

Frédéric Elie on
ResearchGate

Accélération d'un ascenseur pour créer une pesanteur à l'intérieur

Frédéric Elie

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est interdite. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

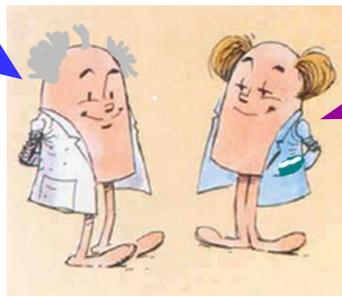
Je dédie cet article à l'un de mes chers voisins, Steven, très curieux des sciences, de l'histoire, de la philosophie... et génie de la mécanique, qui m'a demandé d'examiner la question abordée ici, pas si évidente malgré son apparente simplicité.

Abstract : Après un bref rappel sur les référentiels non galiléens, un modèle de « production » d'une pesanteur artificielle dans un « ascenseur » (toute cabine fermée étanche) éloigné de toute source de gravitation, est présenté. C'est un peu la réciproque de l'analyse d'un ascenseur en chute libre dans un champ de gravitation, à l'intérieur duquel se produit une situation d'apesanteur (ou d'impesanteur), comme discuté dans l'article en référence [1]. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices sur le mode d'accélération de l'ascenseur, on examine comment un corps matériel flottant initialement dans l'ascenseur en apesanteur peut « descendre » le plus confortablement possible et se poser sur une paroi perpendiculaire à la direction de l'accélération (paroi que l'on appellera le « plancher »).

SOMMAIRE

- 1 – Introduction
 - 2 – Exemple de référentiel galiléen
 - 3 – Un ascenseur, loin de toute source de gravitation et de forces, qui accélère par lui-même, en éjectant de la matière, est un référentiel non galiléen
 - 4 – Les systèmes ouverts et le théorème de quantité de mouvement
 - 5 – Dynamique de l'ascenseur, éloigné de toute source de gravitation, pour obtenir à l'intérieur progressivement une pesanteur
 - 6 – Critères d'évolution du débit d'éjection
 - 7 – Tracé des évolutions du débit massique d'éjection
 - 8 – Analyse sommaire et remarques
- Références

Je sens, cher Méson, que notre ami Fred, une fois de plus, va tenter de nous impressionner avec des équations...



... oui, cher Photon, et ça risque d'être assez pesant, c'est le cas de le dire !

1 – Introduction

En l'absence de gravité, un ascenseur avec des passagers à son bord, est en apesanteur absolue, et les passagers ne sont soumis à aucune force mécanique : ils flottent.

Cette situation se produit aussi lorsqu'un ascenseur en mouvement, uniforme ou pas, dans un champ de pesanteur tombe en chute libre suite à la rupture de son câble de traction (réf. [1]). Les passagers se retrouvent alors en apesanteur, ou impesanteur (et non en microgravité, qui désigne l'absence de gravitation).

Si l'ascenseur se déplace dans l'espace avec une *vitesse constante*, les passagers continuent de flotter, et la vitesse ne les déplace pas à l'intérieur de l'ascenseur ; ceci, quelle que soit la direction de la vitesse. Dans ce cas, on dit que l'ascenseur est un *référentiel galiléen* : le mouvement propre des passagers ne dépend pas de la vitesse constante du déplacement de l'ascenseur.

Il en va tout autrement lorsque la vitesse de déplacement de l'ascenseur *n'est pas constante*, autrement dit s'il y a accélération (ou bien décélération) du référentiel. Dans ce cas, on dit que l'ascenseur est un *référentiel non galiléen* : le mouvement propre des passagers est lié à cette accélération. Dans cet article, c'est précisément ce que l'on veut obtenir : comment créer une accélération propre des passagers à bord d'un ascenseur loin de toute source de gravitation, avec donc des passagers initialement en apesanteur absolue (microgravité), cet ascenseur étant accéléré ensuite de manière adaptée ? En particulier :

- Quelle est la durée de la « descente » d'un passager jusqu'au plancher, depuis une position initiale dans l'ascenseur où il flottait (sa « hauteur » initiale) ?
- Quelle est la vitesse d'impact du passager avec le plancher ? Sur quels paramètres peut-on agir pour qu'elle ne soit pas trop élevée ?
- Si le mouvement de l'ascenseur est produit par l'éjection de matière (gaz, particules solides ou liquides...), quelle quantité suffisante de matière éjectable est compatible avec une durée de descente et une vitesse d'impact, en fonction de l'accélération (donc de la pesanteur induite) recherchée ?

Les réponses à ces questions dépendent de plusieurs facteurs : la masse initiale de l'ascenseur, la densité de matière éjectable, la section de l'ouverture par laquelle la matière est éjectée, la masse disponible de matière éjectable, la pesanteur artificielle que l'on cherche à produire (pesanteur cible), sachant qu'il n'est pas a priori obligatoire que celle-ci soit la même que la pesanteur terrestre.

La dynamique de l'ascenseur dans l'espace, loin de toute source de gravitation et de forces extérieures, est étudiée en prenant en compte les configurations théoriques suivantes :

- le fait que l'ascenseur est en accélération entraîne qu'il constitue, pour ses passagers, un référentiel non galiléen dans lequel on va traduire les lois fondamentales de la mécanique (lois de Newton, théorème de la quantité de mouvement) ; c'est l'objet du paragraphe 3.
- le fait que l'ascenseur éjecte de la matière pour se déplacer, et donc a une masse variable, entraîne qu'il est un système mécanique ouvert auquel s'applique le théorème d'Euler (que l'on a vu par exemple en référence [3]) ; c'est l'objet du paragraphe 4.

Aux paragraphes 5 et 6, ensuite, les choix de l'accélération de l'ascenseur et du débit massique d'éjection de matière, compatibles avec les conditions et les durées de descente et d'« atterrissage », sont quantitativement déterminés.

Au paragraphe 7, quelques tracés d'évolution du débit massique d'éjection sont présentés en faisant varier la hauteur initiale du passager, et la pesanteur cible, et on examine comment cette évolution est bornée, contrainte, par la quantité disponible de matière éjectable, pour des données de structure fixées (masse de l'ascenseur, densité de la matière éjectable, section d'éjection).

Une analyse sommaire de faisabilité des conditions de descente et d'atterrissage, compatible avec les contraintes sus-mentionnées, est proposée au paragraphe 8, en relation avec les hypothèses du modèle de calcul qui n'ont un caractère ni absolu, ni définitif.

Mais avant tout, au paragraphe 2, un exemple de référentiel galiléen est présenté.

2 – Exemple de référentiel galiléen

Soit un voilier qui avance à vitesse constante, sur une mer calme, poussé par un vent constant. Un objet lâché du sommet du mât tombe rectilignement au pied du mât, et non à l'arrière (contrairement à l'intuition) : la vitesse de cet objet n'est pas la composition de la vitesse du voilier et de celle de la chute sous l'effet de la pesanteur terrestre.

Explication théorique : on écrit la loi de déplacement de l'objet M dans un référentiel galiléen (R) (comme par exemple le rivage d'un port) en tenant compte de son mouvement dans le référentiel (R') qu'est le voilier (figure 1).

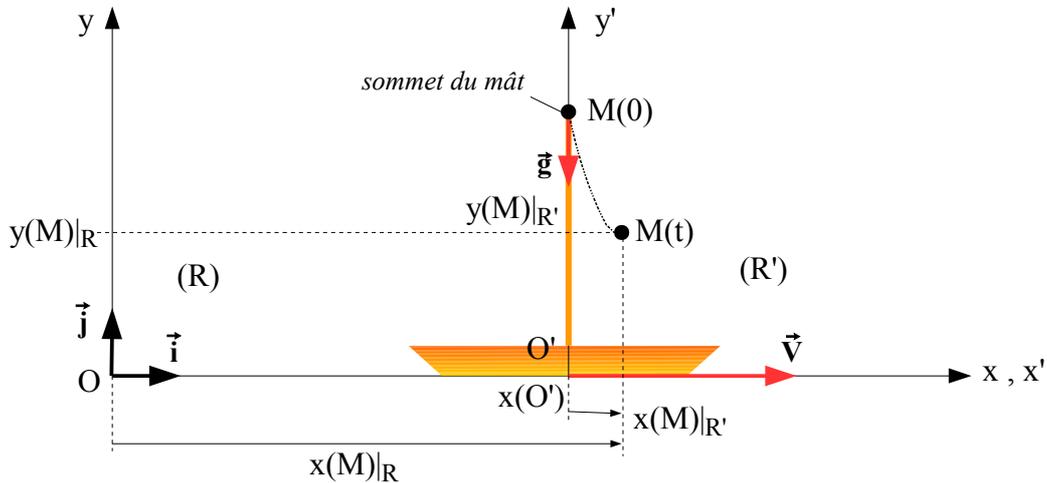


figure 1 – Translation de (O',R') parallèlement à Ox à vitesse V constante

Les coordonnées de M dans les repères galiléens (R) et (R') sont :

- Dans (R'), mobile :

$$\overrightarrow{O'M} = x(M)_{R'} \vec{i} + y(M)_{R'} \vec{j}$$

- Dans (R), fixe :

$$\overrightarrow{OM} = [x(O')_R + x(M)_{R'}] \vec{i} + y(M)_{R'} \vec{j} = x(O')_R \vec{i} + \overrightarrow{O'M}$$

avec $x(O')_R = Vt$ et $y(M)_{R'} = y(M)_R$ (car la translation est suivant Ox à vitesse constante). Il s'ensuit :

$$\overrightarrow{OM} = (Vt + x(M)_{R'}) \vec{i} + y(M)_{R'} \vec{j} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x(M)_R = Vt + x(M)_{R'} \\ y(M)_R = y(M)_{R'} \end{array} \right. \quad (1)$$

(R') étant galiléen (car de vitesse constante), on peut y appliquer directement la loi dynamique de Newton à M :

$$\vec{F}_{R'} = m \frac{d\vec{V}_{R'}}{dt} = \vec{F}_R \quad (\text{force appliquée sur M})$$

(m : masse de l'objet M).

