



ACCUEIL

Le paradoxe de la diffraction de Rayleigh

Jean-François Lahaeye, 22 mai 2010

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Voici le paradoxe dont il est question dans cet exposé : il est plus facile de prédire l'éclairement, même très faible, fourni loin d'une bougie (disons à 1000 mètres ou 1000 kilomètres...) qu'au voisinage immédiat des atomes de la flamme (disons moins d'un micromètre). Le système des magnitudes permet d'évaluer l'éclairement du aux étoiles situées à des millions de parsecs, mais pas l'éclairement de la cervelle du au rayonnement d'un téléphone portable collé contre l'oreille.

Prélude : plongeon microscopique dans un trou noir électrostatique

Pourquoi et en quel sens l'électron peut-il être comparé un trou noir d'origine électrostatique ? En gravitostatique, on donne le rayon de Schwarzschild :

$$(1) R_s = 2GM/c^2$$

Remplaçons la masse M par une charge Q et la constante de gravitation G par la constante de Coulomb γ , on peut alors écrire pour l'électron un rayon R_E tel que :

$$(2) R_E = 2\kappa \gamma |Q| / c^2$$

où κ est la charge spécifique de l'électron et $\gamma = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Pour l'électron $|Q| = e = 1,602 \times 10^{-19}$ C et, avec la masse électronique $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg, $\kappa = 1,7587 \times 10^{11}$ C/kg. Alors :

$$R_E = 5,635 \times 10^{-15} \text{ m et } R_E/2 = 2,8175 \times 10^{-15} \text{ m} = R_{\text{classique}}$$

Ce dernier résultat est connu sous le nom de rayon classique de l'électron. Rappelons que de nos jours, on admet l'absence de structure de l'électron à une échelle au moins 10000 fois plus petite.

Multiplions le rayon classique par 137, puis multiplions par 2π , on trouve :

$$137 \times 2\pi \times R_{\text{classique}} = 2\pi \times R_{\text{classique}} / \alpha \text{ en introduisant la constante de structure fine } \alpha = 1/137, \text{ il vient : } 137 \times 2\pi \times R_{\text{classique}} = 2,425 \times 10^{-12} \text{ m} = \lambda_e$$

C'est la longueur d'onde du rayonnement d'annihilation de paires électron-positron (il y correspond la fréquence $\nu_e = 1,236 \times 10^{20}$ Hz et l'énergie $h \nu_e = 0,511$ MeV).

Le rayon classique est donc associé à la fois au calcul d'un « trou noir » transposé à l'électrostatique et

à la longueur d'onde d'un rayonnement expérimentalement observé, à condition de faire intervenir la correction de structure fine (division par $\alpha = 1/137$) et d'introduire la constante de Planck $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s (ou sa forme réduite $\hbar = h/2\pi$).

Notons encore que le rayon de la première orbite électronique de Bohr autour d'un noyau d'hydrogène s'obtient avec $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2) = 5,29 \times 10^{-11}$ m.

On peut tabuler les valeurs calculées de ces différents rayons ainsi que des vitesses orbitales associées (dont le calcul sera explicité dans la section suivante) :

	rayons	Vitesses « orbitales »
$R_E/2 = R_{\text{classique}} =$	$2,8175 \times 10^{-15}$ m	299792,458 km/s
$R_E =$	$5,635 \times 10^{-15}$ m	211985,280 km/s
$137 \times R_{\text{classique}} =$	$3,860 \times 10^{-13}$ m	25600 km/s
$2\pi \times 137 \times R_{\text{classique}} = \lambda_e$	$2,425 \times 10^{-12}$ m	10220 km/s
$a_0 =$	$5,29 \times 10^{-11}$ m.	2188 km/s

Le rayon classique de l'électron a donc une signification physique, au moins indirecte. Un calcul de vitesse orbitale autour d'une charge opposée conduit à une vitesse égale à c (vitesse de la lumière) pour un rayon orbital égal au « rayon classique ». Mais la vitesse d'évasion est égale à c déjà pour le double de ce rayon. On a ici obtenu en quelque sorte l'analogue d'un trou noir de Laplace et Mitchell pour un champ électrostatique. Ce raisonnement est resté purement newtonien, mais il serait assurément intéressant de le confronter à la relativité générale.

