période et la longueur d'onde. La vitesse de propagation de l'état dynamique perturbé est la vitesse de phase, elle est égale au rapport de la longueur d'onde à la période. Si cette vitesse de phase dépend de la longueur d'onde, l'onde est dite dispersive : dans ce cas, pour une même période il existe plusieurs modes de propagation. Dans le cas contraire, l'onde est non dispersive : une longueur d'onde est associée de manière univoque à une période.

Les perturbations superficielles de l'eau que sont les ondes de gravité de surface correspondent aux variations de l'état dynamique (et géométrique) de la surface. Nous allons voir que ce sont des ondes dispersives lorsque la profondeur de l'eau est importante, et très dispersives lorsque les effets de tension superficielle (forces capillaires) ne peuvent plus être négligés. En revanche, elles sont non dispersives pour les couches d'eau de faible épaisseur (longueur d'onde grande devant la profondeur).
L'annexe 1 donne les critères qui permettent de considérer dans quels cas l'on se trouve dans un régime de grands fonds ou de petits fonds pour la propagation des ondes de surface.

Dans tout ce qui suit, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- le fluide est incompressible,
- l'écoulement est irrotationnel, autrement dit la vitesse d'écoulement dérive d'un potentiel scalaire appelé potentiel des vitesses,
- la surface sépare deux fluides : l'air et l'eau. Chacun des fluides est supposé respecter les deux hypothèses ci-dessus. Si l'origine des altitudes est fixée à z = 0, correspondant à la position au repos du fluide, la surface du liquide est définie par sa cote h (x, y, t) par rapport à l'origine z = 0, et évolue avec les coordonnées (x, y) et le temps t. Si l'on suppose que la propagation de l'onde s'effectue dans le sens Ox, de la même manière quelle que soit sa position suivant Oy, on considère que la surface est définie par h(x, t).

La géométrie du problème est représentée en figure 1 ; les altitudes sont comptées suivant l'axe vertical Oz, positivement vers le haut. L'eau est contenue dans le domaine z < 0, et l'air dans le domaine z > 0.
Renvoyant aux articles « chant de cascade » ou « transports atmosphériques » de ce site pour les démonstrations, les hypothèses ci-dessus conduisent à écrire pour l'eau et l'air séparés par la surface :

$$\text{pour l'eau : } \nabla^2\Phi = 0 \qquad (1)$$
$$\partial\Phi/\partial t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}^2 + P/\rho + gh(x, t) = \text{constante} \qquad (2)$$

$$\text{pour l'air : } \nabla^2\Phi' = 0 \qquad (3)$$
$$\partial\Phi'/\partial t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v'}^2 + P'/\rho' + gh(x, t) = \text{constante} \qquad (4)$$

expressions dans lesquelles Φ et Φ' désignent les potentiels de vitesse dans l'eau et l'air, donc tels que **v** = **grad** Φ et **v'** = **grad** Φ' pour les vitesses d'écoulement de l'eau **v** et de l'air **v'** ; P et P' sont les pressions statiques dans l'eau et l'air juste de part et d'autre de la surface, ρ et ρ' leurs masses volumiques, g est l'accélération de la pesanteur et h(x, t) l'altitude d'un point de la surface par rapport à une référence z = 0 correspondant à la position de repos de l'interface air-eau.

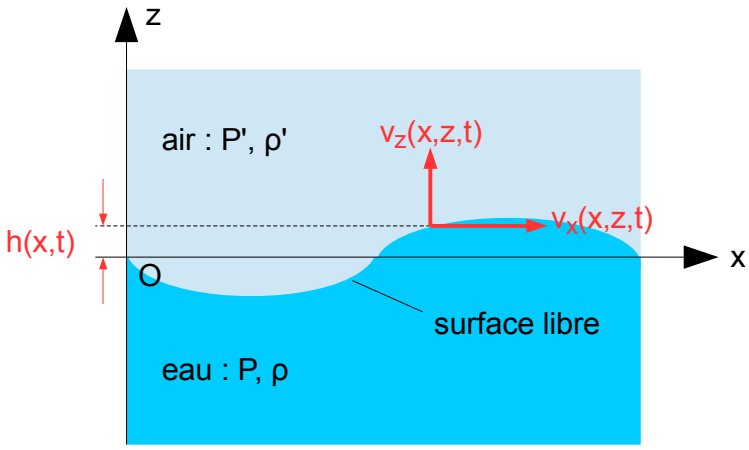

figure 1 – géométrie pour la modélisation de l'onde de surface

Établissons le lien entre le potentiel de vitesse et la variation de la surface air-eau. Pour cela on remarque que la composante suivant Oz de la vitesse du fluide, v_Z (x, z, t), est directement donnée par :

$$v_Z(t) = dh(x,t)/dt = \partial h/\partial t + \partial h/\partial x.dx/dt = \partial h/\partial t + v_X.\,\partial h/\partial x$$

puisque la composante de la vitesse suivant Ox est $v_X = dx/dt$.

Par hypothèse, on suppose que les variations de la surface libre suivant Ox sont négligeables devant celles suivant Oz, par conséquent on a au premier ordre : $v_X.\,\partial h/\partial x << 1$ et donc $v_Z(t) \approx \partial h/\partial t$.

