



Frédéric Elie on
ResearchGate

Prismes et arc-en-ciel

Frédéric Élie

création: septembre 2007

modifié le: 19 mars 2011

(correction de la figure 5, après remarques de Michel Gourgeot que je remercie)

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Observer un arc-en-ciel est toujours un plaisir doublé d'étonnement : pourquoi dans certains cas la décomposition en différentes couleurs est-elle inversée ? pourquoi à côté de l'arc-en-ciel principal se trouve parfois un second arc-en-ciel, appelé « écho », d'intensité moindre ? quels phénomènes optiques conditionnent l'apparition d'un arc-en-ciel ? peut-on calculer la distance d'un arc-en-ciel ?... et d'autres questions liées aux observations « populaires » : pourquoi dit-on que lorsque l'arc-en-ciel a les « pieds dans l'eau » la pluie va continuer ?

L'étude de l'arc-en-ciel nous conduit à nous intéresser aussi à la dispersion de la lumière visible par les prismes. Nous profitons également de l'occasion pour dire quelques mots sur d'autres phénomènes optiques dans l'atmosphère : parhélies, piliers, faux soleils.

SOMMAIRE

1 – L'arc-en-ciel

2 - Le prisme et ses applications

3 - Quelques effets optiques dans l'atmosphère dus à la réfraction de la lumière

4 - Manipulation expérimentale

Annexe : Dispersion de la lumière dans les milieux diélectriques, loi de Cauchy

A1 - Équations du champ électromagnétique en présence de charges du milieu matériel

A2 - Largeur de bande

A3 - Conductivité électrique du milieu

A4 - Loi de dispersion de Cauchy pour l'indice optique d'un milieu transparent

1 - L'arc-en-ciel

C'est René Descartes qui, pour la première fois, a proposé une explication de la formation des arcs-en-ciel à partir des lois de la réfraction et de la réflexion de la lumière.

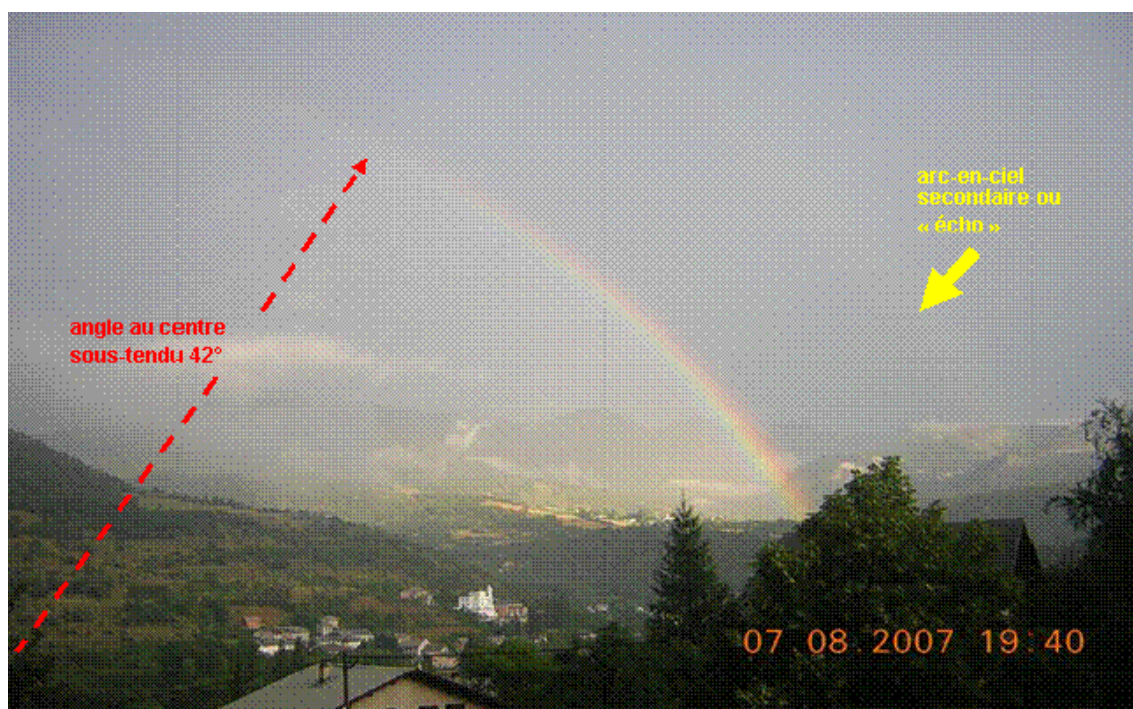
Réfraction et réflexion dans quoi, se demandera-t-on ? Dans les gouttelettes d'eau en suspension dans l'atmosphère, près du sol, après la pluie : un rayon lumineux issu du soleil pénètre dans une goutte d'eau, supposée sphérique, est réfractée à l'intérieur d'elle et subit plusieurs réflexions sur ses parois (interface air-eau). Puis ce rayon sort de la goutte en ayant subi une déviation que l'on sait calculer en fonction de l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air, et de l'angle d'incidence initiale. Le nombre de réflexions N subi par le rayon lumineux

dans la goutte avant de ressortir définit l'ordre de l'arc-en-ciel : on dit que l'arc-en-ciel est d'ordre N .

La déviation de tous les rayons lumineux parallèles par les gouttes sphériques détermine un arc de cercle dont l'angle sous-tendu au centre est égal à cette déviation. Par ailleurs, l'indice de réfraction des gouttelettes d'eau varie avec la longueur d'onde des composants monochromatiques de la lumière issue du soleil (supposée blanche) : il en résulte un effet de dispersion dans la déviation des différentes couleurs, comme dans un prisme. C'est pourquoi l'arc de cercle n'est pas unique : il y a autant d'arcs de cercle que de couleurs composant la lumière blanche, et comme pour chacune d'elles la déviation est très proche de celle de la couleur voisine, l'effet global montre une juxtaposition serrée et continue d'arcs de cercles de différentes couleurs : c'est l'arc-en-ciel.

A noter que l'approximation géométrique de l'optique est possible si les dimensions des gouttelettes sont beaucoup plus grandes que les longueurs d'onde, ce qui est le cas pour les gouttes de pluie (de l'ordre du millimètre) : les effets de diffusion et de diffraction de la lumière y sont absents à cette échelle. Par contre ils le sont pour des objets telles les gouttelettes fines de brouillard (de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$) ou pour les particules de vapeur d'eau condensée dans les nuages (de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$) : pour ces objets insuffisamment grands devant les longueurs d'onde, ce sont les effets liés à la nature ondulatoire de la lumière qui prédominent, tels la diffusion ou la diffraction (cf. mon [article sur la diffraction](#) dans ce site) : c'est pourquoi à travers le brouillard ou les nuages la lumière du soleil donne un halo.

On sait, d'autre part, que l'intensité des rayons lumineux déviés est maximale lorsque l'angle d'émergence est maximal (donc lorsque l'angle de déviation est minimal). C'est donc dans ce cas que l'on observera l'arc-en-ciel le plus intense. Il est alors important de savoir quelle est cette déviation minimale et pour quelle incidence du rayon lumineux elle a lieu ? On démontre (voir plus bas) que l'arc-en-ciel le plus intense est du premier ordre, et que l'angle d'émergence maximal est égale à 42° et est obtenue pour une incidence de $59,4^\circ$. L'arc-en-ciel du second ordre ($N = 2$ réflexions) est moins intense, donc pas toujours bien visible : c'est l'« écho ».



arc-en-ciel principal et secondaire (photo : F. Élie, Jausiers)

Modélisons le phénomène en considérant une goutte d'eau sphérique, d'indice de réfraction relative à l'air n , ainsi qu'un rayon lumineux monochromatique (longueur d'onde fixée) provenant du soleil, atteignant la goutte au point A, sous l'incidence i par rapport à la normale. A la traversée du dioptré air-eau, en A, le rayon lumineux est réfracté d'un angle r selon la **loi**

de Snell-Descartes:

$$\sin i = n \sin r$$

puis subit une première réflexion en B à l'interface du dioptre eau-air. Le rayon réfléchi rencontre en C le dioptre eau-air sous l'angle r par rapport à la normale et ressort de la goutte avec l'angle initial d'incidence i conformément à la loi de réfraction.

Plus précisément, ce n'est pas l'intégralité du rayon incident qui ressort de la goutte : une partie n'est pas transmise à l'extérieur mais est réfléchie en interne. Le nombre de réflexions en interne que subit le rayon lumineux est appelé ordre N de l'arc-en-ciel : plus il est élevé, plus l'intensité du rayon émergent sera faible.

En pratique ce sont les rayons émergent d'ordre $N = 1$ qui fournissent l'arc-en-ciel principal, et ceux d'ordre $N = 2$ fournissent l'**arc-en-ciel secondaire ou « écho »**. Les ordres plus élevés sont plus difficilement observés.

Lorsque le rayon ressort en C de la goutte d'eau, il fait avec l'angle initial d'incidence i un angle appelé angle d'émergence α de sommet K. On appelle angle de déviation D son complémentaire à l'angle plat :

$$D = \pi - \alpha$$

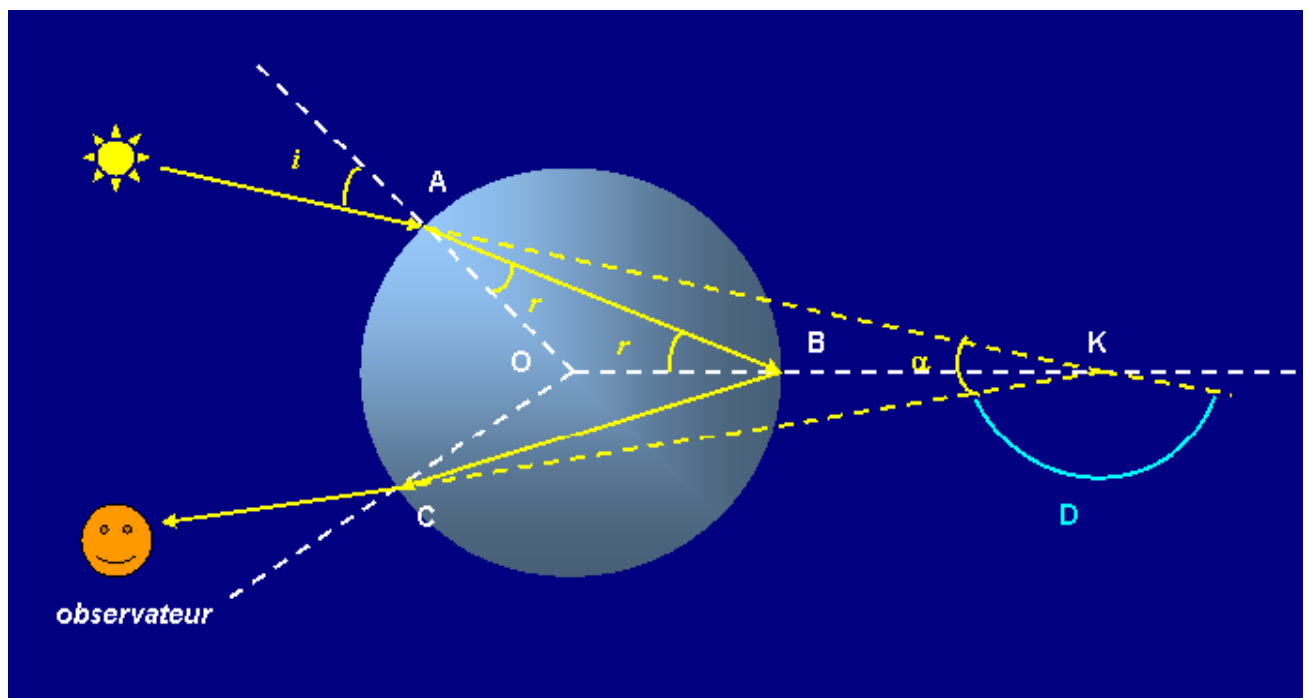


figure 1 – formation de l'arc-en-ciel du premier ordre

La déviation D est l'angle fait entre le prolongement du rayon incident AK et le prolongement du rayon émergent KC . Pour une réflexion unique dans la goutte ($N = 1$), elle est donc égale à la somme :

$$D_{(N=1)} = (AK, KC) = (AK, AB) + (AB, BC) + (BC, KC) = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = \pi + 2i - 4r$$

soit encore :

$$D_1 = \pi - 2(2r - i) \quad (1)$$

l'angle d'émergence est donc, pour un arc-en-ciel d'ordre 1 :

$$\alpha_1 = \pi - D = 2(2r - i) \quad (1 \text{ bis})$$

Pour N réflexions (avec $N \geq 2$), les déviations sont supérieures à π (voir figure 2 par exemple

pour $N = 2$, double réflexion), donc les angles d'émergence s'en déduisent par $D - \pi$ (en effet, à l'issue d'au moins deux réflexions, la déviation obtenue est toujours supérieure à π), et on généralise (1) sans difficulté :

$$\left. \begin{aligned} D_N &= N\pi - 2((N+1)r - i) \\ \alpha_N &= D_N - \pi = (N-1)\pi - 2((N+1)r - i) \end{aligned} \right| \quad (2)$$