Il semblerait de toute façon que l'annihilation de paires se produise bien avant cette limite puisque la longueur d'onde rayonnée est 137 fois plus grande que le périmètre du rayon classique, ce qui nous donne ici l'ordre de grandeur d'une antenne (sans accord géométrique avec la longueur d'onde) associée à ce rayonnement.

Le problème de Rayleigh : un infiniment petit plus raisonnable

Si on se place à distance d'une source d'ondes électromagnétiques, dans une région inférieure à la longueur d'onde, du point de vue de la diffraction de ce rayonnement, on dit qu'on est en « zone de Rayleigh ». On a vu que le rayon (ondulatoire) de l'électron devait être considéré comme 137 fois plus grand que le rayon classique pour s'accorder à la longueur d'onde d'annihilation : ce dernier est, en quelque sorte, la longueur d'une antenne de Hertz associée au rayonnement d'annihilation de paires.

On sait bien, en électromagnétisme classique, que le rayonnement à grande distance d'une source sphérique permet un calcul simple d'éclairement et de champ électrique. Ce calcul très simple, qui se réduit à une formule de géométrie élémentaire, résulte en fait d'un calcul plus subtil du flux du vecteur de Poynting intégré sur la surface totale de la bulle de rayonnement en expansion. Mais le résultat est très simple, du moins pour une source de rayonnement isotrope (antenne idéale à symétrie sphérique et sans gain), l'éclairement (en watts par mètre carré) produit à distance R par un flux Φ s'écrit :

$$E = \Phi / (4\pi R^2)$$

d'où l'on tire l'amplitude du champ (valeur de crête en volt par mètre) :

$$E_{\text{max}} = \sqrt{(2 Z_0 E)} \text{ avec } Z_0 = 377 \text{ ohms.}$$

Cela est si simple que j'ai construit ma règle à calcul astronomique en lui adjoignant un « curseur annexe » permettant d'évaluer l'éclairement et le champ produits par les antennes relais des téléphones portables.

On sait bien aussi, ou peut-être le sait-on moins, que ce type de calcul n'est plus applicable à très courte distance de la source, disons provisoirement quand on s'approche à moins d'une longueur d'onde de la source des ondes : il faudrait revenir au calcul complet de Poynting. Mais celui-ci se heurte ici à des difficultés pratiques sinon théoriques. Il faudrait le faire successivement pour de nombreux points. Le vecteur de Poynting étant le produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique, ces deux

vecteurs à courte distance de l'antenne ne sont plus orthogonaux à cause d'une composante radiale fluctuant très rapidement dans l'espace selon la position de la particule-test. Il apparaît de plus des effets de mutuelle induction entre la source et la particule-test. Et si la particule-test est elle-même une antenne plutôt qu'une particule proprement dite, ce n'est pas une mais des milliards de particules-test (de l'ordre du nombre d'Avogadro) qu'il faudrait considérer. Dans cette zone proche de la source, dite zone de Rayleigh, on dit que l'onde n'est pas formée.

Résumons la géométrie du problème. On définit trois zones :

- une zone proche de l'antenne, dite zone de Rayleigh, quasi « microscopique »
- une zone de transition, dite zone de Fresnel
- une zone lointaine jusqu'à l'infini, dite zone de Fraunhofer

La frontière entre ces zones a quelque chose de conventionnel (et varie d'un type d'antenne à l'autre). Toutefois pour les antennes directionnelles, la zone lointaine est rejetée d'autant plus loin que l'antenne est plus directive. La notion de zone proche se définit par rapport à la longueur d'onde : on notera incidemment que la zone « microscopique » peut mesurer des kilomètres si la fréquence ν est très basse (par exemple si $\nu = 1$ Hz). Par convention on admettra ici les frontières suivantes pour une antenne isotrope (et donc fictive) :

Si la particule-test est placée à moins d'une demi-longueur d'onde de la source, elle est en zone de Rayleigh. Si elle est à plus de deux longueurs d'onde, elle est en zone de Fraunhofer. La zone de Fresnel effectue la transition. Cela devrait suffire pour le problème qui nous concerne¹.

Quand on considère le comportement d'une particule-test dans le champ de diffraction au voisinage d'une antenne quasi-ponctuelle, étant donné le caractère inextricable du calcul de Poynting en zone de Rayleigh, il devient intéressant de considérer des cas les plus simple et les plus dépouillés possibles : l'électron en orbite autour du proton, autour d'un muon positif ou autour d'un positron (système du positronium).