Comme $v_Z = \partial\Phi/\partial z$, il vient pour l'eau en z = 0 (à la surface libre) :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5)$$

De même pour l'air en z = 0, on a également :

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6)$$

autrement dit $(\partial\Phi/\partial z)_{Z=0} = (\partial\Phi'/\partial z)_{Z=0}$.

On cherche des régimes ondulatoires (voir les raisons en annexe 2), donc les potentiels de vitesse et la déformation de la surface cherchés doivent vérifier :

$$\Phi(x, z, t) = A(z)\exp j(kx - \omega t) \quad (7a)$$
$$\Phi'(x, z, t) = A'(z)\exp j(kx - \omega t) \quad (7b)$$
$$h(x, t) = s_0 \exp j(kx - \omega t) \quad (7c)$$

Les équations de Laplace (1) et (3) des potentiels de vitesse de l'eau et de l'air entraînent

donc les équations sur leurs amplitudes : (7a) et (7b) donnent :

$$d^2A/dz^2 - k^2A = 0 \quad (8a)$$
$$d^2A'/dz^2 - k^2A' = 0 \quad (8b)$$

Les équations (8a et b) ont pour solutions générales:

$$A(z) = a.\exp kz + b.\exp -kz \quad (9a)$$
$$A'(z) = a'.\exp -kz + b'.\exp kz \quad (9b)$$

La résolution s'achève en fonction des données géométriques du problème : eau de profondeur infinie, ou eau de profondeur faible. Selon ces cas, le potentiel des vitesses aura une certaine forme qui, injectée dans les équations de conservation (2) et (4), compte tenu de (7c), conduiront aux relations entre la fréquence ω et le nombre d'onde k (relation de dispersion), et donc à la vitesse de phase de l'onde (célérité de propagation des perturbations du liquide) $c = \omega/k$.
Si c est constante, l'onde est non dispersive ; si à l'inverse elle dépend de la longueur d'onde ($c = c(k)$), l'onde est dispersive (on rappelle que la longueur d'onde λ est reliée au nombre d'onde k par : $k = 2\pi/\lambda$).
Ce sont ces deux types de propagation (en eau de profondeur infinie et en eau de faible profondeur) que nous allons examiner maintenant.

1-2 - Ondes de surface pour un liquide de profondeur infinie

Dans l'air, le potentiel de vitesse s'annule à distance infinie de la surface donc on a toujours :

$$A'(z) = a'.\exp -kz \quad (10)$$

Pour l'eau, si l'on se place dans l'hypothèse d'une profondeur infinie, cela entraîne que le potentiel des vitesses (9b) doit s'annuler pour $z = -\infty$, donc que $b' = 0$, ainsi l'on a :

$$A(z) = a.\exp kz \quad (11)$$

où l'on rappelle que dans l'eau $z < 0$.
Appliquons (5) et (6), compte tenu des expressions (8), (10) et (11). Il vient, en z = 0 (interface air-eau) :

$$(dA/dz)_{Z=0} = kA(0)$$
$$(dA'/dz)_{Z=0} = -kA'(0)$$
$$kA(0) = -j\omega s_0 = -kA'(0), \text{ donc } A'(0) = -A(0) \quad (12)$$

On en déduit immédiatement que les carrés des vitesses v^2 et v'^2 dans l'eau et l'air sont égaux; en effet:

$$v^2 = v_X^2 + v_Z^2 \approx v_Z^2 = (\partial\Phi/\partial z)^2_{Z=0} = (\partial h/\partial t)^2 = (-j\omega s_0)^2 = \omega^2 s_0^2 = v'^2$$

soit: $v = v'$

Par ailleurs, il y a continuité des pressions à l'interface air-eau, donc P = P' en z = 0. Il s'ensuit que les relations (2) et (4) deviennent :

$$-\rho\omega^2 s_0/k + \rho g s_0 = \rho'\omega^2 s_0/k + \rho' g s_0$$

d'où la relation de dispersion:

$$\omega^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} g\, k \quad (13)$$

En pratique, la masse volumique de l'air ρ' = 1,3 kg/m^3 peut être négligée devant celle de l'eau ρ = 1000 kg/m^3, de sorte que la relation (13) se simplifie en :

$$\omega = \sqrt{g\, k} \quad (14)$$

La vitesse de phase est alors :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\pi}} \quad (15)$$

La relation (15) montre que les ondes de surface pour un liquide de profondeur infinie, c'est-à-dire en pratique de profondeur très grande devant les longueurs d'onde, sont dispersives : les ondes les plus rapides sont celles qui ont une grande longueur d'onde.