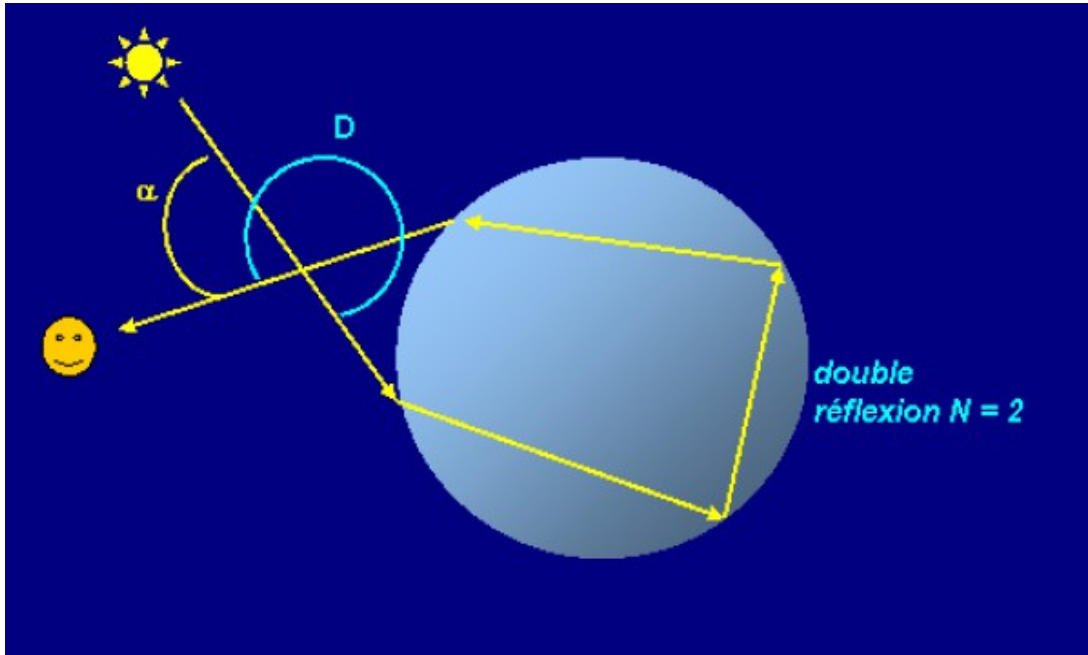


figure 2 – double réflexion dans une gouttelette d'eau (arc-en-ciel d'ordre $N = 2$)

Comme r et i sont reliés par la loi de Snell-Descartes, les angles donnés en (2) varient lorsque l'angle d'incidence i parcourt le domaine 0 à $\pi/2$. Cherchons alors dans quelles conditions sur i et sur N il peut exister un minimum de déviation.

Pour cela, on dérive D_N dans (2), ce qui donne, compte tenu de la loi de réfraction :

$$\begin{aligned} \frac{d D_N}{d i} &= 2 \left[1 - (N+1) \frac{d r}{d i} \right] \\ \sin i &= n \sin r \rightarrow \frac{d r}{d i} = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i}} \\ \rightarrow \frac{d D_N}{d i} &= 2 \left[1 - \frac{N+1}{n} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i}} \right] \end{aligned}$$

la déviation est minimale pour $dD_N/di = 0$, donc pour une incidence telle que :

$$\sin^2 i_m = \frac{(N+1)^2 - n^2}{(N+1)^2 - 1} \quad (3)$$

Il s'agit bien d'un minimum pour la déviation D_N car pour $i = 0$ la dérivée dD_N/di est négative et

est positive pour $i = \pi/2$, puisque $n > 1$. On s'en rend bien compte avec les courbes de variation de D avec l'incidence, calculées à partir de (2) pour $N = 1$ et $N = 2$ (figure 3).

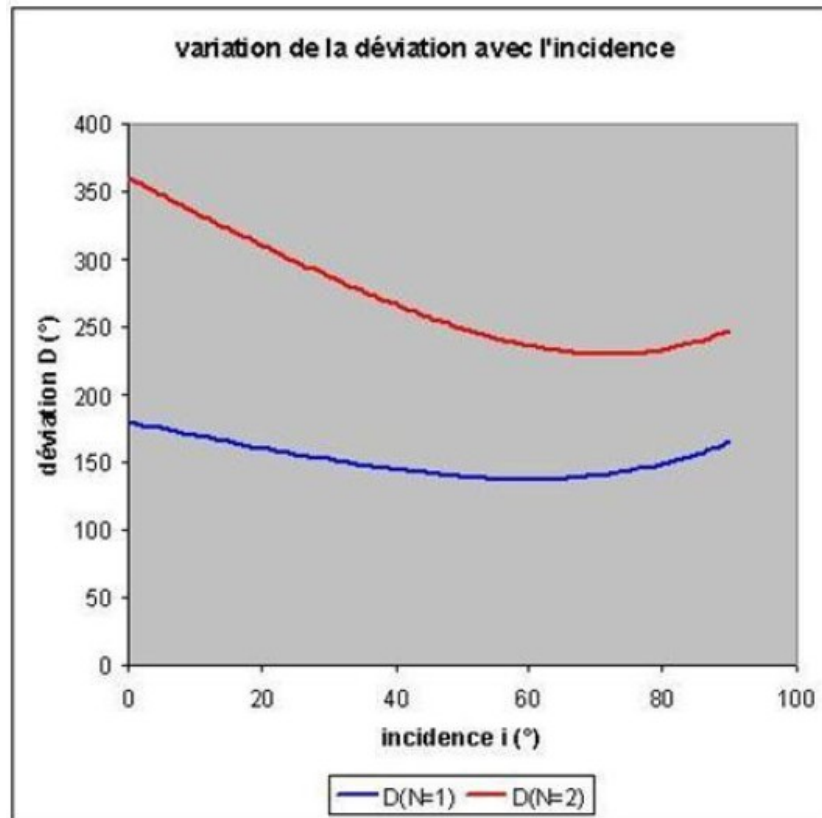


figure 3 – variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence calculée pour les ordres $N = 1$ et 2 , indice de l'eau $n = 1,33$

Pour $N = 1$ on obtient : $i_m = 59^\circ$, $D_{\min} = 138^\circ$, $\alpha_{\max} = 42^\circ$;

Pour $N = 2$ on obtient : $i_m = 72^\circ$, $D_{\min} = 231^\circ$, $\alpha_{\max} = 51^\circ$. L'arc-en-ciel du second ordre se trouve donc à l'extérieur de l'arc-en-ciel du premier ordre.

Au-delà de l'angle d'émergence $\alpha_{\max}$, donc pour des incidences éloignées de i_m les rayons lumineux ne peuvent pas émerger de la gouttelette en direction de l'observateur. Les rayons lumineux d'incidence proche de i_m émergent en un faisceau parallèle et semblent provenir d'un arc de cercle dont le centre virtuel situé sous l'horizon est à la distance angulaire de l'horizon égale à :

$$R = \alpha_{\max} - H$$

où H est la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon (figure 4). L'arc-en-ciel n'est donc pas visible lorsque R est négatif ou nul donc dès que le soleil a une hauteur H supérieure à $\alpha_{\max}$ au-dessus de l'horizon. Le rayon angulaire de l'arc-en-ciel est donc maximal pour $H = 0^\circ$ donc au coucher du soleil. Pour $N = 1$, il vaut 42° , autrement dit l'arc-en-ciel est pratiquement un demi-cercle au coucher du soleil.

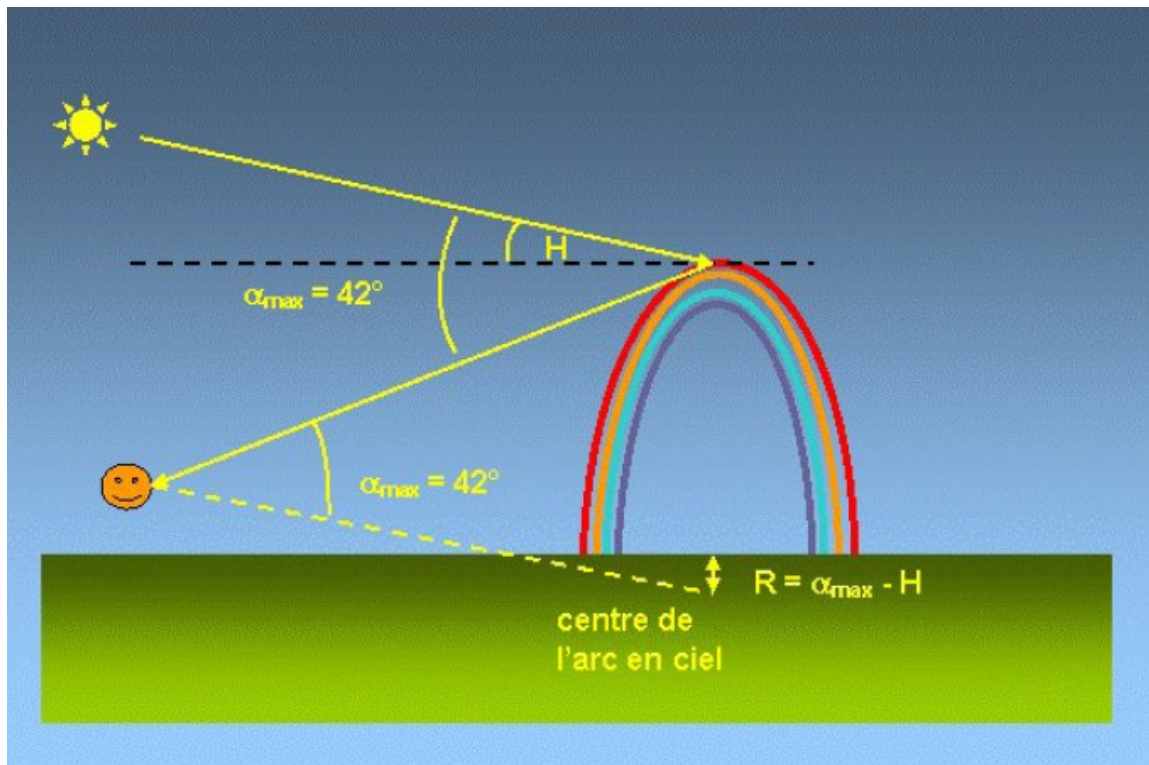


figure 4 : position de l'arc de premier ordre

On montre que les arcs d'ordres 3 et 4 se trouvent dans la direction du soleil : ils sont donc rarement visibles.

La juxtaposition des couleurs du spectre de la lumière visible ($0,4 \mu\text{m}$ à $0,75 \mu\text{m}$) résulte de sa dispersion de la lumière blanche: l'indice de réfraction varie avec la longueur d'onde. Par conséquent, pour un angle d'incidence donné fixé, l'angle de réfraction, et par suite la déviation et l'angle d'émergence, varient avec la longueur d'onde : en fait, il y a autant d'arcs que de longueurs d'onde. Comme les différents angles d'émergence sont très proches, l'ensemble des arcs donne l'impression d'un dégradé continu entre les limites du spectre visible, du violet au rouge.

