



Frédéric Elie on
ResearchGate

Oscillateur à eau salée

Frédéric Élie

juillet 2011

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Cet article présente une expérience étonnante mais difficile à réaliser: deux liquides de densités différentes, l'un au-dessus constituée d'eau salée, plus dense, l'autre en-dessous constituée d'eau douce, moins dense, séparés par une paroi où un trou d'épingle a été aménagé, deviennent le siège d'une oscillation curieuse. Après un certain temps, durant lequel le liquide le plus lourd s'écoule dans le liquide le plus léger, le courant s'inverse: c'est le liquide le moins dense, situé en bas, qui s'écoule par un mince filet oscillant, dans le liquide supérieur. Et le cycle recommence, avec la régularité d'un métronome. On a obtenu un oscillateur hydraulique, ici, avec de l'eau salée en contact avec de l'eau douce par l'intermédiaire d'une ouverture, d'un passage, pas plus large qu'un trou d'épingle!

Les considérations théoriques sur l'équilibre mutuel de deux liquides de densités différentes mis en contact, amènent à identifier le rôle de la tension superficielle, les forces capillaires, dans les conditions de cet équilibre, ce que l'on appelle les conditions de stabilité de Kelvin-Helmholtz. La taille de l'ouverture du passage revêt donc une importance capitale.

Ces mêmes considérations conduisent aussi à l'idée que l'équilibre est rompu, et devient une instabilité oscillatoire, dès lors que les forces de gravité l'emportent sur les forces capillaires (par exemple à cause d'une différence d'altitude des surfaces libres des deux fluides) et lorsque les densités finissent par devenir très voisines à la suite de l'écoulement d'un fluide dans l'autre.

On comprend alors en quoi réside la difficulté de l'expérience: d'une part la maîtrise de la taille du passage mettant en communication les deux liquides, d'autre part, le temps nécessaire pour obtenir des densités voisines au terme de la première phase où le liquide le plus lourd (l'eau salée) s'écoule suffisamment dans le liquide le plus léger (l'eau douce), sachant que, au départ, il faut choisir des concentrations très différentes pour amorcer l'écoulement descendant.

SOMMAIRE

- 1 – Superposition de deux liquides de densités différentes
- 2 – Liquides superposés de densités différentes communiquant par un trou d'épingle

1 – Superposition de deux liquides de densités différentes

Deux liquides 1 et 2 de densités différentes ρ_1 et ρ_2 superposés sont dans une configuration:

- stable si le liquide le plus lourd, disons ρ_2 , est situé au-dessous du liquide le plus léger;
- métastable si le liquide le plus lourd, ρ_2 , est situé au-dessus du liquide le plus léger (à

condition que l'on ait pris précaution lors de la superposition des liquides de les verser très doucement: par exemple on injecte le liquide inférieur sous le liquide supérieur au moyen d'une pipette ou d'une seringue débouchant près du fond du récipient).

La surface séparant les deux liquides reste intacte aussi longtemps que l'on n'apporte aucune perturbation au système.

Comment cela est-il possible si, considérant en jeu les seules forces de gravité, la force dynamique est alors donnée par la loi de Newton?

$$-\Delta\rho.g.\varepsilon(z,t).S = d^2\varepsilon(z,t)/dt^2$$

où ε est l'écart à la position d'équilibre $z = 0$, supposée horizontale, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ la différence des densités, S la surface séparant les deux liquides.

En effet, il est clair que si $\Delta\rho$ est non nulle une accélération des particules fluides devrait apparaître à l'interface des deux liquides.

Or il n'en est rien: si l'interface est en équilibre, stable ou métastable, c'est-à-dire si $d^2\varepsilon/dt^2 = 0$, c'est qu'une autre force intervient: c'est la force due à la tension superficielle entre les deux fluides, et la stabilité de la configuration peut être décrite par la théorie de ***l'instabilité de Rayleigh-Taylor***.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est une limite de ***l'instabilité de Kelvin-Helmholtz***: celle-ci est une instabilité relative aux forces de cisaillement qui apparaît lorsque deux fluides 1 et 2 de densités différentes ρ_2 et ρ_1 , glissent l'un sur l'autre (les effets dûs à la viscosité étant supposés négligeables). Dans un référentiel Oxy , le plan d'interface correspond à la cote $z = 0$ et Ox est l'horizontale (figure 1). Le fluide 1 est supposé se déplacer au-dessus du fluide au repos 2, inférieur, avec une vitesse uniforme:

$$\mathbf{V} = V\mathbf{i}$$

parallèle à Ox (\mathbf{i} est le vecteur unitaire porté par Ox).