1-3 - Ondes de surface pour un liquide de profondeur finie

En présence d'une eau peu profonde, on ne peut plus considérer l'annulation du potentiel des vitesses à l'infini. Si le fond est à une profondeur z = -H de la surface, on doit utiliser la forme complète (9a) pour la vitesse de l'eau avec comme condition aux limites l'annulation de la vitesse sur le fond :

$$A(z) = a.\exp kz + b.\exp -kz \quad (9a)$$
$$v_Z = 0 \text{ pour } z = -H \quad (16)$$

Comme $v_Z(x, z, t) = \partial\Phi/\partial z$ avec $\Phi(x, z, t)$ donné par (7a), $\Phi(x, z, t) = A(z) \exp j(kx - \omega t)$, et compte tenu de (9a), on a pour la vitesse :

$$v_Z(x, z, t) = (dA/dz) \exp j(kx - \omega t)$$
$$\text{avec : } dA/dz = k(a.\exp kz - b.\exp -kz)$$

La condition aux limites (16) donne : $(dA/dz)_{Z=-H}$ soit $a.\exp -kH = b.\exp kH$, d'où l'amplitude du potentiel de vitesse :

$$A(z) = 2b(H).\exp kH.\cosh(k(z+H))$$

que l'on réécrit ainsi:

$$A(z) = B(H).\cosh(k(z+H)) \quad (17)$$

où l'amplitude $B(H) = 2b(H)\exp kH$, dépend de la profondeur H et doit tendre vers 0 lorsque celle-ci devient infinie ($H \rightarrow \infty$).
A la surface, les relations (5) et (6) sont toujours valables :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Le potentiel des vitesses étant toujours exprimé par (10) pour l'air, soit $\Phi'(z) = A'.\exp -kz$, et appliquant les relations (7c) pour h(x,t) et (17) pour A(z), les conditions sur la pression (2) et (4), et les relations (5) et (6) deviennent respectivement:

pour l'eau : $$\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} + P(0) + \rho g\, h(x,t) = cste \;\rightarrow\; -j\rho B\omega \cosh kH + P(0) + \rho g\, s_0 = cste \quad (18a)$$

pour l'air : $$\rho'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)_{z=0} + P'(0) + \rho' g\, h(x,t) = cste \;\rightarrow\; -j\rho' a'\omega + P'(0) + \rho' g\, s_0 = cste \quad (18b)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0} \rightarrow k B \sinh k H = -j\omega s_0 = -k a' \rightarrow s_0 = \frac{j k B \sinh k H}{\omega} \qquad (18c)$$

En soustrayant les expressions (18a) et (18b), les pressions P(0) et P'(0) étant la même à la surface, et tenant compte de (18c), on obtient :

$$-\rho\omega^2 \cosh kH + \rho g k \sinh kH = \rho' \omega^2 \sinh kH + \rho' g k \sinh kH$$

que l'on réarrange en :

$$\omega^2 = g k \frac{(\rho - \rho') \tanh k H}{\rho + \rho' \tanh k H} \qquad (19)$$

C'est la relation de dispersion des ondes de surface de gravité en eau de faible fond.
Cette relation se simplifie selon l'importance relative de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et de la profondeur H.Pour des longueurs d'onde très courtes devant la profondeur , donc pour $kH >> 1$, on a $\tanh kH \approx 1$ et (19) se réduit à :

$$\omega^2 = g k \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

qui est la relation de dispersion (13) vue précédemment pour le cas des fonds infinis : les ondes sont dispersives.
Pour des longueurs d'onde grandes devant la profondeur, donc pour $kH << 1$, on a $\tanh kH \approx kH$, et (19) devient :

$$\omega^2 = g k \frac{(\rho - \rho') k H}{\rho + \rho' k H}$$

donc pour les petits fonds, les ondes sont dispersives si les deux fluides ont des masses volumiques comparables. En revanche, dans le cas de l'air et de l'eau, $\rho' << \rho$ et la relation précédente donne :

$$\omega^2 = gHk^2 \qquad (20)$$

d'où une vitesse de phase indépendante de la longueur d'onde : les ondes ne sont plus dispersives pour un interface air-eau avec des petits fonds

$$c = \sqrt{g H} \qquad (21)$$

vagues aux abords de la plage de Port-de-Bouc (département des Bouches du Rhône, près de Marseille)

dans les environs, un des terminaux pétroliers à Port-de-Bouc
(photos : F. Élie, avril 2009)

1-4 - Effets de la tension superficielle : ondes capillaires

Que l'on soit en profondeur infinie ou à faible fond, à l'interface air-eau (ou de tout autre couple de liquides) les effets de tension superficielle doivent être pris en compte sous certaines conditions que nous allons identifier plus loin.
Lorsque ces effets interviennent dans la propagation des ondes de gravité de surface, on dit que l'on est en régime d'ondes capillaires.

Pour les définitions relatives aux effets de tension superficielle, ou capillarité, se référer par exemple aux articles « bulles et ballon » ou « vidange de réservoir » de ce site.

Les relations (2) et (4) à l'interface z = 0 s'écrivent :

$$\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0}+P(0)+\rho g h(x,t)=\rho'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)_{z=0}+P'(0)+\rho' g h(x,t) \quad (22)$$

Mais cette fois on n'a plus P(0) = P'(0).
En effet, la tension superficielle à l'interface qui sépare les deux fluides (par exemple l'eau et l'air) entraîne que la pression en z = 0 du côté de l'air est différente de celle du côté de l'eau, car ces pressions sont reliées par l'intermédiaire de la courbure locale de la surface libre (figure 2). Conformément à la loi de Laplace, nous avons au niveau d'une interface dont les rayons de courbures locales sont R et R' :

$$P(0)=P'(0)+\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \quad (23)$$

Pour les ondes se propageant dans une seule direction, l'une des courbures est nulle :
1/R' → 0, et (23) se réduit à :

$$P(0)=P'(0)+\frac{\gamma}{R} \quad (24)$$

Dans ces expressions, γ est la tension superficielle du premier fluide par rapport au second, en l'occurrence la tension superficielle de l'eau par rapport à l'air dans nos exemples. Elle représente l'énergie de cohésion moléculaire par unité de surface libre du liquide : par conséquent elle est mesurée en J/m² ou en N/m. Pour l'eau, $\gamma = 7{,}2.10^{-2}$ N/m².