A bien des égards on peut obtenir une analogie avec les lois de Kepler en gravitation newtonienne. On peut par exemple, définir une vitesse de satellisation et une vitesse de libération de l'électron à distance R du « noyau » autour duquel il « tombe » :

$V_{\text{sat}} = \sqrt{[e^2 / (4\pi\epsilon_0 m R)]}$ ou avec $\kappa = e/m (= 1,758 \times 10^{-11} \text{ C/kg pour l'électron})$
 $V_{\text{sat}} = \sqrt{(\kappa) \sqrt{[e/(4\pi\epsilon_0 R)]}} = \sqrt{(\kappa) \sqrt{V}}$ en faisant apparaître le potentiel V qui permet de calculer l'énergie W d'une charge Q plongée dans ce potentiel : $W = QV$.

A première vue on a donc ici une piste pour mesurer l'énergie en zone de Rayleigh : mais dans ce modèle l'onde a presque disparu, il ne reste que le champ statique ou, plus exactement, que le champ *scalaire* statique par lequel on établit des bilans d'énergie, le potentiel $V = e/(4\pi\epsilon_0 R)$.

En régime quasi-stationnaire, rien n'interdit à un tel potentiel d'être périodique dans le temps, pourvu que la période reste longue. Si on tient à négliger la propagation d'ondes, on s'affranchit du vecteur de Poynting en négligeant la composante magnétique. Si on admet tout de même qu'un modèle quantique des ondes (une espèce de photon) pourrait suppléer les lacunes de l'approximation précédente, on devra admettre que les variations d'énergie ne peuvent se faire que par sauts entre des orbitales (au lieu des orbites calculées précédemment). Il existe un modèle de pseudo-photon qui correspond assez bien à de tels échanges d'énergie entre parties d'un système : ce sont les conversions internes (connues notamment en physique nucléaire entre noyau et électrons périphériques) qui se produisent justement en zone de Rayleigh (et dont le traitement « monopolaire » n'est pas sans rappeler, partiellement, les bosons scalaires de Yukawa).

Il est intéressant de noter que les longueurs d'onde émises par un atome sont toujours plus grandes que

¹ Si D est le diamètre de l'antenne, on prend souvent

R_L (limite de Rayleigh) = $D^2/2\lambda$ et

R_F (limite de Fresnel) = $2 D^2/\lambda$.

Si $D^2 = \lambda^2$, on retrouve la convention ci-dessus. En réalité le rapport D/λ dépend du type d'antenne, mais cette convention suffit si l'on vise seulement à évaluer des ordres de grandeur.

le rayon de la première orbite de Bohr et, a fortiori, que le rayon classique de l'électron. Par rapport à leur émission, les atomes peuvent être regardés comme des antennes élémentaires (dipôles et boucles de Hertz) et le voisinage de telles antennes est toujours en zone de Rayleigh, ce qui s'y passe pourrait bien s'apparenter, d'une façon ou d'une autre, à des conversions internes.

Il convient encore de relever que les conversions internes ne laissent pas de traces dans le monde externe, la zone de Fraunhofer : si un photon émis est absorbé avant de sortir du système, il est perdu pour l'onde à grande distance : on pourrait dire aussi que les interférences sont destructives hors du système pour tout champ qui est réabsorbé par le système avant d'en sortir.

En toute rigueur ce qui se passe en zone de Rayleigh n'est pas tout à fait inaccessible puisque l'énergie du noyau est transférée à la périphérie en modifiant son état énergétique (elle peut devenir plus chaude et rayonner comme un corps noir, par exemple). Il en irait autrement sans doute si on considérait la zone de Rayleigh dans sa partie la plus intime, au voisinage du rayon classique de l'électron : comme on a vu dans la première section, on se rapproche alors d'un calcul de rayon de Schwarzschild électrostatique et aucune information de nature électromagnétique (ou toute autre) ne pourrait sortir d'une zone aussi petite. La zone de Rayleigh n'était pas tout à fait noire. Mais le rayon classique de l'électron semble bien l'être complètement, en revanche, on pourrait donc y voir une quatrième zone géométrique autour de la source, en plus des trois zones de diffraction. En fait, dans une annihilation de paires, la désintégration semble devoir se produire bien avant qu'on s'approche de cette limite. C'est la constante de structure fine qui semble régler le rapport entre la longueur d'antenne et le rayon classique : $\lambda_e = 137\pi R_E = 137 \times 2\pi R_{\text{classique}}$ ou

$$\alpha = \pi R_E / \lambda_e \text{ avec } \lambda_e = 2,425 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