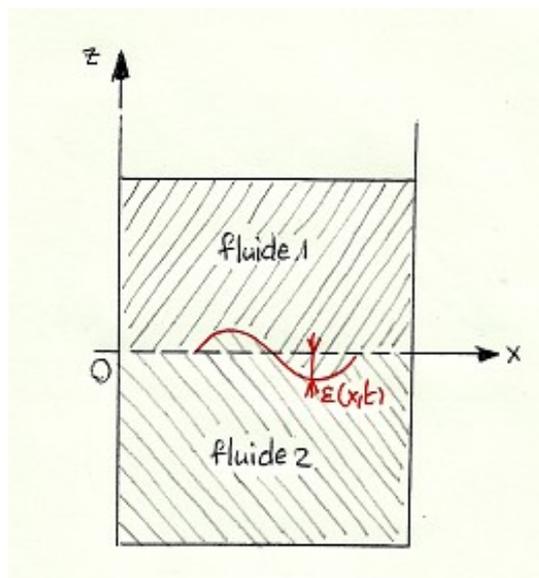


Figure 1 – Superposition de deux liquides de densités différentes

La surface S de l'interface entre les deux fluides est donnée par l'équation:

$$S(x, z, t) = \text{constante}$$

En tout point (x, z) de cette surface on a:

$$dS=0=\frac{\partial S}{\partial x} dx+\frac{\partial S}{\partial z} dz+\frac{\partial S}{\partial t} dt$$

Soit $\mathbf{V} = (dx/dt, dz/dt)$ le vecteur vitesse de déplacement relatif des deux fluides à l'interface et notons

$$\nabla S = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial z} \right)$$

le gradient de la surface, l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla S = 0 \quad (1)$$

Supposons que la forme de la surface soit indépendante du temps, la relation (1) se simplifie en:

$$\vec{V} \cdot \nabla S = 0$$

Or ∇S est un vecteur perpendiculaire en tout point à la surface, donc à \mathbf{V} . Il est donc porté par la normale \mathbf{n} à cette surface, en tout point. Donc:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2)$$

Toute contrainte de part et d'autre de l'interface, entre les fluides 1 et 2, est continue en traversant la surface: elle doit donc être la même en 1 et en 2 (théorème de l'égalité de l'action et de la réaction de la mécanique newtonienne). Soit $[\sigma]$ le tenseur des contraintes:

$$([\sigma_1] - [\sigma_2]) \cdot \vec{n} = 0$$

On suppose l'écoulement à l'interface irrotationnel:

$$\nabla \wedge \vec{V}(x, z, t) = 0$$

par conséquent il existe une fonction scalaire $\Phi(x, z, t)$ appelée potentiel des vitesses, telle que:

$$\vec{V} = \nabla \Phi \quad (3)$$

Si l'ensemble des deux fluides est soumis à une force extérieure qui dérive d'un potentiel U , sa dynamique est décrite par l'**équation d'Euler**:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla U$$

où P est la pression. De (3) il découle:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \frac{1}{2} \rho \nabla \vec{V}^2 = \rho \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = -\nabla P - \rho \nabla U$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = \frac{-1}{\rho} \nabla P - \nabla U \quad (4)$$

Etant donné que $\nabla \wedge (\nabla) \equiv 0$, (4) est valide à condition que:

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = 0 \quad (5)$$

donc:

$$P = P(\rho)$$

la pression dépend uniquement de la masse volumique du fluide.

(5) indique alors qu'il existe un scalaire h tel que:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla h$$

h est la hauteur piézométrique (à condition d'assimiler l'accélération de la pesanteur à $g = 1$, donc est exprimée en mètres de hauteur d'eau). Finalement (4) devient:

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + h + U \right] = 0$$

soit:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + h + U = \text{constante} \quad (6)$$

L'équation (6) **n'est pas** l'équation de Bernoulli, celle-ci étant valable tout le long d'une ligne de courant pour un écoulement stationnaire. Ici, la constante reste conservée dans tout le volume occupé par le fluide, et donc pour toutes les lignes de courant, pour un écoulement aussi bien stationnaire que instationnaire. C'est l'équation que nous avons utilisée pour calculer les ondes à la surface libre d'un liquide (article F. Elie: [ondes de surface](#)).

L'équation (6) doit être associée à l'équation de conservation de la masse, pour clôturer mathématiquement le problème:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

soit, compte tenu de (3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \Phi) = 0 \quad (7)$$

En particulier pour un fluide incompressible $\rho = \text{constante}$, (7) se réduit à **l'équation de Laplace**:

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (8)$$

L'expression (4) montre que le potentiel des vitesses Φ est défini à une fonction du temps près $\varphi(t)$: φ est une fonction de jauge qui invarie (4):

$$\Phi'(x, z, t) = \Phi(x, z, t) + \varphi(t)$$

Nous avons dit, au début de ce paragraphe, qu'en l'absence de perturbation l'équilibre de la surface séparant les deux liquides de densités différentes nécessite l'intervention, en plus des seules forces dues à la pesanteur, des forces capillaires. La pression dans le fluide 2, au niveau de l'interface, est égale à la pression dans le liquide 1 à laquelle s'ajoute algébriquement la pression liée à la force capillaire:

$$P_2 = P_1 - \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (9)$$

où γ est la tension superficielle à l'interface.

