



Frédéric Elie on
ResearchGate

Quaternions et rotations en mécanique quantique

Frédéric Élie

juin 2020

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Abstract : Il existe des ambiguïtés dans la manipulation des rotations définies classiquement. Une des solutions pour lever ces ambiguïtés consiste à utiliser les groupes de Lie des rotation et leurs représentations adjointes. Ceci permet d'étendre aux rotations finies la levée des ambiguïtés obtenue dans les développements des rotations au voisinage de l'origine, introduisant ainsi les générateurs du groupe des rotations. Les rotations sont donc reconsidérées au moyen des algèbres de Lie, en particulier, pour ce qui concerne les rotations spatiales 3D, les algèbres de Lie $so(3)$ et $su(2)$ des groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$. Ces deux algèbres de Lie sont isomorphes mais les groupes n'ont pas même topologie. On arrive alors au concept de spineurs : leur groupe est le revêtement universel de $SO(3)$ donc introduit une manipulation exacte des rotations. Par les spineurs, il apparaît des invariances par rotation sous un angle de rotation de 4π et non plus de 2π (existence du spin $1/2$, caractéristique du spin des fermions). Les spineurs conduisent naturellement au traitement des rotations avec $SU(2)$ et son algèbre de Lie, qui est adapté à la mécanique quantique : il donne au moment cinétique, qu'il généralise aux moments orbitaux, intrinsèques (spins), magnétiques, isospin..., un rôle central dans les états quantique. Une incursion dans ce domaine survole ce rôle important en Partie 2. Les spineurs Spin(3) sont isomorphes à la sphère S^3 , elle-même isomorphe au groupe des quaternions qui, comme beaucoup d'autres objets, admettent un formalisme utilisant l'algèbre de Clifford. En particulier, les quaternions sont utilisables pour les rotations dans un espace 4D, et celles dans 3D sont des restrictions par lesquelles on exprime les rotations au moyen de la formule de Rodrigues (ou par la transformation de Cayley).

Cet article est alors l'occasion de relier des concepts mathématiques : groupes spéciaux orthogonaux, algèbres de Lie, algèbres de Clifford, topologie algébrique, etc. et les concepts de la mécanique quantique pour lesquels ils font ressortir leurs profondeurs algébriques, géométriques et topologiques.

Ce document présente les notions au fur et à mesure de leur utilisation tout en s'efforçant d'être assez auto-porteur, sans prétendre bien évidemment à être exhaustif. Il offre une occasion, toujours renouvelée, de constater l'interaction forte qui existe entre la problématique de la physique, dans laquelle le sens de l'objet doit toujours se ramener à l'opération de mesure, et la problématique des mathématiques, dans laquelle cette opération est possible sous la condition nécessaire de raisonner sur l'invariance de certaines propriétés de l'objet, mettant en rapport des entités et des catégories intermédiaires abstraites et formelles.

Pré-requis : référence [1]

SOMMAIRE

Partie 1 : Quaternions, groupes des rotations et leurs algèbres de Lie

1 – Ensemble des quaternions de l'algèbre de Pauli C_3

- 1.1 – Ensemble des quaternions de l'algèbre de Pauli C_3
- 1.2 – La définition (1) équivaut à celle (77) de la référence [1]
- 1.3 – Quaternions purs
- 1.4 – Quaternions de carré réel
- 1.5 – Centre de Q_4

2 – Représentation par les quaternions d'une rotation plane dans E_3 autour d'un vecteur unitaire

- 2.1 – représentation d'une rotation dans E_3 par les quaternions
- 2.2 – Quaternions et rotations vectorielles quelconques dans E_3
- 2.3 – Quaternions et endomorphismes orthogonaux de E_3
- 2.4 – Quaternions et composition des rotations en dimension 3
- 2.5 – Groupe spécial orthogonal des rotations $SO(3)$ d'un espace vectoriel euclidien E_3
- 2.6 – Propriétés topologiques de $O(3)$ et $SO(3)$

3 – Transformations infinitésimales et algèbre de Lie des rotations de $SO(3)$

- 3.1 - Transformations infinitésimales et représentation exponentielle
- 3.2 - Groupe de Lie
- 3.3 - Algèbre de Lie
- 3.4 - Transformations infinitésimales et opérateurs infinitésimaux
- 3.5 - Conditions pour que les transformations continues forment un groupe
- 3.6 - Dimension d'une algèbre de Lie
- 3.7 - Retour sur la notation exponentielle
- 3.8 - Relations de commutation et structure de groupe des transformations
- 3.9 - Formule de Baker-Campbell-Hausdorff et condition de commutation

4 – Groupe de Lie $SU(2)$, son algèbre de Lie et les spineurs

- 4.1 - Définition du groupe $SU(2)$, lien avec les quaternions
- 4.2 - $SO(3)$ en tant que représentation de $SU(2)$
 - 4.2.1 – Morphisme du groupe $SU(2)$ dans le groupe $SO(3)$
 - 4.2.2 – Paramétrage des éléments de $SO(3)$
 - 4.2.3 – Utilisation en physique quantique
 - 4.2.4 – Observable moment cinétique
 - 4.2.5 – Représentation adjointe de $SU(2)$ et métrique de Killing
 - 4.2.6 – Résumé
- 4.3 - $SU(2)$ est simplement connexe
 - 4.3.1 – Difféomorphisme entre $SU(2)$ et S^3
 - 4.3.2 – Formule de Rodrigues
 - 4.3.3 – Connexité, chemins, homotopie, connexité par arcs, simple connexité

5 – Spineurs

- 5.1 – Algèbre de Lie $su(2)$ de $SU(2)$
- 5.2 – Définition des spineurs
- 5.3 – Revêtement universel
- 5.4 – Groupe $Spin(3)$: c'est le revêtement universel de $SO(3)$
 - 5.4.1 – Définition : groupe $Spin(3)$
 - 5.4.2 – Énoncé du théorème et remarques préliminaires : algèbre de Clifford, théorème de

- Cartan-Dieudonné, groupes Pin et Spin
- 5.4.3 – Preuve de (114-A)
- 5.4.4 – Preuve de (114-B)

5.5 – Rotation 4D et formule de Rodrigues en tant que leur restriction 3D

- 5.5.1 – Rotations 3D : lien entre la formule de Rodrigues et l'exponentiation
- 5.5.2 – Rotations 4D
- 5.5.3 – Formulation des rotations par la transformation de Cayley
- 5.5.4 – Valeurs propres d'une matrice 4x4 réelle antisymétrique
- 5.5.5 – Formule de Rodrigues des rotations 4D et valeurs propres des matrices de rotation 4D
- 5.5.6 – Représentation des rotations 4D par les quaternions

5.6 – Représentation du spin par la sphère de Riemann

5.7 – Représentation du spin par la sphère de Bloch

Partie 2 : Rotations et moments cinétiques en mécanique quantique

- 6 – Vecteurs et valeurs propres des opérateurs moment cinétique
- 7 – Base de représentation standard de l'espace de Hilbert des états quantiques à partir des vecteurs propres de J^2 et J_z
- 8 – Exemples de représentation standard
- 9 – Moment cinétique orbital
- 10 – Moment cinétique intrinsèque ou spin d'une particule
- 11 – Addition des moments cinétiques
- 12 – Exemple d'addition : addition de deux spins 1/2
- 13 – Autre exemple de moment cinétique : isospin ou spin isotopique
- 14 – Autre exemple de moment cinétique : isospin des leptons et des quarks
- 15 – Moment magnétique des leptons chargés
- 16 – Moment magnétique des nucléons
- 17 – Moments cinétiques et tenseurs irréductibles, application au moment magnétique des baryons

Annexe 1 : Application exponentielle et formule BCH

Annexe 2 : preuve de $\det(R_L) > 0$

Annexe 3 : Preuve du théorème de Cartan-Dieudonné

Annexe 4 : Preuve de (120)

Annexe 5 : Détermination des rotations 4D, éléments de $SO(4)$, par la transformation de Cayley

A5.1 – Formule de Cayley des rotations 4D

A5.2 – Matrice antisymétrique ayant une matrice de rotation par transformation de Cayley, de valeurs propres données

A5.3 – Types de rotation 4D selon les valeurs propres de la matrice antisymétrique d'où est obtenue la rotation par la formule de Rodrigues ou la transformation de Cayley

Références et bibliographie

**PARTIE 1 :
QUATERNIONS, GROUPES DES ROTATIONS ET LEURS ALGÈBRES DE LIE**

1 – Ensemble des quaternions de l'algèbre de Pauli C_3

1.1 – Ensemble des quaternions de l'algèbre de Pauli C_3

Un quaternion est une matrice 2x2 complexe de la forme :

$$Q(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} \quad (1)$$

où « * » désigne le conjugué, z_1 et z_2 sont complexes. On note \mathbf{Q}_4 l'espace vectoriel des quaternions. On a vu en référence [1] que les quaternions \mathbf{Q}_4 sont une sous-algèbre de l'algèbre de Pauli C_3 , (C_3 , construite sur l'espace vectoriel \mathbf{R}^3 sur le corps des nombres réels, est de dimension 8 : $\dim C_3 = 2^3 = 8$). La dimension de \mathbf{Q}_4 est 4 : $\dim \mathbf{Q}_4 = 4$, comme on va le voir.

On a aussi vu en [1] que C_3 est une algèbre de Clifford, dont les éléments sont appelés des c-nombres. Comme indiqué au point 2.2 de [1], les c-nombres peuvent toujours être représentés par des matrices carrées, de sorte que leurs produits se ramènent aux produits de matrices carrées.

1.2 – La définition (1) équivaut à celle (77) de la référence [1]

Cette définition est :

$$Q = Q_S + i \alpha \mathbf{1} Q_V$$

où α est un réel, Q_V un vecteur de carré 1, $Q_V^2 = 1$, Q_S est la composante scalaire :

$$Q_S = X^0 \mathbf{1} \quad \text{où} \quad X^0 \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{1}$ est la matrice unité 2x2. Remarque : Q_V^2 n'est pas à strictement parler un produit scalaire, c'est le carré au sens du produit de Clifford ; écrire $Q_V^2 = 1$ signifie qu'il est de norme 1, mais c'est un bivecteur.

On a : $Q(z_1, z_2) = X^0 \mathbf{1} + X^1 \mathbf{A}_1 + X^2 \mathbf{A}_2 + X^3 \mathbf{A}_3$ avec :

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec : $X^0 = \text{Re}(z_1)$, $X^1 = \text{Re}(z_2)$, $X^2 = \text{Im}(z_1)$, $X^3 = \text{Im}(z_2)$

La décomposition (2) de $Q(z_1, z_2)$ est unique dans le système $(\mathbf{1}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$ puisque les coefficients X^k sont fonctions des coefficients de la matrice (1). Donc \mathbf{Q}_4 est un espace vectoriel engendré par la base formée des quatre vecteurs, qui sont en fait des matrices $(\mathbf{1}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$, donc $\dim \mathbf{Q}_4 = 4$.

NB : Les X^k sont réels donc \mathbf{Q}_4 n'est pas un espace vectoriel sur le corps des complexes, mais sur le corps des réels.

Or les matrices de Pauli sont :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_2 &= A_2 = i \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 &= A_3 = i \sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= -A_1 = i \sigma_2\end{aligned}$$

donc :

$$Q(z_1, z_2) = X^0 \mathbf{1} - X^1 \sigma_3 \sigma_1 + X^2 \sigma_1 \sigma_2 + X^3 \sigma_2 \sigma_3 = Q_S + Q_B$$

où $Q_S = X^0 \mathbf{1}$ est la composante scalaire et $Q_B = X^2 \sigma_1 \sigma_2 + X^3 \sigma_2 \sigma_3 - X^1 \sigma_3 \sigma_1$ est la composante bivecteur. $Q(z_1, z_2)$ se décompose suivant l'expression vue à la preuve de la relation (77) de [1], avec les correspondances : $x_4 = X^2$, $x_5 = X^3$, $x_6 = -X^1$; or on a montré que Q_B s'écrit : $Q_B = i \mathbf{1} Q_V \alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ avec $Q_V^2 = 1$. La définition (1) est donc équivalente à (77) de [1].

Montrons directement que \mathbf{Q}_4 est une algèbre sur \mathbf{R} de base $(\mathbf{1}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$ et un corps gauche (i.e. non commutatif) :

Il suffit de montrer pour le produit la stabilité, l'existence de l'élément neutre, l'existence des inverses, et la non-commutativité.

- Soient $Q(z_1, z_2)$ et $Q(z'_1, z'_2)$ deux matrices de \mathbf{Q}_4 . Leur produit est égal à :

$$Q(z_1, z_2) Q(z'_1, z'_2) = Q(z''_1, z''_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 & -z'_2^* \\ z'_2 & z'_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z'_1 - z_2^* z'_2 & -(z_1 z'_2^* + z_2^* z'_1^*) \\ z_2 z'_1 + z_1^* z'_2 & z_1^* z'_1^* - z_2 z'_2^* \end{pmatrix}$$

Comme pour deux complexes on a $(zz')^* = z^*z'^*$, on a :

$$Q(z''_1, z''_2) = Q(z_1, z_2) Q(z'_1, z'_2) = \begin{pmatrix} z''_1 & -z''_2^* \\ z''_2 & z''_1^* \end{pmatrix}$$

avec : $z''_1 = z_1 z'_1 - z_2^* z'_2$ et $z''_2 = z_2 z'_1 + z_1^* z'_2$. Donc $Q(z''_1, z''_2)$ est aussi un élément de \mathbf{Q}_4 : il y a stabilité pour le produit.

- Élément neutre pour le produit : il est immédiat que c'est :

$$\mathbf{1} = Q(1, 0)$$

- à ce stade, \mathbf{Q}_4 est donc une sous-algèbre de l'algèbre réelle des matrices complexes 2x2 (voir définition d'une algèbre au §1 de [1]).

- Existence des inverses : cherchons $Q(z_1, z_2)^{-1}$ telle que

$$Q(z_1, z_2) Q(z_1, z_2)^{-1} = Q(1, 0) = \mathbf{1}$$

$Q(z_1, z_2)^{-1}$ existe si et seulement si le déterminant de $Q(z_1, z_2)$ est non nul :

$$\det Q(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 > 0$$

si et seulement si au moins z_1 ou z_2 n'est pas nul ; donc les matrices $Q(z_1, z_2) \neq Q(0, 0)$ sont inversibles,

d'inverse $Q(z_1, z_2)^{-1} = Q(z'_1, z'_2)$ avec :

$$z'_1 = \frac{z_1^*}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \quad \text{et} \quad z'_2 = -\frac{z_2^*}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \quad (3)$$

- Non commutativité :

On a vu plus haut le résultat de $Q(z_1, z_2) \cdot Q(z'_1, z'_2)$ que l'on va comparer avec $Q(z'_1, z'_2) \cdot Q(z_1, z_2)$:

$$Q(z'_1, z'_2)Q(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z'_1 & -z'_2{}^* \\ z'_2 & z'_1{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2{}^* \\ z_2 & z_1{}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 z_1 - z'_2{}^* z_2 & -(z'_2 z_1 + z'_1{}^* z_2)^* \\ z'_2 z_1 + z'_1{}^* z_2 & (z'_1 z_1 - z'_2{}^* z_2)^* \end{pmatrix}$$

qui est différent de $Q(z''_1, z''_2)$.