Ici la force se réduit au poids : $\vec{F}_{R'} = m \vec{g} = -m g \vec{j}$

(R) étant aussi galiléen, la loi dynamique de Newton s'applique aussi à M :

$$\vec{F}_R = m \frac{d\vec{V}_R}{dt} = -m g \vec{j} = \vec{F}_{R'}$$

donc :

$$\frac{d\vec{V}_{R'}}{dt} = \frac{d\vec{V}_R}{dt} = -g \vec{j} \quad (2)$$



Méson, je crains que cette citrouille piquée en haut du mât tombe sur ma tête !...

N'aie pas peur, Photon, nous sommes dans un référentiel galiléen, du moins tant que le vent est constant !

On projette sur les axes (O, \vec{i}, \vec{j}) et (O', \vec{i}', \vec{j}') :

Vitesse de M :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_R &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(Vt + x(M)_{R'})\vec{i} + \frac{d}{dt}(y(M)_R)\vec{j} \\ &= (V + \frac{d}{dt}x(M)_{R'})\vec{i} + \frac{d}{dt}y(M)_R\vec{j}\end{aligned}$$

Accélération de M :

$$\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}x(M)_{R'}\vec{i} + \frac{d^2}{dt^2}y(M)_R\vec{j} = \frac{d\vec{v}(M)_{R'}}{dt} = -g\vec{j}$$

car $\frac{dV}{dt} = 0$ (vitesse de O' constante). D'où :

Suivant Ox :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(M)_{R'} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}x(M)_{R'} = \text{constante} = C_1 = v_x(M)_{R'}(t)$$

à $t = 0$, $v_x(M)_{R'}(0) = 0$ (M est lâché sans vitesse initiale)

donc $C_1 = 0$, donc $x(M)_{R'}(t) = 0$ pour tout t

→ M termine sa chute au pied du mât

Suivant Oy :

$$\frac{d^2}{dt^2}y(M)_R = -g \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}y(M)_R = -gt + C_2 = v_y(M)_R(t) = v_y(M)_{R'}(t)$$

à $t = 0$, $v_y(M)_{R'}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale de M suivant Oy), donc $C_2 = 0$

$$\rightarrow y(M)_{R'}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3$$

à $t = 0$, l'altitude de M dans le référentiel (R') est $y(M)_{R'}(0) = h$ (par exemple, la hauteur du mât)

donc $C_3 = h$

Finalement la loi du mouvement de M dans le référentiel (R') lié au voilier est :

$$\left. \begin{aligned}x(M)_{R'}(t) &= 0 \quad (\text{M tombe le long du mât}) \\ y(M)_{R'}(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned} \right| \quad (3)$$

Durée de la chute T : lorsque $y(M)_{R'} = 0$ (arrivée de M sur le pont du voilier), on a :

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3a)$$

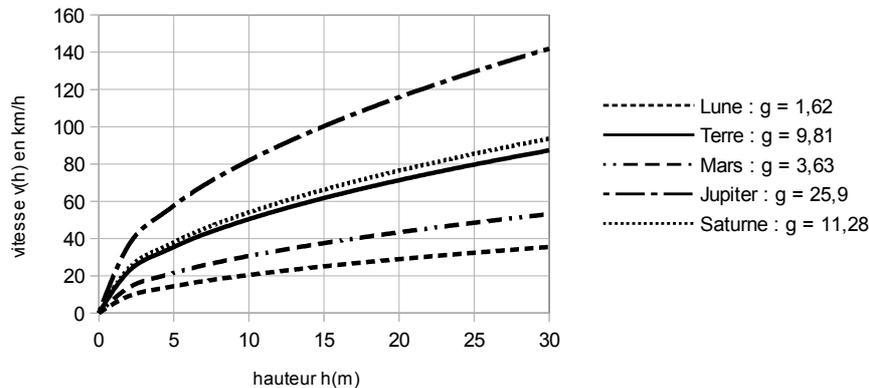
Vitesse d'arrivée sur le pont du voilier :

$$v_y(M)_R(T) = gT = \sqrt{2gh} \quad (3b)$$

Ces résultats, bien classiques, sont en fait obtenus directement, sans ces calculs, en application de la deuxième loi de Newton (ou loi fondamentale de la dynamique) : Par rapport à un référentiel galiléen (R) le mouvement d'un point matériel M de masse m, soumis à plusieurs forces dont la somme est $\Sigma \vec{F}$ est décrit à partir de la relation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = m\vec{\Gamma}(M)_R$ où $\vec{p} = m\vec{v}(M)_R$ est la quantité de mouvement de M par rapport au référentiel galiléen (R), et $\vec{\Gamma}(M)_R$ l'accélération de M dans ce même référentiel. Mais ces calculs détaillés permettent de bien illustrer de quoi on parle concrètement.

La figure 2 donne les courbes de dépendance des vitesses d'impact et de temps de chute en fonction de la hauteur, pour différentes accélérations de pesanteur.

vitesse de chute libre en fonction de la hauteur pour différentes pesanteurs



durée de chute libre en fonction de la hauteur pour différentes pesanteurs

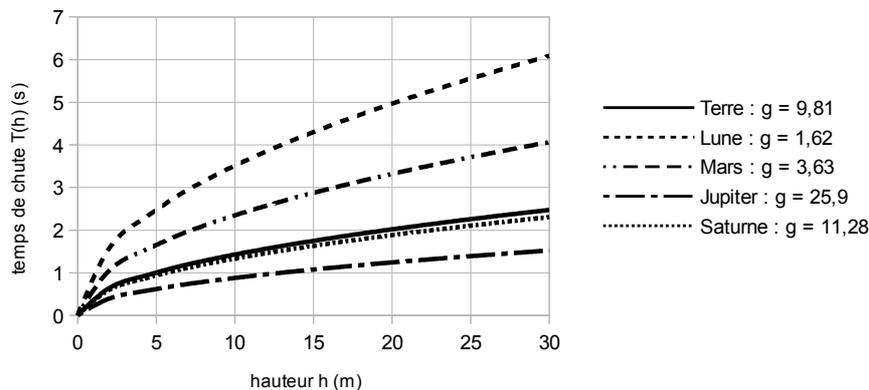


figure 2 – temps de chute libre T(h) et vitesse d'arrivée au sol v(h) en fonction de la hauteur h pour la chute libre sous différentes accélérations de la pesanteur à la surface de la Terre, de la Lune et de quelques planètes (g est exprimé en m/s²)

3 – Un ascenseur, loin de toute source de gravitation et de forces, qui accélère par lui-même, en éjectant de la matière, est un référentiel non galiléen

Le référentiel non-galiléen est noté (R'), en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen (R) (figure 3). Le déplacement peut être une combinaison de translations et de rotations. L'accélération de O' par rapport à (R) est notée $\vec{\Gamma}(O')_R$.

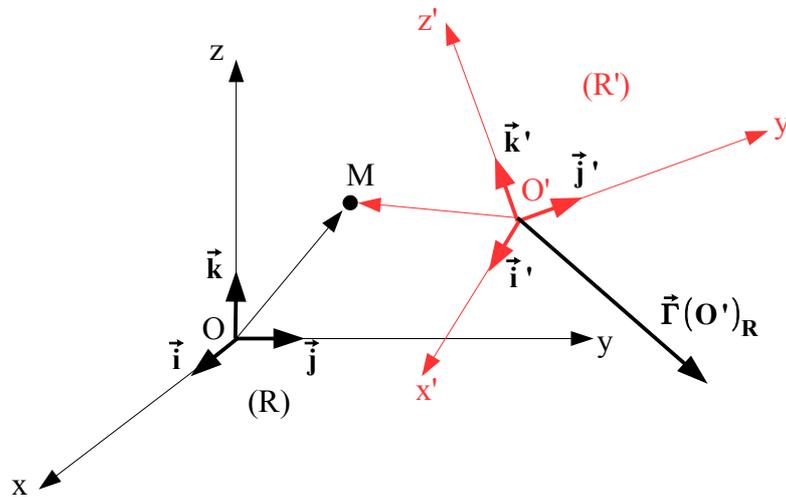


figure 3 – référentiel non galiléen (R')
et référentiel galiléen (R)

Soit M un point matériel de masse m, en mouvement d'accélération $\vec{\Gamma}(M)_{R'}$ dans (R'), et $\vec{\Gamma}(M)_R$ dans (R). Soit $\vec{\Omega}$ la vitesse de rotation de (R') par rapport à (R) (comme par exemple un référentiel (R') à la surface de la Terre en rotation sur elle-même, (R) étant le référentiel d'axes fixes où O est confondu avec le centre de la Terre).

Le théorème de composition des accélérations (réf. [4]) montre que les accélérations de M dans (R') et dans (R) sont reliées par :

$$\vec{\Gamma}(M)_R = \vec{\Gamma}(M)_{R'} + \vec{\Gamma}(M)_e + \vec{\Gamma}(M)_c \quad (4a)$$

où $\vec{\Gamma}(M)_e$ accélération d'entraînement, $\vec{\Gamma}(M)_c$ accélération complémentaire :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Gamma}(M)_e &= \vec{\Gamma}(O')_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}) \\ \vec{\Gamma}(M)_c &= 2\vec{\Omega} \times \vec{v}(M)_{R'} \end{aligned} \right| \quad (4b)$$

La loi fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) appliquée dans le référentiel galiléen (R) fait intervenir les forces d'inertie d'entraînement $m\vec{\Gamma}(M)_e$ et de Coriolis $m\vec{\Gamma}(M)_c$ (dont un effet, dû à la rotation de la Terre sur elle-même, est démontré dans l'expérience du pendule de Foucault, voir réf. [2]) :

$$m\vec{\Gamma}(M)_R = m\vec{\Gamma}(M)_{R'} + m\vec{\Gamma}(M)_e + m\vec{\Gamma}(M)_c = \Sigma \vec{F} \quad (5)$$

\uparrow
force
d'inertie
d'entraînement

\uparrow
force
d'inertie
de Coriolis

Dans le cas d'un « ascenseur » (ou cabine) en translation par rapport à un référentiel galiléen (R), on pose que le déplacement s'effectue suivant l'axe Oz (figure 4). Si la vitesse de translation n'est pas constante, l'ascenseur constitue un référentiel non-galiléen (R') pour ses passagers.