De part et d'autre de l'interface, l'application de (6) avec $U = gz$ comme potentiel de la force extérieure (ici la pesanteur) donne:

- fluide 1:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{P_1}{\rho_1} + gz &= \text{constante} \end{aligned} \right| (10a)$$

- fluide 2:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_2 &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{P_2}{\rho_2} + gz &= \text{constante} \end{aligned} \right| (10b)$$

On suppose V_1 uniforme.

L'application d'une perturbation Φ' , telle que Φ'/Φ_1 et $\Phi'/\Phi_2 \ll 1$ transforme les équations (10) en une équation pour le premier ordre (c'est-à-dire où les termes d'ordre 2 et plus sont négligés):

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\delta P_1}{\rho_1} + g \varepsilon = \text{constante} \quad (11)$$

où δP_1 est la perturbation correspondante sur la pression et ε l'écart à la position d'équilibre de l'interface $z = 0$; les conditions aux limites à l'interface pour les perturbations des vitesses \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont:

$$\left. \begin{aligned} v_{2z} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ v_{1z} &= v_{2z} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{aligned} \right| (12)$$

qui s'interprètent ainsi: pour le fluide 2 la composante verticale de la vitesse perturbée est assimilée (au premier ordre) à la vitesse de déformation de la surface, pour le fluide 1 la composante verticale de la vitesse perturbée est assimilée à la vitesse de déformation verticale et à la vitesse de déformation le long de l'interface transportée par advection par la vitesse V du fluide 1 relative au fluide 2.

On cherche des solutions de la forme:

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(z) \exp j(kx - \omega t)$$

Puisque le potentiel perturbé $\Phi'(z)$ vérifie l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi' = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} - k^2 \Phi' = 0$$

dont la solution générale est:

$$\Phi'(z) = A \exp kz + B \exp -kz$$

les conditions aux limites (12) conduisent alors, à l'interface:

$$\begin{aligned} k\Phi'(z=0) &= -j\omega\varepsilon \\ k\Phi'(z=0) &= j(\omega - kV)\varepsilon \end{aligned}$$

La relation (9) donne:

$$\delta P_2 = \delta P_1 + \gamma k^2 \varepsilon(x,t)$$

D'où la relation de dispersion entre les modes spatiaux (k) et le mode fréquentiel (ω):

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2) - 2\omega\rho_1 kV - (\rho_2 - \rho_1)gk - \gamma k^3 + \rho_1 k^2 V^2 = 0 \quad (13)$$

(13) est une équation du second degré en ω dont l'existence des solutions réelles est conditionnée par le signe du discriminant:

$$\Delta = (\rho_1 + \rho_2)[k^3\gamma + (\rho_2 - \rho_1)gk] - k^2V^2\rho_1\rho_2$$

L'instabilité (de Kelvin-Helmholtz) apparaît alors dès que $\Delta \leq 0$ ce qui donne la condition sur la vitesse à l'interface et sur la différence des densités $\Delta\rho = (\rho_2 - \rho_1)$:

$$V^2 \geq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left[\gamma k + (\rho_2 - \rho_1) \frac{g}{k} \right] \quad (14)$$

Le minimum de (14) est atteint pour:

$$k_{MIN} = \sqrt{\frac{g \Delta \rho}{\gamma}}$$

ce qui correspond à une vitesse critique:

$$V_C = \sqrt{\frac{2}{\rho_1} + \frac{2}{\rho_2}} (g \gamma \Delta \rho)^{1/4} \quad (15)$$

La condition de stabilité d'après (14) s'écrit alors:

$$V < V_C \quad (16)$$

Le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor s'obtient avec une vitesse à l'interface nulle $V = 0$ dans la relation de dispersion (13):

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2) - (\rho_2 - \rho_1)gk - \gamma k^3 = 0$$

Dans le cas qui nous intéresse le fluide supérieur 1 (eau salée) est plus dense que le fluide inférieur 2 (eau douce) donc $\Delta\rho < 0$. La condition de stabilité (16) est alors remplacée par:

$$\omega^2 = \frac{\Delta \rho g k + \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} > 0$$

ce qui donne la condition:

$$k < \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2) g}{\gamma}}$$

qui correspond à la condition suivante: pour que la stabilité d'une interface séparant deux fluides, l'un supérieur 1 étant plus dense que l'autre inférieur 2, les perturbations dont les longueurs d'ondes sont plus courtes que la longueur d'onde critique $\lambda_C = 2\pi/k_C$ ne peuvent pas croître:

$$\lambda_C = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{-\Delta \rho g}} \quad (17)$$

Exemples numériques:

- interface air/eau, avec l'eau au-dessus de l'air: $\gamma = 72,75 \text{ N/m}$, $\Delta\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$, d'où $\lambda_C = 1,7 \text{ cm}$.