1.3 – Quaternions purs

Ce sont des quaternions $P(z_1, z_2)$ tels que $z_1 = iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, soit $P(z_1, z_2) = Q(iy_1, x_2 + iy_2)$.

L'ensemble des quaternions purs est noté P_3 , un élément de P_3 s'écrit donc :

$$P(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} iy_1 & -x_2 + iy_2 \\ x_2 + iy_2 & -iy_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

On voit immédiatement que :

$$P(z_1, z_2) = X^1 A_1 + X^2 A_2 + X^3 A_3$$

puisque $X^0 = 0$, avec $X^1 = x_2$, $X^2 = y_1$, $X^3 = y_2$. Donc P_3 est un espace vectoriel réel de dimension :

$$\dim P_3 = 3$$

C'est un espace métrique euclidien de norme :

$$\|P\| = \sqrt{\det P(z_1, z_2)} \quad (5)$$

puisque $\|P(z_1, z_2)\|^2 = x_2^2 + y_2^2 + y_1^2$.

Avec cette norme, la base (A_1, A_2, A_3) est orthonormale :

En effet, définissant le **produit scalaire** de $P(z_1, z_2)$ et $P(z'_1, z'_2)$, avec :

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2) &= X^1 A_1 + X^2 A_2 + X^3 A_3 = x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3 \\ P(z'_1, z'_2) &= X'^1 A_1 + X'^2 A_2 + X'^3 A_3 = x'_2 A_1 + y'_1 A_2 + y'_2 A_3 \end{aligned}$$

par :

$$P(z_1, z_2) \cdot P(z'_1, z'_2) = x_2 x'_2 + y_1 y'_1 + y_2 y'_2 = X^1 X'^1 + X^2 X'^2 + X^3 X'^3 \quad (6)$$

on a : $A_i \cdot A_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ et $\|A_j\| = \sqrt{\det(A_j)} = 1$ car :

$$\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Le **produit vectoriel** de $P(z_1, z_2)$ et $P(z'_1, z'_2)$ est :

$$P(z_1, z_2) \times P(z'_1, z'_2) = (x_2 y'_1 - x'_2 y_1) A_1 + (y_1 y'_2 - y'_1 y_2) A_2 + (y_2 x'_2 - y'_2 x_2) A_3 \quad (7)$$

Le produit des deux quaternions purs $P(z_1, z_2)$ et $P(z'_1, z'_2)$ est alors :

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2) P(z'_1, z'_2) &= (x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3)(x'_2 A_1 + y'_1 A_2 + y'_2 A_3) \\ &= x_2 x'_2 A_1^2 + y_1 y'_1 A_2^2 + y_2 y'_2 A_3^2 + x_2 y'_1 A_1 A_2 + x_2 y'_2 A_1 A_3 + y_1 x'_2 A_2 A_1 \\ &\quad + y_1 y'_2 A_2 A_3 + y_2 x'_2 A_3 A_1 + y_2 y'_1 A_3 A_2 \end{aligned}$$

Or : $A_1 = i\sigma_2$, $A_2 = i\sigma_3$, $A_3 = i\sigma_1$ et $\sigma_k^2 = 1$, donc $A_k^2 = -1$, d'où

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= -i\sigma_2 i\sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3 = A_3 = i\sigma_1 \\ A_1 A_3 &= -i\sigma_2 i\sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 = -A_2 = -i\sigma_3 \\ A_2 A_3 &= i\sigma_3 i\sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_1 = A_1 = i\sigma_2 \\ A_2 A_1 &= -i\sigma_3 i\sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 = -A_3 = -i\sigma_1 \\ A_3 A_1 &= -i\sigma_1 i\sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 = A_2 = i\sigma_3 \\ A_3 A_2 &= i\sigma_1 i\sigma_3 = -\sigma_1 \sigma_3 = -A_1 = -i\sigma_2 \end{aligned}$$

donc :

$$P(z_1, z_2) P(z'_1, z'_2) = -P(z_1, z_2) \cdot P(z'_1, z'_2) \mathbf{1} + P(z_1, z_2) \times P(z'_1, z'_2) \quad (8)$$

et on note que $P(z_1, z_2) \times P(z'_1, z'_2) = -i \mathbf{1} P(z_1, z_2) \wedge P(z'_1, z'_2)$ qui lie le produit vectoriel au produit extérieur vu dans la relation (23) de [1]. La relation (8) ci-dessus est un produit de Clifford de deux vecteurs de \mathbf{R}^3 puisque ceux-ci sont assimilés à des quaternions purs.

Un quaternion pur est un bivecteur puisqu'il se décompose sur $\sigma_j \sigma_k$, voir relation (19c) de [1]. Le produit de deux quaternions purs s'écrit, avec les produits intérieur et extérieur :

$$P(z_1, z_2) P(z'_1, z'_2) = P P' = -P \cdot P' \mathbf{1} - i P \wedge P' \quad (9)$$

Tous les quaternions de \mathbf{Q}_4 se décomposent comme la somme d'un scalaire et d'un bivecteur, c'est-à-dire d'un quaternion pur de \mathbf{P}_3 :

$$Q = X^0 \mathbf{1} + P$$

Soit un autre quaternion $Q' = X'^0 \mathbf{1} + P'$; leur produit est :

$$Q Q' = (X^0 \mathbf{1} + P)(X'^0 \mathbf{1} + P') = X^0 X'^0 \mathbf{1} + X^0 P' + X'^0 P + P P'$$

De (8) il vient :

$$\begin{aligned} Q Q' &= X^0 X'^0 \mathbf{1} + X^0 P' + X'^0 P - P \cdot P' \mathbf{1} + P \times P' \\ &= (X^0 X'^0 - P \cdot P') \mathbf{1} + X^0 P' + X'^0 P + P \times P' = X''^0 \mathbf{1} + P'' \end{aligned}$$

car $Q Q'$ est un quaternion par suite de la stabilité, donc suit la même décomposition. On a donc les composantes scalaire et bivecteur du produit de deux quaternions de \mathbf{Q}_4 :

$$\begin{aligned} X''^0 &= X^0 X'^0 - P \cdot P' \\ P'' &= X'^0 P + X^0 P' + P \times P' \end{aligned} \quad (10)$$

1.4 – Quaternions de carré réel

Lorsque $Q = Q'$, (10) donne :

$$Q^2 = (X^{0^2} - P \cdot P) \mathbf{1} + 2 X^0 P \quad \text{car } P \times P = 0$$

qui se décompose en : $Q^2 = X'^0 \mathbf{1} + P'$
avec :

$$\begin{aligned} X'^0 &= X^{0^2} - P \cdot P \\ P' &= 2 X^0 P \end{aligned}$$

Q^2 est un scalaire réel si l'une des conditions est remplie :

- a) $P = 0$ et $X^{0^2} > 0$ donc si X^0 est réel : $Q = X^0 \mathbf{1}$ avec $X^{0^2} > 0$;
b) $X^0 = 0$ (quaternion pur) et $-P \cdot P \geq 0$ donc si $P \cdot P \leq 0$ (car $-P \cdot P$ est un carré).

1.5 – Centre de \mathbf{Q}_4

■ **Définition** : le centre de \mathbf{Q}_4 est l'ensemble des quaternions qui commutent avec tout quaternion :

$$C(\mathbf{Q}_4) = \{ Q' \in \mathbf{Q}_4 : \forall Q \in \mathbf{Q}_4, QQ' = Q'Q \}$$

Cherchons à caractériser $C(\mathbf{Q}_4)$:

(10) donne les deux relations :

$$\begin{aligned} X^0 X'^0 - P \cdot P' &= X'^0 X^0 - P' \cdot P \quad \text{qui est toujours vérifiée} \\ \text{et : } X'^0 P + X^0 P' + P \times P' &= X'^0 P + X^0 P' + P' \times P \quad \text{qui est vérifiée si et seulement si} \\ &P \times P' = P' \times P = 0 \end{aligned}$$

Les quaternions Q' qui commutent avec Q sont donc linéairement dépendants avec Q :

$$\begin{aligned} Q' &= X'^0 \mathbf{1} + \alpha P \\ \text{où : } \alpha &\in \mathbf{R} \quad \text{et } Q = X^0 \mathbf{1} + P \end{aligned} \quad (11)$$

De (11) on déduit : les quaternions Q' qui commutent avec Q appartiennent au plan vectoriel réel engendré par $\mathbf{1}$ et Q . Ils appartiennent donc à un sous-espace de P_3 de dimension 2.

Si (11) doit être vérifié pour tout P , c'est-à-dire pour tout quaternion de \mathbf{Q}_4 , il faut que $\alpha = 0$, c'est-à-dire que $Q' \in C(\mathbf{Q}_4)$ soit scalaire. Ainsi :

Le centre $C(\mathbf{Q}_4)$ de \mathbf{Q}_4 est l'ensemble des quaternions réels.

2 – Représentation par les quaternions d'une rotation plane dans E_3 autour d'un vecteur unitaire

2.1 – Représentation d'une rotation dans E_3 par les quaternions

Soit P un quaternion pur de P_3 , il est assimilable à un vecteur de l'espace vectoriel réel $E_3 = \mathbf{R}^3$, puisque $\dim P_3 = 3$. Soit Q un quaternion unitaire de \mathbf{Q}_4 , c'est-à-dire de norme unité :

$$\|Q\|^2 = \det(Q) = 1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

où $z_1 = x_1 + i y_1$ et $z_2 = x_2 + i y_2$. On définit l'application R_Q de $P_3 \sim \mathbf{R}^3$ dans $P_3 \sim \mathbf{R}^3$, par :

$$\forall P \in P_3 : R_Q(P) = Q P Q^{-1} \quad (12)$$

Montrons que (12) représente une rotation dans $E_3 = \mathbf{R}^3$:

$$Q = X^0 \mathbf{1} + P \quad \text{avec} \quad X^0 = x_1 \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} i y_1 & -x_2 + i y_2 \\ x_2 + i y_2 & -i y_1 \end{pmatrix} = x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3 \quad \text{quaternion pur,}$$

$$\text{soit : } Q = x_1 \mathbf{1} + x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3 .$$

Choisissons $x_1 \cos \frac{\theta}{2}$; comme $\|Q\|^2 = 1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$ alors $x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = \|P\|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ donc on peut réécrire P ainsi :

$$P = U \sin \frac{\theta}{2} = x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3$$

$$\text{soit : } U = \frac{x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{x_2 A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}} \quad \text{donc} \quad Q = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + U \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad \|U\|^2 = 1$$

Comme : $A_1 = -i \sigma_2$, $A_2 = i \sigma_3$, $A_3 = i \sigma_1$ il vient :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \frac{-x_2 \sigma_2 + y_1 \sigma_3 + y_2 \sigma_1}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}} \quad \text{et donc :}$$

$$Q^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \frac{-x_2 \sigma_2 + y_1 \sigma_3 + y_2 \sigma_1}{\sqrt{x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - U \sin \frac{\theta}{2}$$

(12) est alors :

$$R_Q(P) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + U \sin \frac{\theta}{2} \right) P \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - U \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (12\text{bis})$$

qui se développe en :

$$R_Q(P) = \cos^2 \frac{\theta}{2} P - P U \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + U P \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - U P U \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Or :

$$\begin{aligned} P U &= -P \cdot U \mathbf{1} + P \times U \\ U P &= -P \cdot U \mathbf{1} - P \times U \\ U P U &= U(-P \cdot U \mathbf{1} - P \times U) = -(P \cdot U) U + U \cdot (P \times U) + U \times (P \times U) \end{aligned}$$

Comme $U \cdot (P \times U) = 0$ il reste :

$$\begin{aligned}
R_Q(P) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} P + (P \cdot U \mathbf{1} - P \times U) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\
&\quad - (P \cdot U \mathbf{1} + P \times U) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + (P \cdot U) U \sin^2 \frac{\theta}{2} - U \times (P \times U) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) P - \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) P \times U + \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (P \cdot U) U - \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) U \times (P \times U)
\end{aligned}$$

avec : $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ on a :

$$R_Q(P) = \frac{1}{2} \cos \theta (P - (P \cdot U) U + U \times (P \times U)) + \frac{1}{2} (P + (P \cdot U) U - U \times (P \times U)) + (\sin \theta) U \times P$$

or : $P = (P \cdot U) U + U \times (P \times U)$ donc :

$$R_Q(P) = (\cos \theta) P + (1 - \cos \theta) (P \cdot U) U + (\sin \theta) U \times P \quad (13)$$

(13) est la **formule de rotation d'Olinde Rodrigues**. Elle permet de traiter les rotations dans E_3 en considérant ses vecteurs comme des quaternions purs et la transformation par rotation comme l'action d'un quaternion sur eux, faisant ainsi intervenir des matrices complexes 2x2 au lieu des matrices réelles 3x3 employant les angles d'Euler. Bien entendu, entre les deux formalismes il y a un lien que l'on verra plus loin, mais l'emploi des quaternions élargit l'étude des rotations à l'espace vectoriel E_4 de dimension 4, comme on le verra, et entre dans un formalisme plus général fondé sur les algèbres de Lie des groupes de Lie que sont les groupes spéciaux orthogonaux $SO(n)$ des rotations dans E_n de dimension n quelconque.

Le théorème suivant indique ce que représente (13) :

■ **Théorème** : Soit E_3 l'espace vectoriel muni de la norme euclidienne, de dimension 3, et P un vecteur de E_3 . Alors la rotation autour d'un vecteur unitaire U de E_3 , d'angle θ est donnée par la formule (13) :

(13bis)

$$R(P) = (\cos \theta) P + (\sin \theta) U \times P + (1 - \cos \theta) (P \cdot U) U$$

Preuve de (13bis) :

$R(P)$ telle que donnée par (13) est une application linéaire de P . Dans le cas particulier où $P = U$, on a :

$$R(U) = (\cos \theta) U + U - (\cos \theta) U = U$$

Maintenant, si P est orthogonal à U , donc si $P \cdot U = 0$, on a :

$$R(P) = (\cos \theta) P + (\sin \theta) U \times P$$

En développant cette expression sous forme matricielle 3x3 on obtient l'expression générale d'une **rotation plane** d'angle θ d'un vecteur P autour de U , P étant orthogonal à U . Or R est linéaire, en U on a $R(U) = U$, et un vecteur P se décompose en une composante colinéaire à U et une composante qui lui est orthogonale, donc une rotation non plane de P autour de U se ramène à additionner vectoriellement la composante orthogonale transformée par rotation plane et la composante sur U qui reste inchangée. Ainsi (13) est l'expression générale d'une rotation de tout vecteur P de E_3 d'angle θ autour de U .

CQFD de (13 bis).

NB : Cette expression (13) est de la même forme que celle (83) de [1].

2.2 – Quaternions et rotations vectorielles quelconques dans E_3

Soit E_3 l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 et Ω un vecteur de E_3 . On définit l'opérateur linéaire sur E_3 , ρ tel que :

$$\forall P \in E_3, \rho(P) = \Omega \times P$$

■ **Proposition** : - L'opérateur $\exp(\rho)$ est une rotation dans E_3 .

