



Frédéric Elie on
ResearchGate

Relativité Générale : Le paradoxe de la montgolfière *Réflexions personnelles*

Frédéric Elie

juillet 2007

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »

Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Dans cet article, qui relève plus d'une « question » amusante que d'une réelle investigation scientifique, je propose une idée assez osée : celle qui consiste à voir si, à l'époque de Newton, on n'aurait pas pu déjà poser les bases de... la Relativité Générale, en réfléchissant un peu sur le « paradoxe de la montgolfière », et moyennant les quelques outils mathématiques de l'époque !

Ce paradoxe est une idée personnelle originale, donc très contestable, à laquelle j'ai fait allusion dans mon article sur la [méthode expérimentale et les OVNI](#)s. Son mérite est de donner l'occasion de faire quelques révisions sur les notions de coordonnées covariantes et contravariantes, ainsi que de se poser des questions naïves sur des notions un peu trop vite acceptées. Au fond, même si l'approche est quelque peu maladroite, la vigilance qui préside à l'esprit de découverte ne consiste-t-elle pas à soulever des questions face à des résultats déjà admis et classés au rang des « vérités » définitivement acquises ?

SOMMAIRE

- 1 – Introduction
- 2 – Approche très naïve d'un « temps propre »
- 3 – Le « solide » espace-temps
- 4 – Coordonnées covariantes et coordonnées contravariantes
- 5 – Approche très naïve du ds^2 de Schwarzschild
- 6 – Principe d'inertie et relativité générale !

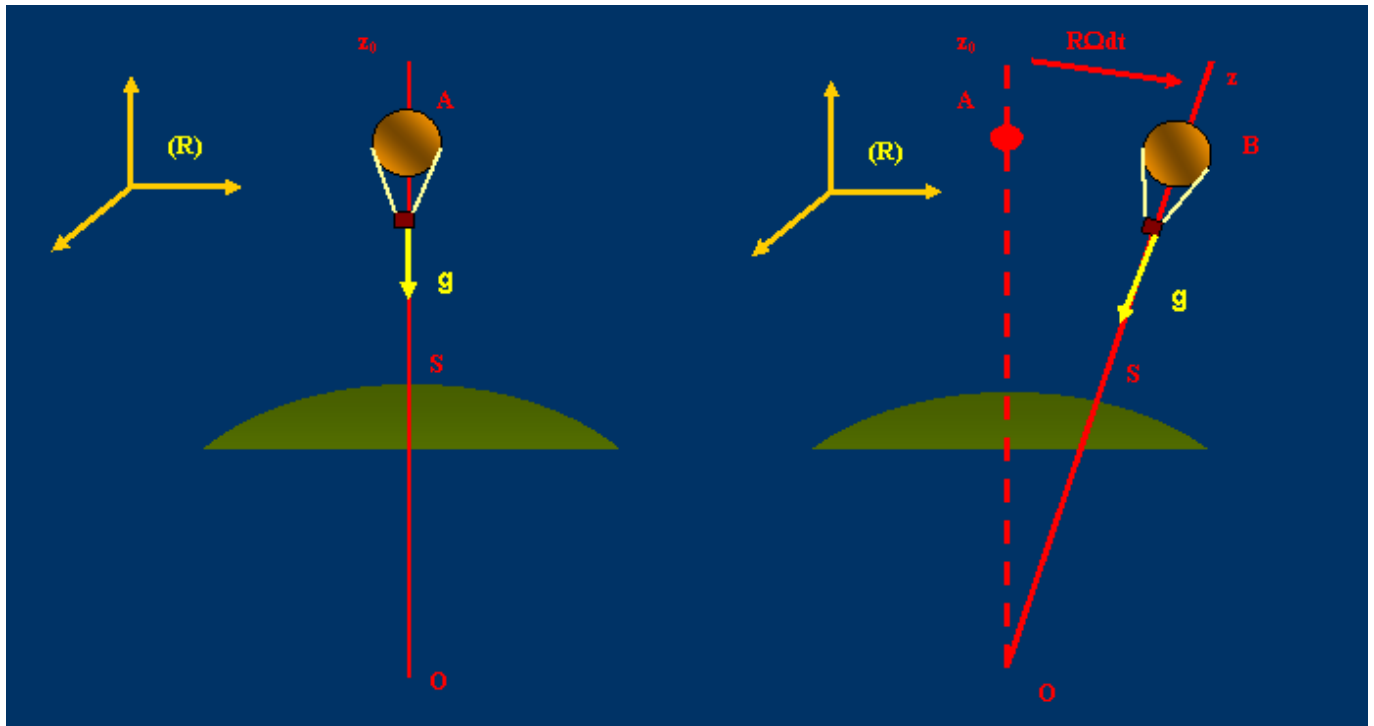
1 – Introduction

Soit une montgolfière immobile en A au-dessus d'un point S du sol (voir figure ci-dessous). Comme la Terre tourne sur elle-même avec une vitesse angulaire Ω (360° en 24 heures), au bout d'une durée dt le point S s'est déplacé d'une distance $R\Omega dt$ par rapport à un repère galiléen fixe (R). Le référentiel (R') d'axe Oz lié à la Terre a lui aussi tourné de l'angle Ωdt , mais la montgolfière, parfaitement immobile dans l'air, donc non liée au sol, aurait dû rester en A, immobile sur l'axe Oz_0 par rapport au référentiel galiléen (R). Or, au lieu de cela, elle s'est déplacée en B, restant toujours au-dessus du point S, en même temps que la Terre. La seule

force qui la lie à la Terre est la pesanteur, d'accélération $\mathbf{g}$, par l'intermédiaire de son poids, celui-ci étant parfaitement compensé par la poussée d'Archimède, ce qui donne un bilan de force nul, cause de l'immobilité de la montgolfière.

(NOTA : dans la suite de cet article, les grandeurs vectorielles sont écrites en gras, par commodité d'écriture).

Un observateur, situé sur le sol initialement en S, qui est entraîné par la rotation terrestre car solidaire de la Terre, aurait dû voir la montgolfière rester fixe dans le référentiel galiléen (R) lié aux étoiles fixes, donc se déplacer d'une distance égale à $(-R\Omega dt)$ en sens inverse de la rotation (donc vers l'ouest), R étant le rayon de la Terre. Or la montgolfière reste immobile au-dessus de S, entraînée elle aussi par la rotation du référentiel lié à la Terre (R', Oz).



Pourtant, contrairement à S et à l'observateur terrestre, aucune force de contact du sol (réaction) ne l'oblige à être solidaire de la Terre. Seule la gravitation $\mathbf{g}$ la lie à la Terre.

Tout se passe alors comme si la gravitation était responsable d'une solidarisation du référentiel avec la Terre.

Autrement dit, *le système de coordonnées locales (R', Oz) est donc fonction de la gravitation !*

2 – Approche très naïve d'un « temps propre »

Développons cette idée, comme l'aurait pu faire déjà Newton en regardant simplement une montgolfière immobile au-dessus du sol, et découvrir ainsi les principes de la Relativité Générale, plus de deux siècles avant Einstein !

Le système de coordonnées locales doit être fonction de la gravitation, ai-je dit. Autrement dit, toute transformation, suivant l'axe radial Oz , d'une coordonnée dr en dr' pour un corps soumis au même potentiel de gravitation Φ doit dépendre de celui-ci.