En première approximation, la relation entre l'indice de réfraction et la longueur d'onde est donnée par la **loi de Cauchy** :

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{C}{\lambda^2} \quad (4)$$

Je propose en [Annexe](#) une démonstration élémentaire de cette loi de Cauchy.

Voyons alors comment varie l'angle d'émergence α lorsque la longueur d'onde, donc l'indice de réfraction, varient, pour une incidence fixée et un ordre de réflexion N donné :

- Pour $N = 1$ (arc d'ordre 1) : pour i fixée, la différentiation de (1 bis) donne

$$d\alpha = 4dr$$

comme l'incidence est fixée, la différentiation de la loi de Snell-Descartes permet d'exprimer la variation de l'angle de réfraction :

$$\sin i = n \sin r = \text{cste} \rightarrow dn \sin r + n \cos r dr = 0$$

soit :

$$dr = -\tan r \, dn/n \quad (5)$$

L'angle de réfraction est considéré à sa valeur rendant la déviation minimale. Il est donc donné

par (3) avec $N = 1$:

$$\sin^2 i_m = \frac{4-n^2}{3} = n^2 \sin^2 r_m \rightarrow \tan r_m = \frac{\sin r_m}{\sqrt{1-\sin^2 r_m}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}}$$

la variation de α s'écrit donc :

$$d\alpha = -2 \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} \frac{dn}{n}$$

de la loi de Cauchy (4) on tire :

$$dn = -\frac{2C}{\lambda^3} d\lambda$$

il s'ensuit que la variation de l'angle d'émergence est positive :

$$d\alpha = \frac{4C}{n\lambda^3} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} d\lambda > 0 \quad (6)$$

Conclusion : pour l'arc-en-ciel d'ordre $N = 1$, l'angle d'émergence augmente lorsque la longueur d'onde augmente. L'arc le plus extérieur correspond alors à la plus grande longueur d'onde, c'est-à-dire le rouge, et l'arc le plus intérieur correspond à la plus petite longueur d'onde (le violet).

• Arcs-en-ciel d'ordre supérieur ($N \geq 2$) : pour l'incidence i fixée, la différentiation de (2) donne, compte tenu de (5)

$$d\alpha = -2(N+1)dr = 2(N+1)\tan r \frac{dn}{n}$$

nous plaçant, là encore, à l'angle d'incidence optimal i_m donné par (3), on obtient :

$$\tan r_m = \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{(N+1)^2 - n^2}{n^2 - 1}}$$

et avec la loi de Cauchy, finalement :

$$d\alpha = -\frac{4C}{n\lambda^3} \sqrt{\frac{(N+1)^2 - n^2}{n^2 - 1}} d\lambda < 0 \quad (7)$$

Cette fois, l'angle d'émergence diminue quand la longueur d'onde augmente : l'arc rouge se situera à l'intérieur et l'arc violet à l'extérieur. Pour un arc d'ordre $N = 2$ la relation (7) devient :

$$d\alpha = -\frac{4C}{n\lambda^3} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} d\lambda \quad (8)$$

L'arc en ciel du second ordre est inversé par rapport à l'arc-en-ciel du premier ordre.

Lorsqu'il pleut, chaque goutte tombe avec une vitesse de l'ordre de quelques mètres par seconde : une goutte de 4 mm de diamètre tombe avec une vitesse d'environ 8 m/s. Sur son trajet, lorsqu'elle traverse le cône d'angle sous-tendu par l'arc-en-ciel du premier ordre (l'angle d'émergence), la goutte va d'abord transmettre le rouge, puis les couleurs intermédiaires du spectre visible, et enfin le violet avant de quitter le cône (pour un arc-en-ciel de second ordre, c'est l'ordre inverse). Pourtant l'arc-en-ciel paraît stable : cela provient du nombre important de

gouttes qui traversent le cône, à un instant donné, il y a toujours plusieurs gouttes dans chacune des zones de couleur.

Lorsque la pluie a cessé et que subsiste ou se crée un arc-en-ciel, la vitesse de chute est plus lente (les gouttes étant plus petites) et donc l'arc-en-ciel persiste plus longtemps.

Ce qui est dit pour les arcs-en-ciel associés à la pluie vaut encore pour l'arrosage, ou toute ambiance où l'eau est en suspension en présence d'une source lumineuse blanche.



Arc-en-ciel en Bourgogne (Taizé, près de Cluny), après un gros orage d'été, en fin d'après-midi ; il s'agit du même arc-en-ciel sur les deux photos : ses deux extrémités touchent l'horizon. L'arc de second ordre est assez bien visible et ses couleurs sont inversées (photos : F. Elie, juillet 2007)

2 - Le prisme et ses applications

La déviation et la dispersion de la lumière par un prisme résultent directement de la loi de réfraction et de la loi de Cauchy. Ces propriétés sont exploitées en spectrométrie optique, une technique pour analyser le spectre visible des corps (étoiles, sources diverses comme une flamme, etc.).

Considérons un prisme d'angle au sommet A (figure 5), d'indice de réfraction relatif à l'air n. Soit un rayon lumineux monochromatique (longueur d'onde fixée) arrivant sous l'angle d'incidence i sur la première face du prisme, au niveau du point P. Il va se réfracter avec un angle r donné par la loi de Snell-Descartes. Ce rayon réfracté rencontre le dioptré verre-air au point Q, et sort à l'extérieur (air) avec un angle i' donné par la loi de Snell-Descartes, connaissant l'angle r' sous lequel le rayon arrive en Q. On appelle déviation D l'angle que fait le rayon incident initial avec le rayon émergent depuis Q.

On a donc comme relations dans le prisme :

- lois de réfraction :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{et} \quad \sin i' = n \sin r'$$

- relations géométriques dans les triangles :

$$A = r + r' \quad \text{et} \quad D = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A$$

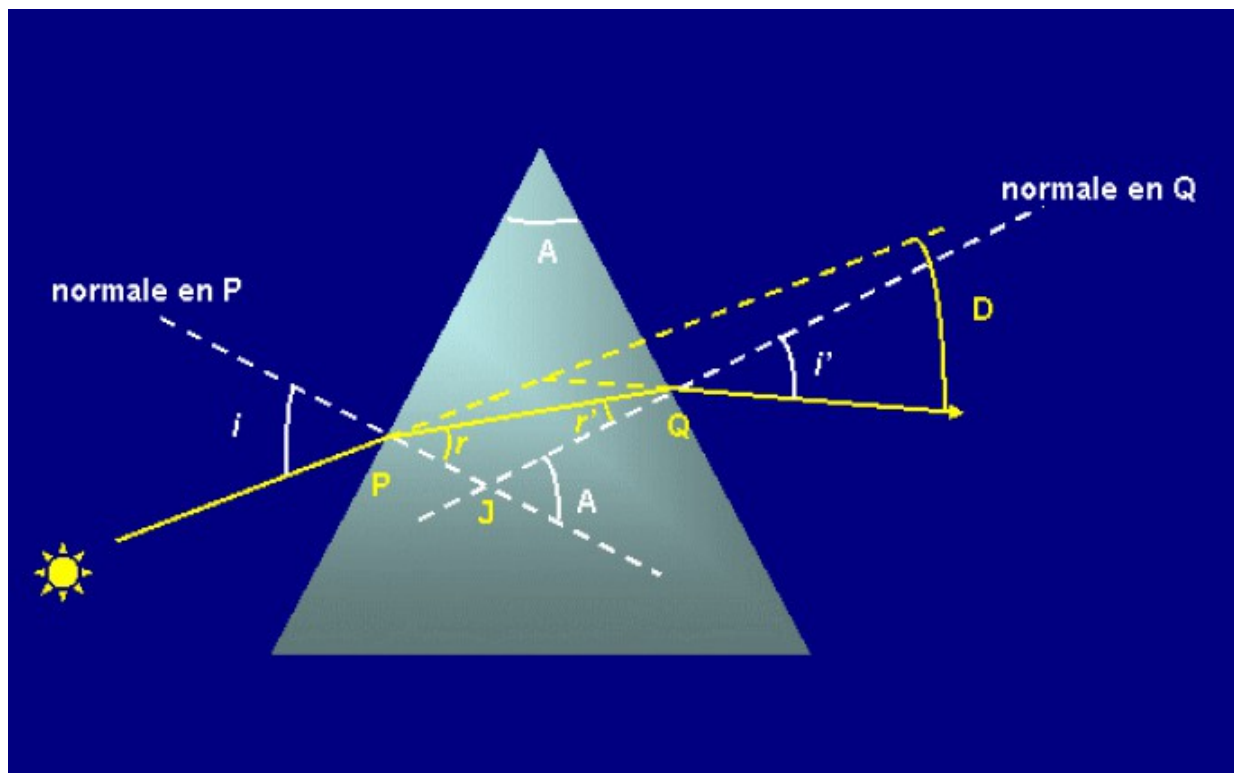


figure 5 – déviation de la lumière par un prisme

Remarque :

Un rayon lumineux incident n'émerge pas toujours à la face opposée du prisme, sous certaines conditions il peut être réfléchi : le prisme se comporte alors comme un miroir. Ces conditions s'appuient sur la notion d'angle de réfraction limite :

De la loi de Snell-Descartes, appliqué au dioptré air-matériau :

$$\sin i = n \sin r$$

avec $n > 1$, l'angle de réfraction n'existe que si : $|\sin r| = \left| \frac{\sin i}{n} \right| \leq 1$

donc pour une incidence rasante, $i = \pm \pi/2$, on a l'**angle de réfraction limite** :

$$|\sin r_L| = \frac{1}{n} \quad (9)$$

Il s'ensuit que si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle de réfraction limite, la réfraction n'est plus possible : le faisceau incident est réfléchi dans le milieu où l'indice de réfraction est le plus faible (l'air vis-à-vis de l'eau ou du verre) : le dioptré est un miroir parfait.

Exemples : dioptrés air-eau (pour l'eau : $n = 1,33$, donc $r_L = 49^\circ$) et dioptré air-verre (pour le verre standard : $n = 1,5$, donc $r_L = 42^\circ$). Dans le cas de l'eau par exemple, un observateur immergé ne pourra pas voir, par réfraction, un objet situé dans l'air au-dessus de la surface si son angle d'incidence est supérieur à 49° ; réciproquement pour un observateur situé dans l'air : il ne verra pas un poisson si son angle d'incidence est supérieur à 49° (figure 6).