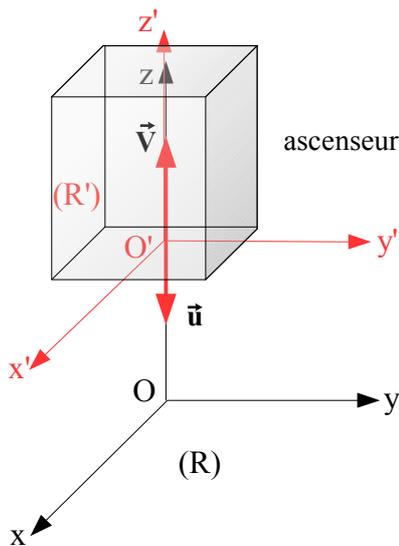


figure 4 – Ascenseur en translation accélérée (accélération par rapport au référentiel galiléen (R) : $\vec{\Gamma}(O')_R$), en tant que référentiel non-galiléen (R'). Sa vitesse par rapport à (R) est $\vec{V}(O')_R$ que l'on notera plus simplement \vec{V} ; on supposera dans la suite (à partir du paragraphe 4) que le mouvement de l'ascenseur est produit par l'éjection de matière suivant $O'z$, avec une vitesse notée \vec{u} .

Puisque (R') se déplace uniquement par translation (pas de rotation) on a $\vec{\Omega} = 0$ et donc d'après (4b) :

$$\vec{\Gamma}(M)_e = \vec{\Gamma}(O')_R \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}(M)_c = 0$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(M)_R = \vec{\Gamma}(M)_{R'} + \vec{\Gamma}(O')_R$$

Et si un passager, ou un objet M, dans l'ascenseur n'a pas de mouvement propre, on a $\vec{\Gamma}(M)_{R'} = 0$ et il reste :

$$\vec{\Gamma}(M)_R = \vec{\Gamma}(O')_R$$

en projetant sur Oz :

$$\frac{d^2}{dt^2} z(M)_R = \frac{dV}{dt} = \Gamma(O')_R \quad (6)$$

La relation (6) signifie que l'accélération à laquelle est soumis un point matériel M situé dans l'ascenseur (R') est égale à l'accélération $\Gamma(O')_R$ de l'ascenseur par rapport à un référentiel galiléen (R). Cela implique que M est lié à l'ascenseur (R') en étant au contact du sol (plan contenant O' auquel $\vec{\Gamma}(O')_R$ est perpendiculaire). Tout se passe comme si M est soumis à une pesanteur d'accélération égale et opposée à $\vec{\Gamma}(O')_R$. Si $\Gamma(O')_R = -g$ (où g est l'accélération de la pesanteur terrestre $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$), on crée artificiellement la pesanteur terrestre à bord de l'ascenseur.

L'accélération de l'ascenseur, éloigné de toute source de gravitation et de forces extérieures, peut être obtenue par éjection de matière avec un débit massique adapté. Dans ce cas l'ascenseur et la matière éjectée sont modélisés comme un système mécanique ouvert, délimité par une surface fictive, dite surface de contrôle S_c , et auquel s'applique le théorème d'Euler (voir réf. [3], [5]).

4 – Les systèmes ouverts et le théorème de quantité de mouvement

Pour un système mécanique fermé, la masse est une quantité conservative.

Si l'on considère ce système fermé constitué de deux systèmes ouverts l'un relativement à l'autre, on peut considérer un échange de matière (donc de masse) entre eux, et donc que, pour chacun d'eux, la masse peut changer.

Le caractère conservatif de la masse dans l'ensemble du système fermé traduit le principe de l'absence de création ou de perte de masse pour cet ensemble globalement fermé. Il entraîne que, à l'interface des deux systèmes, ou « *surface de contrôle* » S_c , la masse transmise à travers cette surface, dM , est égale à la différence de la masse reçue à une entrée de cette surface, dm_e , et de la masse perdue à une sortie de cette surface, dm_s :

$$dM = dm_e - dm_s$$

En introduisant le débit de masse, $q = dm/dt$, on écrit donc aussi :

$$\frac{dM}{dt} = q_e - q_s$$

Exemple d'une fusée de masse totale M (structure + gaz de propulsion), loin de toute force extérieure (gravitation, forces de frottement...), éjectant les gaz avec une vitesse constante u . La surface de contrôle est matérialisée par les tuyères donnant sur l'espace ; fusée et gaz éjecté sont deux systèmes ouverts l'un sur l'autre, et l'ensemble « fusée + gaz échappant dans l'espace » est le système fermé. À la surface de contrôle il y a seulement sortie de la matière depuis la fusée vers l'espace, donc $q_e = 0$.

On montre alors que, dans ce cas, l'équation du mouvement de la fusée est (cf. réf. [4]) :

$$M \frac{dV}{dt} = -q_s u \quad (7)$$

qui est une expression particulière du théorème d'Euler pour la dynamique des systèmes ouverts, dans cet exemple. Il existe de nombreux exemples ; certains ont été abordés dans [3] ou [5] (anémomètre à coupelles, équilibre d'une plaque dans un écoulement).

Conclusion, dans un problème de mécanique il faut toujours définir :

- vis-à-vis de quel référentiel (galiléen, non-galiléen) exprime-t-on la dynamique du système ?
- le système est-il ouvert ou bien fermé, et par rapport à quoi ?

5 - Dynamique de l'ascenseur, éloigné de toute source de gravitation, pour obtenir à l'intérieur progressivement une pesanteur

L'ascenseur accélère grâce à l'éjection de matière (gaz) avec un débit massique en sortie q_s , et une vitesse d'éjection u (le débit massique en entrée est $q_e = 0$ car il n'y a pas de matière qui entre dans l'ascenseur à travers la surface de contrôle S_c).

La masse totale de l'ascenseur $M(t)$ à l'instant t est la différence de la masse totale initiale M_0 (structure + matière éjectable) et de la masse éjectée $m_s(t)$:

$$M(t) = M_0 - m_s(t)$$

Débit massique des gaz éjectés :

$$q_s(t) = \frac{dm_s(t)}{dt}$$

Masse de la réserve initiale des gaz éjectables : M_s . On a donc $m_s(t) \leq M_s$, la réserve est épuisée lorsque $m_s(t) = M_s$, d'où la masse finale de l'ascenseur $M_f = M_0 - M_s$ (figure 5).

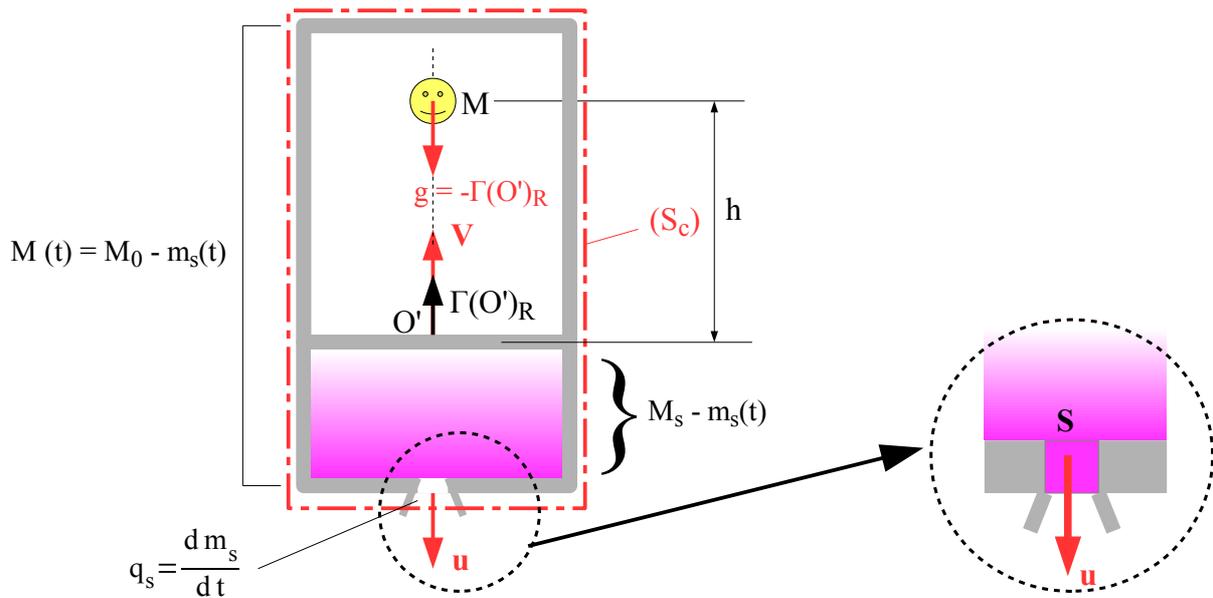


figure 5 – Représentation simplifiée de la propulsion de l'ascenseur, système ouvert de surface de contrôle S_c , par éjection des gaz à travers une ouverture de surface S

Dans notre configuration, le débit d'éjection des gaz est directement relié à la vitesse de leur éjection à travers une ouverture de surface S :

$$q_s = \rho_s S u = \frac{d m_s}{d t} \quad (8)$$

(ρ_s : masse volumique de la matière éjectée). L'équation du mouvement de l'ascenseur devient donc :

$$M \frac{dV}{dt} = -q_s u \quad \rightarrow \quad (M_0 - m_s(t)) \frac{dV}{dt} = -\rho_s S u^2(t)$$

où l'on rappelle que $\frac{dV(t)}{dt} = \Gamma(O')_R = -g(t)$ (relation (6)).