Plus exactement, un observateur situé à l'extérieur du référentiel rattaché à la montgolfière attribue une mesure de distance, suivant Oz , de valeur dr^2 , tandis que, pour un observateur situé dans la montgolfière donc lié au référentiel de celui-ci, attribue la valeur dr'^2 . Le lien entre ces deux mesures doit dépendre du potentiel, donc on doit avoir :

$$dr'^2 = K(\Phi) dr^2$$

pourvu que ces deux mesures soient effectuées par deux observateurs, l'un extérieur, l'autre lié au référentiel propre, placés dans le même potentiel de gravitation. Dans ce cas, les deux observateurs soumis à la même gravitation, sont entraînés par une vitesse de chute libre identique due à celle-ci, v , d'où :

$$dr' = v dt' \quad \text{et} \quad dr = v dt$$

Où dt et dt' sont les durées mesurées respectivement par l'observateur extérieur et l'observateur lié à la montgolfière, a priori différentes puisque dr et dr' le sont aussi. On obtient donc la transformation sur les durées :

$$dt'^2 = K(\Phi) dt^2 \quad (1)$$

NB : dans le cas contraire, si d'autres forces interviennent et que les deux observateurs sont placés dans leurs potentiels, on aurait $v' \neq v$.

Développant (1) au premier ordre, on a :

$$K(\Phi) \approx K(0) + \left(\frac{dK}{d\Phi} \right)_{\Phi=0} \Phi = K(0) + a\Phi$$

avec :

$$a = \left(\frac{dK}{d\Phi} \right)_{\Phi=0}$$

Or pour $\Phi = 0$ (absence de gravitation) on doit retrouver $dt' = dt$ donc $K(0) = 1$.

On a donc : $K(\Phi) \approx 1 + a\Phi$; mais le potentiel de gravitation a la forme newtonienne :

$$\Phi(r) = - \frac{GM}{r}$$

avec M masse de la Terre, G constante de la gravitation universelle.

La relation (1) devient alors :

$$dt'^2 = dt^2 \left(1 - a \frac{GM}{r} \right) \quad (2)$$

relation étonnamment proche de celle de Karl Schwarzschild pour un corps immobile ($dr = 0$) placé dans un champ de gravitation :

$$dt'^2 = dt^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)$$

où c est la célérité de la lumière.

On serait tenté de poser que le coefficient « a », jusqu'à présent inconnu, est égal à : $a = 2/c^2$, mais au stade de notre raisonnement rien ne permet encore de le faire.

Cependant l'idée nouvelle, à l'époque de Newton, par rapport à la transformation de Galilée, est que les coordonnées de temps et d'espace se transforment en faisant intervenir la gravitation, ce qui est l'idée de base de la Relativité Générale !

La constante « a » doit de toutes façons être très petite puisque l'expérience quotidienne montre des écarts négligeables entre dt'^2 et dt^2 . Son inverse, $1/a$, a les dimensions d'une vitesse au carré, notée V^2 , mais de quelle vitesse V s'agit-il ?

A ce stade, rien n'indique que $V = c$. Il faudrait pour cela démontrer que V est la vitesse la plus

grande connue et que c'est un invariant ; autrement dit, V étant maximale, la loi de composition des vitesses ne s'y applique plus. Or le démontrer ne devint possible que grâce à l'expérience cruciale de Michelson et Morlaix sur le test de l'existence d'un milieu cosmique constitué de l'« éther », chose que ne pouvait faire Newton.

Mais le paradoxe de la montgolfière aurait pu déjà suggérer, à l'époque de Newton, le caractère non absolu du temps et de l'espace !

On se limitera, à ce niveau de raisonnement, à la forme suivante pour (2) :

$$dt'^2 = dt^2 \left(1 - \frac{2GM}{rV^2} \right) \quad (3)$$

3 – Le « solide » espace-temps

On peut toutefois essayer de démontrer, par le raisonnement heuristique suivant, le caractère invariant de la vitesse inconnue V , sans qu'on puisse pour autant conclure qu'il s'agisse de c .

Puisque les points de l'espace et du temps semblent « solidement » liés au référentiel où règne un champ de gravitation, on peut, comme pour un solide quelconque (S), considérer que deux points M et M' , repérés par leurs dates respectives (t, t') et leurs positions respectives (r, r'), gardent leur distance MM'^2 fixe dans le « solide » formé par le référentiel de temps et d'espace lié à la Terre. Mais cette distance $s^2 = MM'^2$ n'est plus uniquement spatiale, elle doit faire intervenir aussi les dates t et t' puisque d'après (3), on sait que le temps dépend du champ de gravitation.

Il faut alors considérer la distance non plus dans le seul espace euclidien des positions, mais dans un espace à la fois des positions et des dates, c'est-à-dire l'espace physique et le temps, muni d'une métrique (une mesure des distances) non-euclidienne. En nous restreignant aux positions radiales « r » pour la partie spatiale, tout vecteur de ce nouvel espace aura désormais pour coordonnées (t, r).

La distance euclidienne $s^2 = MM'^2$ entre M et M' dans l'ancien espace physique ordinaire, nécessitait la définition d'un produit scalaire des vecteurs de cet espace, puisque :

$$s^2 = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Dans le nouvel espace des positions et des temps, il en est de même : la distance est définie à partir d'un produit scalaire. Celui-ci doit dépendre de la gravitation au voisinage d'une masse. Il faut donc généraliser la notion de produit scalaire pour un espace non euclidien, muni d'un système de coordonnées quelconque.

Pour deux vecteurs de cet espace, $\overrightarrow{OM} = (t, r)$ et $\overrightarrow{OM'} = (t', r')$, on serait tenté de généraliser le produit scalaire de manière classique :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r r' + V^2 t t'$$

et donc d'avoir :

$$s^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = r^2 + V^2 t^2$$

ou encore, pour des distances infinitésimales : $ds^2 = dr^2 + V^2 dt^2$.

Mais ceci contredit le fait que V est un invariant (maximale et constante, donc ne pouvant être additionnée comme vitesse) ; en effet, l'intervalle ds^2 peut représenter :

- soit une distance spatiale, parcourue avec une vitesse v' pendant la même durée dt ;
- soit une durée dt' ;
- soit une combinaison des deux.

Dans le premier cas on a : $ds^2 = v'^2 dt^2 = dr^2 + V^2 dt^2$, ce qui donne alors pour v'

$$v'^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V^2 = v^2 + V^2 > V^2$$

ce qui est non admissible par hypothèse (V maximale), v = dr/dt étant la vitesse du corps mesurée dans les coordonnées (t, r).

Dans le deuxième cas : $ds^2 = V^2 dt'^2 = dr^2 + V^2 dt^2$. Or dans un champ de gravitation on a vu que le temps propre dt' est donné par (3), on aurait donc simultanément :

$$dt'^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rV^2}\right) dt^2$$

$$dt'^2 = \frac{dr^2}{V^2} + dt^2 = \left(1 + \frac{v^2}{V^2}\right) dt^2$$

L'égalité entraînerait pour la vitesse du corps : $v^2 = -2GM/r$ donc $v^2 < 0$, ce qui ne convient pas.

Ainsi, il n'est plus possible d'utiliser le produit scalaire euclidien dans le nouvel espace des positions et des dates en présence d'un champ de gravitation.

Pour suggérer une nouvelle distance dans ce qui désormais s'appellera l'espace-temps, considérons de plus près la forme (3) liant le temps propre dt' au temps dt mesuré par un observateur extérieur.

Le terme $-GM/r$ est le potentiel de gravitation $\Phi = -GM/r$. Or le théorème de l'énergie mécanique, connu à l'époque de Newton, donne pour un corps mécaniquement isolé :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m \Phi = cste$$

Dans le cas particulier d'un corps de vitesse initiale très faible v et initialement éloigné de tout champ de gravitation, on peut prendre $E = cte \ll 1$, et donc écrire : $v^2/2 + \Phi \approx 0$, soit : $v^2 - 2GM/r \approx 0$. Dans ces conditions, l'expression (3) peut donc encore s'écrire :

$$dt'^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) \quad (4)$$

La forme (4) rappelle l'expression lorentzienne du temps propre de la Relativité Restreinte. Or (4) s'écrit aussi, puisque $v = dr/dt$:

$$ds^2 = V^2 dt'^2 = V^2 dt^2 - dr^2$$

suggérant que la distance dans l'espace-temps doit être de cette forme pour respecter la cohérence avec l'expression (3).