En pratique, on ne rencontre jamais de source dont la dimension soit aussi petite que le rayon classique. Mais la zone de Rayleigh se présente au contraire très souvent dans l'évaluation de bilans d'énergie : s'il y a juste une seule particule-test, on a affaire à un pur problème de conversion interne. Mais pour un grand nombre de particules, on peut tirer tout de même quelques informations utiles de cette analyse semi-quantique :

- 1) si la fréquence du signal est connue, on connaît automatiquement l'énergie du photon ainsi que sa puissance, moyennée sur sa période
- 2) si on peut mesurer une puissance absorbée par effet thermique (DAS ou débit d'absorption spécifique) on peut évaluer un nombre de photons.

S'il y a une forte densité de matière ρ , on calcule le DAS avec

$$\text{DAS} = (1/\rho) 2\pi \nu \epsilon_0 \epsilon''_r E^2$$

où E est le champ électrique et ϵ''_r la partie réelle de la constante diélectrique. Et on le mesurera par un bilan thermique. Ce sont les modèles d'absorption diélectrique (notamment de Debye et Cole) qui permettent la meilleure approche prédictive pour un bilan thermodynamique dans ce type de problème (sous réserve qu'il n'y ait pas une absorption cohérente à prendre en compte).

Comme on a pu voir dans l'analyse qui précède, l'étude de la zone de Rayleigh nous a conduits, dès l'introduction, au seuil des deux théories physiques du vingtième siècle : la relativité générale (par analogie de l'électron avec un trou noir) et la physique quantique (par l'introduction de la constante de Planck et de la constante de structure fine).

On conçoit dès lors que notre problème ait une portée qui effleure éventuellement aussi la cosmologie. Pour s'en aviser, il suffit de remplacer dans l'équation (2) $Q = e$ et $\kappa_e = e/m_e$ par, respectivement,

$$Q = Q_{\text{planck}} \text{ et } \kappa_0 = Q_{\text{planck}} / M_{\text{planck}}$$

On a alors $\kappa_0 = 8,6 \times 10^{-11} \text{ C/kg}$, $Q_{\text{planck}} = 1,875 \times 10^{-11} \text{ C} = \sqrt{(4\pi\epsilon_0 \hbar c)}$ et $M_{\text{planck}} = 2,176 \times 10^{-8} \text{ kg}$, d'où la nouvelle valeur $R_E = 2\kappa \gamma |Q| / c^2 = 3,235 \times 10^{-35} \text{ m}$

Cette grandeur est strictement égale au rayon de Schwarzschild d'une masse de Planck. Si de plus, par convention, on fait $\alpha = \alpha_{\text{planck}} = 1$, on obtient un « rayon classique » de la charge de Planck indiscernable

de son demi-rayon de Schwarzschild. En multipliant par 2π on obtient la *longueur d'onde de Planck* $\lambda_0 = 1,015 \times 10^{-34}$ m. Il faut noter que dans ce type de calcul, le rôle des 2π doit être préalablement mis au clair. Avec ces notations le *rayon de Planck* s'écrit $\lambda_0 / 2\pi = 1,615 \times 10^{-35}$ m.

Un secret des logarithmes : une liaison secrète de la masse et de la charge ?

La suite et la conclusion de cet aspect cosmologique restent encore très conjecturales. Mais leur simplicité mérite un regard. Dans ce qui précède, on a fait glisser la constante α de sa valeur habituelle ($\alpha = 1/137$) vers une valeur exotique et purement conventionnelle ($\alpha = 1$) pour retrouver les grandeurs de Planck, en faisant apparaître une charge exotique, la charge de Planck. Les charges exotiques ne sont actuellement connues que dans les quarks. Pourtant, les rares cas hypothétiques ou avérés de désintégrations électromagnétiques pures (sans interaction nucléaire forte ni faible) pourraient suggérer l'existence au moins fugitive de pareilles charges ailleurs que dans les quarks.