Donc, pour l'interface air/eau, dans la configuration où l'eau est au-dessus de l'air, si la surface de contact a une ouverture supérieure à 1,7 cm l'équilibre ne sera jamais possible: l'eau supérieure s'écoulera toujours dans l'air inférieur même si elle n'est pas à la même pression

atmosphérique que l'air (on se souvient en effet que l'eau enfermée dans un récipient clos, donc pas au contact de la pression atmosphérique, a du mal à être déversée dans un récipient dans l'air ambiant si l'ouverture est trop petite, et « trop petite » signifie petite devant 1,7 cm).

- interface eau douce/eau salée, avec l'eau salée au-dessus de l'eau douce: pour l'eau salée on a $\gamma' = 0,28$ par pourcentage en poids de teneur de chlorure de sodium dissous dans l'eau douce. Pour une eau salée constituée de 0,1% en masse de NaCl (condition de notre expérience), on a donc: $\gamma' = 0,1 \times 0,28 \times 72,75 = 2,037$ N/m, donc à l'interface eau douce/eau salée la tension superficielle est: $\gamma = 72,75 - 2,037 = 70,7$ N/m. On a aussi, du fait de la concentration en sel dans l'eau salée, $\Delta\rho = 1$ kg/m³. La longueur d'onde critique est alors:

$$\lambda_C = 2\pi\sqrt{(70,7/1 \times 9,81)} = 16,9 \text{ m}$$

Dans les conditions de notre expérience où deux liquides (l'eau salée au-dessus et l'eau douce au-dessous) communiquent par un petit diamètre (de l'ordre du millimètre) la stabilité est donc toujours assurée tant qu'une modification externe ne vient pas en modifier les conditions: un liquide plus dense situé au-dessus d'un liquide moins dense reste en configuration de superposition stable, plus exactement métastable, si aucune force extérieure n'apporte une impulsion suffisante pour vaincre les forces capillaires. Ainsi l'eau salée au-dessus de l'eau douce reste stable en l'absence de l'apport d'une force extérieure.

C'est pourquoi une couche d'eau salée située dans un récipient supérieur (bouteille d'eau en plastique renversée) fermé par un bouchon dans lequel on a percé un trou avec une épingle, et placé au-dessus d'un récipient d'eau douce (fond de bouteille, ou verre) ne coulera pas tant qu'une force ne vient pas rompre l'équilibre.

Mais cette force supplémentaire peut être celle qu'introduit un dénivellement des surfaces libres de l'eau salée et de l'eau douce: si S est la surface du trou d'épingle, et si Δh est le dénivellement en faveur de l'eau salée, la force supplémentaire est donnée par la relation de Pascal:

$$f = \rho_1 g S \Delta h$$

où ρ_1 est la masse volumique de l'eau salée (ici: 1001 kg/m³).

Conclusion: si l'on veut que seule intervienne l'effet dû à la différence de densités $\Delta\rho$, il faut travailler avec un dénivellement nul $\Delta h = 0$. C'est uniquement dans cette condition que l'on obtiendra un oscillateur hydrodynamique par différence de densités entre l'eau salée supérieure et l'eau douce inférieure.

2 – Liquides superposés de densités différentes communiquant par un trou d'épingle

Un liquide 1 de densité $\rho_1 > \rho_2$ superposé à un autre liquide 2, et communiquant avec lui par une surface de trou d'épingle, sera en configuration stable parce que le diamètre du trou sera largement plus petit que la longueur critique λ_C donnée par (17): c'est le cas d'une couche d'eau salée surmontant une couche d'eau douce, avec une ouverture de 0,5 mm de trou d'épingle.

De manière générale (17) montre que des fluides de densités très voisines (comme l'eau salée et l'eau douce) ont des longueurs critiques très grandes:

$$\Delta\rho \ll 1 \rightarrow \lambda_C \gg 1$$

et que pour des fluides de densités très différentes (exemple: eau et air) la longueur critique est très faible (l'eau douce s'écoule dans l'air par un trou de petite taille):

$$\Delta\rho \gg 1 \rightarrow \lambda_C \ll 1$$

On a vu que pour rompre cette configuration stable il faut une force supplémentaire devant laquelle les effets de tension superficielle sont négligeables. La relation (17) montre que pour γ faible on est en condition instable: la déformation de la surface est irréversible.