Ainsi dans l'espace-temps la nouvelle norme d'un vecteur (t, r) sera :

$$s^2 = \|\mathbf{OM}\|^2 = V^2 t^2 - r^2 \quad (5)$$

Ou encore, entre deux points de l'espace-temps, MM', la distance sera :

$$\Delta s^2 = \|\mathbf{MM}'\|^2 = V^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$$

Cette forme suggère que l'invariant V est la vitesse de propagation de toute information entre deux points (ou événements) de l'espace-temps M(r,t) et M'(r',t') : aucune force, aucun champ,

qu'il soit mécanique, acoustique ou optique (c'est toujours Newton qui est censé raisonner ici !) ne peut se propager d'un point à un autre de l'univers avec une vitesse plus grande que V . Mais à ce stade du raisonnement, V n'est toujours pas forcément la vitesse de la lumière : il aurait fallu pour cela que l'expérience de Michelson-Morlaix puisse avoir lieu dans le but de vérifier la loi de composition des vitesses dans un milieu éthérique supposé. Cependant, ce constat, qui aurait pu être fait dès l'époque de Newton, si les bases de ce que j'avance ici sont exactes, remettait déjà en cause la notion de simultanéité des événements et donc le caractère absolu du temps.

Note : constance de la vitesse de la lumière et invariance du ds^2

La description des processus naturels exige un référentiel. Un référentiel est un système de coordonnées pour repérer la position des corps dans l'espace ordinaire et d'une horloge pour repérer le temps.

Les référentiels où les corps se meuvent librement, sans l'action d'aucune force extérieure, sont dits galiléens ou d'inertie.

Tous les référentiels en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie, sont eux-mêmes d'inertie.

Le principe de relativité de Galilée pose que les lois de la physique conservent la même forme dans les référentiels d'inertie. Lorsque ces lois, dans un référentiel d'inertie, mettent en jeu l'existence d'une interaction à distance (telle la gravitation) qui dépend des coordonnées spatiales des corps, elles supposent implicitement le caractère instantané de cette interaction : tout changement de position de l'un des corps entraîne une variation instantanée du champ d'interaction sur les autres.

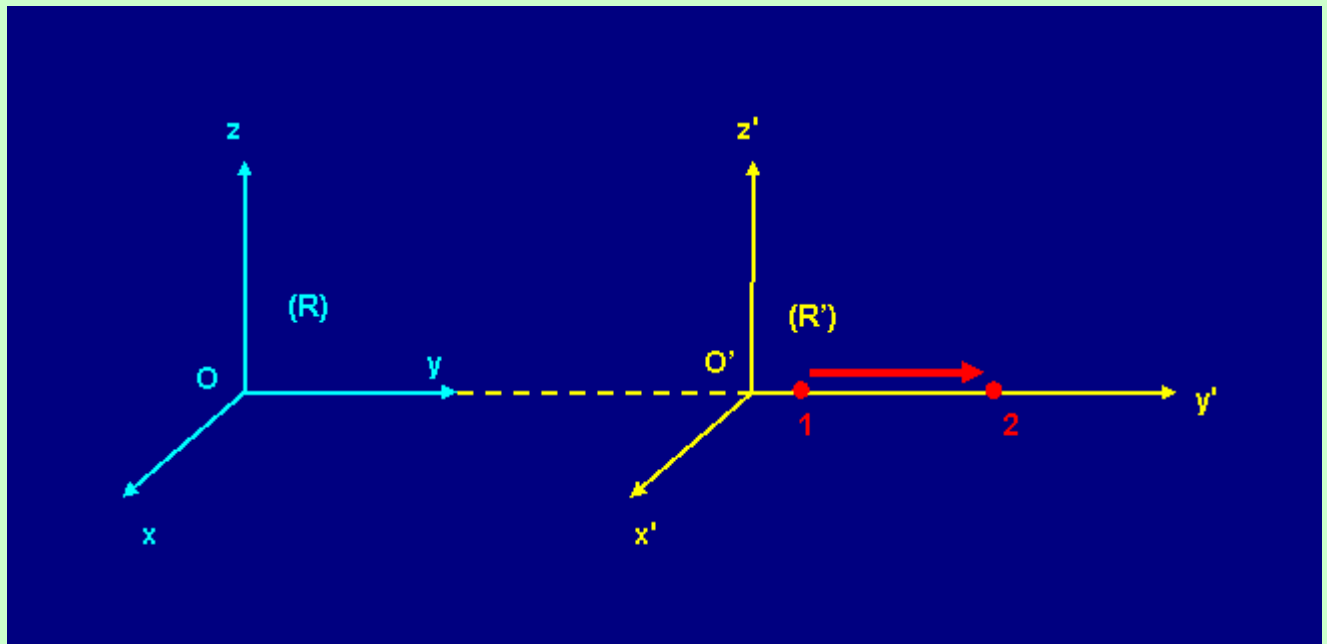
Or la théorie de l'électromagnétisme a montré que les interactions électromagnétiques (électriques, magnétiques, optiques...) se propagent avec une vitesse finie : la vitesse de la lumière c . Un changement au niveau d'une source entraîne un changement du champ en un autre point de l'espace au bout d'un laps de temps égal la distance divisée par c . A ce stade, le principe de relativité galiléenne ne pouvait donc plus être valable. Mais c n'était pas a priori la vitesse maximale de toute interaction. Il a fallu pour cela attendre l'expérience de Michelson-Morlaix (1881) pour conclure que c est bien la vitesse maximale de propagation de toute interaction. Cette expérience avait pour but de tester l'hypothèse de l'existence de l'« éther », censé baigner le vide et le milieu interstellaire, qui serait le support matériel des ondes électromagnétiques. Elle visait à vérifier la loi d'additivité des vitesses de propagation de la lumière par rapport à l'éther compte tenu de la vitesse de déplacement du référentiel terrestre dans l'espace, par rapport aux étoiles fixes. Le résultat négatif de l'expérience conduit à conclure que c est bien un invariant universel et à reconstruire la physique pour tenir compte du fait qu'elle se conserve dans tout référentiel d'inertie. A la base de cette construction se trouve le principe de relativité d'Einstein (1905) qui pose que toute interaction se propage avec une vitesse finie inférieure ou égale à c , et donc remet en cause la notion de simultanéité des événements, et par conséquent le caractère absolu du temps (selon lequel le temps est indépendant du référentiel d'inertie).

Dans la mécanique relativiste d'Einstein, le temps n'est plus absolu, contrairement à la mécanique classique de Galilée et Newton ; en contrepartie, c'est la vitesse de la lumière c qui devient un absolu : elle est indépendante du référentiel. Deux événements sont considérés simultanés pour un certain référentiel qu'il convient de préciser, tandis qu'ils ne le sont pas pour d'autres.

Nous allons voir comment l'invariance de la vitesse de la lumière conduit à poser celle de l'intervalle ds^2 séparant deux événements dans un référentiel d'inertie.

Considérons un référentiel (R') muni d'un système de coordonnées d'espace et de temps (O' , x' , y' , z'), en translation uniforme de vitesse V suivant l'axe Oy par rapport à un référentiel d'inertie (R) muni d'un système de coordonnées d'espace et de temps (O , x , y , z). Comme on le

sait, (R') est donc lui-même d'inertie.



Un événement (1) consiste à l'émission d'un signal qui se propage avec la vitesse de la lumière c à partir du point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) à la date t_1 dans le référentiel R . Un deuxième événement (2) consiste à la réception de ce signal au point de coordonnées (x_2, y_2, z_2) à la date t_2 dans ce même référentiel R . La distance entre ces deux points, mesurée dans R , est donnée par

$$\|M_1 M_2\|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Cette distance a été parcourue par le signal sur une durée $t_2 - t_1$ telle que $M_1 M_2 = c(t_2 - t_1)$. On peut donc écrire, de manière équivalente :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

De la même manière, comme c reste inchangée dans les référentiels d'inertie, ces deux événements, mesurés dans R' , donnent :

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0$$

Pour deux événements quelconques (1) et (2), la quantité

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

est appelée intervalle entre ces deux événements. Il n'est pas nécessairement nul.