Preuve : - Soit U un vecteur unitaire de E_3 , colinéaire à Ω ; alors

$$\Omega = \|\Omega\| U$$

où $\|\Omega\|$ est la norme définie en (5), identique à la norme euclidienne. Il s'ensuit :

$$\rho(P) = \Omega \times P = \|\Omega\| U \times P$$

L'exponentielle de $\rho(P)$ est définie par son développement en série :

$$\exp(\rho) = \mathbf{1} + \frac{1}{1!} \rho + \frac{1}{2!} \rho^2 + \dots + \frac{1}{n!} \rho^n + \dots$$

Il faut donc calculer ρ^2, \dots, ρ^n :

$$\rho^2(P) = \rho(\rho(P)) = \Omega \times (\Omega \times P) = \|\Omega\|^2 U \times (U \times P)$$

On utilise l'identité : $\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3$ avec $\vec{V}_1 = U, \vec{V}_2 = U, \vec{V}_3 = P$ d'où

$$\rho^2(P) = \|\Omega\|^2 ((U \cdot P) U - P)$$

$$\rho^3(P) = \Omega \times \rho^2(P) = \|\Omega\| U \times \rho^2(P) = \|\Omega\|^3 (U \times ((U \cdot P) U - P)) = -\|\Omega\|^3 U \times P = -\|\Omega\|^2 \rho(P)$$

$$\rho^4(P) = \Omega \times \rho^3(P) = \|\Omega\| U \times (-\|\Omega\|^3 U \times P) = -\|\Omega\|^4 U \times (U \times P) = -\|\Omega\|^4 ((U \cdot P) U - P) = -\|\Omega\|^2 \rho^2(P)$$

Les exposants sont soit de la forme $n = 2k$, soit de la forme $n = 2k+1$, d'où pour chacun d'eux :

$$k > 1 : \rho^{2k} = (-1)^{k-1} \|\Omega\|^{2k-2} \rho^2$$

$$k > 0 : \rho^{2k+1} = (-1)^k \|\Omega\|^{2k} \rho$$

d'où :

$$\begin{aligned} \exp(\rho) &= \mathbf{1} + \frac{1}{1!} \rho + \frac{1}{2!} \rho^2 + \dots + \frac{1}{n!} \rho^n + \dots = \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \rho^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \rho^{2k} \\ &= \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k \|\Omega\|^{2k} \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \|\Omega\|^{2k-2} \rho^2 \\ &= \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \|\Omega\|^{2k} \|\Omega\| ((U \times P)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \|\Omega\|^{2k-2} \|\Omega\|^2 ((U \cdot P) U - P) \\ &= \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \|\Omega\|^{2k+1} (U \times P) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \|\Omega\|^{2k} ((U \cdot P) U - P) \end{aligned}$$

$$\text{or : } \cos\|\Omega\| = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\|\Omega\|^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin\|\Omega\| = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\|\Omega\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{donc :}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\|\Omega\|^{2k+1}}{(2k+1)!} (\mathbf{U} \times \mathbf{P}) = \sin \|\Omega\| (\mathbf{U} \times \mathbf{P})$$

et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \|\Omega\|^{2k} ((\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{U} - \mathbf{P}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \|\Omega\|^{2k} ((\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{U} - \mathbf{P}) = (1 - \cos \|\Omega\|) ((\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{U} - \mathbf{P})$$

d'où : $\exp \rho(\mathbf{P}) = (\mathbf{U} \times \mathbf{P}) \sin \|\Omega\| + (1 - \cos \|\Omega\|) ((\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{U} - \mathbf{P}) + \mathbf{P}$

finalement :

$$\exp \rho(\mathbf{P}) = (\cos \|\Omega\|) \mathbf{P} + (1 - \cos \|\Omega\|) (\mathbf{P} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} + (\sin \|\Omega\|) \mathbf{U} \times \mathbf{P}$$

qui est l'expression (13). Donc $\exp(\rho)$ est une rotation d'angle $\|\Omega\|$ autour du vecteur unitaire \mathbf{U} (figure 1). CQFD.

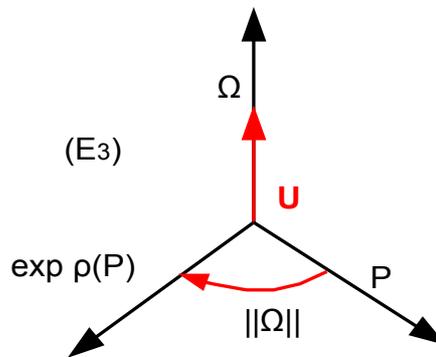


figure 1 – pour plus de clarté, la rotation est supposée plane ($\exp \rho(\mathbf{P})$ et \mathbf{P} sont dans le même plan orthogonal à l'axe \mathbf{U})

Les rotations dans (E_3) sont des endomorphismes orthogonaux directs construits avec l'endomorphisme antisymétrique ρ . C'est un résultat général que nous allons voir ci-après.

2.3 – Quaternions et endomorphismes orthogonaux de E_3

■ *Proposition* : - Soit ρ un endomorphisme antisymétrique de E_3 . Alors $\exp(\rho)$ est un endomorphisme orthogonal direct de E_3 .

(14)

a) Rappel : Un endomorphisme ρ est **antisymétrique** si :

$$\forall P, P' \in E_n : \rho(P) \cdot P' = -P \cdot \rho(P') \quad (15)$$

L'endomorphisme ρ vu au point 2.2 défini par $\rho(P) = \Omega \times P$ est bien antisymétrique, puisque :

$$\rho(P) \cdot P' = (\Omega \times P) \cdot P' = -P \cdot (\Omega \times P')$$

b) Rappel : Soit E_n un espace vectoriel euclidien de dimension n . L'**endomorphisme adjoint** ρ^+ d'un endomorphisme ρ est défini par :

$$\forall P, P' \in E_n : \rho^+(P) \cdot P' = P \cdot \rho(P') \quad (16)$$

Un endomorphisme possède un adjoint unique :

En effet, supposons que ρ^+ soit un autre adjoint de ρ , alors :

$$\forall P, P' \in E_n : P \cdot \rho(P') = \rho^+(P) \cdot P' = \rho'^+(P) \cdot P'$$

donc : $\forall P \in E_n, \rho^+(P) \in E_n^\perp = \{0\}$ et $\rho'^+(P) \in E_n^\perp$ donc $\rho^+ = \rho'^+$ - CQFD

Rappel : E_n^\perp est l'ensemble des vecteurs de E_n orthogonaux à tous les vecteurs de E_n ; il est donc réduit ici à $\{0\}$.

c) Condition nécessaire et suffisante de l'existence de l'adjoint d'un endomorphisme :

■ **Proposition** : - Dans E_n euclidien tout endomorphisme admet un adjoint.

(17)

Preuve de (17) :

Pour tout vecteur P de E_n l'application $\varphi_P : P' \rightarrow (P \cdot \rho(P'))$, où ρ est un endomorphisme, est une forme linéaire (application linéaire sur E_n donnant un scalaire).

On a le théorème suivant :

■ **Théorème** : - E_n est isomorphe à son espace dual E_n^* (ensemble des formes linéaires sur E_n). De plus, à toute forme linéaire φ sur E_n est associé un vecteur unique P de E_n tel que :

$$\forall P' \in E_n : \varphi(P') = P \cdot P'$$

(18)

(autrement dit : toute forme linéaire s'exprime comme un produit scalaire).

Preuve de (18) :

Soit $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$ une base orthonormée de E_n , et soit un vecteur P de E_n qui se décompose sur cette base selon :

$$P = \sum_{k=1}^n \varphi(\mathbf{A}_k) \mathbf{A}_k$$

Pour tout $P' = \sum_{j=1}^n P_j \mathbf{A}_j \in E_n$ on a, puisque φ est linéaire : $\varphi(P') = \sum_{j=1}^n P_j \varphi(\mathbf{A}_j)$ par conséquent :

$$\varphi(P') = P \cdot P'$$

Donc il existe au moins P associé à la forme linéaire φ . Ce vecteur est unique, en effet :

Supposons qu'il existe un autre vecteur S de E_n associé à la même forme linéaire φ , alors :

$$\forall P' \in E_n : P \cdot P' = S \cdot P' \text{ soit : } (P - S) \cdot P' = 0, \forall P' \in E_n$$

c'est-à-dire : $(P - S) \in E_n^\perp$; or on a vu que $E_n^\perp = \{0\}$ donc $P = S$.

CQFD de (18)

En conséquence de (18), puisque φ_P est une forme linéaire sur E_n , il existe un vecteur $\rho^+(P)$ tel que :

$$\varphi_P : P' \rightarrow (\rho^+(P) \cdot P')$$

L'application qui associe $\rho^+(P)$ à P est linéaire.

CQFD de (17)

L'espace vectoriel des endomorphismes de E_n est noté $L(E_n)$: $\rho \in L(E_n)$. Les éléments de $L(E_n)$ sont représentés par des matrices dans une base orthonormée (B_n) de E_n : on note $\text{mat}_{(B_n)}(\rho)$ la matrice de ρ . On notera parfois $[\rho]$ ou tout simplement ρ s'il n'y a aucune ambiguïté. On a le théorème suivant :

■ **Théorème** : - La matrice de l'application linéaire adjointe ρ^+ de l'endomorphisme ρ , dans la base orthonormée (B_n) est la matrice transposée conjuguée de la matrice de ρ dans cette même base :

(19)

$$\text{mat}_{(B_n)}(\rho^+) = {}^t(\text{mat}_{(B_n)}(\rho))^*$$

Preuve de (19) : - Les vecteurs P et P' de E_n sont représentés, dans une base orthonormée (B_n) , par les matrices colonnes : $\text{mat}_{(B_n)}(P)$ et $\text{mat}_{(B_n)}(P')$. Leur produit scalaire est alors :

$$P \cdot P' = {}^t(\text{mat}_{(B_n)}(P))^* (\text{mat}_{(B_n)}(P'))$$

D'après (18) une forme linéaire sur E_n peut s'exprimer comme le produit scalaire d'un vecteur et d'un autre vecteur transformé par un endomorphisme ρ dans E_n :

$$\begin{aligned} \forall P, P' \in E_n : \varphi_P(P') &= (P \cdot \rho(P')) = (\rho^+(P) \cdot P') \\ \Leftrightarrow \forall P, P' \in E_n : {}^t(\text{mat}(P))^* \text{mat}(\rho(P')) &= {}^t(\text{mat}(\rho^+(P)))^* \text{mat}(P') = (\text{mat}(\rho(P))) \text{mat}(P') \\ \Leftrightarrow \forall P \in E_n : {}^t(\text{mat}(\rho^+(P)))^* &= (\text{mat}(\rho(P))) \\ \Leftrightarrow {}^t(\text{mat}(\rho^+))^* &= (\text{mat}(\rho)) \Leftrightarrow \text{mat}(\rho^+) = {}^t(\text{mat}(\rho))^* \end{aligned}$$

CQFD de (19)

L'adjoint ρ^+ d'un endomorphisme ρ dans E_n est donc complètement défini par sa matrice ${}^t(\text{mat}_{(B_n)} \rho)^*$ dans une base orthonormée (B_n) .

d) Propriétés de l'adjoint : soient ρ et ρ' de $L(E_n)$ et z un nombre complexe. On a :

$$\begin{aligned} (z\rho + \rho')^+ &= z^* \rho^+ + \rho'^+ \\ (\rho^+)^+ &= \rho \\ \text{déterminant : } \det(\rho^+) &= \det(\text{mat} \rho^+) = (\det(\text{mat} \rho))^* = (\det \rho)^* \\ \text{composition : } (\rho \circ \rho')^+ &= \rho'^+ \circ \rho^+ \\ \text{trace : } \text{tr}(\rho^+) &= \text{tr}(\text{mat} \rho^+) = (\text{tr}(\text{mat} \rho))^* = (\text{tr} \rho)^* \\ \text{inverse : si } \det \rho \neq 0 &: (\rho^+)^{-1} = (\rho^{-1})^+ \end{aligned}$$

e) Endomorphismes symétriques, ou auto-adjoints, ou **hermitiens** :

L'endomorphisme $\rho \in L(E_n)$ est symétrique si et seulement s'il est identique à son adjoint :

$$\forall P, P' \in E_n : \rho(P) \cdot P' = P \cdot \rho(P') \quad \text{soit : } \rho^+ = \rho$$

Dans ce cas, sa matrice est hermitienne dans une base orthonormée (B_n) :

$$\text{mat}_{(B_n)} \rho = ({}^t \text{mat}_{(B_n)} \rho)^* \quad (20)$$

f) **Endomorphismes orthogonaux** : $\rho \in L(E_n)$ est orthogonal si et seulement si :

$$\rho^+ = \rho^{-1}$$

Il est orthogonal direct si, de plus (voir point 2.5) :

$$\det \rho = \det(\text{mat}_{(B_n)} \rho) = 1$$

Il vient maintenant :

Preuve de (14) : - Ici, $n = 3$ et $\rho \in L(E_3)$ est antisymétrique : $\rho^+ = -\rho$. Alors :

$$(\exp \rho)^+ = \left(\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho^k \right)^+ = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\rho^+)^k$$

Suite à la propriété de composition : $(\rho^k)^+ = (\rho(\rho^{k-1}))^+ = (\rho^{k-1})^+ \rho^+$

donc : $(\exp \rho)^+ = (\exp \rho^+) = (\exp(-\rho))$ due à la propriété d'antisymétrie, d'où : $(\exp \rho)^+ = (\exp \rho)^{-1}$

Donc $(\exp \rho)$ est orthogonal.

Déterminant : $\det(\exp \rho) = \exp(\text{tr } \rho) > 0$. Or $(\exp \rho)$ étant une rotation, elle vérifie $\det(\exp \rho) = \pm 1$ et seule convient la valeur positive donc :

$$\det(\exp \rho) = +1$$

donc $(\exp \rho)$ est un endomorphisme orthogonal direct.

CQFD de (14).

2.4 – Quaternions et composition des rotations en dimension 3

Soit P un quaternion pur de P_3 , assimilé à un vecteur de E_3 , espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit Q un quaternion de \mathbf{Q}_4 tel que $\det Q = 1$, il s'écrit :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + U \sin \frac{\theta}{2}$$

avec $\|U\|^2 = 1$, comme vu au point 2.1. On a vu en (12) que la rotation d'un vecteur P autour du vecteur U d'angle θ est :

$$R_Q(P) = Q P Q^{-1}$$

que l'on écrit encore : $R_Q(P) = R(U, \theta)(P)$ pour expliciter les caractéristiques de la rotation : axe et angle.

Soit un autre quaternion : $Q' = \cos \frac{\theta'}{2} \mathbf{1} + U' \sin \frac{\theta'}{2}$ avec $\|U'\|^2 = 1$, la rotation correspondante est :

$$R_{Q'}(P) = R(U', \theta') = Q' P Q'^{-1}$$

On veut calculer la rotation obtenue $R_{Q''}(P)$ obtenue par la composition des deux rotations R_Q et $R_{Q'}$:

$$R_{Q''}(P) = R(U'', \theta'')(P) = R(U, \theta) R(U', \theta')(P) = R_Q R_{Q'}(P)$$

ce qui revient à calculer l'axe U'' et l'angle θ'' . On a :

■ Proposition :

$$R_{Q''} = R_Q R_{Q'} = R_{QQ'}$$

$$\text{avec : } Q'' = \cos \frac{\theta''}{2} \mathbf{1} + U'' \sin \frac{\theta''}{2}$$

$$\cos \frac{\theta''}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} (U \cdot U')$$

$$U'' \sin \frac{\theta''}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} U' + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} U + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} (U' \times U)$$

(21)

Preuve de (21) :

$$R_Q R_{Q'}(P) = Q(R_{Q'}(P))Q^{-1} = Q(Q' P Q'^{-1})Q^{-1} = (QQ')P(QQ')^{-1} = (QQ')P(QQ')^{-1}$$

donc : $R_{Q''} = R_Q R_{Q'} = R_{QQ'}$. C'est bien une rotation car :

$$R_{Q''}^+ = (R_Q R_{Q'})^+ = R_Q^+ R_{Q'}^+ = R_Q^{-1} R_{Q'}^{-1} = (R_Q R_{Q'})^{-1} = R_{Q''}^{-1}$$

$$\text{et : } \det R_{Q''} = \det (R_Q R_{Q'}) = \det R_Q \det R_{Q'} = 1 \times 1 = 1$$

En écrivant : $Q'' = \cos \frac{\theta''}{2} \mathbf{1} + U'' \sin \frac{\theta''}{2} = \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + U \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta'}{2} \mathbf{1} + U' \sin \frac{\theta'}{2} \right)$ et en développant et séparant les termes scalaires et les termes bivecteurs on obtient sans difficulté les relations entre les angles et les vecteurs d'axe de rotation.