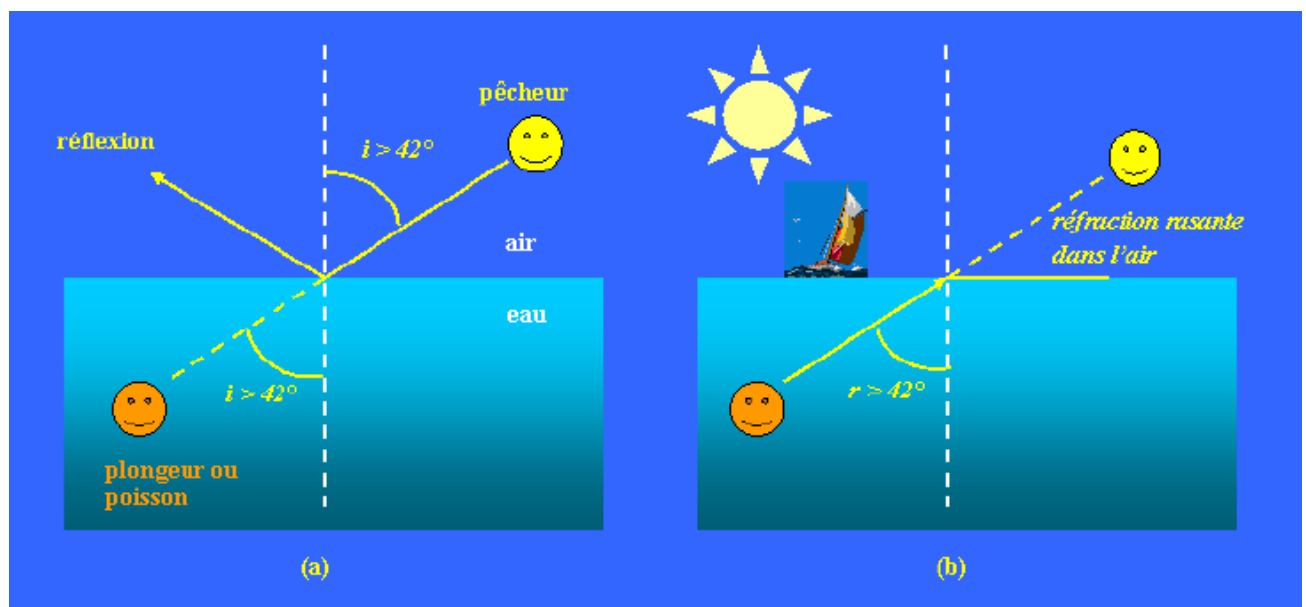


figure 6 – angle de réfraction limite pour le dioptre air-eau :

En (a) le pêcheur ne voit pas le plongeur ou le poisson, car réflexion totale

En (b) le plongeur ou le poisson ne voit pas le pêcheur, car réfraction rasante à l'interface air-eau

Application au prisme :

$$|A - r| < r_L$$

Pour que le rayon incident en P, puis réfracté entre P et Q dans le prisme, puisse émerger en Q, il faut que l'angle d'incidence avec lequel il arrive en Q, r' , soit inférieur à l'angle de réfraction limite calculé par (9). Or l'angle d'incidence en Q est $r' = A - r$. On doit donc avoir :

- si $A > r$, la condition précédente donne : $r > A - r_L$. Il n'y a donc jamais d'émergence, dans ce cas, si l'angle au sommet du prisme est supérieur à $2r_L$: $A > 2r_L \rightarrow$ réflexion du rayon PQ dans le prisme. Pour A inférieur à $2r_L$, il y a émergence si l'angle d'incidence est plus grand que l'angle d'incidence minimal tel que

$$\sin i_0 = n \sin (A - r_L).$$

- si $A < r$, la condition précédente donne : $r < A + r_L$. D'où la condition sur la valeur maximale de l'incidence :

$$\sin i < n \sin(A + r_L)$$

Ces remarques faites, intéressons-nous à la façon dont varie la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i .

Nous avons vu que la déviation est égale à :

$$D = i + i' - A \quad (10)$$

où i et i' sont reliées par les expressions successives :

- interface air-verre en P :

$$\sin r = (1/n) \sin i \quad (11a)$$

$$r' = A - r \quad (11b)$$

- interface verre-air en Q :

$$\sin i' = n \sin r \quad (11c)$$

La relation (10) permet alors d'exprimer D uniquement en fonction de i , à l'aide de cette relation un peu compliquée :

$$D(i) = i + \arcsin \left[n \sin \left(A - \arcsin \left(\frac{1}{n} \sin i \right) \right) \right] - A \quad (12)$$

dont les conditions d'existence ont été discutées plus haut. L'allure de la courbe (12) est donnée à la figure 7 pour un prisme d'angle au sommet $A = 60^\circ$ et un indice $n = 1,5$ (verre).

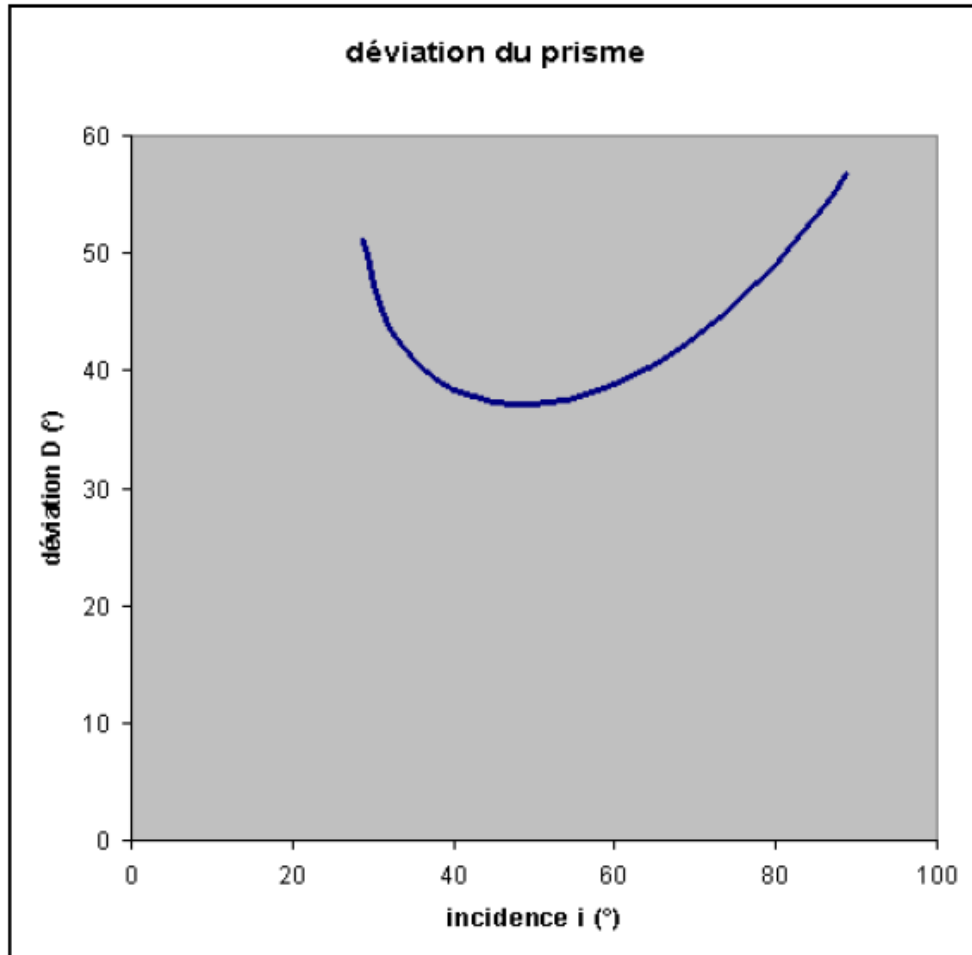


figure 7 – déviation d'un prisme en fonction de l'angle d'incidence
(calcul effectué pour $A = 60^\circ$ et $n = 1,5$)

La relation (12), et sa courbe, ainsi que l'expérience, montrent que la déviation atteint une valeur minimale D_m obtenue pour une incidence i_m , qu'il est aisé de calculer. Expérimentalement, ceci peut se constater ainsi : lorsqu'on braque sur le prisme un rayon lumineux de direction fixe et que l'on fait pivoter doucement le prisme pour faire varier l'angle d'incidence, le spot lumineux obtenu par le rayon émergent sur, par exemple, un écran immobile, se déplace jusqu'à une position maximale puis repart en arrière.

Ce comportement de la déviation sert de principe pour la mesure de l'indice de réfraction, à l'aide, bien sûr, de dispositif plus élaboré (goniomètre). En effet, nous allons tout de suite voir que l'indice de réfraction s'exprime uniquement à l'aide de l'angle A du prisme et de la déviation minimale :

Pour cela, différencions (10) en utilisant les différentielles des relations (11) :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$

et

$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr', \quad dr + dr' = 0$$

La dérivée de D est alors :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

elle est nulle pour : $\cos i \cos r' = \cos i' \cos r$

En élevant au carré et en utilisant les lois de réfraction, on obtient :

$$(1-n^2)(\sin^2 r - \sin^2 r') = 0 \rightarrow \sin^2 r' = \sin^2 r$$

dont la seule solution physiquement acceptable est $r = r'$. Il vient donc :

$$r = r' = r_m = \frac{A}{2}, \quad i = i' = i_m = \frac{A + D_m}{2} \quad (13a)$$

et l'indice de réfraction :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (13b)$$

A la déviation minimale, les angles d'émergence et d'incidence sont égaux et le tracé des rayons dans le prisme est symétrique : le trajet PQ fait avec les faces d'entrée et de sortie le même angle $A/2$. Quant à la déviation, elle vaut :

$$D_m = 2i_m - A$$

Incertitude sur la mesure de l'indice utilisant la méthode de déviation minimale :

Quelle incertitude relative a-t-on sur l'indice de réfraction si l'on mesure A et D_m avec une certaine incertitude ?

Admettons que A et D_m sont mesurées avec la même incertitude ε . La différentiation de (13b) donne alors l'incertitude relative sur n :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\varepsilon}{2} \cot \frac{A}{2}$$

Les goniomètres permettent facilement des précisions de l'ordre de la minute d'arc ($1' = 2,9 \cdot 10^{-4}$ radian). Avec un prisme d'angle $A = 60^\circ$, on obtient donc une incertitude relative sur l'indice égale à $2,5 \cdot 10^{-4}$: la méthode permet donc une mesure très précise de n.

3 - Quelques effets optiques dans l'atmosphère dus à la réfraction de la lumière

Les conséquences des lois de la réfraction dans les cristaux de glace ou les brouillards sur les effets d'optique que l'on peut voir dans l'atmosphère sont nombreuses. Parmi elles, je citerai ici le phénomène des « faux soleils » (ou parhélies), les arcs-en-ciel blancs, les halos à 22° , et les piliers solaires.

Le halo de 22° autour du soleil ou de la lune :

Dans certaines conditions, lorsque l'on regarde le soleil ou la lune, on voit qu'ils sont entourés d'un cercle coloré centré sur eux, dont le rayon angulaire est de 22° environ.

Ce cercle présente une épaisseur à l'intérieur de laquelle les couleurs sont un dégradé allant du rouge à l'intérieur au bleu à l'extérieur (dans l'ordre inverse d'un arc-en-ciel du premier ordre). A l'intérieur du halo, le ciel paraît plus sombre qu'à l'extérieur (figure 8).

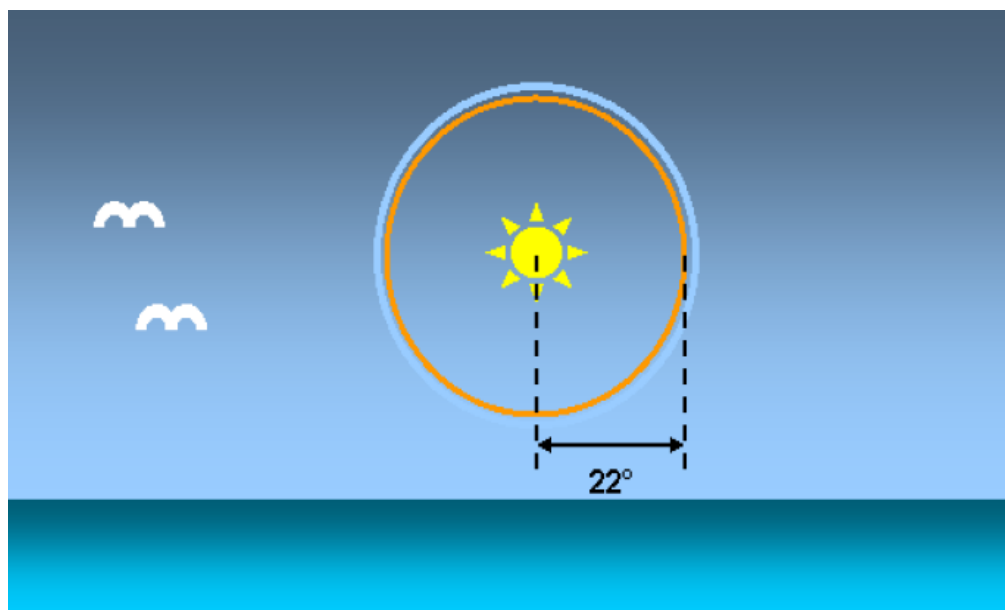


figure 8 – halo à 22° autour du soleil

Explication :

Les cristaux de glace en suspension dans l'atmosphère ont pour effet de réfracter la lumière incidente du soleil, à la façon d'un prisme. Ces cristaux forment des cubes (six facettes) orientés de manière aléatoire par rapport à la lumière incidente. On peut montrer que l'angle de déviation minimale, pour ces cristaux, correspond à un angle d'émergence maximal de l'ordre de 22° (souvenons-nous que pour un arc-en-ciel du premier ordre cet angle est de 42°). Les cristaux descendent vers le sol et sont suffisamment nombreux lorsqu'ils passent devant le soleil pour que la contribution de toutes les réfractions issues de chacun d'eux donne un halo circulaire.