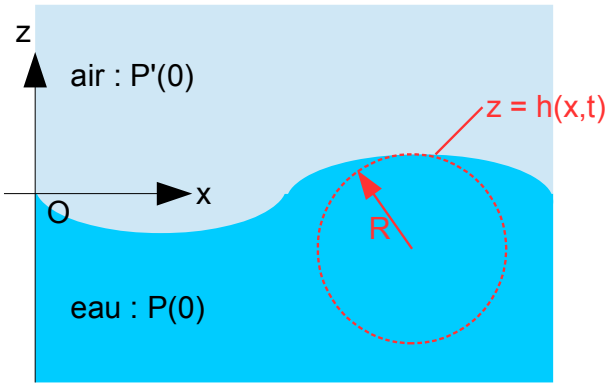

figure 2 – ondes capillaires

On montre en géométrie différentielle que la courbure locale 1/R est liée à l'équation de la surface z = h(x,t) par :

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

il s'ensuit que la relation (22) s'écrit maintenant :

$$\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} - \rho'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)_{z=0} + (\rho - \rho')\, g\, h(x,t) - \gamma \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (26)$$

On a toujours les relations (5) et (6) entre les vitesses en z = 0 (surface libre) et la déformation de la surface libre :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0} \quad (27)$$

avec :

$h(x,t) = s_0 \exp j(kx - \omega t)$, donc $\partial h/\partial t = -j\omega\, s_0 \exp j(kx - \omega t)$, et $\partial^2 h/\partial x^2$

$= -k^2 s_0 \exp j(kx - \omega t)$ (27 bis)

Que l'on soit en eau de profondeur infinie ou de faible fond, du côté de l'air le potentiel des vitesses est toujours donné par (10) :

$$\Phi'(x, z, t) = a' \exp(-kz).\exp j(kx - \omega t) \quad (28)$$

$$\text{donc : } (\partial\Phi'/\partial z)_{Z=0} = -ka'.\exp j(kx - \omega t) \quad (29)$$

Par contre le potentiel des vitesses du côté de l'eau dépend de la profondeur :

- en profondeur infinie, on utilise (11) :

$$\Phi(x, z, t) = a \exp(kz).\exp j(kx - \omega t) \rightarrow (\partial\Phi/\partial z)_{Z=0} = ka.\exp j(kx - \omega t) \quad (30)$$

- en profondeur finie, on utilise (17) :

$$\Phi(x, z, t) = B(H) \cosh k(z + H).\exp j(kx - \omega t)$$

$$\rightarrow (\partial\Phi/\partial z)_{Z=0} = kB \sinh kH.\exp j(kx - \omega t) \quad (31)$$

A partir de (26) et (27) nous aurons donc deux relations de dispersion différentes selon que l'on

est en profondeur infinie ou en profondeur finie.

a) Ondes capillaires en profondeur infinie :

A partir de (30) et de (27), on obtient pour les amplitudes :

$$a' = -a = \frac{j\omega s_0}{k}$$

d'où :

$$(\partial\Phi/\partial t)_{Z=0} = -(\omega^2 s_0/k)\exp j(kx - \omega t)$$
$$(\partial\Phi'/\partial t)_{Z=0} = (\omega^2 s_0/k)\exp j(kx - \omega t)$$

que l'on réinjecte dans (26). Compte tenu de (27bis), l'amplitude de la surface s_0 s'élimine, et l'on obtient :

$$(\rho + \rho')\omega^2 = k(\rho - \rho')g + \gamma k^3$$

qui se réécrit selon la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} g\,k + \frac{\gamma}{\rho + \rho'} k^3 \quad (32)$$

On retrouve la relation de dispersion (13) lorsque $\gamma = 0$, comme il se doit.
En négligeant ρ' devant ρ, comme c'est le cas de l'interface air-eau, (32) se simplifie en :

$$\omega^2 = g\,k + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (33)$$

et la vitesse de phase est :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}} \quad (34)$$

b) Ondes capillaires en fond fini:

A partir de (31) et (27) on obtient pour les amplitudes :

$$a' = -B\sinh k\,H$$
$$s_0 = j\frac{k}{\omega} B\sinh k\,H$$

qui sont la relation (18c) déjà vue.

$$(\partial\Phi/\partial t)_{Z=0} = -j\omega B\cosh kH.\exp j(kx - \omega t)$$
$$(\partial\Phi'/\partial t)_{Z=0} = j\omega B\sinh kH.\exp j(kx - \omega t)$$

que l'on réinjecte dans (26). Compte tenu de (27 bis) et de (18c), l'amplitude B du potentiel de vitesse de l'eau s'élimine, et l'on obtient :

$$j\omega(\rho\cosh k\,H + \rho'\sinh k\,H) - \left[(\rho - \rho')g + \gamma k^2\right]\frac{j\,k\,B\sinh k\,H}{\omega} = 0$$

qui se réarrange en la relation de dispersion cherchée :

$$\omega^2 = \frac{(\rho - \rho')g\,k + \gamma k^3}{\rho + \rho'\tanh k\,H}\tanh k\,H \quad (35)$$