CQFD de (21)

Il est clair que l'angle de rotation totale du vecteur P n'est pas la somme des angles intermédiaires, ni ne se déduit d'eux d'une manière « simple » (figure 2).

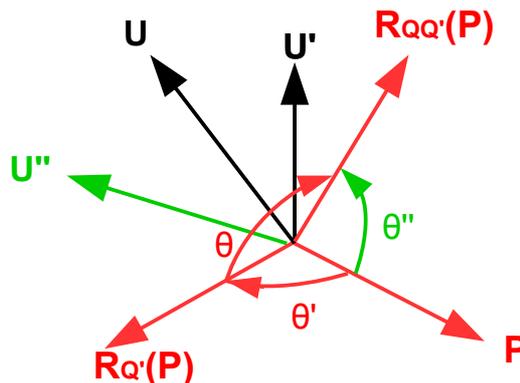


figure 2 – Pour raisons de lisibilité, la rotation résultante est supposée être la composition de rotations planes

2.5 – Groupe spécial orthogonal des rotations $SO(3)$ d'un espace vectoriel euclidien E_3

On a rencontré au point (2.3) les endomorphismes orthogonaux :

■ Définition : - Le groupe orthogonal $O(E_n)$ sur un espace vectoriel euclidien E_n est le groupe multiplicatif des endomorphismes L dans E_n qui conservent le produit scalaire :

$$\forall P, P' \in E_n : L(P) \cdot L(P') = P \cdot P'$$

Pour $n = 3$, le groupe orthogonal des matrices associées aux endomorphismes est noté $O(3)$.

■ **Définition** : - Le groupe spécial orthogonal, ou groupe des rotations, $SO(3)$ d'un espace euclidien E_3 est le groupe orthogonal multiplicatif des endomorphismes dans E_3 qui, en plus de conserver le produit scalaire, conservent l'orientation de l'espace ; ces endomorphismes sont des rotations R , leurs matrices sont à coefficients réels :

conservation du produit scalaire : $\forall P, P' \in E_3 : R(P) \cdot R(P')$

conservation de l'orientation : $\det R = +1$

Remarque : Les endomorphismes orthogonaux ne sont pas tous des rotations. Par exemple la matrice :

$-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien orthogonale, mais $\det(-1) = -1$ donc elle ne conserve pas

l'orientation de l'espace E_3 : c'est une symétrie de centre O .

On a donc :

$$SO(3) \subset O(3)$$

■ **Proposition** : - Les matrices d'un endomorphisme orthogonal sont unitaires. (22)

Preuve de (22) :

$$L(P) \cdot L(P') = P \cdot L^+ L(P') = P \cdot P'$$

d'où :

$$L^+ L = \mathbf{1}$$

soit :

$$L^+ = L^{-1}$$

Pour les matrices associées à L , cela se traduit par :

$$(\text{mat } L)^{-1} = {}^t(\text{mat } L)^*$$

CQFD de (22).

Dans le cas d'une rotation dans E_3 , élément de $SO(3)$, puisque les matrices sont réelles, (22) devient :

$$(\text{mat } R)^{-1} = {}^t(\text{mat } R) \quad (23)$$

■ **Proposition** : - Soit L un endomorphisme dans E_n et $\text{mat}_{(B_n)}(L)$ sa matrice associée dans une base (B_n) orthonormée de E_n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\text{mat}_{(B_n)}(L)$ est unitaire

b) avec K corps sur lequel l'espace vectoriel E_n est construit, les colonnes de $\text{mat}_{(B_n)}(L)$ forment une base orthonormale de K^n

c) les lignes de $\text{mat}_{(B_n)}(L)$ forment une base orthonormale de K^n . (24)

Preuve de (24) :

Comme pré-requis on a besoin d'utiliser la définition d'une **matrice de Gram** :

Une matrice de $M_{n \times n}(\mathbf{C})$ à coefficients complexes peut s'écrire comme un ensemble de n vecteurs V_k qui définissent les colonnes :

$$M = (V_1, \dots, V_n)$$

Une **matrice de Gram** $G(V_1, \dots, V_n)$ est une matrice de $M_{n \times n}(\mathbf{C})$ dont les éléments sont les produits scalaires des vecteurs V_k :

$$G(M) = G(V_1, \dots, V_n) = (V_j \cdot V_k)_{j,k=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} V_1 \cdot V_1 & \dots & V_1 \cdot V_n \\ V_2 \cdot V_1 & \dots & V_2 \cdot V_n \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n \cdot V_1 & \dots & V_n \cdot V_n \end{bmatrix}$$

Le déterminant de Gram est par définition $\det G(M)$.

On montre (référence [2]) que le déterminant de Gram de $M = (V_1, \dots, V_n)$ est :

$$\det G(V_1, \dots, V_n) = \|V_1^\perp\|^2 \det G(V_2, \dots, V_n)$$

où V_1^\perp est le vecteur orthogonal aux vecteurs de l'espace vectoriel $\text{Vect}(V_2, \dots, V_n)$ engendré par les vecteurs $\{V_2, \dots, V_n\}$; un vecteur U appartient à $\text{Vect}(V_1, \dots, V_n)$ si et seulement si :

$$\exists \lambda_j \in \mathbf{C}, j=2, \dots, n : U = \sum_{j=2}^n \lambda_j V_j$$

et l'on a : $V_1^\perp \cdot V_1 = 0, j=2, \dots, n \iff V_1^\perp \cdot U = 0$. On montre aussi que $\{V_1, \dots, V_n\}$ est une famille libre si et seulement si :

$$\det G(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$$

Revenons à la preuve de (24) :

La matrice $\text{mat}_{(B_n)} L$ s'écrit (on omet la base (B_n)) : $\text{mat } L = (V_1, \dots, V_n)$ où $V_k, k = 1, \dots, n$ sont les vecteurs colonnes. Sa matrice de Gram est :

$$G(\text{mat } L) = {}^t(\text{mat } L)^*(\text{mat } L) = \mathbf{1}$$

puisque $(\text{mat } L)$ est supposée orthogonale. Cette condition est assurée si et seulement si les colonnes de $\text{mat } L$, c'est-à-dire les vecteurs $\{V_1, \dots, V_n\}$, forment une base orthonormale.

Supposons cette fois que cette condition est satisfaite, alors :

$$\begin{aligned} {}^t(\text{mat } L)^*(\text{mat } L) = \mathbf{1} &\Rightarrow {}^t({}^t(\text{mat } L)^*(\text{mat } L))^* = ({}^t(\text{mat } L)^* {}^t(\text{mat } L))^* = ({}^t(\text{mat } L))^t ({}^t(\text{mat } L))^* = \mathbf{1} \\ &\Rightarrow ({}^t(\text{mat } L))^t ({}^t(\text{mat } L))^* = ({}^t(\text{mat } L))^* {}^t(\text{mat } L) = \mathbf{1} \end{aligned}$$

donc ${}^t(\text{mat } L)$ est unitaire, donc ses vecteurs colonnes, qui sont les lignes de $(\text{mat } L)$, forment une base orthonormale dans E_n .

CQFD de (24).

Notations :

- $GL_n(\mathbf{C})$: groupe des matrices $n \times n$ inversibles (de déterminant non nul) à coefficients dans \mathbf{C} .
- $U_n(\mathbf{C})$: sous-groupe des matrices $n \times n$ inversibles unitaires (donc vérifiant (22)) :

$$U_n(\mathbf{C}) \subset GL_n(\mathbf{C})$$

- $SL_n(\mathbf{C})$: sous-groupe des matrices inversibles de déterminant = 1

$$SL_n(\mathbf{C}) \subset GL_n(\mathbf{C})$$

- $O(n)$: sous-groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbf{R} , inversibles orthogonales (c'est-à-dire qui conservent le produit scalaire) ; on a vu en (22) qu'elles sont unitaires.
- $SU(n)$: sous-groupe intersection de $U_n(\mathbf{C})$ et $SL_n(\mathbf{C})$:

$$SU(n) = U_n(\mathbf{C}) \cap SL_n(\mathbf{C})$$

(ce sont les matrices unitaires à coefficients complexes de déterminant = 1, donc conservent l'orientation de l'espace).

Lorsque les matrices $n \times n$ sont à coefficients dans \mathbf{R} (réels), $GL_n(\mathbf{C})$ est remplacé par $GL_n(\mathbf{R})$.

$SO_n(\mathbf{R})$ ou $SO(n)$ est le sous-groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbf{R} , orthogonales et de déterminant = 1 ; on a vu que ce sont les rotations dans E_n , ou groupe spécial orthogonal. On a :

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbf{C})$$

On montre les propositions suivantes :

■ **Proposition** : Soit E_2 ($n = 2$) l'espace vectoriel réel de dimension 2. Soit $L \in SO(2)$ élément du groupe spécial orthogonal sur E_2 . Alors il existe un unique $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (c'est-à-dire un nombre réel θ modulo 2π où $k \in \mathbf{Z}$) tel que :

$$L = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = L(\theta)$$

(rotation d'angle θ dans $E_2 = \mathbf{R}^2$).

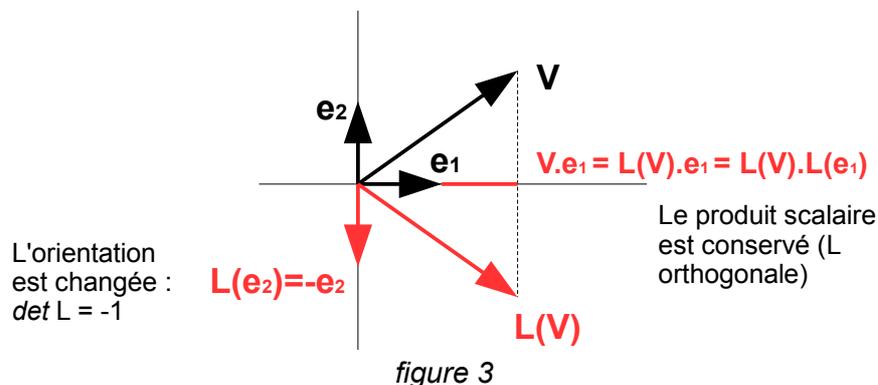
L'application $\theta \rightarrow L(\theta)$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur $SO(2)$.

Rappel : un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ est une application qui commute avec les lois de groupe :

$$\forall a, b \in G ; f(a), f(b) \in G' \text{ et } f(a * b) = f(a) \vee f(b)$$

où $*$ et \vee sont les lois de groupe respectivement de G et G' ; il s'ensuit que $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. On dit alors que G' est une **représentation du groupe** G .

■ **Proposition** : $O(2)$ - $SO(2)$ est le sous-groupe des matrices de symétrie orthogonale ; ce sont des matrices orthogonales qui ne sont pas des rotations dans $E_2 = \mathbf{R}^2$ (figure 3).



2.6 – Propriétés topologiques de $O(3)$ et $SO(3)$

Pour les définitions relatives à la topologie et à la connexité voir point 4.3.

■ **Théorème** : - Le groupe $O(3)$ n'est pas connexe.

(25)

Preuve de (25) : - On utilise le théorème suivant (voir § 4) :

La connexité d'un ensemble connexe est conservée par les applications continues. Si l'image d'un ensemble par une application continue n'est pas connexe, alors l'ensemble de départ n'est pas connexe :

$$f: E \rightarrow f(E) \text{ continue} \\ (E \text{ connexe} \Rightarrow f(E) \text{ connexe}) \Leftrightarrow (f(E) \text{ non connexe} \Rightarrow E \text{ non connexe})$$

Or pour $O(3)$ il existe une application continue :

$$\forall L \in O(3), f(L) = \det L$$

par définition $\det L = +1$ ou -1 , donc $f(O(3)) = \{-1, 1\}$ qui n'est pas connexe. Donc $O(3)$ n'est pas connexe.

CQFD de (25).

$O(3)$ est la réunion de $SO(3)$, matrices de déterminant $+1$, et des matrices de déterminant -1 . Le théorème (25) s'applique de la même manière à $O(n)$.

■ **Théorème** : - Le groupe $SO(3)$, et plus généralement $SO(n)$, est connexe par arcs.

(26)

Preuve de (26) : - Soit $R \in SO(n)$. Il existe alors une matrice orthogonale $M \in O(n)$ telle que $M' = M R M^{-1}$ soit diagonale par blocs, dont les matrices constitutives $R(\theta_k)$ sont des rotations dans E_n d'angle θ_k ; on a :

- si n est pair :

$$M' = \text{Diag} \{R(\theta_k)\}_{k=1, \dots, m} = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\theta_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & R(\theta_m) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{n lignes} \\ \leftarrow \text{n colonnes} \rightarrow \end{matrix}$$

Les matrices $R(\theta_k)$ sont toutes des matrices $n' \times n'$ on a donc $mn' = n$, et comme n est pair : $mn' = 2p$ donc m ou n' est pair.

- si n est impair :

$$M' = \text{Diag} \{1, R(\theta_k)\}_{k=1, \dots, m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\theta_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & R(\theta_m) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{n lignes} \\ \leftarrow \text{n colonnes} \rightarrow \end{matrix}$$

On a cette fois : $mn' = n-1$ pair donc $mn' = 2p$ donc encore m ou n' est pair. De $M' = M R M^{-1}$ on obtient, selon que n soit pair ou impair :

$$M^{-1} M' = R M^{-1} = M^{-1} \text{Diag} \{R(\theta_k)\}_{k=1, \dots, m} \text{ ou } M^{-1} M' = M^{-1} \text{Diag} \{1, R(\theta_k)\}_{k=1, \dots, m}$$

Puisque $M' \in SO(n)$ (par construction) et $M^{-1} \in O(n)$ alors :

$$\det(M^{-1} M') = 1 \text{ donc : } M^{-1} M' \in SO(n)$$

Alors l'application continue :

$f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = M^{-1} \text{Diag} \{ \mathbf{1}, R(x\theta_k) \}_k$ ou $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = M^{-1} \text{Diag} \{ R(x\theta_k) \}_k$ selon que n soit pair ou impair, représente un chemin continu dans $\text{SO}(n)$ qui relie $\mathbf{1}$ (pour $x = 0$) à \mathbf{R} (pour $x = 1$). Donc $\text{SO}(n)$ est connexe par arcs. CQFD de (26).