Pour deux événements infiniment voisins, l'intervalle prend la forme différentielle :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

De l'invariance de c il découle que si $ds^2 = 0$ dans un référentiel R , on a aussi $ds'^2 = 0$ dans tout autre référentiel R' . Pour deux événements quelconques mesurés dans R et R' , cette propriété fait que, même si ds^2 et ds'^2 sont non nuls, on doit avoir une relation de proportionnalité :

$$ds^2 = k ds'^2$$

Il est alors facile de vérifier que la constante k est indépendante des coordonnées, à cause du principe de relativité d'Einstein et qu'elle est égale à $k = 1$: en effet, il suffit pour cela de considérer un troisième référentiel R'' avec $ds^2 = k ds'^2$ mais aussi $ds'^2 = k ds''^2$, donc $ds^2 = k ds'^2$ entraîne $k = 1$.

Il vient alors la propriété fondamentale suivante :

L'intervalle de deux événements reste le même dans tous les référentiels d'inertie, et ceci résulte de la constance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels d'inertie (**principe de relativité d'Einstein**).

4 – Coordonnées covariantes et coordonnées contravariantes

A ce stade du raisonnement apparaît alors l'existence de deux types de coordonnées pour repérer les points d'un espace muni d'un produit scalaire, chose qui n'aurait pas échappé à Newton ou les savants qui lui étaient contemporains, dès lors que la norme n'est plus euclidienne : les coordonnées contravariantes et les coordonnées covariantes.

En effet :

Concernant le produit scalaire dans l'espace-temps, d'abord supposé sans source de gravitation, la relation (5) suggère d'écrire :

$$\langle OM | OM' \rangle = V^2_{tt'} - r r' = {}^t OM [G] OM'$$

avec

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui définit la métrique dans l'espace-temps hors gravitation.

En présence de gravitation on doit s'attendre aussi à une forme de produit scalaire exprimée de la sorte, mais où les composants de la matrice $[G]$ sont a priori différents des valeurs 1, 0, 0, -1 ci-dessus.

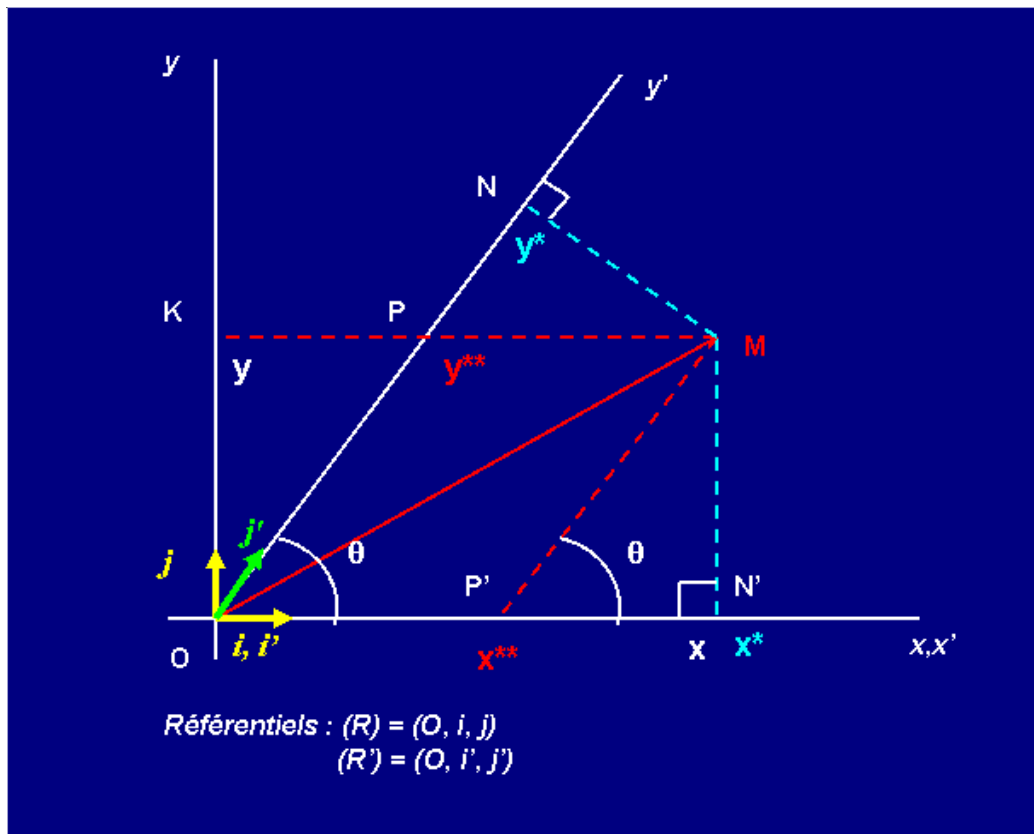
Dores et déjà le critère d'appartenance de M et M' à un même « solide » formé par l'espace-temps en présence de gravitation, à savoir :

$$s^2 = \| MM' \|^2 = {}^t MM' [G] MM' = \text{constante}$$

entraîne que l'intervalle d'espace-temps ds^2 dans la nouvelle métrique $[G]$ est un invariant.

Or on a vu précédemment (fin du paragraphe 3) que cette invariance de ds^2 résulte de celle de V .

Pour comprendre cette nouvelle notion de produit scalaire, nous avons besoin d'une digression sur les notions de coordonnées contravariantes et covariantes, à l'aide de l'exemple simple suivant :



On décide de repérer le point M, non plus dans l'ancien référentiel $(R ; O, i, j)$, mais dans un nouveau référentiel $(R' ; O, i', j')$ déduit du premier par une rotation de l'axe des ordonnées Oy' d'angle θ par rapport à Ox .

Dans le nouveau référentiel (R') il y a deux façons de repérer M par des coordonnées : les contravariantes notées (x^{**}, y^{**}) , et les covariantes (x^*, y^*) :

- on appelle coordonnées contravariantes (x^{**}, y^{**}) celles qui sont mesurées parallèlement aux axes Ox' , Oy' (par rapport au produit scalaire dans (R));
- on appelle coordonnées covariantes (x^*, y^*) celles qui sont mesurées perpendiculairement aux axes Ox' , Oy' (par rapport au produit scalaire dans (R)).

Le passage de (R) à (R') obéit à :

$$\begin{aligned} i' &= i \\ j' &= \cos \theta i + \sin \theta j \end{aligned}$$

qui introduit la matrice de transformation :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i' \cdot i & i' \cdot j \\ j' \cdot i & j' \cdot j \end{bmatrix}$$

de composantes :

$$i' \cdot i = 1, \quad i' \cdot j = 0, \quad j' \cdot i = \cos \theta, \quad j' \cdot j = \sin \theta$$

Calculons les relations entre les coordonnées contravariantes dans (R') et les coordonnées dans (R) :

On a, d'après la figure : $KP = OP \cos \theta = y^{**} \cos \theta$.

Or : $OP^2 = OK^2 + KP^2$, d'où : $y^{**2} = y^2 + y^{**2} \cos^2 \theta$, c'est-à-dire : $y^{**2} \sin^2 \theta = y^2$, ou encore

$$y^{**} = \frac{y}{\sin \theta}$$

Par ailleurs : $OP' = x^{**} = ON' - P'N' = x - KP = x - y^{**} \cos \theta = x - y \cot \theta$. D'où :

$$x^{**} = x - \cot \theta$$

Calculons maintenant les coordonnées covariantes à partir des coordonnées dans (R) :

On a immédiatement :

$$x^* = x$$

Et pour y^* : $y^* = ON = OP + PN$ avec $PN = KP = y^{**} \cos \theta$ et $OP = y^{**}$.

