ACCUEIL
Frédéric Elie on ResearchGate

Pendule balistique

Frédéric Élie

2 avril 2004

CopyrightFrance.com
La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

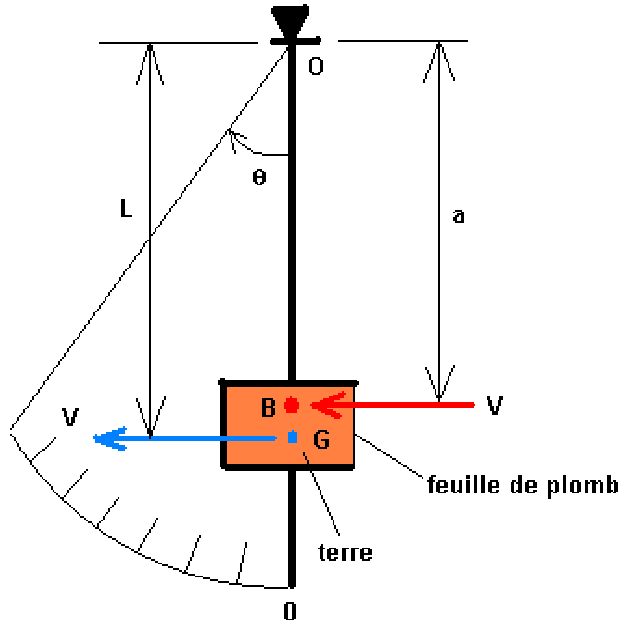
Abstract : Il est possible de déterminer la vitesse d'impact d'un projectile au moyen du pendule balistique, c'est un procédé très classique. Le principe du fonctionnement est fondé sur les théorèmes fondamentaux de la dynamique qui permettent de prédire la variation de l'énergie mécanique et du moment cinétique lors du choc inélastique d'un projectile sur une structure absorbante: la déviation angulaire du pendule est alors directement reliée à la vitesse du projectile. Un des intérêts de l'emploi du pendule balistique est la possibilité qu'il offre, en police scientifique par exemple, de vérifier si une balle a été tirée avec une certaine vitesse et en conséquence de vérifier la catégorie du calibre ou de l'arme qui l'a tirée...

SOMMAIRE

1 - Principe du pendule balistique

1-1 - Formulation du problème

L'invention du pendule balistique remonte à Robins, 1742. On veut déterminer quelle est la vitesse d'un projectile au moment où il vient s'encastrer dans une masse montée sur un pendule, par simple lecture de la déviation de celle-ci. Le dispositif est montré sur la figure ci-après.



Comme on le voit sur la figure, L = OG est la distance entre l'axe de rotation du pendule O et son centre d'inertie G. La masse du pendule est M, avant l'encastrement de la balle: elle est la somme de la masse de la tige et de la structure absorbante constituée de terre et fermée à l'avant par une feuille de plomb (cette feuille a pour rôle d'empêcher la dispersion de la terre vers l'extérieur au moment de l'impact, et elle est en plomb pour minimiser toute résistance). Le moment d'inertie du pendule par rapport à O est noté J et est une donnée connue. Le projectile, de masse m, arrive sur le pendule avec une vitesse inconnue **V** (vecteur de module V) et vient s'encastrer jusqu'au point B à l'intérieur de la terre, différent de G. Au moment de l'impact le pendule s'écarte d'un angle θ de sa position d'équilibre, sous l'effet d'une vitesse initiale que l'on suppose égale à V, la vitesse finale de la balle, puisque celle-ci s'arrête complètement en B, et si l'on suppose que la dissipation d'une fraction de l'énergie cinétique en chaleur est négligeable (hypothèse d'autant plus raisonnable que la vitesse d'impact n'est pas trop élevée). Comme on va le voir, il est alors possible de relier la déviation angulaire et la vitesse en exprimant d'une part la variation du moment cinétique et d'autre part celle de l'énergie cinétique, mais sous la condition restrictive suivante: le point B où la balle vient finir sa course n'est pas choisi quelconque: les conditions du tir, la précision avec laquelle on vise la feuille de plomb, doivent être telles que la position de B par rapport au centre d'inertie G vérifie la condition:

$$\mathbf{OB}.\mathbf{OG} = aL = J/M$$

qui est d'autant plus facile à réaliser que la masse de terre est élevée, placée bas sur la tige et que celle-ci est longue.