Deux liquides superposés (eau salée en haut, eau douce en bas) communiquant par un trou d'épingle, sont en équilibre tant que leurs niveaux sont identiques: $\Delta h = 0$ (figure 2). Mais pour observer un écoulement il faut bien imposer un léger dénivellement, pas trop important si l'on veut rester dans un régime oscillant stable.

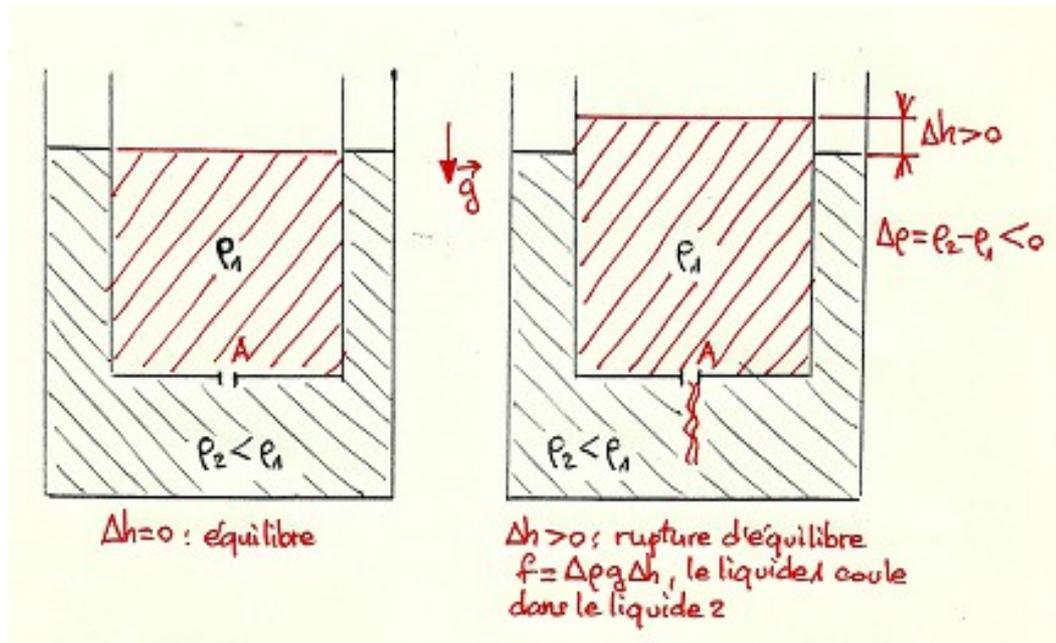


Figure 2 – rupture d'équilibre par dénivellement des surfaces libres

Dans l'expérience qui nous intéresse ici il faut donc:

- les surfaces libres des deux liquides, eau salée et eau douce, doivent être au contact de l'air atmosphérique (pour être en équipression);
- le niveau de la surface libre de l'eau salée 1 doit être légèrement au-dessus de celui de la surface libre de l'eau douce 2 pour apporter une rupture de l'équilibre conditionné par les effets capillaires;
- mais ce décalage des niveaux ne doit pas être trop important afin d'être du même ordre que la déformation de l'interface entre les deux liquides dans le passage qui les sépare.

Ces conditions indiquent alors comment monter l'expérience:

- couper une bouteille d'eau en plastique un peu au-dessous de sa partie conique, ce qui donnera une forme ressemblant à un entonnoir;
- percer un trou avec une épingle dans le bouchon qui se visse sur le goulot de cette partie de la bouteille. Le diamètre ne doit pas dépasser 0,5 mm;
- dans la partie inférieure de la bouteille (cylindrique) verser de l'eau douce;
- disposer des cales autour du bord supérieur de cette partie cylindrique de la bouteille. Elles serviront à assurer un contact entre la surface libre de l'eau douce et l'atmosphère (équipression) lorsque l'on positionnera le cône renversé sur ce bord. En effet, si cette communication n'était pas assurée, le mouvement de l'eau douce vers l'eau salée serait difficile voire impossible;
- disposer la partie conique retournée sur la partie cylindrique;
- verser très doucement l'eau salée dans la partie conique de manière à ce que sa surface libre soit légèrement plus haute que celle de l'eau douce (figure 3 et photo 1);
- il faut que le sel soit parfaitement dissout dans l'eau salée, le moindre grain de sel perturberait le passage à travers le trou d'épingle, ce qui ferait échouer l'expérience.