Comme $u(t) = \frac{1}{\rho_s S} \frac{d m_s}{d t}$ l'équation du mouvement devient :

$$(M_0 - m_s(t)) \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho_s S} \left(\frac{d m_s}{d t} \right)^2$$

qui relie ainsi l'évolution de la masse éjectée à la pesanteur induite :

$$(M_0 - m_s(t)) g(t) = \frac{1}{\rho_s S} \left(\frac{d m_s}{d t} \right)^2 \quad \text{soit encore :} \quad (M_0 - m_s) g(t) = \frac{1}{\rho_s S} \left[\frac{d(M_0 - m_s)}{d t} \right]^2 \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{d(M_0 - m_s)}{\sqrt{M_0 - m_s}} = \pm \sqrt{\rho_s S} \sqrt{g(t)} \quad \text{qui s'intègre en : } 2\sqrt{M_0 - m_s(t)} + C = \pm \sqrt{\rho_s S} \int_0^t \sqrt{g(t)} dt$$

où C est une constante d'intégration que l'on détermine ainsi :

Dans l'hypothèse où, à l'instant initial $t = 0$, l'ascenseur est immobile, et donc $g(0) = 0$, on a $m(0) = 0$ donc $M(0) = M_0$, d'où $C = -2\sqrt{M_0}$, et finalement :

$$\sqrt{M_0 - m_s(t)} = \sqrt{M_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho_s S} \int_0^t \sqrt{g(t)} dt \quad (9)$$

6 – Critères d'évolution du débit d'éjection

Puisque la maîtrise de la dynamique de l'ascenseur met en œuvre le débit massique, il est plus adapté de traduire l'équation (9) ci-dessus par une équation reliant le débit q_s et la variation de la pesanteur induite $g(t)$. Pour cela on dérive l'équation (9) par rapport au temps :

$$-\frac{q_s(t)}{2\sqrt{M_0 - m_s(t)}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho_s S} \sqrt{g(t)} \quad \text{avec} \quad m_s(t) = \int_0^t q_s(t) dt$$

ce qui donne une relation entre $g(t)$ et $q_s(t)$ un peu compliquée :

$$g(t) = \frac{1}{\rho_s S} \frac{q_s^2(t)}{M_0 - \int_0^t q_s(t) dt} \quad (10)$$

qui exprime : quel débit d'éjection $q_s(t)$ faut-il pour obtenir une pesanteur induite $g(t)$ à l'instant t ? Soit g_0 la **pesanteur induite cible**, c'est-à-dire lorsque, à l'instant T , M rencontre le plancher contenant O' ($h(T) = 0$); si on la voulait identique à l'accélération de la pesanteur terrestre à la surface de la Terre, elle vaudrait $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Deux cas de figure doivent être envisagés :

- a) Si l'on obtient immédiatement après l'instant initial, où l'ascenseur est mis en mouvement, une accélération de l'ascenseur telle que $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, alors un passager M situé à la hauteur initiale h_0 du sol contenant O' sera en chute libre avec g_{Terre} et aura une vitesse d'impact au sol :

$$v(h_0; g_{\text{Terre}}) = \sqrt{2g_{\text{Terre}} h_0} = 4,43 \sqrt{h_0} \quad (\text{en m/s, } h_0 \text{ en m})$$

ça peut faire mal ! Et même si $h_0 = 0 \text{ m}$ (passager initialement sur le sol) la sensation d'écrasement sous l'accélération g_{Terre} immédiatement obtenue peut avoir lieu (figure 6a).

- b) Il est alors préférable d'appliquer une **accélération progressivement croissante** $g(t)$ jusqu'à atteindre la valeur cible g_0 , tout en s'assurant que la masse de matière à éjecter n'est pas épuisée avant que g_0 soit atteinte ($g(t_0) = g_0$) :

$$m_s(t_0) \leq M_s$$

Dans ce cas le passager va « descendre » progressivement vers O' avec des accélérations successivement croissantes, et touchera le sol en douceur (figure 6b).

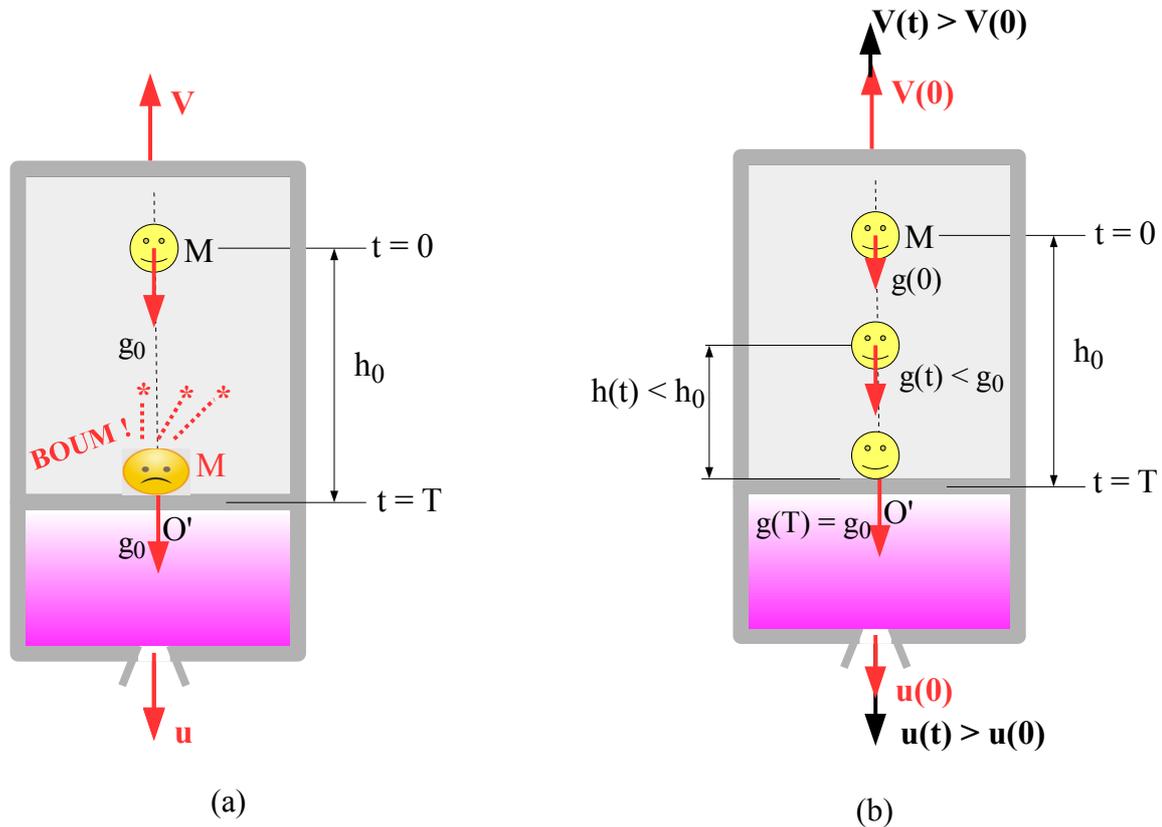


figure 6 – Deux configurations pour atteindre une pesanteur induite égale à la valeur cible g_0 :
 (a) en appliquant une vitesse d'éjection u de sorte que l'on ait immédiatement $g = g_0$: M est en chute libre, sur toute la hauteur, sous l'accélération g_0 ; le choc au sol (O') peut être important.
 (b) en appliquant une vitesse d'éjection u progressivement croissante $u(t) > u(0)$ de sorte que $g(t)$ augmente progressivement vers g_0 et l'atteint lorsque M est au sol $h(T) = 0$ au bout d'un temps T

Le calcul général (10) pour déterminer le débit $q_s(t)$ en fonction de la pesanteur induite variable au cours du temps $g(t)$ jusqu'à sa valeur cible g_0 , est compliqué.
 Il peut être simplifié si l'on suppose que la masse de matière éjectée m_s est relativement petite devant celle de l'ascenseur, soit $m_s(t) \ll M_0$, et (9) a l'expression approchée :

$$\sqrt{M_0} \sqrt{1 - \frac{m_s(t)}{M_0}} \approx \sqrt{M_0} \left(1 - \frac{m_s(t)}{2M_0} \right) = \sqrt{M_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho_s S} \int_0^t \sqrt{g(t)} dt \text{ soit :}$$

$$-\frac{m_s(t)}{2\sqrt{M_0}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho_s S} \int_0^t \sqrt{g(t)} dt \text{ seul le signe « - » convient,}$$

dont la dérivée donne :

$$q_s(t) = \frac{dm_s(t)}{dt} = \sqrt{\rho_s S M_0 g(t)} \quad (11)$$

► **Conditions d'application :**

- 1 – On veut obtenir une **croissance linéaire** de $g(t)$ depuis $g(0) = 0$ au temps $t = 0$, jusqu'à $g(T) = g_0$ au temps $t = T$ (durée de la « descente » de M jusqu'à O') :

$$g(t) = at \text{ où « a » est une constante à déterminer}$$

Or en $t = T$, on a $g(T) = g_0 = aT$, d'où :

$$g(t) = g_0 \frac{t}{T} \quad (12)$$

• 2 – D'autre part, pour que la descente vers le sol du passager M, depuis l'altitude $O'M = h_0$ à $t = 0$, soit relativement confortable, on veut que, pour $t = T$ on ait $h(T) = 0$ (passager M posé au sol).