On a vu, en dimension $n = 2$ ou $n = 3$, que la composition des rotations dans E_2 ou E_3 se traduit par une multiplication des matrices de rotation de $\text{SO}(2)$ ou $\text{SO}(3)$.

- Pour $n = 2$, dans un repère $(O x_1 x_2)$ de base orthonormée (e_1, e_2) , la rotation d'angle θ est donnée par la matrice $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et on a : } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Pour $n = 3$, dans un repère $(O x_1 x_2 x_3)$ de base orthonormée (e_1, e_2, e_3) , une rotation *plane* d'un vecteur, par définition, s'effectue autour d'un axe orthogonal au plan qui contient le vecteur (le plan de rotation). On a vu en (21) qu'une rotation peut être obtenue par composition de plusieurs rotations planes d'axes et de plans différents et que son axe et son angle sont différents des précédents. Inversement, entre un vecteur initial et un vecteur final de même norme et de même origine, il existe une infinité de possibilités de compositions de rotations planes et le vecteur final peut se déduire du vecteur initial par une seule rotation : l'historique des transformations successives n'apparaît pas dans la seule donnée du vecteur final. Les rotations planes les plus simples sont celles dont les axes sont portés par les vecteurs de la base :

- Dans le plan Ox_2x_3 , axe de rotation $\mathbf{U} = e_1$: $R_{x1}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
- Dans le plan Ox_1x_3 , axe de rotation $\mathbf{U} = e_2$: $R_{x2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$
- Dans le plan Ox_1x_2 , axe de rotation $\mathbf{U} = e_3$: $R_{x3}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour une rotation d'angle θ d'axe $\mathbf{U} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ avec $\|\mathbf{U}\|^2 = 1$, donc tel que $R_{\mathbf{U}}(\theta) \mathbf{U} = \mathbf{U}$ l'application de (13) donne :

$$R_{\mathbf{U}}(\theta) = \begin{pmatrix} u_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & u_1 u_2(1-\cos\theta) - u_3 \sin\theta & u_1 u_3(1-\cos\theta) + u_2 \sin\theta \\ u_1 u_2(1-\cos\theta) + u_3 \sin\theta & u_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & u_2 u_3(1-\cos\theta) - u_1 \sin\theta \\ u_1 u_3(1-\cos\theta) - u_2 \sin\theta & u_2 u_3(1-\cos\theta) + u_1 \sin\theta & u_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{pmatrix} \quad (27a)$$

Cette relation montre que la rotation dans E_3 autour de \mathbf{U} fait apparaître 3 endomorphismes (figure 4) :

- $P_{\mathbf{U}}(V)$: projection orthogonale de V sur \mathbf{U} .
- $(\mathbf{1} - P_{\mathbf{U}})(V)$: projection orthogonale de V sur le plan orthogonal à \mathbf{U} .
- $Q_{\mathbf{U}}(V) = \mathbf{U} \times V$: endomorphisme antisymétrique associé à \mathbf{U} , où \mathbf{U} est alors appelé **pseudo-vecteur de Poisson**.

$$R_U(\theta) = P_U + (1 - P_U)\cos\theta + Q_U\sin\theta \quad (27b)$$

où $P_U = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + Q_U^2$ et : $Q_U = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$

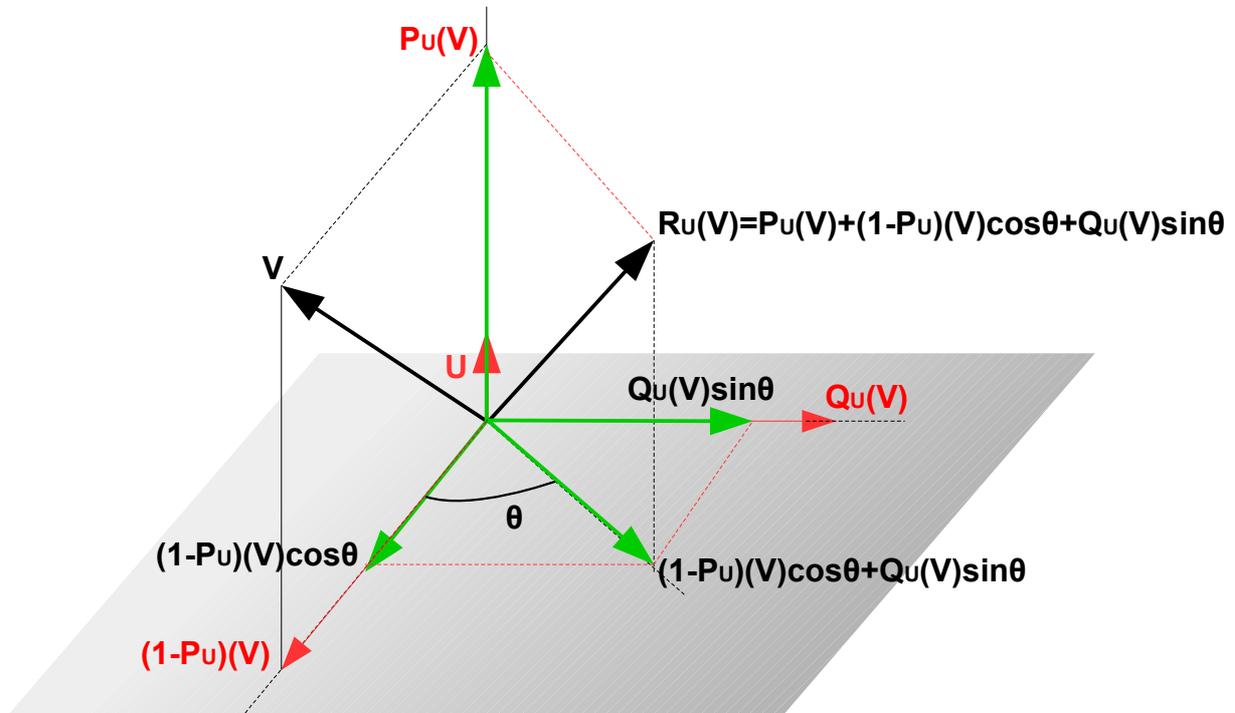


figure 4

La relation (27b) est la même que (13), puisqu'elle peut se réécrire :

$$R_U(\theta)(V) = (\cos\theta)V + (1 - \cos\theta)P_U(V) + (\sin\theta)U \times V$$

Pour n quelconque, le vecteur de la rotation (l'axe) engendre un sous-espace vectoriel de E_n de dimension au plus égale à $(n-2)$.

Par exemple, pour $n = 2$, l'« axe » de rotation est de dimension 0 : c'est un point.

Pour $n = 3$, l'axe de rotation engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n-2 = 1$, donc l'ensemble des vecteurs colinéaires à U (une droite).

Pour $n > 3$ l'axe de rotation n'est plus nécessairement un sous-espace vectoriel de dimension $(n-2)$, il peut être de dimension $(n-3), \dots (n-k)$. Alors la formule (27) ne représente plus une rotation autour d'un axe donné : elle concerne uniquement chaque rotation élémentaire $R_{U_k}(\theta_k)$ d'axes U_k et d'angles θ_k , dont le produit $R_{U_1}(\theta_1) \dots R_{U_k}(\theta_k) = R$ donne la rotation complète (la composition des rotations reste toujours représentée par le produit de leurs matrices).

Quelle que soit la dimension n , la représentation d'une rotation par une matrice présente des ambiguïtés :

- Sur le repère ou le vecteur : une rotation du vecteur V peut être produite par un changement du repère par rotation (rotation « alias » ou « passive »), ou par un changement des coordonnées de V par rotation dans un repère fixe (rotation « alibi » ou « active »).
- Sur l'orientation du repère : direct (orientation positive) ou inverse (orientation négative).
- Sur le déplacement du repère : fixe ou bien mobile (par rapport à un autre repère).
- Sur la nature du vecteur : la rotation s'applique de la même manière au vecteur V de E_n et à son dual V^* de E_n^* (formes linéaires).

Pour éviter ces ambiguïtés, il est préférable de représenter les rotations, quelle que soit n , par la manière dont se transforment les bases de l'espace vectoriel E_n . On va voir que cela permet de conférer une

structure d'algèbre de Lie à $SO(n)$, notée $so(n)$, par l'introduction des rotations infinitésimales et les générateurs infinitésimaux des rotations, à partir desquels les rotations sont construites, sans plus d'ambiguïté, par l'opération d'exponentiation.

Le cas de $SO(3)$ sera traité plus précisément au § 3.

On verra ensuite, au § 4, que le groupe de Lie des matrices $n \times n$ de rotation $SO(n)$, qui est connexe par arcs (théorème (26)), mais pas simplement connexe, admet un groupe de revêtement universel, notion qui sera présentée au § 5 : c'est le groupe Spin, ou groupe des spineurs Spin (n). Les spineurs du groupe Spin(3) se transforment par l'intermédiaire des éléments du groupe spécial unitaire $SU(2)$, et l'on montrera que tout élément de $SU(2)$ peut être représenté par un élément de $SO(3)$; mais ces deux groupes sont topologiquement différents : comme on l'a vu, $SO(3)$ n'est pas simplement connexe, tandis que $SU(2)$ est simplement connexe. Il s'ensuit que Spin(3) est lui aussi simplement connexe, ce qui fait de lui le revêtement universel de $SO(3)$, où le traitement des rotations dans E_3 est plus simple et sans ambiguïté. On verra aussi que Spin(3) est isomorphe au groupe des quaternions de norme 1, sous-groupe de \mathbf{Q}_4 .

3 – Transformations infinitésimales et algèbre de Lie des rotations de $SO(3)$

3.1 - Transformations infinitésimales et représentation exponentielle

Soit une base orthonormée de E_n , (e_1, e_2, e_3) , et (e'_1, e'_2, e'_3) sa transformée par une rotation spatiale d'angle $\|\Omega\|$ autour du vecteur unitaire U colinéaire à Ω : $\Omega = \|\Omega\| U$. Comme vu au point 2.2, on a :

$$e'_k = \sum_{j=1}^3 [R(\Omega)]_{kj} e_j$$

où $[R(\Omega)] = \text{mat } R(\Omega)$ est la matrice de la rotation $R(\Omega)$ autour de Ω d'angle $\|\Omega\|$. Dans la base (e_k) de E_3 le vecteur Ω se décompose en :

$$\Omega = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 \quad (28)$$

avec donc $\|\Omega\|^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les angles de rotation respectivement autour de e_1, e_2, e_3 :

$$R_{e_1}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$R_{e_2}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{e_3}(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit le problème des ambiguïtés évoquées au point 2.6 : comment décrire la rotation dont les composantes sont données ci-dessus ? S'agit-il de leur produit

$$[R(\Omega)] = [R_{e_1}(\theta_1)][R_{e_2}(\theta_2)][R_{e_3}(\theta_3)] \quad ?$$

mais l'ordre est arbitraire, de plus la multiplication des matrices de rotation n'est pas commutative.

Il faut donc trouver une expression de la rotation $[R(\Omega)]$ qui respecte la décomposition (28).

Pour cela, on utilise les transformations infinitésimales des rotations pour des angles $\delta\theta_k$ petits, à partir desquelles la rotation finie sera construite par exponentiation (on justifiera pourquoi c'est l'exponentiation, et pas une autre opération, qui est utilisée ici). On a :

Rotations d'angle $\delta\theta_k$ d'axe Oe_k , $k = 1,2,3$:

$$R_{e1}(\delta\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\theta_1 \\ 0 & -\delta\theta_1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \delta\theta_1 \mathbf{J}_1$$

$$R_{e2}(\delta\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \delta\theta_2 \mathbf{J}_2$$

$$R_{e3}(\delta\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta_3 & 0 \\ -\delta\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \delta\theta_3 \mathbf{J}_3$$

où les \mathbf{J}_k , $k = 1,2,3$ sont les générateurs infinitésimaux du groupe de rotations $SO(3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \left(\frac{dR_{e1}(\theta_1)}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \left(\frac{dR_{e2}(\theta_2)}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_3 &= \left(\frac{dR_{e3}(\theta_3)}{d\theta_3} \right)_{\theta_3=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

qui étaient notés L_k aux points 1 et 13 de [1].

On verra plus loin que les \mathbf{J}_k forment une base de l'algèbre de Lie $so(3)$ du groupe $SO(3)$.

Pour construire les rotations finies à partir des rotations infinitésimales, et donc des générateurs infinitésimaux (\mathbf{J}_k) définis en (29), on utilise le résultat suivant :

■ **Proposition** : $SO(3)$ est une représentation du groupe additif $(\mathbf{R}, +)$ parce que ses rotations sont un morphisme vis-à-vis de l'addition des réels :

Pour deux rotations de même axe :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbf{R}, R(x) \cdot R(y) &= R(x+y) \\ R(x)^{-1} &= R(-x) \\ R_{ek}(\theta_k + \theta_k') &= R_{ek}(\theta_k) \cdot R_{ek}(\theta_k') \end{aligned} \quad (30)$$

Pour un axe de rotation donné, à la loi de groupe multiplication des matrices de $SO(3)$ correspond la loi de groupe addition des réels de \mathbf{R} .

De (30), on obtient par dérivation par rapport à θ_k :

$$\frac{dR_{ek}(\theta_k)}{d\theta_k} \cdot R_{ek}(\theta_k') = \frac{dR_{ek}(\theta_k + \theta_k')}{d\theta_k}$$

Avec $\theta_k = 0$ et $\theta'_k = \theta_{k0}$ il vient :

$$\left(\frac{d R_{ek}(\theta_k)}{d \theta_k} \right)_{\theta_k=0} \cdot R_{ek}(\theta_{k0}) = \frac{d R_{ek}(\theta_{k0})}{d \theta_k}$$

soit d'après (29) :

$$\mathbf{J}_k \cdot R_{ek}(\theta_{k0}) = \frac{d R_{ek}(\theta_{k0})}{d \theta_k} \quad \forall \theta_{k0} \in [-\pi, \pi] \quad (31)$$

Remarque : θ_{k0} prend des valeurs continues mais est borné par $-\pi$ et π . Les rotations étant des applications continues, SO(3) est qualifié de groupe continu ou groupe de Lie. Les valeurs étant prises dans un domaine continu et borné, SO(3) est qualifié de **groupe compact**.

(31) est une équation différentielle à coefficient constant \mathbf{J}_k , dont la solution prend la forme exponentielle :

$$R_{ek}(\theta_k) = R_{ek}(0) \exp(\theta_k \mathbf{J}_k) = \mathbf{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_k^m}{m!} \mathbf{J}_k^m \quad (32)$$

qui est convergente. On retrouve le théorème du § 7, où l'on montre que l'exponentielle est égale à (13). Alors, compte tenu de la décomposition (28) du vecteur Ω caractérisant la rotation, la matrice de celle-ci est donnée par :

$$[R(\Omega)] = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J}) = \exp(\theta_1 \mathbf{J}_1 + \theta_2 \mathbf{J}_2 + \theta_3 \mathbf{J}_3) \quad (33)$$

où \mathbf{J} est le vecteur matriciel $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 e_1 + \mathbf{J}_2 e_2 + \mathbf{J}_3 e_3$.