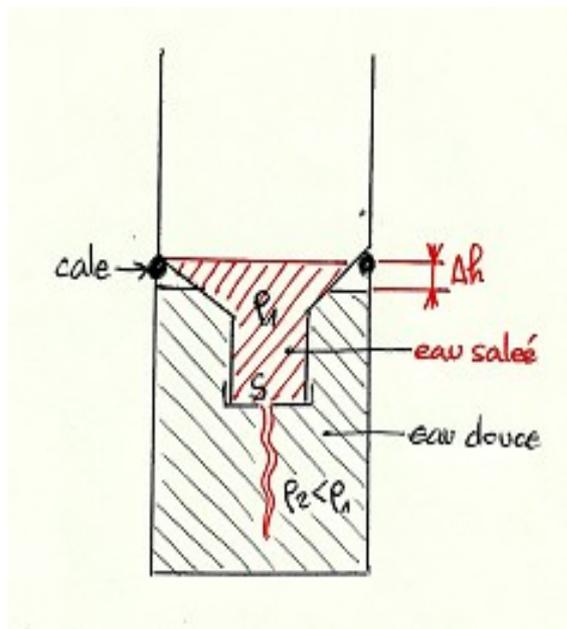


Figure 3 – dispositif expérimental

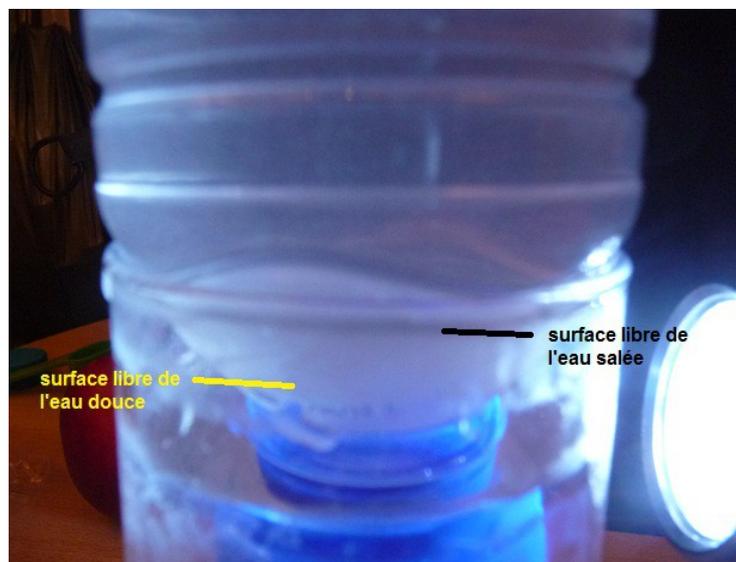


photo 1 – montage

Qu'observe-t-on?

- Dans une première phase, l'eau salée s'écoule par un long filet fin, dans l'eau douce (photo 2). Cela peut prendre de longues minutes, le temps que les densités deviennent très voisines de part et d'autre du passage.
- Puis le filet se met à osciller, ce qui marque le début d'un changement de régime.
- Dans une deuxième phase le courant s'inverse: l'eau douce remonte dans l'eau salée en oscillant d'abord, puis par un filet rectiligne.
- Le courant finit par s'inverser de nouveau: l'eau salée s'écoule dans l'eau douce et le cycle recommence avec une régularité remarquable.

Interprétation:

- L'eau salée, plus lourde que l'eau douce, descend dans celle-ci sous l'effet de la pesanteur.
- On pourrait invoquer la poussée d'Archimède pour prédire que ce soit plutôt l'eau douce qui monte dans l'eau salée. En fait, au début il n'en est rien. L'impulsion prise par l'eau salée due au dénivellement légèrement excédentaire, lui imprime une force que la poussée d'Archimède

ne peut pas contrebalancer. C'est pourquoi il est important d'avoir $\Delta h > 0$.

- Mais avec l'écoulement, le liquide inférieur a sa densité qui augmente, $\Delta\rho$ diminue donc suffisamment pour que l'impulsion due à Δh devienne négligeable, d'autant que, le niveau du liquide supérieur diminue par suite de son transfert partiel dans le récipient inférieur. La poussée d'Archimède dans l'eau douce peut donc devenir prépondérante parce que l'on a toujours $\Delta\rho > 0$ bien que devenue faible.

- L'eau douce mélangée avec la partie d'eau salée qui s'est écoulée en elle, remonte donc par poussée d'Archimède dans l'eau salée supérieure.

- L'eau salée a donc sa densité qui augmente de nouveau et son niveau s'accroît, Δh augmente. On retrouve la configuration initiale où la seule force de pesanteur agissant sur l'eau salée est prépondérante devant la poussée d'Archimède. L'eau salée s'écoule de nouveau dans l'eau douce.