• 3 – Enfin, il faut que, jusqu'à l'atterrissage du passager M en O', donc pendant la descente $t \leq T$, la matière éjectable ne soit pas totalement épuisée : $m_s(t) \leq M_s$.

• **Application de la condition n°2** : à chaque instant t , d'après (12), la vitesse de descente de M est :

$$v(t) = \int_0^t g(t) dt = \frac{1}{2} \frac{g_0}{T} t^2$$

et la variation d'altitude de M est :

$$h_0 - h(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{1}{6} \frac{g_0}{T} t^3 \quad \text{soit :}$$

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{6} \frac{g_0}{T} t^3 \quad (13)$$

On déduit de (13) la durée totale de descente T : en effet, pour $t = T$ on doit avoir $h(T) = 0$ d'où

$$T = \sqrt{\frac{6h_0}{g_0}} \quad (14)$$

• **Application de la condition n°3** : la variation du débit d'éjection est donnée par (11) dans laquelle on utilise (12) :

$$q_s(t) = \sqrt{\rho_s S M_0 g_0} \sqrt{\frac{t}{T}} \quad (15a)$$

et avec (14) :

$$q_s(t) = \left(\frac{g_0^3}{6h_0} \right)^{1/4} \sqrt{\rho_s S M_0} \sqrt{t} \quad (15b)$$

La variation du débit $q_s(t)$ est donc paramétrée par l'altitude initiale h_0 de M, par la pesanteur cible g_0 , et par la masse totale de l'ascenseur M_0 .

Puisque, par hypothèse, quelle que soit h_0 on impose que $g(t)$ atteigne g_0 pour $h(T) = 0$ (M arrivé en O'), alors le débit d'éjection appliqué est plus faible lorsque h_0 est grande, et donc lorsque la durée de descente de M est plus longue, comme (15b) l'indique. La condition n°3 impose, dans cette variation, que :

$$m_s(t) \leq M_s$$

Or on a, avec (15a) :

$$m_s(T) = \int_0^T q_s(t) dt = \sqrt{\rho_s S M_0 g_0} \int_0^T \sqrt{\frac{t}{T}} dt \quad \text{soit :}$$

$$m_s(T) = \frac{2}{3} \sqrt{\rho_s S M_0 g_0} T$$

ce qui montre que la quantité de matière éjectée pendant la descente jusqu'au sol est directement proportionnelle à la durée de cette descente T .

L'application de la condition n°3, $m_s(T) \leq M_s$, conduit donc, en remplaçant T par (14) dans l'expression de $m_s(T)$, à une limite sur l'altitude initiale à ne pas dépasser h_{\max} :

$$m_s(T) = \frac{2}{3} \sqrt{\rho_s S M_0 g_0} T = \frac{2}{3} \sqrt{\rho_s S M_0 g_0} \sqrt{\frac{6 h_0}{g_0}} \leq M_s \quad \text{soit :}$$

$$h_0 \leq h_{\max} \quad \text{avec :} \quad h_{\max} = \frac{3}{8} \frac{1}{\rho_s S} \frac{M_s^2}{M_0} \quad (16)$$

La condition (16) exprime que la hauteur initiale de M ne doit pas être trop élevée et que la masse initiale de la matière éjectable M_s doit être suffisamment grande par rapport à la masse totale initiale de l'ascenseur M_0 . Notons cependant que cette condition (16) repose sur l'approximation concernant le rapport m_s/M_0 qui a conduit à la relation (11), et qui supposait une masse de matière éjectable faible devant M_0 ; mais la condition (16) est plus restrictive que celle qui serait obtenue sans cette simplification, donc on peut la maintenir dans une approche en ordre de grandeur.

Cette condition (16) pose des limites à la validité des évolutions du débit (15b) paramétrées par h_0 , g_0 , M_0 , selon les valeurs de M_s . Avec (15b) on obtient la limite de validité de l'évolution du débit, compte tenu de (16) ; celui-ci ne doit pas devenir plus faible qu'un débit minimal limite donné ci-après :

$$h_0 \leq h_{\max} \rightarrow q_s(t) \geq q_{\min}(t) \quad \text{avec :} \quad q_{\min}(t) = \left(\frac{g_0^3}{6 h_{\max}} \right)^{1/4} \sqrt{\rho_s S M_0} \cdot \sqrt{t}$$

qui donne en exprimant h_{\max} par (16) :

$$q_s(t) \geq q_{\min}(t) \quad (17a)$$

$$q_{\min}(t) = \sqrt{\frac{2}{3 M_s}} (\rho_s S M_0 g_0)^{3/4} \sqrt{t} \quad (17b)$$

dont le paramètre déterminant est la masse initiale de matière éjectable M_s . Si celle-ci est suffisamment grande alors :

- d'après (16), la hauteur initiale h_0 de M peut être élevée ;
- le débit minimal, donné par (17b) peut être petit ;
- le temps pour atteindre au sol (O') une pesanteur g_0 , T donné par (14), peut être suffisamment grand, et limité par un temps maximal directement proportionnel à M_s :

$$T = \sqrt{\frac{6 h_0}{g_0}} \leq T_{\max} \quad \text{avec :} \quad T_{\max} = \sqrt{\frac{6 h_{\max}}{g_0}} = \frac{3}{2} \frac{M_s}{\sqrt{\rho_s S M_0 g_0}} \quad (18)$$

7 – Tracé des évolutions du débit massique d'éjection

La quantité

$$Q(g_0) = \sqrt{\rho_s S M_0 g_0}$$

intervient dans les différentes relations (15a), (16), (17a), (18). Elle a les dimensions d'un débit

massique [MT⁻¹] (exprimé par exemple en kg/s), elle est considérée comme un **débit massique de référence**.

Et pour établir les réseaux de courbes d'évolution $q_s(t)$ paramétrées par h_0 , on admet que Q est connue, c'est-à-dire la masse volumique de la matière éjectée ρ_s , la section de sortie S , et la masse initiale totale de l'ascenseur M_0 , sont fixées ; g_0 est la pesanteur cible qui peut prendre des valeurs différentes, comme paramètre agissant sur $Q(g_0)$.

On a ainsi :

$$(15a) \rightarrow q_s(t; h_0; g_0) = Q(g_0) \sqrt{\frac{t}{T(h_0; g_0)}}$$

où $T(h_0; g_0)$ temps de descente de M jusqu'à O' , est donné en (14) ; soit encore, d'après (15b) :

$$q_s(t; h_0; g_0) = \left(\frac{g_0}{6h_0} \right)^{1/4} Q(g_0) \sqrt{t} \quad (19)$$

$$(16) \rightarrow h_{\max}(M_s) = \frac{3}{8} \frac{g_0}{Q^2(g_0)} M_s^2 \quad \text{qui ne dépend pas de } g_0 \quad (20)$$

$$(17a) \rightarrow q_{\min}(t; M_s; g_0) = \sqrt{\frac{2}{3M_s}} Q^{3/2}(g_0) \sqrt{t} \quad (21)$$

$$(18) \rightarrow T_{\max}(M_s; g_0) = \frac{3}{2Q(g_0)} M_s \quad (22)$$

Pour établir les courbes de (19), ainsi que les limites de validité exprimées par (20), (21), (22) qui dépendent de M_s et de g_0 , et pour chaque valeur fixée de g_0 , on peut poser que Q a une valeur connue qui résulte du choix des données ρ_s , S , M_0 et g_0 :

Comment se déplacent les limites avec M_s ?

Elles se déplacent selon le paramétrage par M_s des relations ci-dessus, mais aussi par le fait que pour toute valeur M_s , les valeurs de $q_s(t)$ prises en $t = T_{\max}$ et $h_0 = h_{\max}$ sont toujours égales à $Q(g_0)$. En effet, d'après (20) et (22), on a :

$$q_s(T_{\max}(M_s); h_{\max}(M_s)) = \left(\frac{g_0}{6 \times \frac{3}{8} g_0 M_s^2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{3}{2} M_s} Q(g_0) = Q(g_0)$$

Autrement dit, le débit massique d'éjection ne peut pas dépasser le débit massique de référence, quelles que soient la masse initiale de matière éjectable M_s , et la hauteur initiale h_0 , ceci pour une pesanteur cible donnée g_0 (en supposant fixées les valeurs ρ_s , S , M_0) :

$$q_s(T_{\max}; h_{\max}) = Q(g_0) = \sqrt{\rho_s S M_0} \sqrt{g_0} \quad (23)$$

Les évolutions de $q_s(t; h_0)$ selon les valeurs de h_0 , et les limites de validité, selon les valeurs de M_s , avec au-delà les domaines interdits, sont représentées à la figure 7.