1-2 - Application des théorèmes de l'énergie mécanique et du moment cinétique à la détermination de la vitesse d'impact

Lorsque le pendule s'écarte d'un angle θ de la verticale la hauteur du centre d'inertie G varie de la quantité:

$$L(1 - \cos\theta)$$

tandis que celle du point d'impact varie de:

$$a(1 - \cos\theta)$$

par conséquent leur énergie potentielle de la pesanteur, par rapport à la position de repos, varie de ces mêmes quantités. Consécutivement, d'après le théorème de l'énergie mécanique, que l'on peut appliquer puisque les effets thermiques sont négligés, cette variation des énergies potentielles s'accompagne de celle des énergies cinétiques. Et comme après l'impact le projectile devient solidaire du pendule, ces énergies cinétiques sont celles de leur mouvement de rotation autour du point O: elles font intervenir le moment d'inertie J du pendule seul et celui du projectile encastré, considéré comme une masse ponctuelle en rotation autour de O, donc: ma^2. La vitesse angulaire de rotation étant la même $d\theta/dt$ pour l'ensemble (pendule + projectile), il vient donc, pour l'énergie mécanique totale:

$$E \text{ (énergie)} = \text{énergie cinétique} + \text{énergie potentielle} =$$
$$\frac{1}{2}(J + ma^2)(d\theta/dt)^2 + (ma + ML)g(1 - \cos\theta) \qquad (1)$$

D'autre part le moment cinétique **C** (par rapport à O) avant et <u>*juste après*</u> l'impact se conserve: à l'impact c'est celui seul du projectile, soit mva, et <u>*juste après l'impact*</u> c'est celui de l'ensemble (pendule + projectile) encastré où la vitesse angulaire acquise est maximale, soit

$$(J + ma^2)(d\theta/dt)_{max}$$

on a donc:

$$C = (J + ma^2)(d\theta/dt)_{max} = mva \quad (2)$$

REMARQUE: la relation (2) s'applique <u>*uniquement*</u> à la phase de l'impact et durant cette phase la vitesse angulaire est maximale.
Il ne faut surtout pas l'écrire pour la vitesse angulaire $d\theta/dt$ après cette phase, on en déduirait sinon qu'elle est constante (et égale à $mva/(J + ma^2)$): or le pendule finit par s'arrêter, donc la vitesse angulaire s'annule, lorsque la déviation maximale θ_{max} est atteinte. La vitesse angulaire varie avec le temps: elle est maximale à l'instant initial du choc et nulle à la déviation maximale, ceci sous l'action des liaisons qui persistent après le choc et que l'on n'a pas besoin de connaître dans le détail.
Ecrire la relation (2) en général est un piège dans lequel tombent nombre d'étudiants. La situation n'est pas du tout comparable à l'étude du pendule simple pour lequel les conditions initiales sont un écart à la position de repos avant de laisser ensuite le système livré à lui-même c'est-à-dire soumis aux seules forces extérieures de pesanteur et de tension de la tige, sans modification dans les liaisons. La difficulté vient de ce que, en fait, lorsque des liaisons se créent lors d'une interaction mécanique et persistent ensuite, la conservation du moment cinétique est inadaptée pour prévoir l'évolution de la vitesse: dans ce cas il faut obligatoirement utiliser le *théorème de Carnot* (voir plus bas).
Enfin, le théorème du moment cinétique s'applique: il énonce que le moment ***M*** *des* forces appliquées au système (pendule + projectile) est égal à la dérivée temporelle de son moment cinétique:

$$\boldsymbol{M} = d\mathbf{C}/dt \Rightarrow (M + m)\, d\mathbf{u}/dt \wedge \mathbf{OG} = (J + ma^2)\, d^2\theta/dt^2\, \mathbf{k}$$