D'où : $y^* = y^{**} (1 + \cos \theta) = y (1 + \cos \theta) / \sin \theta$. Ainsi :

$$y^* = y \left(\frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta \right)$$

Les relations entre les coordonnées contravariantes et les coordonnées covariantes s'obtiennent en éliminant x et y dans les relations précédentes :

$x^* = x = x^{**} + y \cot \theta = x^{**} + y^{**} \sin \theta \cot \theta$, donc :

$$x^* = x^{**} + y^{**} \cos \theta$$

$y^* = y (1/\sin \theta + \cot \theta) = y^{**} \sin \theta (1/\sin \theta + \cot \theta)$, donc :

$$y^* = y^{**} (1 + \cos \theta)$$

La relation de passage entre les coordonnées contravariantes et les coordonnées covariantes est alors donnée par :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = [G] \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}$$

avec :

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & 1 + \cos \theta \end{bmatrix}$$

Comment, dans ce cas, définir un produit scalaire dans le référentiel (R') ?

On n'a plus le droit d'utiliser le théorème de Pythagore, ni pour le système de coordonnées contravariantes (x^{**} , y^{**}), ni pour le système de coordonnées covariantes (x^* , y^*) puisque le référentiel (R') n'est pas euclidien.

Essayons comme produit scalaire :

$$\langle \mathbf{OM} | \mathbf{OM}' \rangle = x^{**} x'^* + y^{**} y'^*$$

En posant : $\mathbf{OM}^{**} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathbf{OM}$ exprimé par ses coordonnées contravariantes, et :

$\mathbf{OM}'^* = \begin{pmatrix} x'^* \\ y'^* \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathbf{OM}'$ exprimé par ses coordonnées covariantes, le produit ci-dessus

s'écrit :

$$\langle \mathbf{OM} | \mathbf{OM}' \rangle = {}^t \mathbf{OM}^{**} \cdot \mathbf{OM}'^*$$

où le symbole (t) placé devant un vecteur représente son écriture transposée.

Comme $\mathbf{OM}'^* = [G] \mathbf{OM}^{**}$, on obtient donc :

$$\langle \mathbf{OM} | \mathbf{OM}' \rangle = {}^t \mathbf{OM}^{**} [G] \mathbf{OM}'^{**}$$

qui est de la forme identifiée plus haut..

Lorsque $\mathbf{OM} = \mathbf{OM}'$, cette expression fournit la norme du vecteur $\mathbf{OM}$:

$$\|\mathbf{OM}\|^2 = s^2 = x^{**} x^* + y^{**} y^* = {}^t \mathbf{OM}^{**} [G] \mathbf{OM}^{**} = x^2 + y^2 \frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - x y \cot \theta$$

Evidemment, lorsque $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque (R') se confond avec (R), le carré de la norme de $\mathbf{OM}$ est égale à $x^2 + y^2$ (norme euclidienne).

On remarque que les composants de [G] dans (R') sont ceux de la relation de passage des vecteurs de la base (i', j') en coordonnées contravariantes et coordonnées covariantes :

$$\begin{aligned} i'^* &= i'^{**} + \cos \theta j'^{**} \\ j'^* &= 0 i'^{**} + (1 + \cos \theta) j'^{**} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix} i'^* \\ j'^* \end{pmatrix} = [G] \begin{pmatrix} i'^{**} \\ j'^{**} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & 1 + \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i'^{**} \\ j'^{**} \end{pmatrix}$$

L'application du principe de solidarisation du système de coordonnées avec un champ de gravitation

$$s^2 = \|\mathbf{OM}\|_{(R')}^2 = {}^t \mathbf{OM}^{**} [G] \mathbf{OM}^{**} = \text{cste} \quad (6)$$

pose que s^2 est un invariant.

Pour un intervalle d'espace-temps infinitésimal, on a :

$$d s^2 = {}^t d \mathbf{M}^{**} [G] d \mathbf{M}^{**} = \text{cste}$$

avec :

$$d \mathbf{M}^{**} = \begin{pmatrix} d r^{**} \\ V d t^{**} \end{pmatrix}$$

dans notre exemple.

Il est facile de vérifier que l'on a également :

$$d s^2 = {}^t d \mathbf{M}^* [G]^{-1} d \mathbf{M}^*$$

puisque $d \mathbf{M}^{**} = [G]^{-1} d \mathbf{M}^*$

Dans un champ de gravitation [G], désormais appelé le **tenseur métrique** pour la géométrie liée à (R'), a ses composantes qui dépendent du potentiel de gravitation Φ . On notera en général ses composantes :

$$[G] = [g^{ij}]$$

Et on notera, comme il est d'usage en physique mathématique, les vecteurs exprimés en coordonnées covariantes et exprimés en coordonnées contravariantes respectivement par :

$$d \mathbf{M}^* = (dx_i) \text{ et } d \mathbf{M}^{**} = (dx^i) \quad (\text{attention aux positions des indices !})$$

On applique la convention de sommation sur les indices se répétant en haut et en bas. Par

exemple, l'expression $g^{ij} X_i$ représente la somme : $\sum_i g^{ij} X_i$ et ne dépend plus que de l'indice j.

La relation de passage des coordonnées contravariantes et covariantes vue plus haut, s'écrit désormais comme :

$$\begin{aligned} dx^i &= g^{ij} dx_j \\ dx_j &= g_{ij} dx^i \end{aligned}$$

et l'on s'aperçoit que les g_{ij} sont les composants de la matrice inverse $[G]^{-1}$ de la matrice $[G]$ de composants g^{ij} . L'intervalle élémentaire d'espace-temps s'écrit alors indifféremment :

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx^i dx^j$$

Note sur les tenseurs et les coordonnées curvilignes :

► Coordonnées contravariantes d'un vecteur :

Soit une base (B) d'un espace vectoriel de dimension n, constituée de n vecteurs indépendants (e_k), $k = 1, \dots, n$. Pour tout vecteur $\mathbf{v}$ de cet espace vectoriel, on appelle **coordonnées contravariantes** l'ensemble unique des nombres scalaires (v^k) avec lesquels le vecteur $\mathbf{v}$ se décompose sur la base (B) :

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v^k \mathbf{e}_k$$

Comment se transforment les coordonnées du vecteur $\mathbf{v}$ quand on passe de la base (B) à une base (B') de vecteurs ($\mathbf{e}'_k$) ?

Les vecteurs de bases (B) et (B') se transforment par la matrice de changement de base $A = (A_i^j)$ telle que :

$$\mathbf{e}'_i = \sum_j A_i^j \mathbf{e}_j$$

Par suite :

$$v^j = \sum_i A_i^j v'^i \quad \text{et} \quad v'^j = \sum_i B_i^j v^i$$

où B_i^j sont les composants de la matrice inverse de A : $B = A^{-1}$.

On appliquera désormais la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas (convention d'Einstein : voir le texte).

► Coordonnées covariantes d'une forme linéaire :

On appelle forme linéaire sur un espace vectoriel (E) de dimension n, une application linéaire de E dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ étant le corps des nombres réels (cette définition se généralise lorsque l'on a affaire à un corps de nombres quelconque).

L'espace dual de (E), noté (E^*), est l'ensemble des formes linéaires sur (E) : c'est aussi un espace vectoriel de base (B^*), dite duale, notée (dx^k). La forme dx^k est appelée forme coordonnée et fait correspondre à tout vecteur $\mathbf{v}$ de (E) sa k-ième coordonnée contravariante dans la base (B):

$$dx^k(\mathbf{v}) = x^k$$

Il est clair alors que l'on a la relation de dualité : $dx^k(e_j) = \delta_j^k$ (symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$, 0 sinon).

Tout vecteur de (E^*) , c'est-à-dire toute forme linéaire ω se décompose sur la base duale selon des coordonnées (ω_k) :

$$\omega = \omega_k dx^k$$

Les coordonnées ω_k sont les coordonnées covariantes de la forme linéaire ω relativement à la base (B) .