Etant donnée la forme cubique de chaque cristal, les réflexions de la lumière y sont multiples avant que sorte le rayon émergent : par conséquent, comme dans un arc-en-ciel d'ordre deux, l'ordre des couleurs est inversé par rapport à celui d'un arc-en-ciel du premier ordre.

Faux soleils ou parhélies :

A côté du soleil, des images brillantes peuvent apparaître au-delà du halo de 22°, pratiquement à la même hauteur : ce sont les « faux soleils » ou parhélies. La distance angulaire entre les faux soleils et le soleil est d'autant plus grande que le soleil est haut au-dessus de l'horizon. A la hauteur de 60° ils disparaissent (figure 9).

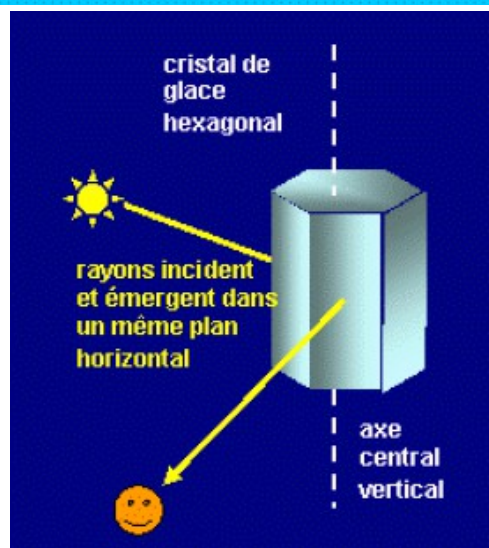
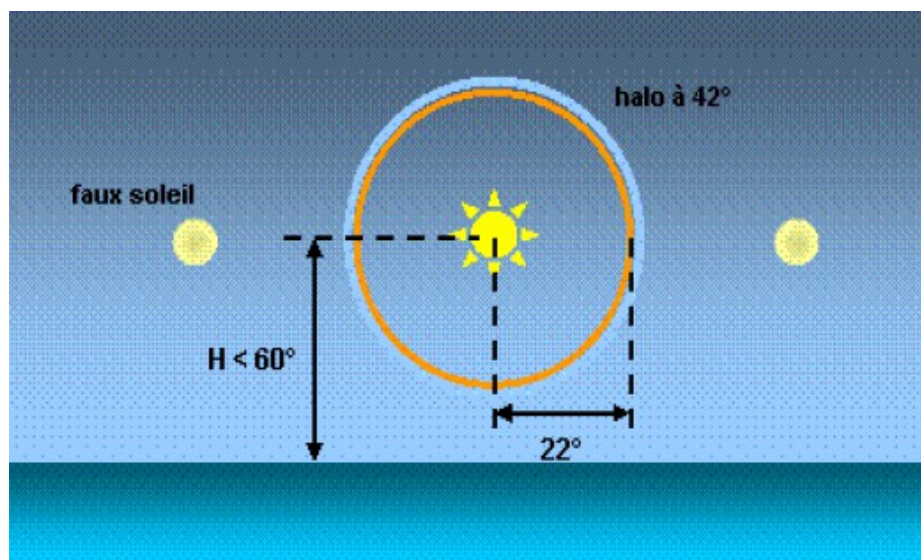


figure 9 – représentation des faux soleils ou parhélies

Explication :

Lorsque les cristaux de glace, en suspension dans l'atmosphère et en train de tomber, conservent leur axe central parallèle à la verticale et perpendiculaire aux rayons incidents du soleil, ils réfractent les rayons du soleil suivant un angle minimal de 22° mais suivant un même plan joignant le soleil, les cristaux et l'observateur (c'est pourquoi l'ensemble des réfractions des cristaux ne forme pas ici un cercle centré sur le soleil).

Lorsque le soleil monte au-dessus de l'horizon, cet alignement se défait et l'axe du cristal n'est plus perpendiculaire aux rayons du soleil : l'angle d'émergence augmente alors, et pour une hauteur de 60° , les faux soleils disparaissent.

Arcs-en-ciel blancs (dans le brouillard) :

Les arcs-en-ciel que l'on perçoit dans le brouillard sont différents de ceux que l'on voit, après la pluie, en atmosphère dégagée : ce sont des bandes blanches éventuellement bordées de rouge à l'extérieur et de bleu à l'intérieur.

Explication :

Pour les arcs-en-ciel habituels, les objets sur lesquels la lumière arrive sont d'une taille relativement élevée vis-à-vis de la longueur d'onde puisqu'elle est de l'ordre du millimètre. On sait que, dans ces conditions, la lumière se comporte comme un ensemble de rayons obéissant aux lois de l'optique géométrique : la réfraction de la lumière par les gouttes de pluie en suspension suit la loi de Snell-Descartes.

$$2\theta(rad)=1,22\frac{\lambda}{D}$$

Mais, dans un brouillard, les particules d'eau sont beaucoup plus petites, elles sont d'une ou deux fois l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière incidente : dans ce cas, les phénomènes de diffraction, propres à la nature ondulatoire de la lumière, apparaissent. La théorie et l'expérience montrent que l'angle sous lequel s'effectue la diffusion de la lumière est proportionnel à la longueur d'onde λ et inversement proportionnel à la taille D de la particule (voir [article de ce site sur la diffraction](#)) :

Par exemple, une particule d'eau de 1 micron de diamètre diffuse la radiation de longueur d'onde 0,5 micron (jaune-vert) d'un angle de 35° environ : c'est le diamètre angulaire du halo formé par cette diffusion. Comme ce sont les plus grandes longueurs d'onde qui sont le plus diffusées, c'est le rouge qui aura l'angle de diffusion le plus important (donc halo le plus externe) et c'est le bleu qui aura l'angle de diffusion le plus petit (donc le plus interne).

Piliers lumineux :

Lorsque le soleil est bas sur l'horizon (à son lever ou à son coucher), il arrive d'observer un pilier lumineux au-dessus de lui. Ce phénomène est observé notamment lorsque l'atmosphère au-dessus du sol, à haute altitude, est glacial.

Explication :

Les cristaux de glace dans l'atmosphère, de forme hexagonale, peuvent s'assembler en formant des structures aplaties dans le sens horizontal, c'est-à-dire dont la largeur est beaucoup plus grande que la hauteur : on appelle cela des « assiettes ».

Les « assiettes » se forment lorsqu'il y a du vent en altitude, par temps froid : l'écoulement d'air est responsable de l'orientation des structures de glace, dans le sens qui présente le plus faible surface face au vent.

Lorsque la lumière provenant du soleil, bas sur l'horizon, vient rencontrer les assiettes par la face inférieure, elle va être réfléchiée vers le sol, avec un angle de réflexion pratiquement égal à l'angle d'incidence. Si l'observateur se trouve sur le trajet des rayons réfléchis par chacune des assiettes réparties au-dessus de la direction du soleil, il va percevoir l'ensemble des rayons réfléchis sous forme d'une colonne dressée au-dessus du soleil (figure 10).

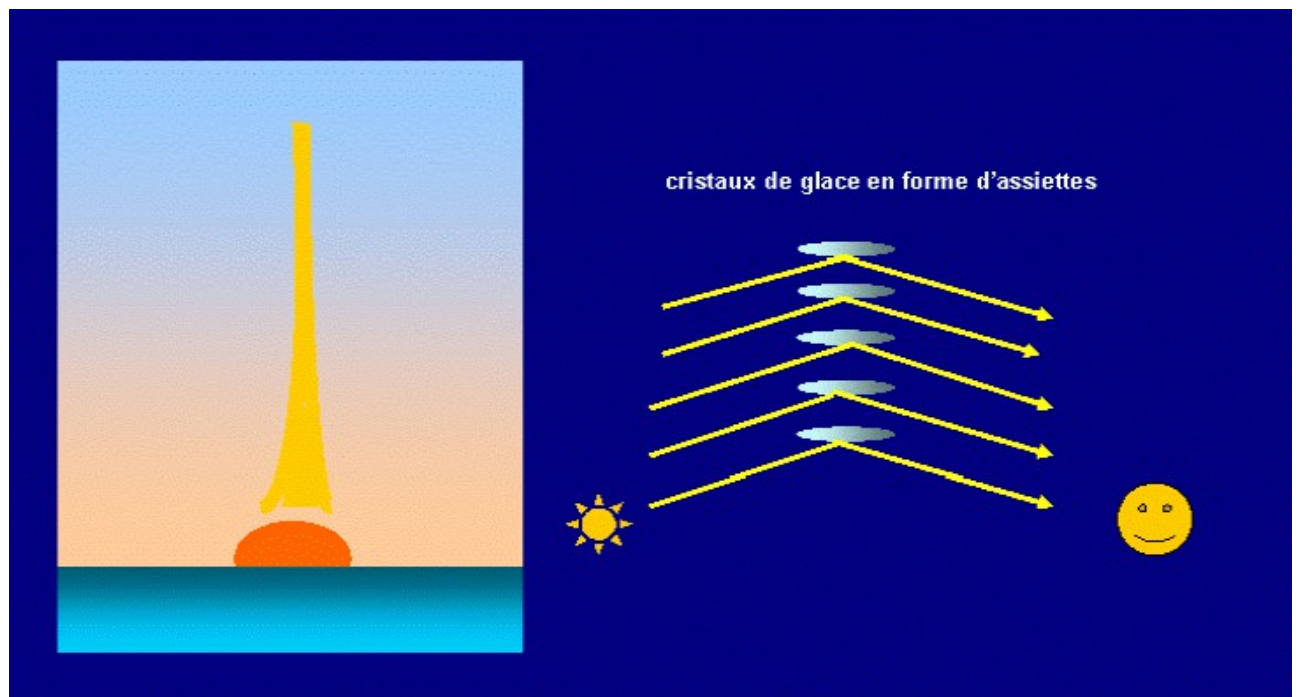


figure 10 – piliers solaires, principe de formation

4 - Manipulation expérimentale

L'expérience suivante, que j'ai réalisée « sur un coin de table » (conformément à l'esprit de ce site), n'a pas pour but de déterminer avec précision l'indice d'un prisme en verre ; il aurait fallu pour cela un goniomètre de haute précision. Il a pour buts :

- de constater visuellement la décomposition de la lumière blanche ;
- de constater visuellement le fait que la réfraction n'existe pas toujours mais commence à apparaître pour un certain angle d'incidence ;
- de constater visuellement l'existence d'un angle de déviation minimal : il est repéré lorsque l'image arrête de se décaler dans le même sens sur un écran et commence à repartir en arrière lorsqu'on modifie l'angle d'incidence ;
- d'évaluer l'ordre de grandeur de l'indice de réfraction à partir de l'angle de déviation minimal, pour deux radiations (le rouge et le violet par exemple) au moyen d'un dispositif sommaire.
- de constater que l'indice suit la loi de Cauchy pour les radiations utilisées (rouge et violet).

Dispositif sommaire employé :

La source lumineuse est obtenue par un projecteur de diapositives, émettant de la lumière blanche. Sur l'objectif j'ai disposé un diaphragme d'un ancien appareil photo de façon à obtenir une source quasi ponctuelle. Celle-ci est placée au foyer d'une lentille convergente (loupe) afin de constituer un collimateur sommaire : ainsi le prisme reçoit des faisceaux de lumière quasi parallèles.

Le prisme est monté sur un support que l'on peut tourner, en son centre, sur l'axe optique de la lentille et de la source. Dans un premier temps, le support est constitué de deux assiettes transparentes rondes identiques, renversées, encastrées l'une dans l'autre : celle du dessous est fixée à la table et on y a fixé un cercle gradué ayant même centre qu'elle. Celle du dessus peut tourner librement : la position angulaire du prisme, et donc l'angle d'incidence, est repérée au moyen du cercle gradué, lu par transparence (ce montage est une idée de mon fils !). Avec ce montage, on a pu constater qualitativement la décomposition de la lumière et l'ordre de grandeur de l'angle de déviation minimale.