où **k** est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de rotation du pendule. En projetant l'équation précédente sur ce vecteur unitaire et compte tenu de ce que le vecteur vitesse **u** de l'ensemble a pour module $a\,d\theta/dt$, on obtient:

$$J + ma^2 = aL(m + M)$$

comme $m/M \ll 1$ par construction, on obtient la contrainte mentionnée plus haut sur les positions relatives du point B et du point G, condition de cohérence du modèle:

$$aL \approx J/M \qquad (3)$$

la quantité J/M est le carré du rayon de giration R du pendule: $R^2 = J/M$. Il s'agit maintenant de

déterminer l'angle de déviation maximale θ_{max}: on serait tenté pour cela d'intégrer directement l'équation (1) pour exprimer la loi horaire de l'angle θ (t) sachant que l'énergie mécanique E se réduit aussi à l'énergie cinétique du projectile incident au moment de l'impact, 1/2 mV². Mais cela ne convient pas. En effet, on ne sait rien dire a priori sur le temps limite t_{max} jusqu'auquel il faudrait effectuer l'intégration, puisque l'on ne s'intéresse pas aux processus responsables de l'arrêt du pendule: le but du modèle, rappelons-le, se confine à exprimer θ_{max} en fonction de V, et non pas à tirer une loi dévolution de θ (on ne dispose pas assez d'hypothèses physiques pour cela!).
L'astuce consiste alors à faire en sorte que l'intégration porte séparément sur les deux variables θ et $\theta' = d\theta/dt$ de telle sorte que, au niveau des bornes d'intégration, ce soient θ_{max} et θ'_{max}, donc V, qui sont en relation. Pour cela, au lieu d'intégrer (1) on va au contraire le différencier, on obtient:

$$dE = 0 \text{ (car énergie constante)} = 1/2\,(J + ma^2)d\theta'^2 + (ML + ma)g \sin\theta \, d\theta = 0$$

On peut intégrer séparément sur θ et θ' sans se préoccuper de leur évolution temporelle, entre les bornes qui correspondent à leurs valeurs minimale et maximale:
0 et θ_{max} pour l'angle,
θ'_{max} (donnée par la relation (2)) et 0 (arrêt du pendule) pour la vitesse angulaire:

$$(J + ma^2) \int_{(\theta' = \theta'max,\ \theta' = 0)} d\theta'^2 = -2\,(ML + ma)g \int_{(\theta = 0,\ \theta = \theta\,max)} \sin\theta \, d\theta$$

ce qui donne:

$$(J + ma^2)\theta'^2_{max} = 2(ML + ma)g(1 - \cos\theta_{max})$$

et comme avec (2) on a

$$\theta'_{max} = maV/(J + ma^2)$$

on a, compte tenu de la condition (3):

$$V = 2(ML + ma)/m \,.\, (g/a)^{1/2} \sin(\theta_{max}/2) \qquad (4)$$

qui est la relation cherchée. Remarquer qu'elle fait intervenir, par la quantité $(g/a)^{1/2}$, la fréquence propre du pendule de longueur équivalente

$$a = OB$$

Précision:
A partir de la relation (4) l'incertitude relative dans la mesure de la vitesse dépend de celle sur l'angle lu par:

$$\Delta V/V = 1/2 \operatorname{cotg}(\theta_{max}/2)\, \Delta\theta$$

elle est donc importante aux faibles vitesses et aux faibles déviations angulaires. Réciproquement, si l'on veut une incertitude relative maximale sur la vitesse ε (précision) cela va imposer, pour une incertitude de lecture d'angle fixée $\Delta\theta$, une vitesse minimale V_m bornant inférieurement la plage de validité des mesures, telle que:

$$\Delta V/V = 1/2 \operatorname{cotg}(\theta_{max}/2)\, \Delta\theta \le \varepsilon$$

exprimant cotg ($\theta_{max}/2$) en fonction de V à l'aide de (4), on obtient la condition sur la vitesse pour avoir la précision requise:

$$V \geq V_m = (ML + ma)/m \,.\, (g/a)^{1/2} \,\Delta\theta/\varepsilon \quad (5)$$

Comme $a \approx L$, la vitesse minimale décelable V_m varie comme $L^{1/2}$: par conséquent pour mesurer des petites vitesses avec la précision demandée on a intérêt à utiliser des pendules de courte longueur.