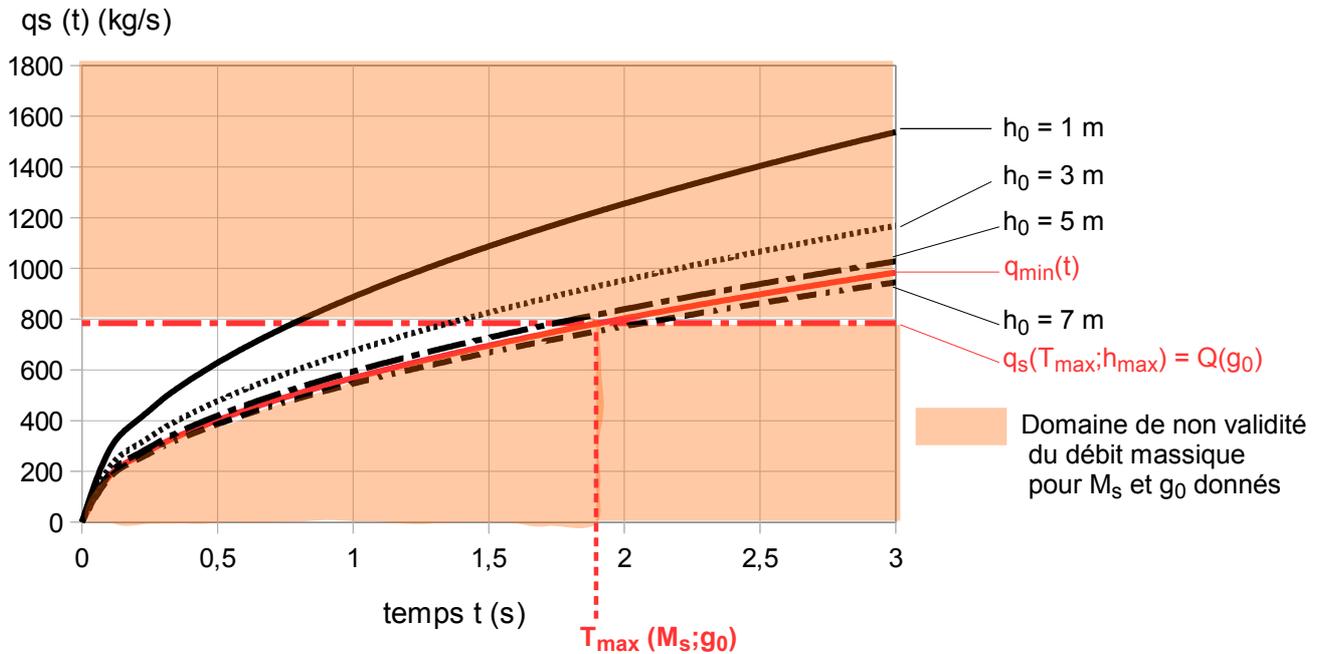


figure 7 – Allure des courbes d'évolution de q_s paramétrées par h_0 , (ici $h_0 = 1$ m, 3 m, 5 m, 7 m) et des limites de validité paramétrées par M_s et g_0 ; le débit massique q_s est aussi paramétré par g_0 comme l'exprime la relation (19). Sur la figure un T_{\max} a été représenté pour une des valeurs de M_s et de g_0 mais il diminue lorsque g_0 augmente, et lorsque M_s diminue (relation (22))

► **Exemple numérique** (figure 7) : On fixe $\rho_s = 1000$ kg/m³, $r = 0,1$ m rayon de la sortie circulaire de la matière éjectée, soit $S = \pi r^2 = 0,0314$ m², $M_0 = 2000$ kg, $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81$ m/s², $M_s = 1000$ kg. On en déduit $Q(g_0) = 785,1$ kg/s, ainsi que les limites :

$$\begin{aligned} \text{De (20) : } h_{\max} &= 6 \text{ m} \\ \text{De (22) : } T_{\max} &= 1,9 \text{ s} \\ \text{De (21) : } q_{\min}(t) &= 568\sqrt{t} \text{ (kg/s)} ; \\ \text{en } t = T_{\max}, \text{ on a } q_{\min}(T_{\max}) &= 783 \text{ kg/s comme montré à la figure 7} \end{aligned}$$

D'après (19), pour chacune des hauteurs initiales $h_0 = 1$ m, 3 m, 5 m et 7 m l'évolution du débit massique est :

$$\begin{aligned} \text{pour } h_0 = 1 \text{ m : } q_s(t) &= 887,8\sqrt{t} \text{ (kg/s)} \\ \text{pour } h_0 = 3 \text{ m : } q_s(t) &= 674,6\sqrt{t} \text{ (kg/s)} \\ \text{pour } h_0 = 5 \text{ m : } q_s(t) &= 593,7\sqrt{t} \text{ (kg/s)} \\ \text{pour } h_0 = 7 \text{ m : } q_s(t) &= 545,8\sqrt{t} \text{ (kg/s)} \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de h_0 , on vérifie si elle est inférieure à h_{\max} ; si h_0 est supérieure à h_{\max} , ou ce qui revient au même, si la durée de descente $T(h_0 ; g_0)$ est supérieure à T_{\max} , alors le choix de la dynamique de l'ascenseur n'est pas compatible : la validité n'est pas acquise. Ainsi :

- $h_0 < h_{\max} = 6$ m pour $h_0 = 1$ m, 3 m, 5 m ; ou de manière équivalente, les durées de descente correspondantes $T = \sqrt{6h_0/g_0} = 0,78$ s ($h_0 = 1$ m), 1,35 s ($h_0 = 3$ m), 1,75 s ($h_0 = 5$ m) sont inférieures à $T_{\max} = 1,9$ s : pour ces hauteurs, la dynamique est dans le domaine de validité.
- $h_0 > h_{\max} = 6$ m pour $h_0 = 7$ m ; ou de manière équivalente, la durée de descente correspondante est $T = 2,07$ s $> T_{\max} = 1,9$ s : pour cette hauteur, la dynamique est sortie du domaine de validité, elle n'est pas compatible avec les conditions n°2 et 3 vues au paragraphe 6.

► **Exemple d'étude paramétrique :**

Pour chaque configuration on trace q_s pour les valeurs de h_0 : 3, 5, 7, 10 m.

Chaque configuration est caractérisée par la donnée de : g_0 , ρ_s , M_s , M_0 , r (c'est-à-dire $S = \pi r^2$) et elle détermine :

- débit massique de référence $Q(g_0) = \sqrt{\rho_s S M_0 g_0}$ (kg/s)
- hauteur limite de validité, calculée par (16) : $h_{\max}(M_s) = \frac{3}{8} \frac{1}{\rho_s S} \frac{M_s^2}{M_0}$ (m)
- durée de descente limite de validité, calculée par (22) : $T_{\max}(M_s; g_0) = \frac{3}{2Q(g_0)} M_s$ (s)

et pour chaque hauteur initiale :

$$\text{temps de descente } T = \sqrt{\frac{6 h_0}{g_0}} \text{ (s)} \quad (24)$$

$$\text{vitesse d'atterrissage de M en O'} : v(h_0) = \frac{1}{2} g_0 T = \sqrt{\frac{3}{2} g_0 h_0} \text{ (m/s)} \quad (25)$$

Remarque : Pour rappel, avec une accélération cible g_0 maintenue constante dès le début jusqu'à l'atterrissage, on aurait une vitesse d'atterrissage égale à $v'(h_0) = \sqrt{2 g_0 h_0}$ (comme pour la chute des corps sous gravité constante), tandis que la vitesse d'atterrissage sous l'action d'une accélération variable linéaire (relation (12)), pour la même pesanteur cible g_0 , est

$$v(h_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} v'(h_0) = 0,866 v'(h_0) < v'(h_0)$$

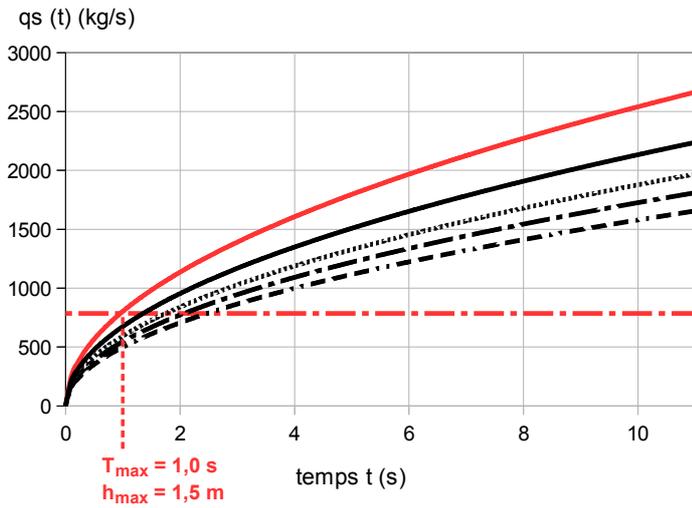
La dynamique décrite au paragraphe 6, avec ses trois conditions, permet donc une vitesse d'arrivée au sol de M moins grande (de 14% environ) que si une accélération constante était imposée dès le début. En principe, on cherche à reproduire une pesanteur terrestre $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m/s}^2$. Mais on peut aussi chercher à obtenir $g_0 < g_{\text{Terre}}$ lorsque M atteint le sol en O', puis continuer d'augmenter g_0 jusqu'à g_{Terre} , ce qui sera mieux supporté par le passager M.

Le paramètre déterminant pour la faisabilité de la descente de M vers O' est M_s : pour des valeurs fixées de g_0 , ρ_s , M_0 , S , c'est M_s qui impose une borne au débit massique q_s , en-dessous de laquelle la descente de M ne peut avoir lieu durant un délai compatible avec la disponibilité de la matière éjectée (condition n°3).