Dispositif sommaire employé pour la décomposition de la lumière blanche d'un projecteur de diapositives, et spectre visible obtenu sur l'écran (photos : F. Élie)

Pour obtenir des valeurs plus précises des angles, j'ai utilisé un plateau en verre tournant dans un cadre circulaire gradué que l'on peut faire tourner degré par degré à l'aide d'une molette. Comme il est peu commode de mesurer directement l'angle de déviation, j'ai déduit celui-ci à partir de la position du spot lumineux mesuré sur un écran sur lequel du papier millimétré est

collé. L'écran est rigoureusement parallèle à l'axe optique de la source et de la lentille qui passe par le centre du prisme et du plateau. Ainsi, l'origine des distances $x = 0$ est à une distance connue du centre du plateau et du prisme, prise égale à $h = 33,5$ cm. Comme la ligne joignant l'origine au centre est rigoureusement perpendiculaire à l'axe optique, il est facile, connaissant la distance x (cm) du spot, de remonter à la déviation D par la relation :

$$\tan D (^{\circ}) = h/D$$



Dispositif « amélioré », la distance entre l'écran et le centre du prisme sur le disque tournant est $h = 33,5$ cm (photo : F. Élie)

Constat d'une incidence i_0 à partir de laquelle la réfraction devient possible, et de l'existence d'une déviation minimale :

Avec le premier dispositif on peut déjà constater que les rayons réfractés apparaissent seulement pour un certain angle d'incidence, de l'ordre de 30° . Plus finement, cet angle initial i_0 est différent pour les différentes radiations du spectre de la lumière blanche : comme c'est le rouge qui est d'abord le plus réfracté, le spot apparaît d'abord par le rouge, puis lorsque l'on tourne très légèrement le support sur lequel repose le prisme les autres couleurs apparaissent, la dernière étant le violet.

Au fur et à mesure que le prisme tourne dans le même sens, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à la source, le spot se décale vers la droite puis, pour un certain angle d'incidence, il s'arrête et repart en arrière lorsqu'on continue la rotation du prisme : on obtient ainsi l'angle de déviation minimal.

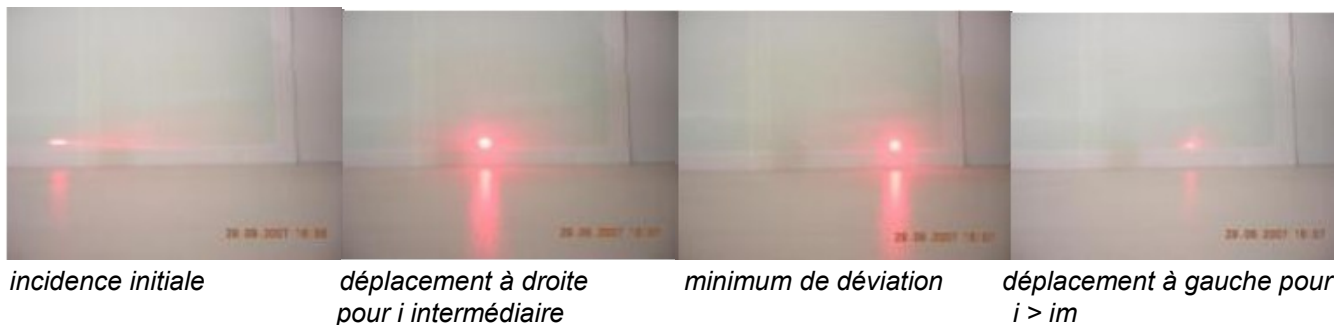


Déplacement du spot suite à la rotation du prisme, depuis la position correspondant à l'incidence initiale i_0 (photo de gauche), jusqu'à celle correspondant à la déviation minimale (photo de droite), photo du milieu position intermédiaire. L'appareil photo étant fixe et le champ étant le même, ces trois photos permettent de comparer les positions (photos : F. Élie)

Évolution de la déviation en fonction de l'incidence et détermination de la déviation minimale :

Cette évolution, prévue par l'équation (12), nécessite, pour être obtenue avec un peu plus de sérieux, de travailler avec des lumières monochromatiques. J'ai donc employé un laser dans le rouge, puis une source monochromatique bleue-violetée.

A titre d'illustration, les quatre photos ci-dessous reproduisent le déplacement du spot de la lumière rouge du laser réfractée sur l'écran et montrent de nouveau la position correspondant au minimum de déviation.



Déplacement du spot du rayon dévié d'un faisceau laser rouge (photos : F. Élie)

Valeurs et courbes obtenues :

incidence i°	déviation $D(\text{rouge})^\circ$	déviation $D(\text{violet})^\circ$
30	55,5	47,7
35	45,4	41,0
40	40,3	37,0
45	38,9	35,8
47,5	38,6	35,5
50	38,2	35,5
52,5	38,2	35,8
55	38,6	36,1
60	39,6	37,1
65	41,0	38,6
67,5	42,2	39,9
70	43,7	41,5
75	46,5	44,6

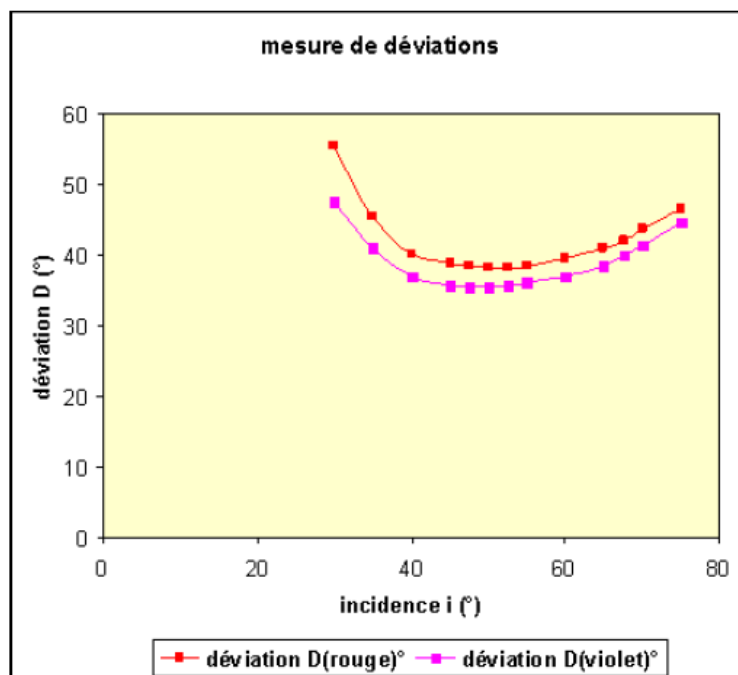


figure 11 – mesure de la déviation pour les radiations rouge et violacée

On constate, sur la figure 11, que pour une même incidence, le rouge est plus dévié que le violet, comme il se doit. Les courbes permettent d'estimer les minimums de déviation pour ces deux couleurs : $D_m(\text{rouge}) = 35,5^\circ$ et $D_m(\text{violet}) = 38,2^\circ$. L'angle au sommet du prisme étant connu, $A = 60^\circ$, la relation (13b) permet de calculer l'indice de réfraction du prisme pour les deux longueurs d'onde : $\lambda(\text{rouge}) = 0,73 \mu\text{m}$ et $\lambda(\text{violet}) = 0,40 \mu\text{m}$.

On trouve :

$$n(\text{rouge}) = 1,48 \text{ et } n(\text{violet}) = 1,51$$

valeurs sensiblement de l'ordre de celles du verre standard (1,5 en moyenne).

L'application de la loi de Cauchy permet de déduire les constantes n_0 et C du matériau à partir des valeurs mesurées. Pour n_0 , par exemple, on trouve :

$$n_0 = \frac{n_{\text{rouge}} \lambda_{\text{rouge}}^2 - n_{\text{violet}} \lambda_{\text{violet}}^2}{\lambda_{\text{rouge}}^2 - \lambda_{\text{violet}}^2} = 1,47$$

NB: je tiens à remercier mon fils Vincent (alors âgé de 12 ans) qui m'a aidé dans cette manip et imaginé le montage.

Annexe : Dispersion de la lumière dans les milieux diélectriques, loi de Cauchy

Lorsqu'une onde électromagnétique rencontre un milieu matériel, elle interagit avec lui. Plus exactement, elle interagit avec les électrons des atomes constituant le matériau, et plus généralement des charges électriques :

- en induisant des champs d'excitation électrique et magnétique qui sont la réponse du milieu, après un certain retard, au champ électromagnétique incident ;
- en créant une force de Lorentz suite au déplacement des charges dans le champ magnétique, et une force électrique due à la présence du champ électrique, les deux champs formant le champ électromagnétique ;
- par l'action subie par un électron de la part de son milieu ; cette action est de deux types : force de rappel élastique et force de relaxation ou d'amortissement « visqueux » (théorie de Drude-Lorentz).

L'ensemble de ces forces, créant des déplacements des charges, va donc créer des moments dipolaires, et donc faire apparaître une susceptibilité électrique. Il s'ensuit que l'indice de réfraction du milieu, par lequel l'excitation électrique est reliée au champ électrique incident, va dépendre de la fréquence du champ électromagnétique incident, des propriétés d'amortissement (le temps caractéristique de relaxation), et de la fréquence propre de la force de rappel.

En considérant le cas des grandes longueurs d'onde, donc des fréquences de l'onde incidente plus faibles que la fréquence propre de rappel, on trouve une dépendance en fréquence de l'indice de réfraction exprimée sous la forme de la loi de Cauchy.

C'est ce que je vais développer ci-après.

A1 - Équations du champ électromagnétique en présence de charges du milieu matériel

Un milieu matériel homogène, isotrope et linéaire est excité par une onde électromagnétique plane de pulsation $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence, et de longueur d'onde dans le vide $\lambda = c/f$, c étant la célérité de la lumière dans le vide :

- champ électrique : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp j\omega t$ (les lettres en gras dans le texte représentent des grandeurs vectorielles)
- champ magnétique : $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp j\omega t$

On suppose que les électrons (charge $-e$, masse m) sont liés élastiquement aux atomes constituant le milieu : selon cette hypothèse, lorsqu'ils sont écartés légèrement de leurs positions d'équilibre ils tendent à y retourner par une force de rappel.

Les électrons sont soumis à la force électrique $\mathbf{F}_E = -e \mathbf{E}_0$, mais aussi, du fait de leur déplacement avec une vitesse $\mathbf{v}$, à la force de Laplace $\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v} \mathbf{B}_0$.

Or, l'onde étant plane, on a : $\mathbf{E}_0 = c \mathbf{B}_0$, il s'ensuit que, puisque $v \ll c$, la force de Laplace est

négligeable devant la force électrique ($F_L/F_E = v/c \ll 1$) : dans l'étude de l'équation du mouvement, on ne considérera alors que celle-ci.

L'établissement de l'équation du mouvement, par application du principe fondamental de la dynamique, doit en toute rigueur être fait dans un référentiel galiléen, en l'occurrence le référentiel barycentrique de l'atome. Mais comme la masse de l'électron est très petite devant celle du noyau atomique, on peut admettre que l'origine du référentiel barycentrique se confond avec le noyau. Dans le référentiel barycentrique la masse à prendre en compte est la masse réduite $mM/(m + M)$, où M est la masse du noyau, et comme $m \ll M$, la masse réduite est pratiquement égale à la masse m de l'électron.

Les électrons sont soumis également à deux autres forces :

- la force de rappel responsable de leur liaison élastique aux atomes : $-m\Omega_k^2 \mathbf{u}_k$, où Ω_k représente la pulsation propre du « ressort » représentant cette liaison, et où $\mathbf{u}_k$ est le vecteur déplacement de l'électron depuis sa position d'équilibre ; l'indice k se ramène à chaque électron ;
- la force de relaxation (ou freinage) proportionnelle à la vitesse $\mathbf{v}_k$ de l'électron, qui introduit le paramètre temps de relaxation τ_k :

$$-\frac{m}{\tau_k} \mathbf{v}_k = -\frac{m}{\tau_k} \frac{d\mathbf{u}_k}{dt}$$

Le temps de relaxation est appelée aussi durée de collision dans la théorie de la conductivité ; sa signification est la suivante : après l'excitation par l'onde électromagnétique incidente, l'ensemble des charges retrouve une distribution homogène des vitesses au bout d'une durée de l'ordre du temps de relaxation.