Exemple: supposons que la masse de terre M soit contenue dans une boîte cylindrique de masse négligeable, de hauteur H et de rayon b.
Le moment d'inertie du pendule par rapport à O est alors à peu près égal à $J = M(L^2 + b^2/2)$, ce qui donne un rayon de giration tel que $R^2 = L^2 + b^2/2$, et la condition (3) impose un point d'encastrement situé à $a = L + b^2/2L$. Prenons une terre argileuse de densité 1,5 kg/litre. Il faut d'abord s'assurer que la distance de pénétration de la balle à l'intérieur de ce matériau est compatible avec les dimensions du pendule. Or j'ai indiqué, dans l'article balistique intérieure, que cette distance z (en cm) pouvait être obtenue par la ***formule de Pétry***:

$$z\,(\mathrm{cm}) = 100\, K\, m/c^2 \,.\, \log\left[1 + 0{,}5(V/100)^2\right]$$

où m est la masse du projectile en g, c son calibre en mm, V sa vitesse en m/s et K un coefficient caractéristique du matériau, pour la terre argileuse il vaut K = 5,87. On veut alors mesurer la vitesse d'impact d'une balle de calibre 9mm dont on sait que la masse est m = 7,5g (voir article balistique intérieure) avec une précision de 1%. On sait que la vitesse de tir d'un calibre 9 est de l'ordre de 330 m/s. La question est: quel est le dimensionnement du pendule balistique et quelle précision doit-on avoir sur les angles à relever? La formule de Pétry impose une hauteur minimale du cylindre:

$$H > z = 100 \times 5{,}87 \times 7{,}5/9^2 \times \log(1+0{,}5\times(330/100)^2) = 44 \text{ cm}$$

on choisit H = 50 cm. La masse de la balle est très faible devant celle du cylindre de terre et la relation (5) peut encore s'écrire:

$$V_m \approx ML/m.\, (g/a)^{1/2}\, \Delta\theta/\varepsilon \approx M/m(gL)^{1/2} \Delta\theta/\varepsilon$$

par ailleurs exprimant M par $M = \rho\, \pi\, b^2 H$ on va pouvoir obtenir une relation entre la précision angulaire et le rayon du cylindre:

$$b^2 = mV_m\, \varepsilon/(\rho\, \pi\, H(gL)^{1/2} \Delta\theta)$$

Le rayon b du cylindre ne doit pas être trop petit devant sa hauteur: sinon, entre le moment d'entrée de la balle et sa fin de course, la trajectoire à l'intérieure de la masse s'incurverait trop par suite du basculement de celle-ci, et s'achèverait trop près de la paroi cylindrique. Il est raisonnable de prendre un rapport de forme H/b n'excédant pas 2, soit b = 12,5 cm. Cela fait tout de même une masse de terre de 37 kg. Il reste alors un dernier lien entre l'incertitude angulaire et la longueur du pendule. Avec les données numériques précédentes on a la relation:

$$\Delta\theta\,(°) = 0{,}0123/L^{1/2}$$

ainsi, avec une longueur du pendule égale à 1 m, une précision sur la vitesse de 1% impose une précision sur la lecture de l'angle au centième de degré !

1-3 - Relation entre la vitesse angulaire maximale et la vitesse incidente par le Théorème de Carnot

On démontre que si un système, à l'issue d'un choc, passe d'une vitesse initiale V à une vitesse finale V' et acquiert une liaison indépendante du temps qui persiste après le choc, alors son énergie cinétique T évolue de la manière suivante:

$$T(V') - T(V) = - T(V' - V)$$

autrement dit: la variation de son énergie cinétique est égale et opposée à l'énergie cinétique des variations de sa vitesse. C'est le ***théorème de Carnot***. Comme je l'ai dit plus haut c'est lui qu'il faut appliquer en toute rigueur en lieu et place du théorème du moment cinétique. J'insiste sur le fait que, dans l'énoncé ci-dessus, "après le choc" signifie: "juste après le choc" et non pas l'état final qui correspond à la déviation maximale. Autrement dit, V est la vitesse juste au moment du choc, donc celle du projectile incident, et V' la vitesse du pendule juste après le choc, donc celle de la mise en rotation autour de O, avec par conséquent la vitesse angulaire maximale: $V' = a\theta'_{max}$. On obtient pour le pendule balistique:

$$T(V) = 1/2\ mV^2$$

$$T(V') = 1/2\ (J + ma^2)\ \theta'^2_{max}$$

$$T(V' - V) = 1/2\ m(V - a\ \theta'_{max})^2 + J\theta'^2_{max}$$

la relation de Carnot aboutit alors immédiatement à la relation (2):

$$(J + ma^2)\ \theta'_{max} = maV$$

Contrairement aux apparences d'un problème naïf l'étude du pendule balistique est un exemple d'incitation à la prudence et à la rigueur dans les hypothèses qui permettent l'emploi des théorèmes classiques de la Mécanique.

2 - Remarque de mécanique analytique: initiation aux espaces des phases

On a vu plus haut que, pour examiner ce qui se passe entre l'état initial et l'état final sans avoir à entrer dans les détails de résolution des équations du mouvement, on a utilisé le couple de variables θ et $\theta' = d\theta/dt$ plutôt que l'évolution temporelle de l'angle $\theta(t)$.
C'est une méthode couramment employée en mécanique théorique (on dit encore mécanique analytique, ou mécanique rationnelle): on examine l'évolution du système non pas dans l'espace physique mais dans un espace abstrait appelé ***espace des phases***, où les points ont pour coordonnées des variables conjuguées (q, p) reliées à une grandeur caractéristique appelée le ***hamiltonien*** du système H(q,p). Cette grandeur représente généralement l'énergie du système, et si celui-ci est mécaniquement isolé des flux externes, elle est invariante dans le temps: $dH/dt = 0$.
La variable p est appelée ***moment conjugué*** de la variable q. Dans notre exemple, l'angle θ joue le rôle de q tandis que, comme je vais le montrer, θ' est proportionnelle au moment conjugué p. Dans l'espace des phases (q, p) l'évolution du système est décrit par une trajectoire d'équation $f(q,p) = 0$ paramétrée par les différentes valeurs d'énergies possibles E.
Un système pour lequel il est possible de définir un hamiltonien et des couples de variables conjuguées (q,p), donc un espace des phases, est appelé ***système dynamique***: on est capable d'y définir une énergie cinétique T(q'), fonction quadratique des dérivées temporelles : $q' = dq/dt$ appelées ***vitesses généralisées***, ainsi qu'une énergie potentielle U(q) généralement fonction des coordonnées généralisées q. La fonction de Hamilton (l'énergie) est alors égale à:

$$H(q,p) = T(q') + U(q)$$

en fait cette écriture est incorrecte car le hamiltonien dépend de (q,p) alors que la variable q' apparaît dans l'énergie cinétique. Pour la rendre correcte, ou "canonique" (c'est le terme officiel employé en mécanique rationnelle), on est obligé d'introduire une ***fonction de Lagrange***, ou ***lagrangien*** L(q,q',t) où les variables q et q' (et éventuellement le temps t) y sont explicites et d'éliminer q' au profit de p par l'application d'une transformation de Legendre sur le lagrangien:

$$L(q,q') \rightarrow pq' - L(q,q',t) = H(q,p,t)$$

La ***fonction de Hamilton*** est la ***transformée de Legendre*** de la fonction de Lagrange. On démontre que, puisque L vérifie les ***équations de Lagrange***

$$d/dt\,(\partial L/\partial q') - \partial L/\partial q = 0$$

alors le hamiltonien H, ainsi défini par cette transformée de Legendre, est un invariant, et on obtient:

- la définition du moment conjugué: $p = \partial L/\partial q'$
- et les équations du mouvement du système (ou ***équations de Hamilton***):

$$p' = - \partial H/\partial q \text{ et } q' = \partial H/\partial p$$

- ainsi que: $\partial H/\partial t = - \partial L/\partial t$

et on montre que le lagrangien est égal à $L = T(q') - U(q)$.