On démontre facilement que le changement de bases (B) en (B') dans (E) entraîne les transformations sur les bases (B^*) et (B'^*) de (E^*) :

$$dx'^k = B_i^k dx^i$$

où B est l'inverse de A , et que les coordonnées covariantes d'une forme se transforment comme :

$$\omega'_k = A_k^j \omega_j$$

► *Produit tensoriel ; tenseurs :*

Soient trois espaces vectoriels de dimensions finies (E) , (F) et (D) . On appelle **produit tensoriel** des espaces (E) et (F) , noté $(E \otimes F)$, un espace vectoriel tel que l'espace des applications linéaires de cet ensemble $(E \otimes F)$ vers (D) soit isomorphe à l'espace des applications bilinéaires de $(E) \times (F)$ dans (D) .

En d'autres termes, il existe une application $\phi : E \times F \rightarrow (E \otimes F)$, telle que pour toute application bilinéaire f de $(E) \times (F)$ dans (D) , il existe une unique application linéaire f^* de $(E \otimes F)$ dans (D) telle que, pour tout couple de vecteurs $x \in (E)$ et $y \in (F)$ on ait :

$$f(x, y) = f^*(\phi(x, y)) \equiv f^*(x \otimes y) \in (D)$$

On note l'application bilinéaire $\phi(x, y) = x \otimes y$ le produit tensoriel des vecteurs x et y .

Si les bases de (E) et (F) sont respectivement (e_i) et (f_j) , la base de $(E \otimes F)$ est $(e_i \otimes f_j)$. Si les dimensions de (E) et (F) sont respectivement n et m , la dimension de $(E \otimes F)$ est nm .

Si au lieu de prendre (D) comme espace vectoriel on prend un corps de nombres scalaires (par exemple $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), la définition reste valable et le produit tensoriel des espaces duaux (E^*) et (F^*) , $(E^* \otimes F^*)$ est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$.

Nous présentons ci-après succinctement trois types de tenseurs assez courants : les tenseurs d'ordre $(0, 2)$, les tenseurs d'ordre $(2, 0)$ et les tenseurs d'ordre $(1, 1)$.

Soient deux formes linéaires ω et ω' respectivement sur les espaces vectoriels (E) et (E') , c'est-à-dire des vecteurs de leurs espaces duaux (E^*) et (E'^*) . Le produit tensoriel de ces formes linéaires est la forme bilinéaire telle que :

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega' : (E) \times (E') &\rightarrow \mathbf{R} \text{ (ou } \mathbf{C}) \\ \omega \otimes \omega'(\mathbf{u}, \mathbf{u}') &= \omega(\mathbf{u})\omega'(\mathbf{u}') \end{aligned}$$

Les bases des espaces duaux (espaces des formes linéaires) de (E) et (E'), notés (E*) et (E'*), étant (eⁱ) et (e'^j) (remarque : attention à la position des indices par rapport à celle des bases des espaces vectoriels (E) et (E')), la base de l'espace des formes bilinéaires de (E) x (E') est donc notée (eⁱ ⊗ e'^j). L'espace des formes bilinéaires est donc le produit tensoriel des espaces duaux : (E* ⊗ E'*).

Lorsque (E) = (E') on a affaire à des formes bilinéaires sur (E) x (E), c'est-à-dire des éléments de (E* ⊗ E*) : on les appelle **tenseurs d'ordre (0, 2)**. La base est donnée par les n² formes bilinéaires (eⁱ ⊗ e^j) et tout tenseur d'ordre (0, 2) s'y décompose avec ses coordonnées telles que :

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j$$

Il est alors facile de vérifier qu'un changement de base dans (E) : e'_i = A_i^j e_j se traduit par un changement des coordonnées du tenseur d'ordre (0, 2) de la forme :

$$T'_{ij} = A_i^n A_j^m T_{nm}$$

Soit un espace vectoriel (E) et deux vecteurs **u** et **v** de cet espace. On appelle produit tensoriel **u ⊗ v** la forme bilinéaire sur (E*) x (E*) (et non plus ici E x E) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} : (E^*) \times (E^*) &\rightarrow \mathbf{R} \text{ (ou } \mathbf{C}) \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} (\omega, \omega') &= \omega(\mathbf{u}) \omega'(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

où ω et ω' sont des formes linéaires sur (E), donc des éléments de (E*). Le produit tensoriel **u ⊗ v** est un vecteur de (E ⊗ E) et est appelé **tenseur d'ordre (2, 0)**.

Toute base de (E ⊗ E) s'écrit (e_i ⊗ e_j) où (e_i) est une base de (E). Un tenseur d'ordre (2, 0) se décompose sur cette base en :

$$T = T^{ij} e_i \otimes e_j \text{ (remarquer la position des indices !)}$$

et on démontre aisément qu'un changement de base, de matrice A, dans (E) se traduit par un changement des coordonnées de T tel que :

$$T'^{ij} = B_n^i B_m^j T^{nm}$$

où B est la matrice inverse de A : B = A⁻¹.

Soit un espace vectoriel (E) et son dual (E*). Soient un vecteur **u** ∈ (E) et une forme linéaire ω ∈ (E*). Le produit tensoriel du vecteur et de la forme linéaire est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \omega : (E^*) \times (E) &\rightarrow \mathbf{R} \text{ (ou } \mathbf{C}) \\ \mathbf{u} \otimes \omega (\omega', \mathbf{u}') &= \omega'(\mathbf{u}) \omega(\mathbf{u}') \end{aligned}$$

où **u'** est un vecteur de (E), et ω' une forme linéaire de (E*). On appelle **tenseur d'ordre (1, 1)** tout élément **u ⊗ ω** de (E* ⊗ E). Soient (dxⁱ) et (e_j) les bases respectivement de (E*) et (E). La base de (E* ⊗ E) est alors l'ensemble des n² tenseurs (e_i ⊗ dx^j) et tout tenseur d'ordre (1, 1) se décompose sur cette base en :

$$T = T_j^i e_j \otimes dx^i$$

On montre alors qu'un changement de base dans (E) et dans (E*) entraîne un changement des coordonnées du tenseur suivant :

$$T_j^i = B_n^i A_j^m T_n^m$$

On démontre que $(E \otimes E^*)$ est isomorphe (i.e. équivalent) à l'ensemble $L(E, E)$ des applications linéaires de (E) sur lui-même.

► *Métrique et pseudo-métrique sur un espace vectoriel :*

Soit (E) un espace vectoriel réel (construit sur le corps des nombres réels $\mathbf{R}$) de dimension finie. Une **métrique** G sur cet espace est une forme bilinéaire (donc un tenseur d'ordre $(0, 2)$) qui est :

- symétrique : $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- définie: $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{v}$ si et seulement si $\mathbf{u} = 0$
- positive : $G(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ pour tout $\mathbf{u}$ non nul.

Une métrique est aussi appelée produit scalaire sur (E) .

Lorsque la forme bilinéaire est seulement symétrique et définie, on l'appelle **pseudo-métrique** : $G(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ peut être positif ou négatif.

Une métrique (ainsi qu'une pseudo-métrique) est donc un élément de $(E^* \otimes E^*)$ de base notée $dx^i \otimes dx^j$ et s'y décompose suivant les coordonnées g_{ij} :

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \text{ avec, par symétrie, } g_{ij} = g_{ji}$$

On vérifie immédiatement que : $g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Une base de (E) est orthonormale vis-à-vis d'une métrique G si le produit scalaire de deux vecteurs différents constituant cette base est nul : $G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.

Un **espace de Minkowski**, tel que celui utilisé en Relativité Restreinte, est un espace vectoriel de dimension 4 muni d'une pseudo-métrique de coordonnées g_{ij} telles que :

$$g_{ij} = 1 \text{ pour } i = j = 0 ; -1 \text{ pour } i = j = 1, 2 \text{ ou } 3 ; 0 \text{ pour } i \neq j.$$

► *Isomorphisme canonique entre (E) et (E^*) , et coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur :*

Soit (E) un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une métrique G . Il est alors possible de construire un isomorphisme entre (E) et son espace dual (E^*) des formes linéaires, moyennant l'introduction, pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de (E) , d'une forme linéaire, notée $\mathbf{u}^*$, telle que :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ pour tout vecteur } \mathbf{v} \text{ de } (E)$$

On note encore parfois : $\mathbf{u}^* = G(\mathbf{u}, \cdot)$ ou $\langle \mathbf{u}, \cdot \rangle$.