Les calculs et tracés suivants (figures 8a, 8b, 8c, figures 9a, 9b, 9c, figures 10a, 10b, 10c) montrent les variations de $q_s(t; h_0)$, calculées par (19) en fonction de h_0 , pour différentes valeurs de M_s , et pour une pesanteur cible g_0 donnée ; les autres grandeurs (ρ_s , M_0 , S) sont fixées. Comme on l'a vu, M_s et g_0 agissent sur les limites de validité issues des conditions n°1, 2, 3, à savoir :

- $h_{\max}(M_s)$, $T_{\max}(M_s; g_0)$, calculés par (16) et (22) ;
- vitesse et temps descente $v(h_0; g_0)$, $T(h_0; g_0)$ pour chaque hauteur h_0 , calculés par (24) et (25)
- $q_{\min}(t; M_s; g_0)$ calculé par (21)

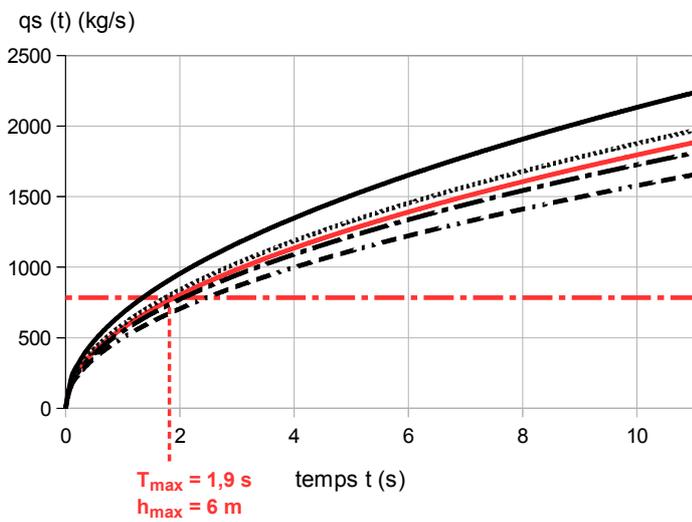
- Valeurs fixées pour toutes les figures 8, 9, 10 : $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$, $M_0 = 2000 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$ ($S = 0,0314 \text{ m}^2$).
- Valeurs fixées pour la figure 8 : $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m/s}^2$; paramètre $M_s = 500 \text{ kg}$ (cas (a)), 1000 kg (cas (b)), 1300 kg (cas (c)).
- Valeurs fixées pour la figure 9 : $g_0 = 5 \text{ m/s}^2$; paramètre $M_s = 500 \text{ kg}$ (cas (a)), 1000 kg (cas (b)), 1300 kg (cas (c)).
- Valeurs fixées pour la figure 10 : $g_0 = g_{\text{Lune}} = 1,62 \text{ m/s}^2$; paramètre $M_s = 500 \text{ kg}$ (cas (a)), 1000 kg (cas (b)), 1300 kg (cas (c)).



Cas (a) :

$M_s = 500 \text{ kg}$

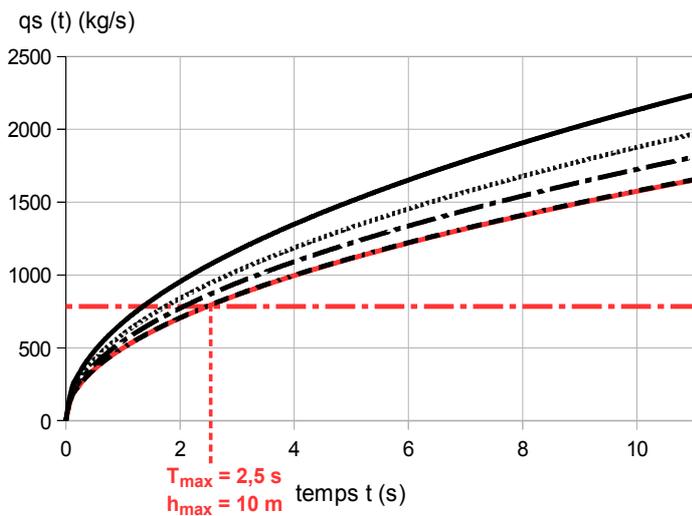
- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$



Cas (b) :

$M_s = 1000 \text{ kg}$

- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$

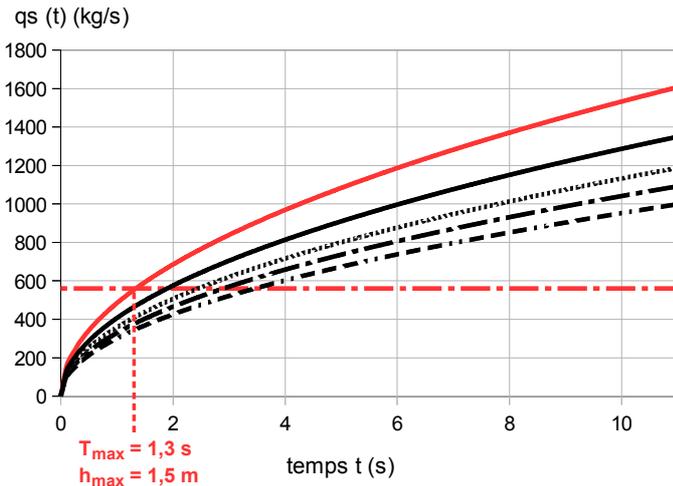


Cas (c) :

$M_s = 1300 \text{ kg}$

- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$

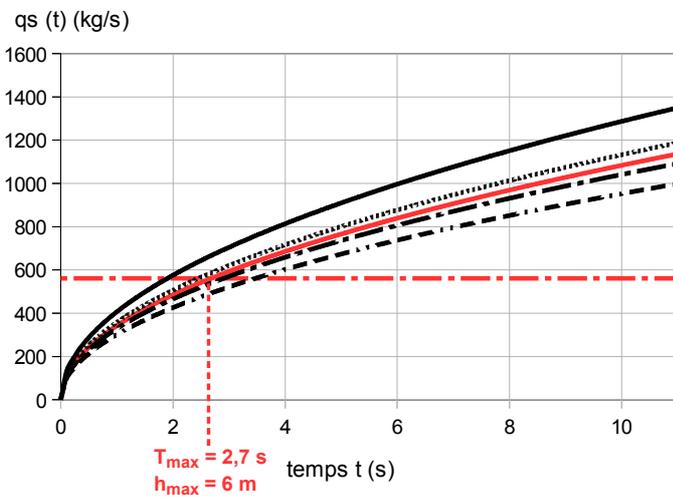
figure 8 – évolutions du débit massique avec la hauteur initiale h_0 pour une pesanteur cible $g_0 = g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m/s}^2$, pour différentes valeurs de M_s (masse de matière éjectable)



Cas (a) :

$M_s = 500 \text{ kg}$

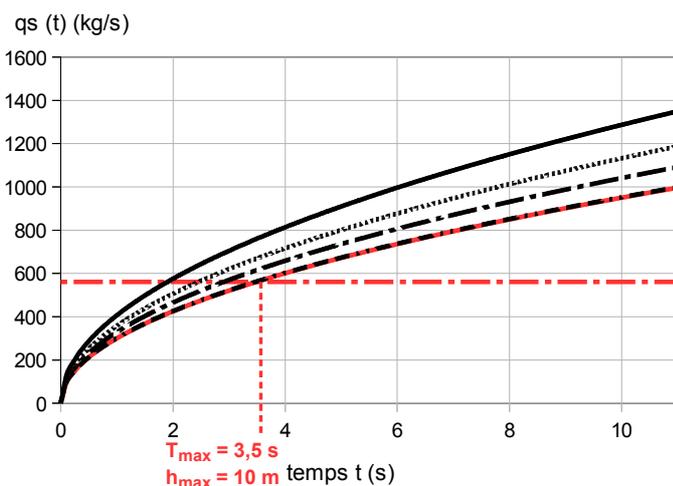
- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- . - . $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- - - $q_s(T_{\max}; h_{\max})$



Cas (b) :

$M_s = 1000 \text{ kg}$

- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- . - . $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- - - $q_s(T_{\max}; h_{\max})$

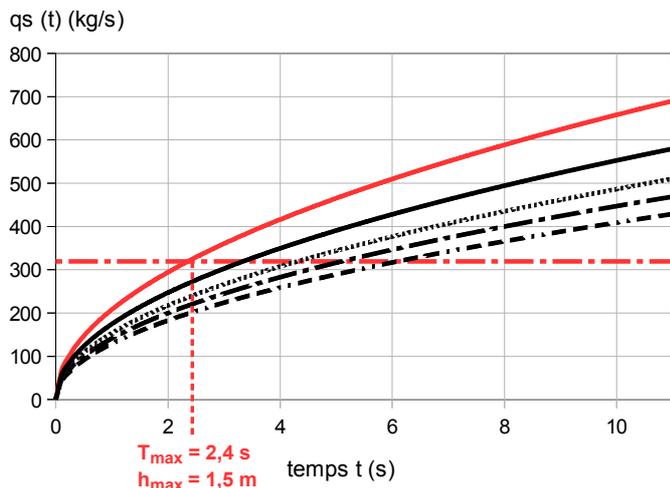


Cas (c) :

$M_s = 1300 \text{ kg}$

- $h_0 = 3 \text{ m}$
- ⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$
- - $h_0 = 7 \text{ m}$
- . - . $h_0 = 10 \text{ m}$
- $q_{\min}(t; M_s)$
- - - $q_s(T_{\max}; h_{\max})$

figure 9 – évolutions du débit massique avec la hauteur initiale h_0 pour une pesanteur cible $g_0 = 5 \text{ m/s}^2$, pour différentes valeurs de M_s (masse de matière éjectable)



Cas (a) :

$M_s = 500 \text{ kg}$

— $h_0 = 3 \text{ m}$

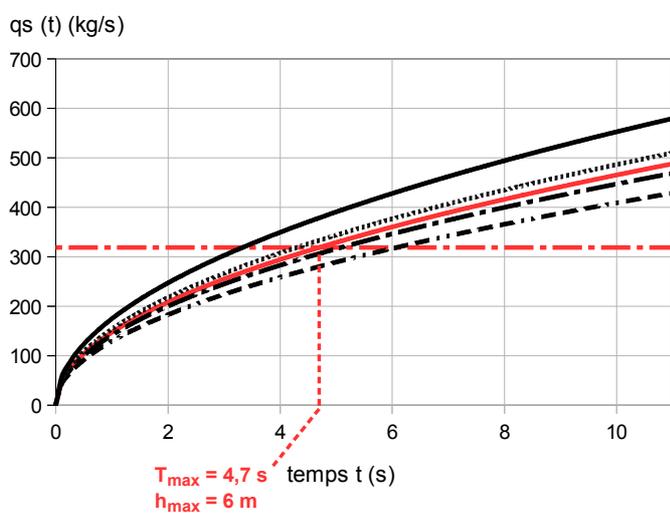
⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$