Le bilan de ces trois forces, électrique, de rappel et de relaxation, conduit à l'équation du mouvement de chaque électron $n^\circ k$:

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}_k}{dt^2} = -e \mathbf{E}_0 \exp j\omega t - \frac{m}{\tau_k} \frac{d\mathbf{u}_k}{dt} - m \Omega_k^2 \mathbf{u}_k$$

Cherchant, au-delà du régime transitoire, des solutions de $\mathbf{u}_k$ de la forme $\sim \exp j\omega t$ (régime forcé par l'onde excitatrice), l'équation précédente conduit immédiatement à :

$$\mathbf{u}_k(t) = -\frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_0 \exp j\omega t}{\Omega_k^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_k}} \quad (\text{A1})$$

le déplacement de chaque électron autour de sa position d'équilibre est responsable de l'apparition d'un moment électrique dipolaire :

$$\mathbf{P}_k = -e \mathbf{u}_k = \frac{e^2 \mathbf{E}_0 \exp j\omega t}{m \left(\Omega_k^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_k} \right)}$$

La polarisation du milieu est un effet global de l'ensemble des charges : on doit donc considérer la polarisation totale qui résulte des polarisations élémentaires pour chaque charge, ainsi

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N N_k \mathbf{P}_k$$

où N_k est le nombre d'électrons concernés par les mêmes propriétés de rappel et de relaxation (type k).

Le milieu étant supposé linéaire, le champ excitation électrique induit par l'onde électromagnétique excitatrice est proportionnel à celle-ci (ce qui suppose que l'on néglige le retard avec lequel s'établit le champ de polarisation) ; cette relation linéaire introduit la permittivité relative ϵ_r et la susceptibilité χ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

Or par ailleurs : $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$ puisque $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}$.

Compte tenu de la relation donnant $\mathbf{P}$ ci-dessus, on identifie :

• pour la susceptibilité :

$$\chi(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_k}} = \chi'(\omega) + j \chi''(\omega)$$

dont les parties réelle et imaginaire sont :

$$\chi'(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k (\Omega_k^2 - \omega^2)}{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)^2} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = - \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)}{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)^2} \quad (\text{A2})$$

• pour la permittivité relative :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + j \epsilon_r''(\omega)$$

dont les parties réelle et imaginaire sont :

$$\epsilon_r'(\omega) = 1 + \chi'(\omega) \quad \text{et} \quad \epsilon_r''(\omega) = \chi''(\omega) \quad (\text{A3})$$

A2 - Largeur de bande

Le module des déplacements électroniques, ou encore de leur polarisation, s'écrit, d'après (A1) :

$$u_k = \frac{e^2 E_0}{m \sqrt{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque la fréquence de l'onde électromagnétique coïncide avec celle des forces de rappel : il y a résonance, l'onde électromagnétique est absorbée par l'électron qui change de niveau d'énergie. Cette valeur maximale vaut :

$$u_{kmax} = \frac{e^2 \tau_k E_0}{m \Omega_k}$$

Comme le montre la courbe ci-après (figure A1), le module croît et décroît très vite de part et d'autre de ce maximum. La courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par ce

maximum (on qualifie alors cette courbe de « lorentzienne »). Ceci permet de définir une largeur de bande d'absorption. Elle est donnée par les valeurs des pulsations pour lesquelles le module est égal à $u_{k \max} / \sqrt{2}$, et qui sont donc telles que :

$$\frac{e^2 \tau_k E_0}{m \Omega_k \sqrt{2}} = \frac{e^2 E_0}{m \sqrt{\left(\Omega_k^2 - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k} \right)^2}}$$

ce qui donne :

$$\left(\Omega_k^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_k^2} = 2 \frac{\Omega_k^2}{\tau_k^2}$$

Si ω est solution, la quantité $\Delta\omega/2 = |\Omega_k - \omega|$ est la demi-largeur de bande.

En admettant des forces de relaxation très faibles et en se plaçant au voisinage de la résonance, la largeur de bande est petite devant la fréquence de résonance, $\Delta\omega \ll \Omega_k$, ce qui permet d'écrire de manière approchée :

$$\begin{aligned} \left(\Omega_k^2 - \omega^2 \right)^2 &= 2 \frac{\Omega_k^2}{\tau_k^2} - \frac{\omega^2}{\tau_k^2} \approx 2 \frac{\Omega_k^2}{\tau_k^2} - \frac{\Omega_k^2}{\tau_k^2} = \frac{\Omega_k^2}{\tau_k^2} \\ \left(\Omega_k^2 - \omega^2 \right)^2 &= (\Omega_k - \omega)(\Omega_k + \omega) \approx \frac{\Delta\omega_k}{2} \times 2\Omega_k = \frac{\Omega_k}{\tau_k} \end{aligned}$$

d'où la largeur de bande d'absorption :

$$\Delta\omega_k = \frac{1}{\tau_k} \quad (\text{A4})$$

elle est de l'ordre de grandeur de la fréquence de relaxation du milieu.

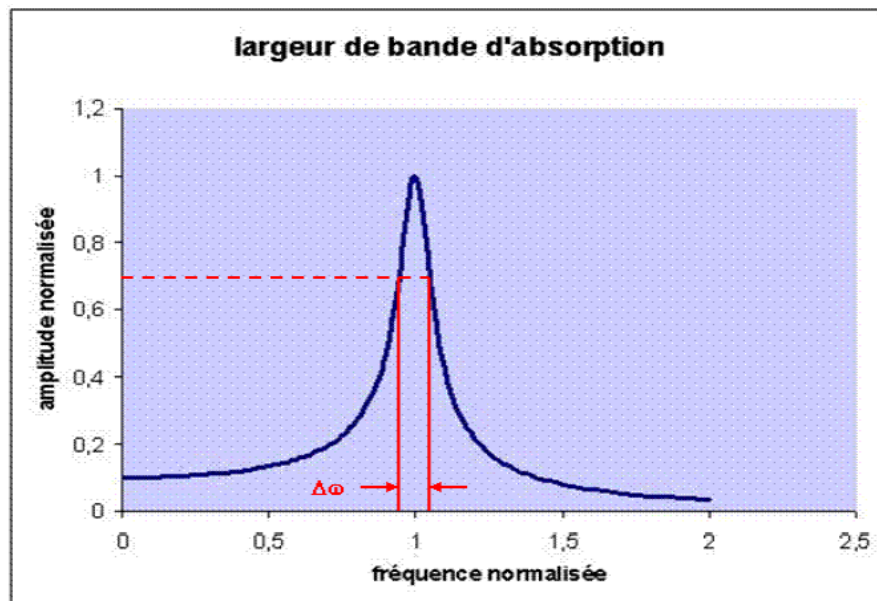


figure A1 : allure de l'amplitude de déplacement des charges ou de la polarisation au voisinage de la résonance élastique (absorption). Les fréquences sont normalisées par la fréquence de résonance et les amplitudes par l'amplitude max

A3 - Conductivité électrique du milieu

Les premières équations de Maxwell du champ électromagnétique dans le milieu s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \quad (\text{A5a})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A5b})$$

en présence de charges électriques internes au milieu de densité volumique ρ et de densité de courant interne au milieu $\mathbf{J}$, la polarisation électrique $\mathbf{P}$ et l'aimantation $\mathbf{M}$ sont déterminées par :

$$\text{div } \mathbf{P} + \rho = 0 \quad (\text{A6a})$$

$$\text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{A6b})$$

Or les secondes équations de Maxwell traitent du lien entre le champ électromagnétique et ces densités de charges et de courant :

$$\text{div } \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{équation de Maxwell-Gauss}) \quad (\text{A7a})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{équation de Maxwell-Ampère}) \quad (\text{A7b})$$

Il s'ensuit que les champs d'excitation électrique $\mathbf{D}$ et magnétique $\mathbf{H}$, réponses du milieu à l'excitation par le champ électromagnétique incident $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, qui sont données par

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (\text{A8})$$

vérifient les équations :

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A9})$$

Lorsque le milieu est homogène et linéaire, et pour des variations relativement lentes du champ électromagnétique (approximation quasi-stationnaire), les champs d'excitation sont proportionnels aux champs excitateurs :

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B}$$

ce qui, compte tenu de (A8), permet d'introduire la susceptibilité électrique χ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \\ \text{avec: } \epsilon_r = 1 + \chi, \quad \mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \end{array} \right| \quad (\text{A10})$$

En revanche, pour des champs variant très rapidement, la permittivité et la susceptibilité dépendent de la fréquence de l'onde électromagnétique : il y a donc dispersion et absorption par le milieu, comme on l'a vu plus haut. La conductivité du milieu qui, comme on va le voir tout de suite, est reliée à la susceptibilité, dépend aussi de la fréquence.

En l'absence d'aimantation, d'après (A6), la densité volumique de courant intérieur se réduit à : $\mathbf{J} = \partial \mathbf{P} / \partial t$.

Avec (A10) on a alors :

$$\mathbf{J} = \chi \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A11})$$

Or, par ailleurs, d'après la loi d'Ohm locale, le courant électrique est proportionnel au champ électrique :

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{A12})$$

où γ est la conductivité électrique du milieu.

Dans les expressions (A11) et (A12), s'agit-il du même courant ? Pas toujours : cela dépend du caractère conducteur ou bien isolant du milieu. De sorte que, de manière générale, on considère que pour tout matériau, le courant électrique se décompose en deux types de courants :

- L'un, noté $\mathbf{J}'$, qui suit la loi d'Ohm (A12), et qui représente le déplacement des charges par conduction (courant de conduction) ;
- L'autre, noté $\mathbf{J}''$, qui suit la loi (A11), et qui représente le « courant de déplacement » (Maxwell). En effet, dans l'équation de Maxwell-Ampère (A7b), le terme $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ est homogène à un courant volumique $\mathbf{J}$, avec qui il constitue une quantité à flux conservatif (divergence nulle) :

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \text{div} \left(\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \right) = 0 = \text{div} \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Comme pour un courant de conduction, le terme $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, proportionnel au « courant de déplacement » $\mathbf{J}''$, constitue une source du champ magnétique. Mais ce n'est pas un déplacement de charges, puisqu'il apparaît également dans le vide où siège le champ électromagnétique. Comme on va le voir le courant de déplacement est prépondérant dans les milieux parfaitement isolants, tandis que le courant de conduction l'est dans les milieux parfaitement conducteurs.

Donc, pour tout type de milieu, le courant est :

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} + \chi \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

(A7b) donne par ailleurs :

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \gamma \mathbf{E} + (1 + \chi) \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}''$$

par conséquent :

- courant de conduction :

$$\mathbf{J}' = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{A13})$$

- courant de déplacement :

$$\mathbf{J}'' = (1 + \chi) \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A14})$$

Selon le rapport, en ordre de grandeur, des amplitudes des deux termes (A13 et A14), le milieu peut être plus ou moins conducteur et isolant. Pour une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω , (A14) devient : $\mathbf{J}'' = \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}$, d'où les conditions :

- si $\mathbf{J}' / \mathbf{J}'' \gg 1$, donc si $\gamma / \omega \varepsilon_r \gg 1$, le milieu est conducteur et se caractérise par sa conductivité γ

qui est réelle positive et indépendante de la fréquence. Cette situation se produit pour des fréquences très faibles (régime quasi-stationnaire des champs électromagnétiques). Dans ce cas l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à :

$$\text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \gamma \mathbf{E}$$

• si $J'/J'' \ll 1$, donc si $\gamma/\omega\epsilon_r \ll 1$, le milieu est isolant et se caractérise par sa permittivité électrique qui dépend de la fréquence. Cette situation se produit aux fréquences élevées. Dans ce cas l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \omega \mathbf{E}$$

Entre ces deux comportements extrêmes, la plupart des matériaux sont le siège à la fois de courants de conduction et de courants de déplacement et c'est le courant total $\mathbf{J}' + \mathbf{J}''$ qui doit être pris en compte, et on a :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}'' = (\gamma + j \omega \epsilon_0 \chi(\omega)) \mathbf{E} = \gamma^* \mathbf{E} \quad (\text{A15})$$

où $\gamma^* = \gamma + j \epsilon_0 \omega \chi(\omega)$ est la conductivité complexe du milieu. Elle se décompose en partie réelle et partie imaginaire :

$$\gamma^* = \gamma' + j \gamma'' = (\gamma - \epsilon_0 \omega \chi'') + j \epsilon_0 \omega \chi'$$

avec donc :

$$\gamma' = \gamma - \epsilon_0 \omega \chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma'' = \epsilon_0 \omega \chi'(\omega)$$

où χ' et χ'' dépendent de la fréquence et sont données par (A2).