Pour $\gamma = 0$, on retrouve la relation de dispersion (19).
Pour $\rho' << \rho$, (35) se simplifie en :

$$\omega^2 = \left(g\,k + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh kH \qquad (36)$$

et dans ce cas la vitesse de phase est :

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k \right) \tanh kH} \qquad (37)$$

Pour de faibles fonds (kH petit), on a tanh kH ≈ kH et (37) devient :

$$c = \sqrt{g\,H + \frac{\gamma}{\rho} k^2 H} = \sqrt{g\,H} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\rho\,g} \frac{4\,\pi^2}{\lambda^2}} \qquad (38)$$

Les ondes les plus rapides sont de courtes longueurs d'onde.

c) Critère de prise en compte de la tension superficielle pour les ondes de surface :

En faible fond comme en grand fond, les relations de dispersion (33) et (36) montrent a posteriori que les effets de tension superficielle sont prépondérants si :

$$\gamma k^3/\rho > gk$$

donc pour des petites longueurs d'onde, inférieures à une longueur d'onde de transition par conséquent égale à :

$$\lambda \leq \lambda_T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\,g}} \qquad (39)$$

Pour l'eau, cette longueur d'onde de transition est égale à λ_T = 17 mm. Chaque fois qu'une onde aura une longueur d'onde inférieure à cette valeur son comportement sera celui d'une onde capillaire.

2 - Expérimentation sommaire

J'ai effectué des manipulations très sommaires pour essayer d'estimer les relations de dispersion des ondes de surface et des ondes capillaires en eau relativement profonde (kH > 1) et peu profonde (kH < 1).
Le but n'est évidemment pas d'obtenir des résultats précis, mais de proposer une façon de « sentir » le problème par une expérimentation sur un coin de table, comme c'est l'habitude dans ce site. Comprendre les ordres de grandeurs et l'importance des différents paramètres du phénomène sont l'unique objectif de ces travaux pratiques très sommaires et à la portée de tous.

Mais la mise en œuvre est longue et délicate même si le matériel nécessaire est des plus simples : un bac à eau rectangulaire, une règle pour créer une perturbation de la surface sur toute la largeur du bac, un camescope numérique pour évaluer la longueur d'onde et la célérité de l'onde (sachant qu'il filme 25 images par seconde), ou encore, dans le cas des ondes capillaires en eau profonde, l'emploi d'un diapason de musique pour générer des ondes très courtes.
La difficulté principale réside dans la création d'une perturbation unidirectionnelle, la plus

régulière possible, et de bien repérer les temps de parcours d'une onde.
Le bac rectangulaire est transparent et disposé sur une feuille de papier millimétré destinée au repérage des distances. Le camescope est monté le plus verticalement possible au-dessus du plan d'eau et est déclenché par une télécommande. Sur l'un des bords du bac, dans le sens de sa largeur, une règle plate est tenue sur toute la largeur du bac dans le sens horizontal, parallèlement à la paroi du bord pour créer une perturbation qui va se propager de manière ondulatoire à la surface de l'eau. On évite ainsi de générer du mieux possible des ondes non planes.
Bien entendu, le filmage des ondes doit être réalisé avant que les premières ondes ne se soient réfléchies sur les parois, afin de ne disposer que d'ondes progressives : c'est une autre difficulté de la manipulation.

2-1 - Essai n°1 : ondes de surface en eau peu profonde avec effet de tension superficielle (ondes capillaires)

La profondeur choisie est H = 7 mm.
Le film démarre avant la création de la perturbation par la règle, pour être sûr de capter le début du phénomène. Le filmage est arrêté au bout d'un certain temps qui n'a pas d'importance. Ce qui importe, c'est que, lorsque le film est repassé image par image (1 image chaque 1/25^{e} de seconde), on puisse repérer la progression d'une onde sur une distance donnée choisie ici égale à d = 4 cm, avant les premières réflexions sur les parois.
En outre, lors du passage image par image du film, la distance entre deux « bosses » de vagues consécutives renseigne sur la longueur d'onde. Dans la présente manipulation, celle-ci est trouvée égale à $\lambda \approx 1$ cm (figure 3).
Par comptage des images, la distance d = 4 cm est trouvée parcourue en 0,16 seconde. La célérité est donc d'environ c = 0,04/0,16 = 0,25 m/s.
La longueur d'onde répond au critère (39) : λ = 1 cm < λ_T = 1,7 cm. On a donc affaire à des ondes capillaires.
De plus kH = 2π/0,01 x 0,007 = 4,4 > 1, on peut donc se considérer dans le cas fond important mais fini donc la relation de dispersion concernée est (37). Celle-ci donne, avec les valeurs relevées :

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\gamma 2\pi}{\rho\lambda}\right)\tanh kH} = \sqrt{\frac{9{,}81\times 0{,}01}{6{,}28} + \frac{0{,}072\times 6{,}28}{1000\times 0{,}01}}\sqrt{\tanh(4{,}4)} = 0{,}247\ m/s$$

pour une valeur estimée à $c_{estimée}$ = 0,25 m/s.