- - $h_0 = 7 \text{ m}$

- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$

— $q_{\min}(t; M_s)$

- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$



Cas (b) :

$M_s = 1000 \text{ kg}$

— $h_0 = 3 \text{ m}$

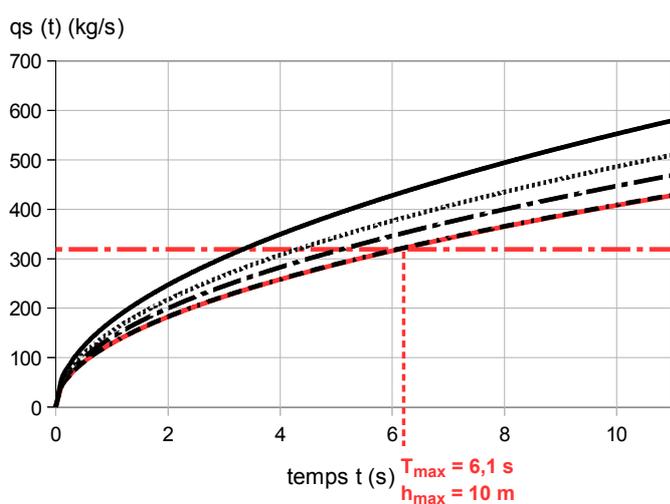
⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$

- - $h_0 = 7 \text{ m}$

- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$

— $q_{\min}(t; M_s)$

- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$



Cas (c) :

$M_s = 1300 \text{ kg}$

— $h_0 = 3 \text{ m}$

⋯ $h_0 = 5 \text{ m}$

- - $h_0 = 7 \text{ m}$

- · - · $h_0 = 10 \text{ m}$

— $q_{\min}(t; M_s)$

- · - · $q_s(T_{\max}; h_{\max})$

figure 10 – évolutions du débit massique avec la hauteur initiale h_0 pour une pesanteur cible $g_0 = g_{\text{Lune}} = 1,62 \text{ m/s}^2$, pour différentes valeurs de M_s (masse de matière éjectable)

8 – Analyse sommaire et remarques

Des calculs paramétriques précédents (paragraphe 7) et du modèle théorique adopté dans cet article, il ressort les observations suivantes.

► Lorsque la pesanteur cible g_0 diminue, le temps de descente $T(h_0 ; g_0)$ augmente pour chaque hauteur initiale h_0 du passager M à bord de l'ascenseur, ce qui est évident.

Mais ce temps doit être compatible avec le temps T_{\max} au bout duquel il y a épuisement de la masse de matière éjectée M_s .

Il y a compatibilité lorsque le temps de descente $T(h_0 ; g_0)$ est plus petit que T_{\max} et lorsque la hauteur initiale h_0 est plus petite qu'une hauteur h_{\max} qui, quelle que soit la pesanteur cible, correspond à l'épuisement de la matière éjectable.

Ces conditions dépendent du mode d'accélération de l'ascenseur $g(t)$, qui a été choisie suivre une loi linéaire (relation (12) issue de la condition n°1), ainsi que du mode de variation du débit de matière éjectée $q_s(t)$ (relation (11) et condition n°3) : elles sont exprimées par les relations (16) pour h_{\max} , et (18) pour T_{\max} .

Pour d'autres modes de variation de $g(t)$ et de $q_s(t)$, les limites de compatibilité seraient différentes.

Les valeurs de ces limites T_{\max} et h_{\max} sont grandes lorsque g_0 est petite (pesanteur cible faible) et M_s est grande (masse de la matière éjectable disponible grande).

De plus, la vitesse avec laquelle le passager M rencontre le sol, $v(h_0 ; g_0)$, donnée par (25), est faible lorsque g_0 est petite.

Le choix d'une pesanteur cible g_0 faible est donc favorable pour obtenir une descente relativement lente et un atterrissage « confortable » du passager M en O' ; il permet aussi un départ depuis des hauteurs initiales h_0 plus grandes.

Une fois M au sol (en O'), il sera alors possible d'augmenter progressivement g_0 jusqu'à sa valeur terrestre $g_{\text{Terre}} = 9,81 \text{ m/s}^2$ sans que le passager M ait à subir un écrasement insupportable, pourvu qu'il reste suffisamment de masse M_s de matière éjectable disponible.

Le **tableau 1** ci-après récapitule, à partir des simulations paramétriques aux figures 8, 9 et 10 précédentes, les hauteurs de descente h_0 , les temps de descente $T(h_0 ; g_0)$ et les vitesses d'atterrissage $v(h_0 ; g_0)$ correspondants, en indiquant leur compatibilité avec h_{\max} et T_{\max} .

► Le modèle que nous avons utilisé repose sur deux hypothèses :

- Le modèle d'accélération de l'ascenseur selon une loi temporelle linéaire donnée par (12) et (13). On peut imaginer des modes d'accélération différents, mais pour des hauteurs de descente relativement courtes (quelques mètres) cela paraît plus complexe de faire varier le débit sur un intervalle de temps relativement petit (quelques secondes maximum).

- La vitesse d'éjection de la matière, $u(t)$, pour la propulsion de l'ascenseur, qui intervient dans le théorème d'Euler (7), est considérée directement reliée au débit massique exprimé en (8), et non comme une vitesse de poussée indépendante. Cette hypothèse a conduit à une accélération de l'ascenseur directement proportionnelle à $u^2(t)$, et à relier directement l'évolution de la masse éjectée à la pesanteur induite $g(t)$ (relation (9)).

Cependant certaines configurations de la propulsion de l'ascenseur peuvent amener à une vitesse de poussée qui dépend de la vitesse d'éjection d'une manière différente ; cela peut être à cause, par exemple, du mouvement propre des tuyères, d'une combustion, de conditions thermodynamiques et hydrodynamiques pour l'obtention de la vitesse d'éjection, etc.

Mais ceci est une toute autre histoire...

g_0 (m/s ²)	M_s (kg)	T_{max} (s)	h_0 (m)			
			3	5	7	10
9,81 (fig.8)	(a) 500	1	T(h_0 ; g_0) = 1,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 1,7 s v(h_0 ; g_0) = 8,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,1 s v(h_0 ; g_0) = 10,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,5 s v(h_0 ; g_0) = 12,1 m/s
	(b) 1000	1,9	T(h_0 ; g_0) = 1,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 1,7 s v(h_0 ; g_0) = 8,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,1 s v(h_0 ; g_0) = 10,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,5 s v(h_0 ; g_0) = 12,1 m/s
	(c) 1300	2,5	T(h_0 ; g_0) = 1,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 1,7 s v(h_0 ; g_0) = 8,6 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,1 s v(h_0 ; g_0) = 10,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,5 s v(h_0 ; g_0) = 12,1 m/s
5 (fig.9)	(a) 500	1,3	T(h_0 ; g_0) = 1,9 s v(h_0 ; g_0) = 4,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,9 s v(h_0 ; g_0) = 7,2 m/s	T(h_0 ; g_0) = 3,5 s v(h_0 ; g_0) = 8,7 m/s
	(b) 1000	2,7	T(h_0 ; g_0) = 1,9 s v(h_0 ; g_0) = 4,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,9 s v(h_0 ; g_0) = 7,2 m/s	T(h_0 ; g_0) = 3,5 s v(h_0 ; g_0) = 8,7 m/s
	(c) 1300	3,5	T(h_0 ; g_0) = 1,9 s v(h_0 ; g_0) = 4,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,4 s v(h_0 ; g_0) = 6,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 2,9 s v(h_0 ; g_0) = 7,2 m/s	T(h_0 ; g_0) = 3,5 s v(h_0 ; g_0) = 8,7 m/s
1,62 (fig.10)	(a) 500	2,4	T(h_0 ; g_0) = 3,3 s v(h_0 ; g_0) = 2,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 4,3 s v(h_0 ; g_0) = 3,5 m/s	T(h_0 ; g_0) = 5,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 6,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,9 m/s
	(b) 1000	4,7	T(h_0 ; g_0) = 3,3 s v(h_0 ; g_0) = 2,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 4,3 s v(h_0 ; g_0) = 3,5 m/s	T(h_0 ; g_0) = 5,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 6,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,9 m/s
	(c) 1300	6,1	T(h_0 ; g_0) = 3,3 s v(h_0 ; g_0) = 2,7 m/s	T(h_0 ; g_0) = 4,3 s v(h_0 ; g_0) = 3,5 m/s	T(h_0 ; g_0) = 5,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,1 m/s	T(h_0 ; g_0) = 6,1 s v(h_0 ; g_0) = 4,9 m/s

Tableau 1 – Compatibilité des hauteurs de descente avec les données de la pesanteur cible et de la masse disponible de matière éjectable, pour des configurations fixées : $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$, $M_0 = 2000 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$ ($S = 0,0314 \text{ m}^2$). Les résultats sont le temps de descente $T(h_0 ; g_0)$ (s) et la vitesse à l'atterrissage $v(h_0 ; g_0)$ (m/s) ; les configurations pour lesquelles il y a incompatibilité avec les conditions n°1, 2, 3 sont en rouge

Références

- [1] Frédéric Élie : *Ascenseur en chute libre et impesanteur* - site <http://fred.elie.free.fr>, avril 2006
- [2] Frédéric Élie : *Pendule de Foucault* - site <http://fred.elie.free.fr>, juillet 2011
- [3] Frédéric Élie : *Équilibre d'une plaque soumise à l'action d'un écoulement : une application du théorème d'Euler* – site <http://fred.elie.free.fr>, avril 2014
- [4] José-Philippe Pérez: *Mécanique* – Dunod 2001
- [5] Frédéric Élie : *Anémomètre à coupelles élémentaire* – site <http://fred.elie.free.fr>, avril 2014