Appliquons ces concepts au cas de notre pendule balistique. Le hamiltonien du système est donné par la relation (1) dans lequel on a posé $\theta = q$ et par conséquent le lagrangien est:

$$L(q,q') = 1/2\,(J + ma^2)\theta'^2 - (ma + ML)g(1 - \cos\theta)$$

le moment conjugué de $q = \theta$ est donc: $p = \partial L/\partial \theta' = (J + ma^2)\theta'$ et les équations de Hamilton donnent l'équation du mouvement du pendule:

$$p' = dp/dt = (J + ma^2)\,\theta'' = - \partial H/\partial q = - \partial H/\partial \theta = - (ma + ML)g \sin\theta$$

on reconnaît une équation du pendule non linéaire

$$\theta'' + (ma + ML)g/(J + ma^2).\ \sin\theta = 0$$

qui se simplifie en une équation d'oscillateur harmonique pour de faibles amplitudes angulaires, faisant apparaître la fréquence propre du pendule:

$$f = 1/2\pi\ .\ ((ma + ML)g/(J + ma^2))^{1/2} \approx 1/2\pi\ .\ (MgL/J)^{1/2}$$

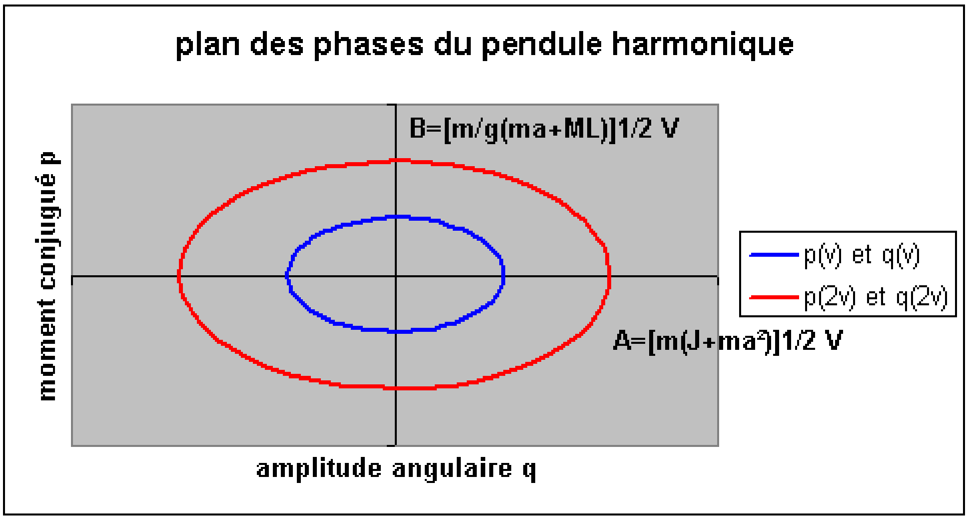
elle varie pratiquement comme $1/L^{1/2}$ donc la période est d'autant plus grande que le pendule est long.
Avec ces approximations, utilisant $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, l'équation de l'énergie (1), où $E = 1/2\ mV^2$ (énergie cinétique initiale du projectile) donne l'équation de la trajectoire dans l'espace des phases représentant l'évolution du système:

$$p^2/A^2 + q^2/B^2 = 1$$

c'est une ellipse dont les demi-axes sont donnés par

$$A^2 = (J + ma^2)mV^2 \quad \text{et} \quad B^2 = mV^2/g(ma + ML)$$

donc paramétrée par l'énergie cinétique du projectile au moment de l'impact. La figure ci-dessous donne un exemple de famille de courbes (pour une vitesse initiale V et le double 2V) dans l'espace des phases pour le pendule aux faibles amplitudes angulaires.



Bibliographie

André Delachet, Jean Taille: La balistique, PUF, 1968

Max Bausset: Mécanique des systèmes de solides, Masson, 1990

Alphonse Charlier, Alain Berard, Marie-France Charlier: Mécanique analytique, ed. Marketing, 1989