Pour un conducteur, aux très basses fréquences ($\omega \sim 0$) on voit que la conductivité complexe se réduit à la conductivité du matériau : $\gamma^*(0) = \gamma$, comme il se doit.

Pour un isolant (γ très faible) le milieu se comporte comme un conducteur ou comme un isolant selon la valeur de la fréquence : aux très basses fréquences seule prédomine la partie réelle de la conductivité complexe $\gamma' = -\epsilon_0 \omega \chi''(\omega)$, le comportement est alors de type conduction, tandis qu'aux très hautes fréquences, c'est la partie imaginaire $\gamma'' = \epsilon_0 \omega \chi'(\omega)$ qui prédomine, avec une décroissance en $\sim 1/\omega$, le comportement étant alors de type isolant (figure A2).

Ainsi, un matériau qualifié d'isolant, au sens où sa conductivité ohmique γ est très faible ou nulle, peut se comporter comme un conducteur aux basses fréquences et complètement isolant aux hautes fréquences.

Les courbes de la figure A2 sont calculées pour les électrons libres du milieu diélectrique : par conséquent il n'y a pas de fréquence propre des forces de rappel des liaisons atomiques (on a pris $\Omega_k = 0$ dans les relations A2 donnant la susceptibilité).

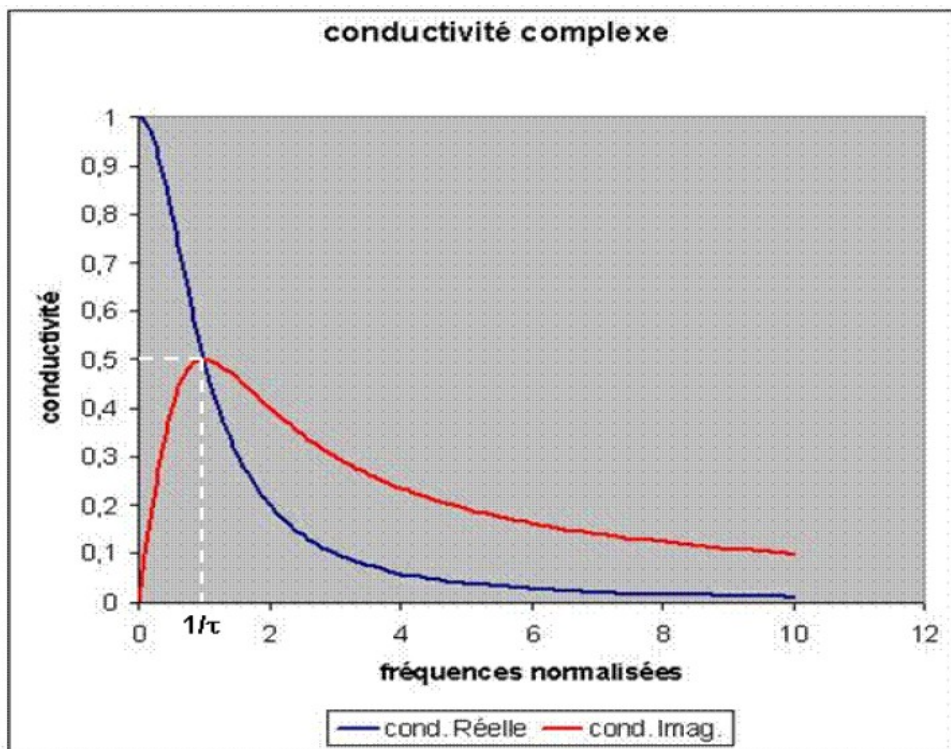


figure A2 : conductivité complexe d'un milieu diélectrique en fonction de la fréquence de l'onde électromagnétique incidente

A4 - Loi de dispersion de Cauchy pour l'indice optique d'un milieu transparent

Introduisons d'abord la notion d'indice du milieu et déterminons dans quelles conditions il se réduit à l'indice de réfraction optique. Nous ferons ensuite le lien existant entre celui-ci et la permittivité électrique du milieu déjà calculé en (A3).

Le champ électromagnétique incident est supposé sinusoïdal dans l'espace et le temps :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp j \omega t$$

Les équations de Maxwell deviennent alors :

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j \omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j \omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$$

En l'absence d'aimantation, on a :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

pour un milieu homogène et linéaire. Les équations ci-dessus donnent alors :

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) - j \frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(\epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0$$

On arrive alors aux équations ondulatoires du champ électromagnétique :

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

On cherche des solutions du type onde plane progressive : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\max} \exp -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Les équations précédentes aboutissent alors à :

$$\left(k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r\right) \mathbf{E}_{\max} = 0$$

On a ainsi la relation de dispersion du milieu à la fréquence ω :

$$k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\omega) = 0 \quad (\text{A16})$$

le nombre d'onde k et la permittivité sont des grandeurs complexes ; pour k on a : $k = k' + jk''$. La partie imaginaire k'' représente l'atténuation de l'onde électromagnétique dans le milieu. La quantité $k_0 = \omega/c$ est le nombre d'onde dans le vide. On appelle alors indice complexe du milieu le rapport :

$$n^*(\omega) = \frac{k}{k_0} = n + j\kappa \quad (\text{A17})$$

Sa partie réelle n est l'indice de réfraction, sa partie imaginaire κ est l'indice d'extinction, associée à l'atténuation k'' . De la relation de dispersion (A16) on tire :

$$n^{*2} = \varepsilon_r(\omega) \quad (\text{A18})$$

On en déduit :

$$\varepsilon_r' = n^2 - \kappa^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_r'' = 2n\kappa$$

et l'expression de l'onde électromagnétique, qui fait apparaître la décroissance de son amplitude due à l'atténuation :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{\max} \exp j(\omega t - k r) = \mathbf{E}_{\max} \exp j(\omega t - k_0 n^* r) = \\ &\mathbf{E}_{\max} \exp(-k_0 \kappa r) \exp j(\omega t - k_0 n r) \end{aligned}$$

avec $k'' = k_0 \kappa(\omega)$ facteur d'atténuation de l'amplitude, et $v_\phi = \omega/k' = c/n(\omega)$ vitesse de phase de l'onde. Comme dans les milieux ordinaires on a $n > 1$, la vitesse de phase dans celui-ci est toujours inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide c .

En supposant que la fréquence de l'onde incidente est beaucoup plus petite que la fréquence propre des liaisons électroniques Ω_k , la permittivité relative donnée par (A3) n'a plus de partie imaginaire, et l'indice devient réel (on l'appelle alors **indice de réfraction optique**). En effet :

$$\varepsilon_r'' = \chi''(\omega) = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k \frac{\omega}{\tau_k}}{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)^2} \approx 0$$

et :

$$\varepsilon_r'(\omega) = 1 + \chi'(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k (\Omega_k^2 - \omega^2)}{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau_k}\right)^2} \approx 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{(\Omega_k^2 - \omega^2)} = n^2(\omega)$$

Cette hypothèse est raisonnable dans le domaine du visible : elle s'applique aux milieux diélectriques qui n'absorbent pas la lumière visible et qui sont donc transparents (exemple : le verre). Dans ce domaine, les fréquences sont de l'ordre de 10^{14} Hz et sont donc très inférieures aux fréquences propres des liaisons électroniques (qui sont dans le domaine UV). Les fréquences du visible sont par ailleurs bien au-dessus des fréquences propres des liaisons ioniques situées dans le domaine IR.

Puisque $\omega \ll \Omega_k$, la relation précédente donnant n peut encore se simplifier :

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}} \approx 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}\right) \approx 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^2} + \frac{e^2 \omega^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^4} = a + b \omega^2$$

Exprimant la pulsation à l'aide de la longueur d'onde *dans le vide*, $\omega = ck_0 = 2\pi c/\lambda$, on a encore :

$$n^2(\lambda) = a \left(1 + \frac{4\pi^2 c^2 b}{a \lambda^2}\right)$$

avec :

$$a = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\Omega_k^4}$$

Pour de faibles dispersions : $4\pi^2 c^2 b / a \lambda^2 = \ll 1$, donc pour des longueurs d'onde suffisamment grandes :

$$\lambda^2 \gg \frac{4\pi^2 c^2 e^2 N_k}{\varepsilon_0 m \Omega_k^4} \frac{1}{1 + \frac{e^2 N_k}{\varepsilon_0 m \Omega_k^2}}$$

la relation précédente donne approximativement :

$$n(\omega) \approx \sqrt{a} + \frac{2\pi^2 c^2 b}{\sqrt{a} \lambda^2}$$

c'est-à-dire la **loi de Cauchy** :

$$n(\omega) = n_0 + \frac{C}{\lambda^2} \quad (\text{A19})$$

où l'on a posé :

$$n_0 = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad C = \frac{2\pi^2 c^2 b}{\sqrt{a}}$$

La figure (A3) donne l'allure de cette loi dans le spectre visible pour un exemple de milieu. On voit que, l'indice étant plus grand pour les petites longueurs d'onde, l'angle de réfraction est plus fermé vers le violet ou le bleu que pour l'orange ou le rouge.

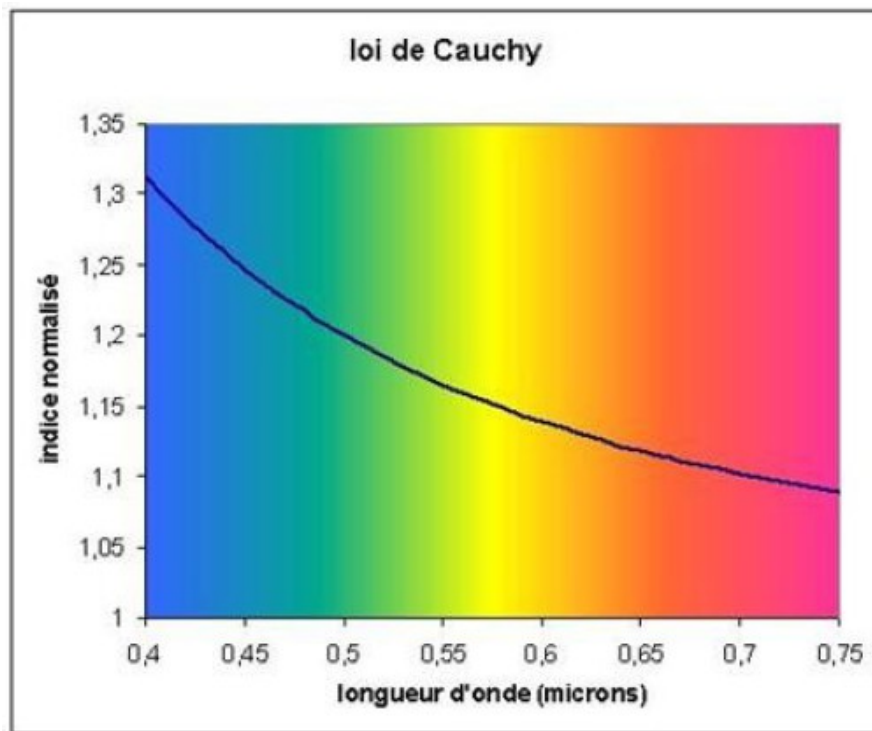


figure A3 : exemple de dispersion suivant la loi de Cauchy