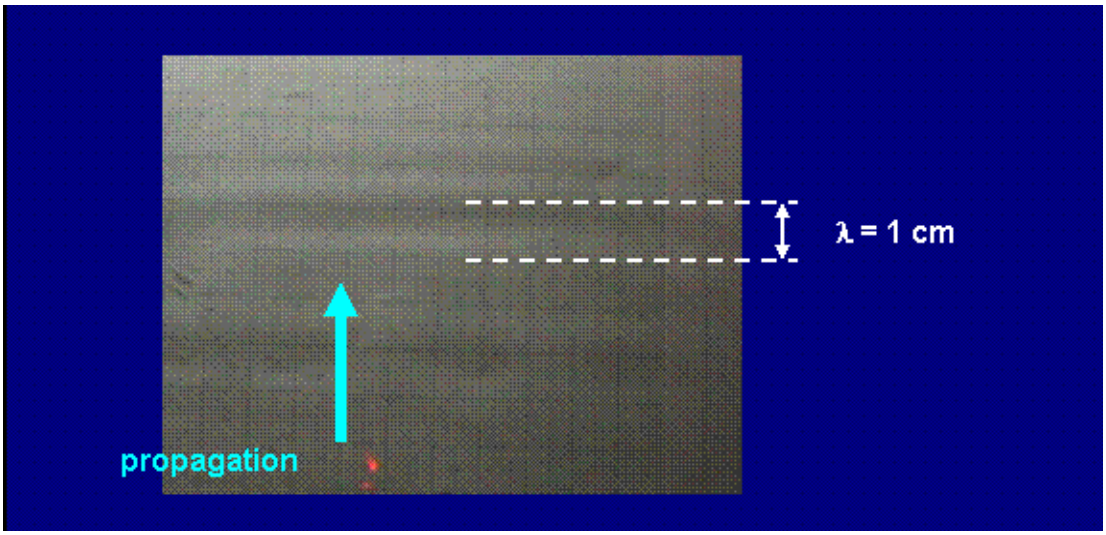

figure 3 – ondes capillaires en eau peu profonde (photo : F. Élie)

2-2 - Essai n°2 : ondes de surface en eau peu profonde sans effet de tension superficielle

La profondeur est H = 23 mm. La longueur d'onde observée est plus grande que 1,7 cm (λ = 2,5 cm, figure 4), nous pouvons donc négliger les effets de tension superficielle. L'analyse image par image indique qu'une distance d = 4,5 cm est parcourue par l'onde en t = 0,1 seconde, soit une célérité estimée de 0,045/0,1 = 0,45 m/s.
Avec kH = 5,78 on se trouve en configuration profondeur finie mais relativement importante : tanh kH est très proche de 1. La relation de dispersion à utiliser est donc (21). Avec les valeurs relevées, on a théoriquement :

$$c = \sqrt{g\,H} = \sqrt{9{,}81 \times 0{,}023} = 0{,}475\, m/s$$

pour une valeur estimée égale à 0,45 m/s.

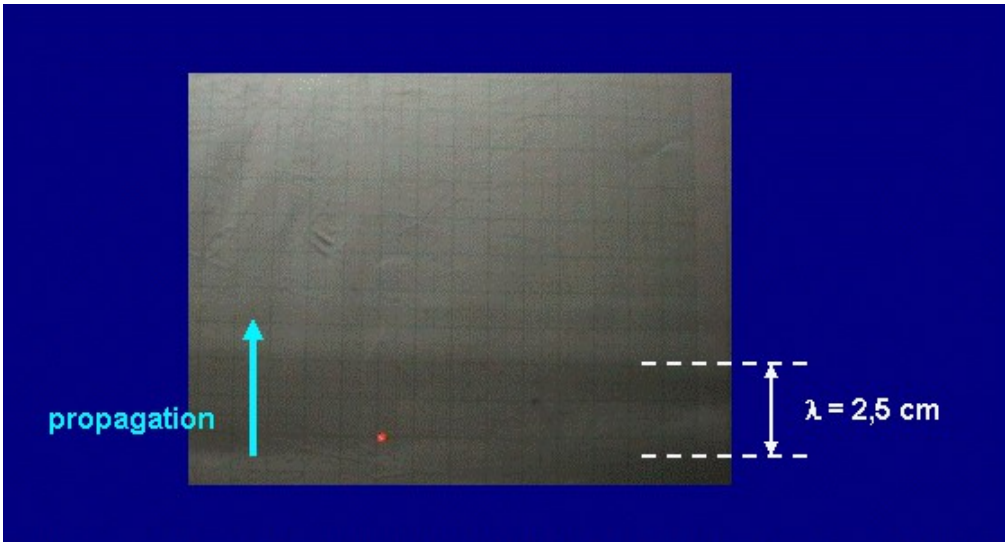

figure 4 – Ondes de surface en eau peu profonde sans effet capillaire (photo : F. Élie)

2-3 - Essai n°3 : ondes de surface en eau profonde sans effet de tension superficielle

La profondeur est H = 48 mm. La longueur d'onde observée est λ = 3 cm (figure 5), donc supérieure à la longueur d'onde de transition capillaire 1,7 cm : on peut donc négliger les effets de tension superficielle.
Comme kH = 10, on peut aussi estimer être en configuration profondeur infinie. La relation de dispersion (15) devrait donc être applicable.
L'observation donne une distance d = 6 cm parcourue par l'onde en t = 0,2 seconde, d'où une célérité estimée de 0,06/0,2 = 0,3 m/s, qu'il faut comparer avec la valeur calculée par (15) :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 0{,}03}{6{,}28}} = 0{,}216\, m/s$$

pour une célérité estimée de 0,3 m/s.