On démontre que cet isomorphisme entre (E) et (E^*) ne dépend pas du choix de la base dans (E) : c'est pourquoi on le dit canonique.

La forme $\mathbf{u}^*$ associée au vecteur $\mathbf{u}$ de (E) a pour coordonnées dans la base (dx^j) de (E^*) :

$$\mathbf{u}^* = u_j dx^j$$

on démontre que ces coordonnées, appelées **coordonnées covariantes** du vecteur $\mathbf{u}$, sont égales à :

$$u_j = G(\mathbf{u}, \mathbf{e}_j)$$

et que, par définition, les **coordonnées contravariantes** d'un vecteur, définies au début de cette note, sont obtenues par :

$$u^j = \langle dx^j, \mathbf{u} \rangle = dx^j(\mathbf{u})$$

Les coordonnées contravariantes et covariantes d'un vecteur sont reliées par :

$$u_i = g_{ij} u^j$$

Les coordonnées contravariantes et covariantes d'un vecteur s'interprètent géométriquement ainsi : les coordonnées covariantes sont les projections orthogonales du vecteur sur les vecteurs de la base, c'est pourquoi elles utilisent la métrique G pour définir l'orthogonalité de deux vecteurs. Les coordonnées contravariantes sont les projections du vecteur sur un axe parallèlement aux autres axes (G n'intervient donc pas).

C'est ce que nous avons constaté dans le présent article lorsque j'ai introduit ces deux types de coordonnées.

Nous avons vu que (E) et (E^*) sont isomorphes en faisant correspondre à tout vecteur $\mathbf{u}$ de (E) une forme linéaire $\mathbf{u}^*$ de (E^*) . Inversement, puisqu'il s'agit d'un isomorphisme (la correspondance « marche » dans les deux sens), à toute forme linéaire ω de (E^*) correspond un vecteur unique ω' de (E) tel que l'application de la forme ω à un vecteur $\mathbf{v}$ de (E) soit le produit scalaire de ω' et de $\mathbf{v}$:

$$\omega(\mathbf{v}) = G(\omega', \mathbf{v})$$

En tant que vecteur de (E) , ω' se décompose sur la base (e_j) suivant ses coordonnées contravariantes ω'^j :

$$\omega' = \omega'^j e_j \text{ avec bien entendu : } \omega'^j = \langle dx^j, \omega' \rangle$$

Ses coordonnées covariantes sont, quant à elles, données par :

$$\omega'_j = \langle \omega, e_j \rangle = \omega(e_j)$$

Ces deux coordonnées sont reliées par :

$$\omega'_j = g_{ij} \omega'^i$$

Ceci étant posé, on peut alors associer au tenseur métrique $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, tenseur de type $(0, 2)$, son tenseur dual, de type $(2, 0)$, noté G' et tel que, pour tout couple de formes linéaires ω et φ de (E^*) :

$$\begin{aligned} G' : (E^*) \times (E^*) &\rightarrow \mathbf{R} \\ G'(\omega, \varphi) &= G(\omega', \varphi') \end{aligned}$$

G' a pour coordonnées g^{ij} sur la base $(e_i \otimes e_j)$ de $(E^* \otimes E^*)$:

$$G' = g^{ij} e_i \otimes e_j$$

On montre alors que :

- les matrices associées à G et G' sont inverses l'une de l'autre : $GG' = I$, soit encore : $g_{ij} g^{jm} = \delta_i^m$
- les coordonnées covariantes et contravariantes des vecteurs et des formes linéaires sont reliées par :

$$u^j = g^{jm} u_m \text{ et } \omega_j = g^{jm} \omega_m$$

► Transformation des coordonnées curvilignes :

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un jeu de coordonnées dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ et un autre jeu de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ fonction du précédent :

$$y_k = y_k(x_1, \dots, x_n)$$

Soit alors $(e_k(P))$ une base locale rattachée à un point P : le changement du système de coordonnées conduit à une nouvelle base locale $(e'_k(P'))$ rattachée au nouveau point transformé P' . Dans l'ancienne et la nouvelle base, un vecteur $\mathbf{MM}'$ défini par deux points M et M' infiniment voisins a pour composantes :

$$\mathbf{MM}' = \Delta x^k e_k = \Delta y^j e'_j$$

avec au premier ordre :

$$\Delta y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \Delta x^k$$

Les vecteurs de base se transforment alors selon :

$$e'_k = A^m_k e_m \quad \text{et} \quad e_j = B^n_j e'_n, \quad \text{avec :} \quad A^m_k = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} \quad \text{et} \quad B^n_j = \frac{\partial y^n}{\partial x^j} \quad \text{inverse de la matrice A :}$$

$$B = A^{-1}$$

Notons ici que c'est la nouvelle base qui est déterminée en fonction du changement du système de coordonnées, à l'inverse de l'habitude où les nouvelles coordonnées sont déterminées à partir du changement de base.

A partir de là, on montre aisément que les coordonnées contravariantes d'un vecteur $\mathbf{v}$ et les coordonnées covariantes d'une forme linéaire ω se transforment respectivement selon :

$$v'^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j} v^j$$

$$\omega'_k = \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \omega_j$$

La base de (E^*) se transforme selon :

$$dx'^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j} dx^j$$

Pour un tenseur d'ordre (p, q) , $T = T_{n_1 \dots n_q}^{m_1 \dots m_p} e_{m_1} \otimes \dots \otimes e_{m_p} \otimes dx^{n_1} \otimes \dots \otimes dx^{n_q}$ la transformation du système de coordonnées local se traduit par :

$$T'^{m_1 \dots m_p}_{n_1 \dots n_q} = \frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{m_p}}{\partial x^{k_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{n_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{n_q}} T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q}$$

Dans certains ouvrages c'est cette propriété qui est adoptée pour caractériser un tenseur d'ordre (p, q) .

5 – Approche très naïve du ds^2 de Schwartzschild

Dans un solide de l'espace euclidien ordinaire, la condition d'invariance de la distance entre deux points M et M' appartenant à ce solide conduit à exprimer les mouvements du solide à l'aide du torseur cinématique. En effet :

$$s^2 = \|MM'\|^2 = MM' \cdot MM' = cste \quad \text{entraîne :} \quad \frac{ds^2}{dt} = 0 = MM' \cdot \frac{dMM'}{dt}$$

Donc il existe un vecteur axial Ω tel que :

$$\frac{dMM'}{dt} = MM' \wedge \Omega$$

soit encore :

$$\frac{dOM'}{dt} - \frac{dOM}{dt} = V(M') - V(M) = MM' \wedge \Omega$$

$$V(M') = V(M) + MM' \wedge \Omega$$

Cette relation des vitesses se généralise-t-elle dans l'espace-temps dans le repère « solide » en présence de gravitation, aurait pu se demander Newton ?

Avec comme notations : $OM^* = [G]OM^{**}$ et $OM^{**} = [G]^{-1}OM^*$, et nous limitant à la symétrie $OM^{**} = (r^{**}, Vt^{**})$, ou $OM^* = (r^*, Vt^*)$, on a

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{rr} & 0 \\ 0 & g_{tt} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/g_{rr} & 0 \\ 0 & 1/g_{tt} \end{bmatrix}$$

la constance de s^2 s'exprime par :

$$s^2 = {}^t OM^* \cdot OM^{**} = {}^t OM^* [G]^{-1} OM^* = (r^* \ Vt^*) \begin{bmatrix} 1/g_{rr} & 0 \\ 0 & 1/g_{tt} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r^* \\ Vt^* \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{rr}} r^{*2} + \frac{1}{g_{tt}} V^2 t^{*2} = cste = K$$

$$g_{tt} r^{*2} + g_{rr} V^2 t^{*2} = K g_{rr} g_{tt} \quad (7)$$

L'équation (7) est la traduction du principe de solidarisation de l'espace-temps avec un champ de gravitation qui y est présent.