- Et le cycle recommence.

Approche quantitative:

Soit $\varepsilon(x,t)$ la course élémentaire parcourue par une particule liquide suivant la verticale. A cette variation de hauteur correspond une variation de pression exercée sur la particule fluide, de part et d'autre de la cote d'équilibre $z = 0$ (le niveau du trou d'épingle):

$$\delta P = \Delta\rho g \varepsilon(x,t)$$

où $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ est la différence de densités entre le liquide supérieur 1 (l'eau salée) et le liquide inférieur 2 (l'eau douce).

Soumise à cette force de pression, la particule acquiert une accélération selon la loi de Newton, à travers le passage du trou d'épingle, d'épaisseur h :

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\delta P.S$$

m est la masse d'eau traversant le passage et S la section de celui-ci: $m = \rho_1 Sh$. D'où:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{\Delta\rho}{\rho_1 h} g \varepsilon = 0 \quad (18)$$

dont la solution est périodique, de période:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_1 h}{g \Delta\rho}} \quad (19)$$

Pour deux fluides identiques ($\Delta\rho = 0$) la période devient infinie, il n'y a ni oscillation ni écoulement.

L'oscillation a une période d'autant plus élevée (oscillations lentes) que (figure 4):

- l'épaisseur h du passage est grande

- $\rho_1/\Delta\rho$ est grand, donc que les densités des deux liquides sont voisines.

Application numérique (conditions employées lors de l'expérience):

- eau salée: $\rho_1 = 1001 \text{ kg/m}^3$

- eau douce: $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$

- $\Delta\rho = 1 \text{ kg/m}^3$

- $h = 3 \text{ mm}$

donc: $T = 3,5$ s.

L'expérience montre une période d'environ 4s.

Remarque: on voit que l'on a intérêt à utiliser une eau salée peu concentrée. Dans le cas contraire, il faudra attendre que s'achève la première phase où le liquide supérieur s'écoule dans le liquide inférieur, et que les densités deviennent voisines (mais non égales!).

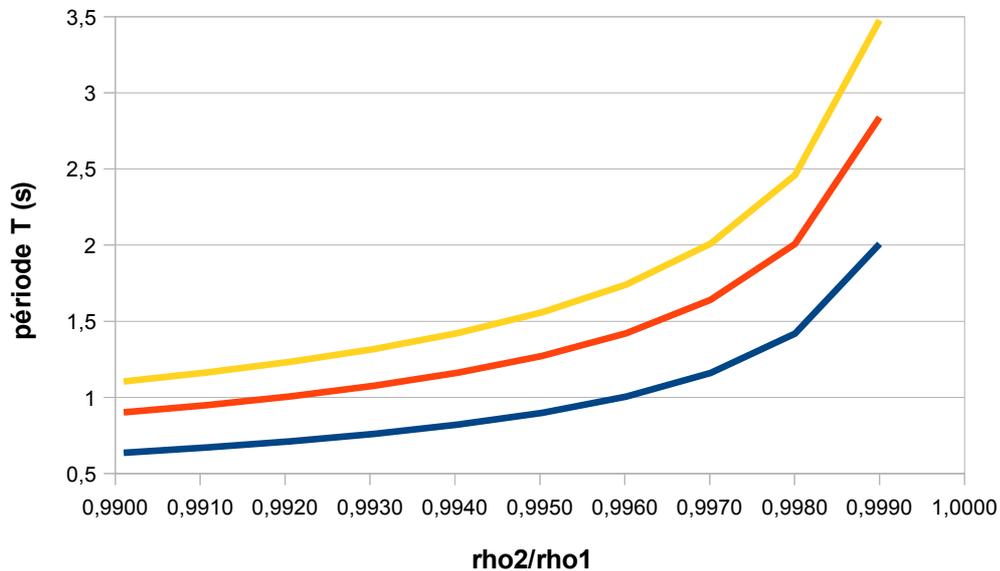


Figure 4 – dépendance de la période d'oscillations avec les densités et l'épaisseur h du passage de communication entre les deux liquides: jaune: $h = 3$ mm – rouge: $h = 2$ mm – bleu: $h = 1$ mm