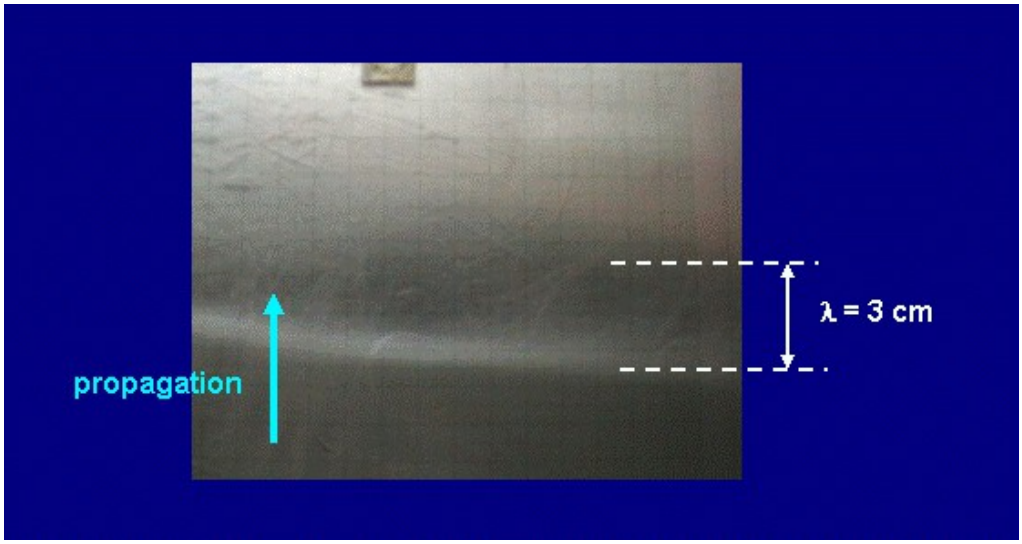

figure 5 – ondes en eau profonde sans effet capillaire (photo : F. Élie)

2-4 - Essai n°4 : ondes de surface en eau profonde avec effet de tension superficielle

Nous voulons maintenant créer des ondes capillaires en eau profonde afin d'utiliser la relation de dispersion (34). Nous devons pour cela disposer de très courtes longueurs d'onde afin d'avoir kH >> 1, et du même coup elles satisferont le critère (39) λ << 1,7 cm.
L'idée est d'utiliser un diapason musical, source du La3 de fréquence f = 440 Hz (voir article « tuyaux sonores ») qui, connaissant la vitesse de phase c correspondra à de courtes longueurs d'onde λ = c/f. Après mise en vibration (en la cognant par exemple contre un objet rigide), une des branches du diapason est immergée faiblement dans l'eau, générant alors des ondes qui se propagent avec la vitesse c. Si l'observation permet de « mesurer » c, alors on pourra déduire la longueur d'onde par la relation précédente. Ces longueurs d'onde sont très difficilement observables directement du fait de leurs très faibles valeurs.
La source d'excitation de la surface d'eau étant ponctuelle (branche du diapason dans l'eau), les ondes seront circulaires. Mais si l'on se place à une distance suffisante de la source, les longueurs d'onde étant très faibles, on pourra les traiter comme des ondes planes et leur appliquer les raisonnements de cet article.
L'observation, difficile à réaliser, et effectuée à 50 mm de la source d'excitation, indique une distance d = 2 cm parcourue par une onde quasi plane en t = 0,04 seconde, soit c = 0,02/0,04 = 0,5 m/s (figure 6).
La longueur d'onde est donc environ λ = c/f = 0,5/440 = $1{,}14.10^{-3}$ m = 1,14 mm qui est effectivement très petite devant 1,7 cm et la profondeur que nous avons employée H = 11 mm.
Ainsi on est bien en situation fond infini et ondes capillaires. Nous appliquons donc la relation de dispersion (34) :

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}=\sqrt{\frac{9{,}81\times 0{,}00114}{6{,}28}+\frac{6{,}28\times 0{,}072}{0{,}00114\times 1000}}=0{,}63\,m/s$$

à comparer avec c = 0,5 m/s estimé.

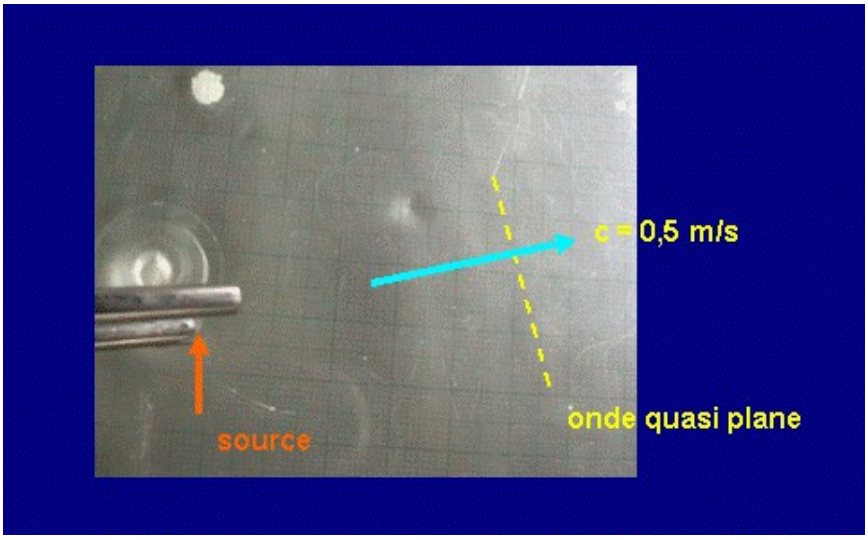

figure 6 – ondes courtes capillaires, générées par un diapason (photo : F. Élie)