Remarque importante : On rappelle la mise en garde signalée au point 7.1 de [1] : Les matrices \mathbf{J}_k ne commutent pas entre elles, en conséquence on ne peut pas écrire que le produit des rotations, c'est-à-dire le produit des exponentielles, est égal à la l'exponentielle de la somme des arguments des exponentielles, contrairement à ce que qui se passe pour les exponentiels de scalaires :

$$\exp(\theta_1 \mathbf{J}_1 + \theta_2 \mathbf{J}_2 + \theta_3 \mathbf{J}_3) \neq \exp(\theta_1 \mathbf{J}_1) \cdot \exp(\theta_2 \mathbf{J}_2) \cdot \exp(\theta_3 \mathbf{J}_3)$$

■ **Proposition :** SO(3) a pour algèbre de Lie so(3) dont les coefficients de structure sont donnés par le pseudo-tenseur antisymétrique de Levi-Civita ϵ_{ijk} . (34)

Avant de le prouver, rappelons dans les points suivants la définition d'une algèbre de Lie associée à un groupe de Lie.

3.2 - Groupe de Lie

■ **Définition :** - Les transformations f_j de E_n dans E_n , qui font intervenir p paramètres (α_k) , $k = 1, \dots, p$, qui prennent leurs valeurs dans le corps K de l'espace vectoriel E_n , s'expriment par des opérations sur les α_k , notées $G(\alpha_k)$:

$$\forall M \in E_n, M' = f(M; \alpha_k), k = 1, \dots, p$$

Ces transformations s'expriment avec les coordonnées de M et M' dans une base de E_n :

$$x'_j = f_j(x_1, \dots, x_n; \alpha_k), k = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, n$$

soit :

$$M' = G(\alpha_k)(M), k=1, \dots, p \quad (35)$$

Si l'ensemble des opérateurs $G(\alpha_k)$ est un groupe \mathbf{G} et si les valeurs que les α_k prennent dans le corps K sont continues et en nombre infini, alors il forme un groupe continu à p paramètres, ou **groupe de Lie** :

- $\forall \alpha_k, \alpha_k' \in K, G(\alpha_k)G(\alpha_k') = G(\alpha_k'')$ $\Leftrightarrow \exists \varphi: K \rightarrow K, \alpha_k'' = \varphi(\alpha_k, \alpha_k') \in K$
- $\forall \alpha_k \in K, \forall M \in E_n, M' = G(\alpha_k)(M) \Leftrightarrow M = G(\alpha_k)^{-1}(M')$

La transformation inverse G^{-1} existe si et seulement si le jacobien de $f(M; \alpha_k)_{k=1, \dots, p}$ est non nul :

$$\det \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_m} \right]_{m, j=1, \dots, n} \neq 0$$

Si $p = 1$, le groupe \mathbf{G} des opérateurs est un groupe continu à 1 paramètre : c'est le cas des rotations $SO(3)$, le paramètre étant l'angle de rotation $\theta \in [-\pi, \pi] \subset \mathbf{R}$. Si f est linéaire, alors (35) est le produit d'une matrice associée à $G(\alpha_k)$ et d'un vecteur $M \in E_n$:

$$M' = [G(\alpha_k)]M$$

3.3 - Algèbre de Lie

■ **Définition** : - Soit \mathbf{G} un espace vectoriel de dimension q , de vecteurs de base $(B_j), j = 1, \dots, q$, sur un corps commutatif K (qui peut être \mathbf{R} ou \mathbf{C}). Sur \mathbf{G} est défini un produit des vecteurs X, Y , noté $[X, Y]$ et appelé **crochet de Lie**.

$\{\mathbf{G}, [,]\}$ est une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$, si et seulement si les 4 propriétés suivantes sont vérifiées par le crochet de Lie :

- a) stabilité : $Z = [X, Y] \in \mathbf{G}$
- b) linéarité : $\forall a, b \in K, \forall X, Y, Z \in \mathbf{G} : [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$
- c) anti-commutativité : $\forall X, Y \in \mathbf{G} : [X, Y] = -[Y, X]$
- d) **identité de Jacobi** : $\forall X, Y, Z \in \mathbf{G} : [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

(36)

Pour les vecteurs de la base, $[B_i, B_j]$ est aussi un vecteur de \mathbf{G} donc il se décompose sur la base $(B_k), k = 1, \dots, q$ avec des coordonnées c_{ijk} appelées **constantes de structure** de l'algèbre de Lie :

$$[B_i, B_j] = \sum_{k=1}^q c_{ijk} B_k \quad (37)$$

Attention : $[B_i, B_j]$ ne forment pas une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , celle-ci est de dimension différente de celle de \mathbf{G} : on verra plus loin comment déterminer la dimension d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$. Des propriétés (c) et (d) de (36) il résulte les relations entre les coefficients de structure :

$$c_{ijk} = -c_{jik}$$

$$\sum_{k=1}^q (c_{ijk} c_{klm} + c_{jlk} c_{kim} + c_{lik} c_{kjm}) = 0 \quad (38)$$

3.4 - Transformations infinitésimales et opérateurs infinitésimaux

Soit h une fonction dérivable prenant ses valeurs dans E_n ; ça peut être un champ scalaire ou un champ vectoriel, ou une fonction d'onde.

Comment se transforme la fonction h par l'application de la transformation continue à p paramètres α_k de E_n dans E_n , définie par (35) ?

L'action de h sur l'image M' de M par f fait intervenir la **fonction induite** par f sur h , définie par :

$$\begin{aligned} H(f)h(M) &=: h(M') = h[G(\alpha_k)(M)]; k=1, \dots, p \\ \text{soit: } H(G)h &= h(G(\alpha_k)) \end{aligned} \quad (39)$$

Pour des variations élémentaires des paramètres continus $\delta\alpha_k$, les opérateurs G de \mathbf{G} à p paramètres ont une variation élémentaire au voisinage de l'opérateur identité $\mathbf{1}$ telle que :

$$\delta G = G(\delta\alpha_k); k=1, \dots, p$$

Alors la variation de l'image M' de M par f est donnée par :

$$M' = M + \delta M = f(M; \delta\alpha_k); k=1, \dots, p$$

qui s'explique en :

$$x_j' = x_j + \delta x_j = f_j(x_m; \delta\alpha_k); m=1, \dots, n; k=1, \dots, p$$

qui donne au voisinage de $G(0) = \mathbf{1}$:

$$\delta x_j = f_j(x_m; \delta\alpha_k) - f_j(x_m; 0) = \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \delta\alpha_k$$

ce qui injecté dans (39) donne :

$$\begin{aligned} H(\delta G)h(M) &= h(M') = h(x_m')_{m=1, \dots, n} = h(x_m + \delta x_m)_{m=1, \dots, n} \\ &= h(x_m)_{m=1, \dots, n} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} \delta x_j = h(x_m)_{m=1, \dots, n} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \delta\alpha_k \right] \\ &= \left(\mathbf{1} + \left[\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \delta\alpha_k \right) h(M) \end{aligned}$$

L'opérateur infinitésimal de la fonction induite par G sur le champ h est finalement :

$$H(\delta G) = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \mathbf{J}_k \delta\alpha_k \quad (40)$$

où les \mathbf{J}_k sont les générateurs infinitésimaux du groupe \mathbf{G} des opérateurs dans E_n :

$$\mathbf{J}_k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \frac{\partial}{\partial x_j} ; k=1, \dots, p \quad (41)$$

NB : au point 13.1 de [1] on avait noté par X_k au lieu de \mathbf{J}_k les générateurs infinitésimaux.

Lorsque f est une rotation dans E_3 , d'angles d'Euler $\alpha_k = \theta_k$, $k = 1, 2, 3$ et pour h fonction identité ($h(M) = M' = M$ donc $\partial h / \partial x_j = 1$ donc $\partial / \partial x_j \equiv 1$), (41) donne les \mathbf{J}_k exprimés en (29).

Les J_k sont donc les générateurs infinitésimaux du groupe de Lie $\mathbf{G} = \text{SO}(3)$ des rotations dans E_3 . Pour démontrer (34) on a besoin du théorème de Lie ci-après.

3.5 - Conditions pour que les transformations continues forment un groupe

■ **Théorème de Lie** : - Les transformations continues (35) de paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ forment un groupe (de Lie) si et seulement si le crochet de Lie de deux générateurs infinitésimaux du groupe \mathbf{G} des opérateurs correspondants est une combinaison linéaire de tous les générateurs infinitésimaux :

$$[J_m, J_j] = J_m J_j - J_j J_m = \sum_{k=1}^p c_{mjk} J_k \quad (42)$$

qui est de la forme (37), où les c_{mjk} sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie, qui vérifient (37) et (38).

Or c'est bien le cas pour $\mathbf{G} = \text{SO}(3)$: en effet les générateurs infinitésimaux (29) vérifient :

$$[J_1, J_2] = -J_3, \quad [J_2, J_3] = -J_1, \quad [J_3, J_1] = -J_2$$

qui se rassemblent en :

$$[J_m, J_j] = -\varepsilon_{mjk} J_k \quad (43)$$

où la convention de sommation d'Einstein sur l'indice qui se répète est sous-entendue. ε_{mjk} est le pseudo-tenseur antisymétrique de Levi-Civita (égal à +1 ou -1 selon la permutation des indices). Les coefficients de structure de $\text{SO}(3)$ sont donc :

$$c_{mjk} = \varepsilon_{mjk}$$

et donc, d'après le théorème (42), $\text{SO}(3)$ est un groupe de Lie.

Pour terminer la démonstration, on utilise la traduction de la définition (36) d'une algèbre de Lie pour le groupe $\text{SO}(3)$, $\text{so}(3)$:

On a vu en (33) qu'un élément $R(\Omega)$ de $\text{SO}(3)$ s'écrit par l'exponentiation :

$$R(\Omega) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J})$$

avec ${}^t R(\Omega) = R^{-1}(\Omega)$ (car R est orthogonale), $\det(R) = +1$ (car R est unitaire), $R^{-1}(\Omega) = R(-\Omega)$ et ${}^t[\Omega \cdot \mathbf{J}] = -\Omega \cdot \mathbf{J}$, ou, puisque $\Omega = \|\Omega\| U$: ${}^t \mathbf{J} = -\mathbf{J}$, soit ${}^t J_k = -J_k$, $k = 1, 2, 3$. Donc la matrice $\Omega \cdot \mathbf{J}$ est antisymétrique ; on la note G_Ω

$$G_\Omega = \Omega \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3 \quad (44)$$

$G_\Omega = \Omega \cdot \mathbf{J}$ est appelée **générateur**, il se projette sur les générateurs infinitésimaux avec les coordonnées du vecteur rotation ; (33) s'écrit aussi :

$$R(\Omega) = \exp G_\Omega \quad (44\text{bis})$$

La matrice générateur G_Ω est un opérateur vectoriel antisymétrique (produit vectoriel) dans E_3 :

$$\forall V \in E_n : G_\Omega(V) = \omega \times V \in E_3 \quad (45)$$

où $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ dans une base (e_1, e_2, e_3) de E_3 .

3.6 - Dimension d'une algèbre de Lie

■ *Proposition* : Les J_k forment une base de $so(3)$, en tant qu'espace vectoriel réel des générateurs G_Ω construits sur les rotations dans E_3 , $so(3)$ est défini par :

$$so(3) = \left\{ G_\Omega ; \Omega \in E_3(\mathbf{R}) ; {}^t G_\Omega = -G_\Omega \right\} \quad (46)$$

Preuve de (46) : - On a bien l'équivalence : ${}^t R(\Omega) = R(\Omega)^{-1} \Leftrightarrow {}^t G_\Omega = -G_\Omega$. En effet :

$${}^t R(\Omega) = R(\Omega)^{-1} \Leftrightarrow \exp({}^t G_\Omega) = \exp(G_{-\Omega}) \text{ car } R(\Omega)^{-1} = R(-\Omega) \text{ donc :}$$

$${}^t R(\Omega) = R(\Omega)^{-1} \Leftrightarrow \exp({}^t G_\Omega) = \exp(-G_\Omega) \text{ car } G_{-\Omega} = -\Omega \cdot \mathbf{J} = -G_\Omega \text{ donc :}$$

$${}^t R(\Omega) = R(\Omega)^{-1} \Leftrightarrow {}^t G_\Omega = -G_\Omega$$

CQFD de (46).

D'après (44) la dimension de l'algèbre de Lie $so(3)$ est égale à 3, le nombre de paramètres indépendants par lesquels sont définies les rotations de $SO(3)$ dans E_3 . C'est un résultat général pour n : $\dim Lie(SO(n))$ est égal au nombre p de paramètres continus indépendants α_k . On le vérifie ainsi :

Pour $SO(n) \subset O(n)$ on a vu la condition d'orthogonalité :

$$\forall R \in SO(n), {}^t R R = \mathbf{1} \text{ soit } {}^t R = R^{-1}$$

Au voisinage de la transformation unité $R(0) = \mathbf{1}$, on a vu aussi que R se développe au premier ordre par (40) :

$$R = \mathbf{1} + \delta R$$

où δR est une transformation infinitésimale ; donc l'orthogonalité donne :

$$\begin{aligned} {}^t R R &= {}^t (\mathbf{1} + \delta R) (\mathbf{1} + \delta R) = \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{1} + {}^t \delta R) (\mathbf{1} + \delta R) = \mathbf{1} + \delta R + {}^t \delta R + {}^t \delta R \delta R \\ &= \mathbf{1} + \delta R + {}^t \delta R = \mathbf{1} \end{aligned}$$

au premier ordre. Donc :

$$\delta R + {}^t \delta R = 0 \quad (46\text{bis})$$

donc δR est une matrice antisymétrique à coefficients réels, elle appartient à $so(n)$, ce qui a été énoncé dans (46). La matrice $n \times n$ $[R]$ de $SO(n)$ dépend de n^2 paramètres g_{ij} . Or si elle vérifie (46bis) ou (46), les composantes triangulaires sont reliées. Or il y a $1+2+\dots+(n-1)+n = n(n+1)/2$ composantes dans le triangle à droite de la diagonale, celle-ci y étant incluse ; d'après (46bis) elles vérifient :

$$g_{ij} = -g_{ji} ; i \leq j ; i, j = 1, \dots, n$$

Le nombre de composantes indépendantes est alors : $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$; donc :

$$\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2} = p \quad (47)$$

Pour $\mathfrak{so}(3)$ algèbre de Lie de $SO(3)$ on donc, d'après (47) : $\dim \mathfrak{so}(3) = 3 \times (3-1)/2 = 3$.
Ceci termine la preuve de (34).
CQFD de (34).