Par passage à la limite, lorsqu'il n'y a pas de champ de gravitation, on sait que les composants du tenseur métrique se réduisent à :

$$g_{rr} = -1 \text{ et } g_{tt} = 1$$

d'où la constante K : - $K = r^{*2} - V^2 t^{*2}$. On obtient ainsi l'équation d'un cône, dans l'espace temps d'axes (r, t) , appelé **cône de lumière**. Il délimite un domaine à l'intérieur duquel les événements peuvent être en lien causal puisque relié par une information se propageant à une vitesse inférieure ou égale à V ; au-delà, deux points-événements ne peuvent être en relation causale.

La valeur de $K = V^2 t^{*2} - r^{*2} = s_0^2$ est bien un invariant car elle est égale à la distance métrique dans l'espace-temps en l'absence de gravitation, s_0^2 , qui est lui-même un invariant dans cet espace.

Réinjectant cette valeur de K dans l'équation (7), et prenant pour les termes de gauche

l'approximation $g_{tt} \approx 1$ et $g_{rr} \approx -1$, il vient la relation approchée (cas de champs de gravitation faibles) :

$$g_{rr} g_{tt} = -1$$

Or on a vu que (relation (3)) :

$$g_{tt} = 1 - \frac{2GM}{rV^2}$$

La composante spatiale du tenseur métrique s'exprime alors par :

$$g_{rr} \approx -\frac{1}{g_{tt}} = -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rV^2}}$$

Nous pouvons donc exprimer, au premier ordre, l'élément métrique en présence de gravitation pour un espace-temps :

$$ds^2 = g_{tt} V^2 dt^{*2} + g_{rr} dr^{*2}$$

avec g_{rr} donné ci-dessus par l'exploitation de l'équation cinétique du solide espace-temps (7), et g_{tt} donné par la relation (3). On obtient donc un ds^2 de l'espace-temps en présence de gravitation du même type que celui de Karl Schwarzschild obtenu en exploitant les équations d'Einstein, et qui, par le raisonnement heuristique que j'ose soumettre ici aurait pu être obtenu dès l'ère newtonienne :

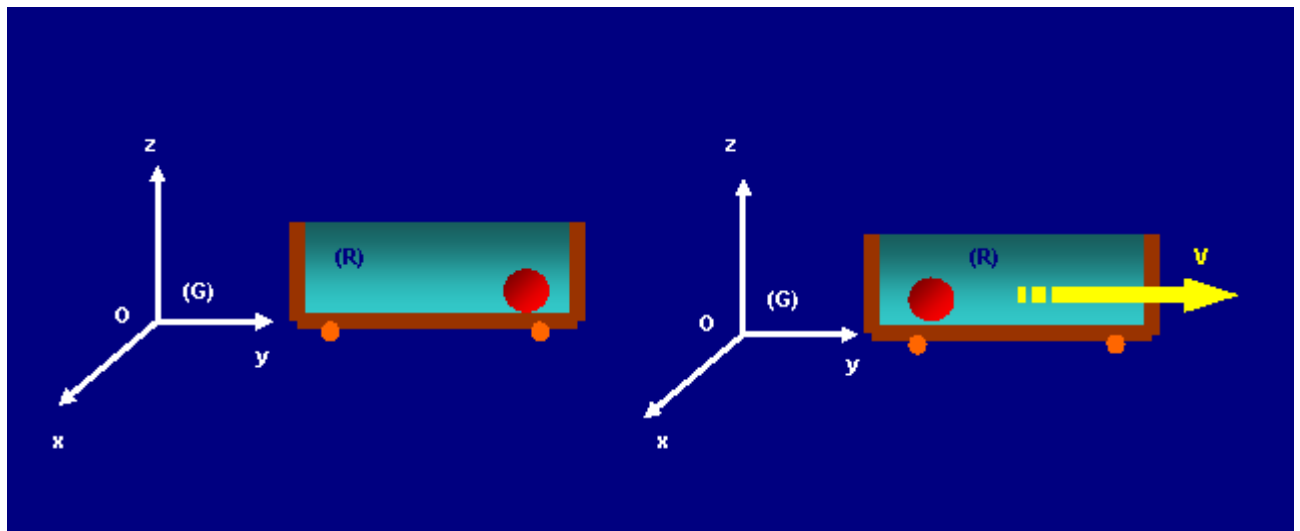
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rV^2}\right) V^2 dt^{*2} - \frac{dr^{*2}}{1 - \frac{2GM}{rV^2}} \quad (8)$$

Ce qui est intéressant ici, c'est que le ds^2 de la relativité générale soit déduit heuristiquement de mon équation (7) qui traduit simplement la solidarisation de l'espace-temps en présence de gravitation, à la manière d'un solide, et que cette idée résulte de la simple réflexion à partir de l'observation d'une montgolfière immobile, statique, dans l'air, de l'époque de Newton !

6 – Principe d'inertie et relativité générale !

Le fait que la gravitation soit une force liée à un référentiel fait d'elle une force d'inertie, qui elle-même peut être localement rendue équivalente à une autre force d'inertie (comme le pose la Relativité Générale d'Einstein), voir aussi [l'article sur l'ascenseur et l'impesanteur](http://fred.elie.free.fr).

Or une force d'inertie apparaît lorsque tout corps massif tend à rester immobile ou à conserver son mouvement initial lorsque le référentiel change. C'est l'exemple que donne le mouvement d'une bille immobile au début, dans une boîte subitement mise en mouvement : comme la bille tend, par son inertie (sa masse) à rester immobile par rapport à un référentiel extérieur à la boîte, la mise en mouvement du référentiel qui lui est lié (la boîte) va entraîner pour la bille un mouvement dans la boîte suite à l'action de la force d'inertie résultant du mouvement du référentiel d'inertie qu'est la boîte. On a donc l'expérience suivante (faites-la, facile à faire !) :



(R) : référentiel lié à la boîte initialement immobile, où la bille est aussi initialement immobile par rapport au référentiel galiléen (G)

(R) est mis en mouvement avec une vitesse V , et comme la bille tend à rester immobile par rapport au référentiel galiléen (G) (principe d'inertie), il apparaît dans (R) une force d'inertie responsable du mouvement de recul de la bille dans la boîte (R)

La question qui se pose alors pour la gravitation est : si la gravitation est localement une force d'inertie, de quel mouvement du référentiel lié à la gravitation s'agit-il ? La présence d'une masse source de gravitation, comme la Terre, correspond-elle à la mise en mouvement, par rapport au référentiel galiléen rattaché aux étoiles fixes, d'un référentiel lié à la Terre où se trouve le corps soumis à la gravitation de la part de celle-ci ?

Mais le référentiel en mouvement qui générerait ainsi l'apparition d'une force d'inertie comme la gravitation, ne peut-elle pas être seulement un référentiel de l'espace à 3 dimensions ; en effet, le référentiel lié à la Terre reste fixe, à moins de considérer une dilatation du système de coordonnées lié à la Terre (comme le suggère l'**équation de Raychauduri** en relativité générale). Dans ce cas, un mobile massif quelconque placé dans le référentiel terrestre, tendant à conserver son état de mouvement par rapport au référentiel galiléen, va être soumis à la force d'inertie – la gravitation – générée par le mouvement que traduit la déformation (dilatation) du référentiel.

Autrement dit, la gravitation correspondrait à une déformation, par la masse source, des systèmes de coordonnées non seulement de l'espace, mais aussi du temps (puisque l'on a vu que l'espace et le temps dépendent du potentiel de gravitation, équation (8)), c'est-à-dire de l'espace-temps, plus exactement de la métrique ds^2 de la structure euclidienne à une structure non-euclidienne. On retrouve alors les concepts de la Relativité Générale...