2-5 - Conclusion

Nous n'avons évidemment pas obtenu les valeurs de c de manière très rigoureuse. Mais ces essais nous ont permis de distinguer assez clairement les configurations dans lesquelles se propagent les ondes de surface : faible fond ou fond infini, sans ou avec effets capillaires. Et les valeurs obtenues, en ordre de grandeur se distinguent bien selon ces cas et sont comparables aux valeurs théoriques qui leur correspondent.
Avec un dispositif assez sommaire, mais conduit avec la conscience de ses imperfections, nous avons touché du doigt une famille de phénomènes assez fins en mécanique des fluides. C'était le but recherché.

Annexes

A1 – Grands fonds et petits fonds

Pour l'étude des ondes de surface, petites perturbations de la surface qui se propagent par ondes, on suppose que les fluides ont des écoulements à très faible vitesse. Cela revient déjà à négliger le terme de transport par advection (**v.grad**)**v** devant l'accélération du fluide (∂**v**/∂t).
On est donc en régime linéaire, et on verra en annexe 2 que les perturbations se propagent avec des oscillations. La condition précédente signifie alors que au cours d'une période T de l'oscillation d'une particule fluide, celle-ci parcourt une distance équivalente à l'amplitude A de l'onde. La vitesse de propagation des perturbations est donc de l'ordre de v = A/T.
La surface se déforme périodiquement dans le temps et dans l'espace, avec une longueur d'onde λ, et cette déformation est significative au cours d'une période T, de sorte que l'accélération de déformation est de l'ordre de (∂**v**/∂t) ≈ v/λ.
La condition de linéarité (**v.grad**)**v** << (∂**v**/∂t) correspond donc en ordre de grandeur à :

$$\frac{A}{T}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{A}{T}\right) << \frac{1}{T}\frac{A}{T}$$

c'est-à-dire :

$$A << \lambda \quad \text{(A1.1)}$$

ainsi l'amplitude des oscillations des particules dans l'onde doit être très faible devant la longueur d'onde.
Par ailleurs, les déformations de la surface restent superficielles si leurs amplitudes sont très inférieures à la profondeur (sinon il ne s'agirait plus d'ondes de surface), on doit donc avoir aussi :

$$A << H \quad (A1.2)$$

Avec les conditions (A1.1) et (A1.2) rien ne permet a priori de déduire si la longueur d'onde doit être plus grande ou bien plus petite que la profondeur ? Aussi doit-on envisager séparément les cas où $\lambda < H$ ou $\lambda > H$, ou ce qui revient au même $kH > 1$ ou bien $kH < 1$. Dans le premier cas ($kH > 1$) on est en grand fond : le fond n'a pratiquement aucune influence sur la propagation des ondes de surface. dans le second cas ($kH < 1$) on est en petit fond : le fond influence la propagation des ondes de surface.

A2 – Comportement ondulatoire des perturbations de la surface libre

Nous avons admis, dans les relations (7a), (7b), (7c) que les potentiels de vitesse et la surface varient de manière ondulatoire. Dans ce qui suit, un argument justifie ce choix.

Considérons (5) et (6) qui établissent le lien entre les vitesses en z = 0 et la déformation de la surface libre avec le temps :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0} \quad (A2.1)$$

par ailleurs les conditions sur les pressions, telles que (22), sont :

$$\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0} + P(0) + \rho g h(x,t) = \rho'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right)_{z=0} + P'(0) + \rho' g h(x,t) \quad (A2.2)$$

Chacun des termes de part et d'autre du signe égal étant constants, leur dérivée par rapport au temps est égale a zéro :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} + g\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = 0 \quad (A2.3)$$

et similairement pour Φ'.
En remplaçant dans (A2.3) le terme $\partial h/\partial t$ grâce à (A2.1), on obtient l'équation en z = 0 du potentiel qui est la condition aux limites de l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi(x, z, t) = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} + g\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad (A2.4)$$

et de même pour Φ'. On montre mathématiquement que les équations aux dérivées partielles du type de (A2.4) admettent comme solutions des fonctions trigonométriques, ce qui justifie la recherche de solutions en exp j(kx - ωt).

Bibliographie

L. Landau, E. Lifchitz : *Physique théorique, Mécanique des Fluides* – éd. Mir, traduction française Ellipse, 1994

M. Rieutord : *Une introduction à la dynamique des fluides* – Masson 1997

E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit : *Hydrodynamique physique* – Savoirs actuels, CNRS éd., EDP Sciences, 2001

Sous la direction de M. Hug : *Mécanique des fluides appliquée* – Eyrolles, 1975