3.7 - Retour sur la notation exponentielle

On peut retrouver (44bis) de la façon suivante, qui est applicable pour tout groupe de Lie \mathbf{G} :

Le développement d'un opérateur $R \in \mathbf{G}$ au voisinage de $R(0) = \mathbf{1}$ s'écrit, comme on l'a déjà vu, par sa transformation infinitésimale :

$$\delta R = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \mathbf{J}_k \delta \alpha_k$$

La transformation finie est obtenue en appliquant N fois, avec $N \rightarrow \infty$, la transformation infinitésimale. Pour une N -ième étape, $\delta \alpha_k$ étant très petit, on l'assimile à la N -ième partie du paramètre fini α_k :

$$\delta \alpha_k = \alpha_k / N$$

L'opération δR étant appliquée N fois, on a donc à la N -ième étape :

$$R(N) = \left(\mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \mathbf{J}_k \frac{\alpha_k}{N} \right)^N$$

et lorsque $N \rightarrow \infty$: $R(\alpha_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \mathbf{J}_k \frac{\alpha_k}{N} \right)^N$

On applique la formule connue : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp x$, d'où finalement :

$$R(\alpha_k) = \exp \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{J}_k \right) \quad (48)$$

3.8 - Relations de commutation et structure de groupe des transformations

Puisque les $R(\alpha_k)$ forment un groupe multiplicatif \mathbf{G} , à partir de (48) on peut retrouver la relation de commutation d'une algèbre de Lie (37). En effet :

(48) s'écrit encore, avec le produit $\Omega \cdot \mathbf{J} = G_\Omega = \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{J}_k$ et l'on a (44bis) : $R(\Omega) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J})$

Puisque \mathbf{G} est un groupe multiplicatif, le produit de deux opérateurs donne un autre opérateur qui s'exprime sous la forme (44) :

$$\begin{aligned} \forall R(\Omega), R(\Omega') \in \mathbf{G}; \exists R(\Omega'') \in \mathbf{G} : R(\Omega) R(\Omega') &= R(\Omega'') \\ \Leftrightarrow \exp(\Omega \cdot \mathbf{J}) \exp(\Omega' \cdot \mathbf{J}) &= \exp(\Omega'' \cdot \mathbf{J}) \end{aligned}$$

En exprimant les R au voisinage de $R(0) = \mathbf{1}$ on a au premier ordre : $\delta R = R(\delta \Omega) = \mathbf{1} + \delta \Omega \cdot \mathbf{J}$, et relations analogues pour $R(\delta \Omega')$ et $R(\delta \Omega'')$, d'où : $\exp(\delta \Omega \cdot \mathbf{J}) \exp(\delta \Omega' \cdot \mathbf{J}) = \exp(\delta \Omega'' \cdot \mathbf{J})$. En développant l'exponentielle au premier ordre :

$$\exp(\delta\Omega.\mathbf{J})=\mathbf{1}+\delta\Omega.\mathbf{J}+\dots \text{ et } \exp(\delta\Omega'.\mathbf{J})=\mathbf{1}+\delta\Omega'.\mathbf{J}+\dots$$

le produit donne : $(\mathbf{1}+\delta\Omega.\mathbf{J})(\mathbf{1}+\delta\Omega'.\mathbf{J})=\mathbf{1}+\delta\Omega.\mathbf{J}+\delta\Omega'.\mathbf{J}+(\delta\Omega.\mathbf{J})(\delta\Omega'.\mathbf{J})+\dots$

Le logarithme de cette expression doit être égale à : $\log(\exp(\delta\Omega''.\mathbf{J}))=\delta\Omega''.\mathbf{J}$

En développant le logarithme en série au voisinage de $\mathbf{1}$, et en utilisant le produit ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} & \log(\mathbf{1}+\delta\Omega.\mathbf{J}+\delta\Omega'.\mathbf{J}+(\delta\Omega.\mathbf{J})(\delta\Omega'.\mathbf{J})) \\ &= \mathbf{1}+(\delta\Omega+\delta\Omega').\mathbf{J}+(\delta\Omega.\mathbf{J})(\delta\Omega'.\mathbf{J})-\frac{1}{2}((\delta\Omega+\delta\Omega').\mathbf{J}+(\delta\Omega.\mathbf{J})(\delta\Omega'.\mathbf{J}))^2 \\ &= \mathbf{1}+(\delta\Omega+\delta\Omega').\mathbf{J}+\frac{1}{2}((\delta\Omega.\mathbf{J})(\delta\Omega'.\mathbf{J})-(\delta\Omega'.\mathbf{J})(\delta\Omega.\mathbf{J}))+\text{termes en } \delta\Omega^2 \text{ et } \delta\Omega'^2 \\ &= \mathbf{1}+\sum_{k=1}^p (\alpha_k+\alpha_k')\mathbf{J}_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p \sum_{m=1}^p (\alpha_i\alpha_m'\mathbf{J}_i\mathbf{J}_m-\alpha_i'\alpha_m\mathbf{J}_m\mathbf{J}_i) \\ &= \mathbf{1}+\sum_{k=1}^p (\alpha_k+\alpha_k')\mathbf{J}_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha_i\alpha_m'[\mathbf{J}_i,\mathbf{J}_m]=\delta\Omega''.\mathbf{J}=\sum_{k=1}^p \alpha_k''\mathbf{J}_k \end{aligned}$$

donc il est nécessaire que, pour toutes valeurs de α_k, α_k' dans K les crochets de Lie des générateurs infinitésimaux soient reliés linéairement aux générateurs infinitésimaux, donc qu'il existe c_{imk} dans K tels que :

$$[\mathbf{J}_i,\mathbf{J}_m]=\sum_{k=1}^p c_{imk}\mathbf{J}_k$$

qui est (37).

3.9 - Formule de Baker-Campbell-Hausdorff et condition de commutation

■ *Proposition* : Dans (37), on a $\Omega'' = \Omega + \Omega'$, autrement dit on a :

$$\exp(\Omega.\mathbf{J})\exp(\Omega'.\mathbf{J})=\exp((\Omega+\Omega').\mathbf{J})=R(\Omega)R(\Omega')=R(\Omega+\Omega') \quad (49)$$

si et seulement si G_Ω et $G_{\Omega'}$ commutent : $[G_\Omega,G_{\Omega'}]=0$

Esquisse de preuve de (49) : - De manière générale les matrices $n \times n$ G_Ω et $G_{\Omega'}$ d'une algèbre de Lie ne commutent pas, sauf si $n = 2$. Il s'ensuit que les rotations $R(\Omega)=\exp(G_\Omega)$ ne forment pas un espace vectoriel, bien que l'on puisse écrire, par exemple dans $SO(3)$, la décomposition vue en (28).

En effet, le produit de deux rotations donne une rotation dont l'angle et l'axe ne se déduisent pas aisément de leurs angles et de leurs axes, puisque l'on montre qu'il se décompose selon la **formule de Baker-Campbell-Hausdorff**, ou formule BCH (voir Annexe 1) :

$$R(\Omega)R(\Omega')=(\exp G_\Omega)(\exp G_{\Omega'})=\exp G_{\Omega''} \text{ avec :}$$

$$G_{\Omega''}=G_\Omega+G_{\Omega'}+\frac{1}{2}[G_\Omega,G_{\Omega'}]+\frac{1}{12}[G_\Omega,[G_\Omega,G_{\Omega'}]]-\frac{1}{12}[G_{\Omega'},[G_\Omega,G_{\Omega'}]]+\dots \quad (50)$$

où $G_\Omega=\Omega.\mathbf{J}$ et $G_{\Omega'}=\Omega'.\mathbf{J}$.

On voit bien que si G_Ω et $G_{\Omega'}$ commutent, $[G_\Omega,G_{\Omega'}]=0$, seul subsiste :

$$G_{\Omega''}=G_\Omega+G_{\Omega'}=(\Omega+\Omega').\mathbf{J}=\Omega''.\mathbf{J}$$

donc $\Omega''=\Omega+\Omega'$, ce qui est généralement faux.

CQFD de (49).

■ **Proposition** : Pour tout G, G', G'' appartenant à $\text{Lie}(\mathbf{G})$:

$$\begin{aligned} [G, G'G''] &= [G, G']G'' + G'[G, G''] \\ [GG', G''] &= [G, G'']G' + G[G', G''] \end{aligned}$$

(51)

Preuve de (51) :

$$\begin{aligned} [G, G'G''] &= GG'G'' - G'G''G = GG'G'' - G'G''G - G'GG'' + G'GG'' \\ &= (GG'G'' - G'GG'') + (G'GG'' - G'G''G) = (GG' - G'G)G'' + G'(GG'' - G''G) \\ &= [G, G']G'' + G'[G, G''] \end{aligned}$$

Pour la seconde relation on se ramène au cas précédent en utilisant : $[GG', G''] = -[G'', GG']$
CQFD de (51).

Remarque : Les relations de commutation (37) définissent l'algèbre de Lie du groupe de Lie \mathbf{G} , et pour $c_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$, c'est l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ du groupe spécial orthogonal $\text{SO}(n)$. Plus généralement, l'algèbre de Lie de \mathbf{G} , $\text{Lie}(\mathbf{G}) = \mathfrak{g}$, par ses coefficients de structure permet de déterminer la structure locale du groupe \mathbf{G} , c'est-à-dire sa « table de multiplication ». On verra que deux groupes différents peuvent avoir la même algèbre de Lie, la réciproque étant généralement fautive. En particulier $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$ ont la même algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$, ce qui est d'autant plus facile à vérifier que $\text{SO}(3)$ est une représentation de $\text{SU}(2)$.

4 – Groupe de Lie $\text{SU}(2)$, son algèbre de Lie et les spineurs (voir aussi [9], [23], [24], [5], [19])

4.1 - Définition du groupe $\text{SU}(2)$, lien avec les quaternions

Le groupe $\text{SU}(2)$ est le groupe spécial unitaire des endomorphismes L de $E = \mathbf{C}^2$, donc leurs matrices $[L]$ 2×2 à coefficients complexes vérifient la condition d'unitarité et la conservation de l'orientation de l'espace :

$$\begin{aligned} {}^t[L]^*[L] &= \mathbf{1} \text{ soit: } L^+L = \mathbf{1} \\ \det[L] &= 1 \end{aligned} \quad (52)$$

Rappel : un groupe unitaire conserve le produit scalaire :

$$\forall u, u' \in \mathbf{C}^2 : (u|u') = (Lu|Lu') = {}^t(Lu)^* Lu' = (u|{}^tL^* Lu')$$

d'où la première condition de (52) : ${}^t[L]^*[L] = \mathbf{1}$ c'est-à-dire $L^+L = \mathbf{1}$ avec $[L]^+ = {}^t[L]^*$.

De plus : $\det([L][L]^+) = \det \mathbf{1} = 1 = \det[L](\det {}^t[L])^* = |\det[L]|^2$ car $\det {}^t[L] = \det[L]$.
le déterminant d'une matrice unitaire 2×2 complexe vérifie donc :

$$|\det[L]|^2 = 1 \quad (53)$$

Par conséquent il est de la forme : $\det[L] = \exp j\theta$.

La deuxième condition de (52) implique celle (53), mais la réciproque est fautive. Par exemple, la matrice diagonale 2×2 $[L] = \text{Diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ est bien unitaire, car $|\det[L]|^2 = |e^{i(\theta+\theta')}|^2 = 1$ mais ne vérifie pas $\det[L] = 1$: en général $\det[L]e^{i(\theta+\theta')} \neq 1$ sauf si $\theta+\theta' = 0$ modulo 2π .

■ **Proposition** : Toute matrice de $\text{SU}(2)$ est de la forme suivante, où z_1 et z_2 sont deux nombres (54)

complexes tels que $\det[L] = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$:

$$[L] = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}$$

Preuve de (54) : - Par définition on a : ${}^t[L]^* = [L]^{-1}$ et $\det[L] = 1$

Soit à trouver a, b, c, d pour : $[L] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et ${}^t[L]^* = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

Comme : $[L]^{-1} = \frac{1}{\det[L]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et puisque ${}^t[L]^* = [L]^{-1}$ il vient :

$$d = a^* , \quad -c = b^* , \quad -b = c^* , \quad a = d^*$$

De : $\det[L] = 1 = ad - bc \Rightarrow dd^* + bb^* = 1 \Rightarrow |d|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 + |c|^2 = 1$ d'où :

$$a = z_1 , \quad d = a^* = z_1^* , \quad c = z_2 , \quad b = -c^* = -z_2^*$$

CQFD de (54).

Avec $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ il vient : $\det[L] = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$.

$[L] \in SU(2)$ est donc un quaternion unitaire comme défini aux § 1 et 6. On a vu au § 6 qu'il peut s'écrire comme la somme d'un scalaire réel et d'un quaternion pur **P** assimilable à un vecteur **V** de \mathbf{R}^3 :

$$L = x_1 \mathbf{1} + V \quad \text{avec :} \quad V = \begin{pmatrix} iy_1 & -x_2 + iy_2 \\ x_2 + iy_2 & -iy_1 \end{pmatrix}$$

et donc sous la forme :

$$L = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{1} + \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) U \quad \text{avec} \quad x_1 = \cos \frac{\theta}{2} , \quad \|V\|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} , \quad U = n \cdot A$$

où : $A = (A_1, A_2, A_3)$ avec : $A_1 = -i\sigma_2$, $A_2 = i\sigma_3$, $A_3 = i\sigma_1$ et $n = \frac{1}{\|V\|} (-x_2, y_1, y_2)$ vecteur de norme 1 : $\|n\| = 1$ et les matrices de Pauli σ_k , $k = 1, 2, 3$, avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

L s'écrit alors aussi :

$$L(\theta) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{1} + \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) n \cdot \sigma \quad (55)$$

La relation (55) montre que les quaternions unitaires de $SU(2)$ s'écrivent aussi sous forme exponentielle ; comme on l'a vu au point 2.2 :

$$L(\theta) = \exp(i\Omega \cdot \frac{\sigma}{2}) \quad (56)$$

où : $\Omega = \|\Omega\| n$, $\theta = \|\Omega\|$

Avec $U = n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3$, (55) s'explique en :

$$L = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \frac{\theta}{2} \left(-n_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

un changement d'axes $n_1 \rightarrow -n_2$, $n_2 \rightarrow n_3$, $n_3 \rightarrow n_1$ permet d'expliciter l'expression de L précédente avec la notation usuelle :

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i n_3 \sin \frac{\theta}{2} & (n_2 + i n_1) \sin \frac{\theta}{2} \\ (-n_2 + i n_1) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - i n_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Puisque $\|n\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ on vérifie sans difficulté que L est unitaire :

$$[L(\theta)][L(\theta)]^+ = [L(\theta)]^t [L(\theta)]^* = \mathbf{1}$$

Conclusion : $L(\theta) = \exp(i\Omega \cdot \frac{\sigma}{2})$ est une matrice unitaire.

■ *Proposition* : Les matrices de Pauli σ_k , $k = 1, 2, 3$, sont les générateurs infinitésimaux du groupe SU(2) – équivalent au groupe des quaternions unitaires – et vérifient les mêmes relations de commutation que ceux J_k de SO(3) :

$$\left[i \frac{\sigma_k}{2}, i \frac{\sigma_m}{2} \right] = -\varepsilon_{kmj} i \frac{\sigma_j}{2}$$

(58)

(de façon analogue, on a vu : $[J_k, J_m] = \varepsilon_{kmi} J_i$).

La vérification de (58) est immédiate. Au voisinage de $L(0) = \mathbf{1}$, (56) donne au premier ordre :

$$L(\delta\theta) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} n \cdot \sigma \delta\theta$$

ce qui montre que les σ_k sont des générateurs infinitésimaux de SU(2). D'après le théorème (42), puisque SO(3) et SU(2) ont les mêmes coefficients de structure locale, ceux-ci caractérisent localement la loi interne des groupes SO(3) et SU(2) de la même façon.

On déduit alors la proposition suivante :

■ *Proposition* : Les deux groupes SO(3) et SU(2) sont reliés par un homomorphisme D et SO(3) est une représentation de SU(2) :

$$D: SU(2) \rightarrow SO(3) \\ \forall L \in SU(2), \exists R_L \in SO(3): R_L = D(L)$$

(59)

Preuve de (59) : - Il s'agit de trouver une matrice $R_L \in SO(3)$ à partir d'une matrice L de SU(2).