Remarque: - Les oscillations d'inversion du filet d'eau salée et du filet d'eau douce ne se poursuivent pas indéfiniment. Elles finissent par s'arrêter à cause du phénomène de diffusion. Par suite de l'agitation moléculaire qui existe dans tout liquide à température absolue non nulle (mouvement brownien), les deux liquides se mélangent progressivement. De part et d'autre du passage on obtient un liquide identique et homogène, obtenu par mélange des deux liquides initiaux, eau salée et eau douce, entre lesquels ont seulement lieu des flux des diffusion. La force correspondante à ce flux d'échange par diffusion est une force thermodynamique f molaire, reliée au potentiel chimique du mélange $\mu(z,P,T)$. Celui-ci représente le travail maximum qui peut être fourni par le liquide:

$$dw = d\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)_{P,T} dz$$

or: $dw = -fdz$, donc:

$$f = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)_{P,T}$$

Le potentiel chimique du mélange est donné par son activité a :

$$\mu = \mu^0 + RT \ln a$$

d'où:

$$f = -RT \left(\frac{\partial \ln a}{\partial z} \right)_{P,T}$$

pour une solution idéale, on a $a = c$ où c est la concentration du mélange:

$$f = - \left(\frac{RT}{c} \right) \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_{P,T}$$

Or si V est la vitesse relative des particules de chacun des constituants du mélange, un flux de diffusion est donné par la **loi de Fick**:

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial z} = cV$$

où D est le coefficient d'autodiffusion du mélange, J est le flux de matière, exprimé en mol/m²/s, traversant une surface unité en une durée unité. Il vient donc que la vitesse de diffusion est:

$$V = \frac{D}{RT} f$$

Elle s'annule lorsqu'il n'y a plus de force due aux inhomogénéités de concentration. En l'absence de gradient de concentration dans le mélange, pour un mélange devenu homogène à terme, $\partial c / \partial z = 0$, la force est nulle donc la vitesse de diffusion V est nulle aussi.

Terminons par quelques photos obtenues lors de notre expérience, celle-ci, je le rappelle, étant difficile à mettre en œuvre.



Photo 2 – l'eau salée s'écoule dans l'eau douce

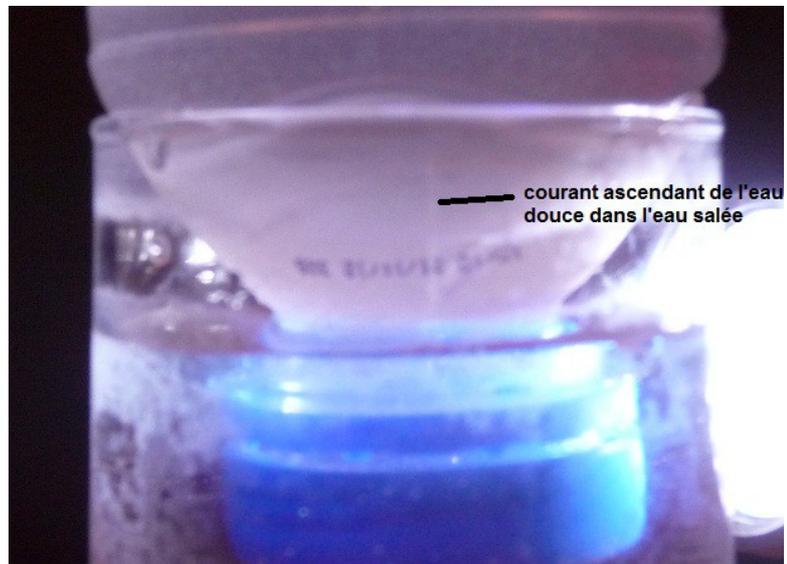


photo 3 – apparition d'un courant ascendant de l'eau douce vers l'eau salée au bout d'environ 4 secondes

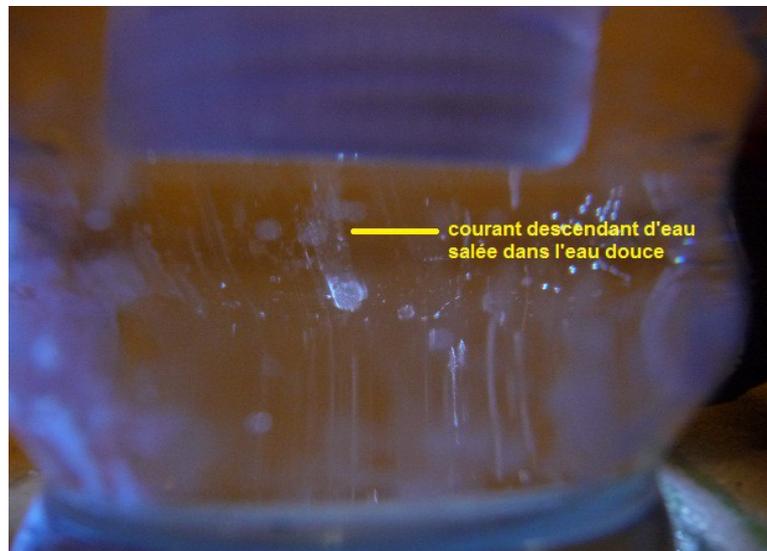


photo 4 – réapparition du courant descendant d'eau salée