Voici comment : imaginons que la constante α puisse varier de façon continue dans la formule :

$$\alpha = Q^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c)$$

Q prendrait alors des valeurs exotiques. On peut imaginer toutes sortes de « positroniums lourds » tels que Q tende vers la charge de Planck quand les électrons de plus en plus lourds tendraient vers la masse de Planck. On peut se demander ce que deviennent les transitions hyperfines du positronium dans de telles conditions. Parmi les hypothèses possibles, l'une au moins est simple. *C'est que la fréquence de transition hyperfine tende vers la fréquence d'annihilation de la paire elle-même, jusqu'à en devenir indiscernable pour une paire de charges de Planck.*

Deux lois sont nécessaires pour quantifier le problème, dont j'ai déterminé les paramètres (respectivement en 2004 et 2009) :

1 – Le logarithme de la charge exotique Q dépend de la fréquence ν_0 d'annihilation de la paire de charges exotiques selon la formule :

$$\ln |Q| = A \ln (h\nu_0 / c^2) - B, \text{ avec } A = 0,047739 \text{ et } B = 39,97536$$

2 – Le logarithme de la charge exotique dépend de la fréquence de transition hyperfine ν_1 de la paire selon la formule :

$$\ln |Q| = A \ln (h\nu_1 / c^2) - B, \text{ avec } A = 0,03428625 \text{ et } B = 40,21271303$$

Avec ces paramètres on trouve pour l'électron :

$$\begin{aligned} (h\nu_0 / c^2) &= 0,511 \text{ MeV} / c^2 \\ \nu_0 &= 1,235 \times 10^{20} \text{ Hz} \\ |Q| &= e \\ \alpha &= 1/137 \\ \text{et : } \nu_1 &= 203 \text{ GHz} \end{aligned}$$

En dehors du positronium, on connaît au moins un cas avéré de désintégration électromagnétique pure, celui du pion neutre, et un cas hypothétique, l'annihilation d'une paire muon antimuon. Si on admet qu'une telle paire constitue une sorte de positronium lourd quand disparaît l'interaction faible (c'est-à-dire juste avant la désintégration électromagnétique pure) on calcule :

$$\begin{aligned} (h\nu_0 / c^2) &= 105 \text{ MeV} / c^2 \\ \nu_0 &= 2,539 \times 10^{22} \text{ Hz} \\ |Q| &= 1,291 e = 2,0676 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \alpha &= 1/82 \\ \text{et : } \nu_1 &= 346 \text{ THz} \end{aligned}$$

En admettant que l'interaction forte puisse disparaître dans une désintégration de pion neutre, un calcul analogue fournirait :

$$\begin{aligned}
 (h\nu_0 / c^2) &= 67,48 \text{ MeV} / c^2 \\
 \nu_0 &= 1,63 \times 10^{22} \text{ Hz} \\
 |Q| &= 1,26 \text{ e} = 2,02 \times 10^{-19} \text{ C} \\
 \alpha &= 1/86 \\
 \text{et : } \nu_1 &= 175 \text{ THz}
 \end{aligned}$$

L'intérêt de ces deux conjectures explicites est qu'elles peuvent en principe (sous réserve de faisabilité) être testées expérimentalement : il suffirait de savoir si des structures fines exotiques peuvent, oui ou non, apparaître dans certains phénomènes de désintégration. Il y a trois réponses possibles à ce test :

- 1) les structures fines exotiques n'existent pas ;
- 2) elles existent mais obéissent à d'autres lois et fournissent d'autres valeurs que selon l'hypothèse proposée ;
- 3) elles existent et prennent les valeurs proposées en suivant les deux lois logarithmiques.

Tout à fait indépendamment de ma conjecture, un calcul « classique » des paramètres de mon « positronium lourd » doit être possible, mais je n'ai pu disposer de formules explicites dans ma documentation : j'ai donc laissé ce calcul en suspens.

Quoi qu'il en soit, le coup de sonde vers le trou noir électrostatique en prélude au problème de Rayleigh conduit directement à un problème de spectroscopie, accompagné d'une règle à calcul spécifique (ici construite avec des logarithmes népériens). Il reste à s'assurer de la matérialité physique du problème auquel elle a servi.

Cet article est paru dans l'ancienne revue **AGNOSE** – PETITE REVUE AGNOSTIQUE - N° 6
Jean-François Lahaeye – 120 avenue Alsace-Lorraine – 33200 BORDEAUX