Pour cela, montrons que tout vecteur $V = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbf{R}^3 se décompose de manière unique sur une base constituée des matrices de Pauli de l'espace vectoriel des matrices complexes $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$:

$$\forall V \in \mathbf{R}^3, \exists M \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C}): M = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 = V \cdot \sigma$$

$$\text{alors : } M = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad (60)$$

ce qui donne $M^+ = M$. $M = 0$ si et seulement si $x_3 = x_1 = x_2 = 0$ donc les σ_k forment une famille libre et la décomposition est unique sur cette famille.

Attention : M ne doit pas être confondu avec un quaternion pur (point 1.3) puisque x_3 est réel.

Déterminant de M :

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{vmatrix} = -x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = -\|V\|^2$$

Les produits matriciels $\mathbf{M}\sigma_k$ donnent :

$$\mathbf{M}\sigma_k = x_1\sigma_1\sigma_k + x_2\sigma_2\sigma_k + x_3\sigma_3\sigma_k \quad k = 1, 2, 3$$

La trace de $\mathbf{M}\sigma_k$ est égale à la trace de la matrice $x_j\delta_{jk}\mathbf{1}$ puisque $\text{tr}(\sigma_k) = 0$ et $\sigma_k^2 = \mathbf{1}$:

$$\text{tr}(\mathbf{M}\sigma_k) = x_k \text{tr} \mathbf{1} = 2x_k \quad \text{soit :}$$

$$x_k = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{M}\sigma_k) \quad (61)$$

Donc pour toute matrice \mathbf{M} de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ de la forme (60) il existe un vecteur $V = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbf{R}^3 unique dont les coordonnées sont données par (61), et tel que $\mathbf{M} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = V \cdot \sigma$.

L'homomorphisme de groupes D cherché doit, par définition, conserver les structures de groupes $SO(3)$ et $SU(2)$:

$$\forall L, L' \in SU(2) : R_L R_{L'} = R_{LL'} \in SO(3)$$

R_L doit en outre respecter la condition suivante :

Pour tout $V \in \mathbf{R}^3$ auquel correspond une seule matrice \mathbf{M} de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ vérifiant (60), (61) et la propriété du déterminant $\det \mathbf{M} = -\|V\|^2$, sa transformation par R_L doit donner un vecteur $V' \in \mathbf{R}^3$ auquel correspond une seule matrice \mathbf{M}' de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ qui satisfait aussi (60), (61) et $\det \mathbf{M}' = -\|V'\|^2$. Soit alors l'application de $SU(2)$ vers $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ qui à tout $L \in SU(2)$ fait correspondre un endomorphisme de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ défini par :

$$F : SU(2) \rightarrow \text{End}(M_{2 \times 2}(\mathbf{C})) \\ L \rightarrow F(L)$$

tel que pour toute matrice \mathbf{M} de la forme (60), correspond une matrice de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$, \mathbf{M}' telle que :

$$\mathbf{M}' = F(L)(\mathbf{M}) = L \mathbf{M} L^{-1}$$

avec comme condition que \mathbf{M}' vérifie (60), (61) et $\det \mathbf{M}' = -\|V'\|^2$ si et seulement si \mathbf{M} vérifie (60), (61) et $\det \mathbf{M} = -\|V\|^2$. Si cette condition nécessaire et suffisante est satisfaite, alors on pourra définir un endomorphisme dans \mathbf{R}^3 , R_L , qui conserve les lois de groupe, qui est unitaire et de déterminant égal à 1 (donc une rotation) :

$$V' = R_L(V), \quad V \in \mathbf{R}^3$$

Puisque $F(L)$ est défini par $(-L)\mathbf{M}(-L^{-1}) = L\mathbf{M}L^{-1}$ on a $F(-L) = F(L)$.

On vérifie alors :

$$a) \quad \mathbf{M}' = L \mathbf{M} L^{-1} = \exp(i\Omega \cdot \sigma / 2) \mathbf{M} \exp(-i\Omega \cdot \sigma / 2) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} n \cdot \sigma \right) \mathbf{M} \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} n \cdot \sigma \right)$$

or $n \cdot \sigma = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$, $\mathbf{M}(\cos \theta / 2) \mathbf{1}$ et $\mathbf{M}(n \cdot \sigma)$ sont de la forme (60), en effet le produit de deux matrices de type (60) l'est aussi :

$$(V \cdot \sigma)(V' \cdot \sigma) = \sum_{i,j} x_i x'_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{où les } \sigma_i \sigma_j = \varepsilon \sigma_k \text{ avec } \varepsilon \in \{-i, i\}$$

donc est de la forme (60). Donc M' est de la forme (60).

Puisque $M^+ = M$ et $L^{-1} = L^+$ on a aussi :

$$M'^+ = (L M L^{-1})^+ = (L M L^+)^+ = (L M^+ L^+)^+ = L^{++} M^{++} L^+ = L M L^+ = L M L^{-1} = M'$$

$$\text{tr}(M') = \text{tr}(L M L^{-1}) = \text{tr}(M) = 0 \quad \text{par hypothèse}$$

Il s'ensuit qu'il existe un seul vecteur $V' \in \mathbf{R}^3$ tel que $M' = V' \cdot \sigma$; il existe donc un endomorphisme de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 associé à L tel que $\forall V \in \mathbf{R}^3, V' = R_L(V)$.

■ b) *Proposition* : R_L est une rotation, élément de $SO(3)$.

(62)

En effet : il faut montrer que l'image $V' = R_L(V)$ de V vérifie aussi (61), que la norme est conservée (isométrie) et que $\det(R_L) > 0$ (conservation de l'orientation de l'espace).

b1) Norme de $V' = R_L(V)$: on a vu que $M' = V' \cdot \sigma$ et que $\det M' = -\|V'\|^2$.

Or : $M' = L M L^{-1}$ d'où $\det M' = \det(L M L^{-1}) = \det((\exp(i\Omega \cdot \sigma/2)) M (\exp(-i\Omega \cdot \sigma/2)))$
comme $\det(\exp(i\Omega \cdot \sigma/2)) = \det(\exp(-i\Omega \cdot \sigma/2)) = 1$, il reste : $\det M' = \det M$. Donc :

$$\|V'\|^2 = \|V\|^2$$

R_L est donc une isométrie.

b2) La preuve détaillée de $\det(R_L) > 0$, par un calcul direct, est en Annexe 2.

CQFD de (59).

On récapitule ce point 4.1.

Nous venons de voir :

- Les éléments du groupe de Lie $SU(2)$ des endomorphismes unitaires de $E_n = \mathbf{C}^2$ sont les quaternions $L(\theta)$ donnés par (55) ou (56).
- Les matrices de Pauli σ_k sont les générateurs infinitésimaux de $SU(2)$ et vérifient les relations de commutation (58).
- Ces relations de commutation sont les mêmes que celles des générateurs infinitésimaux du groupe de Lie des endomorphismes orthogonaux $SO(3)$.
- Il existe donc un homomorphisme de groupes $D: SU(2) \rightarrow SO(3)$ qui associe à tout endomorphisme L de $SU(2)$ une rotation $R_L = D(L)$ de $SO(3)$ qui agit sur les vecteurs de $E = \mathbf{R}^3$.
- La détermination de R_L est possible parce que tout vecteur V de \mathbf{R}^3 est isomorphe à une matrice M de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ qui se décompose de manière unique selon (60), et les coordonnées de V sont données par (61) :

$$x_k = \frac{1}{2} \text{tr}(M \sigma_k) = \frac{1}{2} \text{tr}((V \cdot \sigma) \sigma_k)$$

- L'homomorphisme de groupes D est tel que que l'endomorphisme R_L dans $E = \mathbf{R}^3$ est une rotation (proposition (62)), avec $M' = V' \cdot \sigma = L(V \cdot \sigma)L^{-1} = L M L^{-1}$ matrice de $SU(2)$ isomorphe à V', et M matrice de $SU(2)$ isomorphe à V.
- Les éléments r_{ij} de la matrice de rotation R_L sont donnés par (A2.1) de l'Annexe 2 :

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i L \sigma_j L^{-1})$$

On a donc bien le résultat suivant : le groupe de Lie SO(3) est une représentation du groupe de Lie SU(2), dont les éléments sont les quaternions de \mathbf{Q}_4 . Cependant, SO(3) et SU(2) sont topologiquement différents : SO(3) est connexe par arcs et SU(2) est simplement connexe. Mais ils ont la même algèbre de Lie, par suite de l'identité des relations de commutation de leurs générateurs infinitésimaux :

$$\mathfrak{so}(3) = \text{Lie}(\text{SO}(3)) = \mathfrak{su}(2) = \text{Lie}(\text{SU}(2))$$

Remarque : SO(3) est un groupe, par conséquent une rotation $R_L(\theta)$ suivie d'une rotation $R_L(\theta')$ donne aussi une rotation $R_L(\theta'')$. Mais, comme le montre la formule BCH (50), θ'' ne s'exprime pas de manière simple en fonction de θ et θ' .

Remarque : généralisation du concept de vecteur de $E = \mathbf{R}^3$:
 On appelle vecteur tout objet qui se transforme par une matrice de SO(3) lorsque les repères de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$ se transforment par une rotation.
 SO(3) est alors dit **représentation vectorielle** du groupe des rotations dans $E = \mathbf{R}^3$.
 Dans cette généralisation, un vecteur, au sens de la représentation, désigne tout objet qui engendre la représentation SO(3) du groupe de rotations dans $E = \mathbf{R}^3$.

Le schéma suivant (figure 5) rassemble ces résultats et montre les relations entre les différents espaces qui interviennent dans la représentation de SU(2) par SO(3).

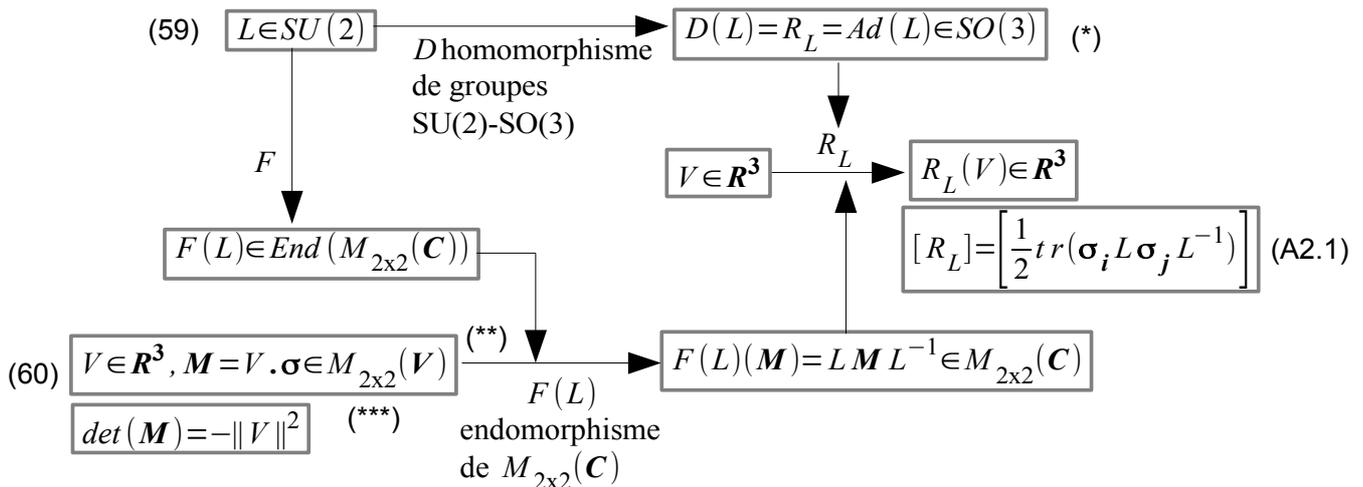


figure 5

(*) On verra au point 4.2.5 que R_L est la représentation adjointe de SU(2) sur son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$

(**) On verra que $M = V \cdot \sigma$, avec V vecteur de \mathbf{R}^3 , est élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, donc $\dim \mathfrak{su}(2) = 3$, d'où $\mathfrak{su}(2) \sim \mathbf{R}^3$

(***) On verra au point 4.2.5 que $\det(M)$ est la métrique de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de SU(2)

4.2 - SO(3) en tant que représentation de SU(2)

4.2.1 – Morphisme du groupe SU(2) dans le groupe SO(3)

Par le théorème (59) on a vu que SO(3) est une représentation de SU(2), au sens où il existe un homomorphisme D de SU(2) vers SO(3) qui fait correspondre à tout $L \in \text{SU}(2)$ un élément $R_L \in \text{SO}(3)$, rotation de E dans E dont les éléments de matrice sont donnés par (A2.1).

La représentation n'est pas un isomorphisme : SU(2) n'est pas une représentation de SO(3), D n'a pas d'inverse ; on dit encore que **la représentation n'est pas fidèle**.

En effet : aux matrices L et $-L$ de SU(2) est associée la même matrice $R_L = R_{-L}$ de SO(3) :

Soit $V' = R_L(V)$; soit $V \in E$ et $V'' = R_{-L}(V)$; les matrices associées à V et V'' dans SU(2)

sont respectivement :

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} \text{ et } \mathbf{M}' = \mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}_{-L}(\mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = (-L)\mathbf{M}(-L)^{-1} = L\mathbf{M}L^{-1} = \mathbf{R}_L(\mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}' = \mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

donc $\mathbf{V}' = \mathbf{V}'$ et donc :

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{R}_{-L} \text{ , } D(-L) = D(L) \quad (63)$$

On a vu qu'à tout vecteur \mathbf{V} de $E = \mathbf{R}^3$ est associée de manière bijective une matrice complexe 2×2 hermitienne de trace nulle : $\mathbf{M}(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ avec $\text{tr} \mathbf{M}(\mathbf{V}) = 0$ puisque $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_k = 0$ $k = 1, 2, 3$. L'application est un isomorphisme entre \mathbf{R}^3 et l'ensemble des matrices complexes 2×2 hermitiennes de trace nulle, noté $M'_{2 \times 2}(\mathbf{C})$:

$$E = \mathbf{R}^3 \rightarrow M'_{2 \times 2}(\mathbf{C}) \\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} = x_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + x_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + x_3 \boldsymbol{\sigma}_3 \text{ , } x_k \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ est hermitienne puisque les matrices de Pauli le sont : $\boldsymbol{\sigma}_k^+ = {}^t \boldsymbol{\sigma}_k^* = \boldsymbol{\sigma}_k$ $k = 1, 2, 3$.

Le carré de $\mathbf{M}(\mathbf{V})$ est égal au carré de la norme de \mathbf{V} ; en effet :

$$(\mathbf{M}(\mathbf{V}))^2 = (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (x_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + x_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + x_3 \boldsymbol{\sigma}_3)(x_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + x_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + x_3 \boldsymbol{\sigma}_3) = x_1^2 \boldsymbol{\sigma}_1^2 + x_1 x_2 \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 + x_1 x_3 \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_3 \\ + x_2 x_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_1 + x_2^2 \boldsymbol{\sigma}_2^2 + x_2 x_3 \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 + x_3 x_1 \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_1 + x_3 x_2 \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_2 + x_3^2 \boldsymbol{\sigma}_3^2$$

Or : $\boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2 = \boldsymbol{\sigma}_3^2 = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_1 = -i \boldsymbol{\sigma}_3$; $\boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 = i \boldsymbol{\sigma}_1$; $\boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_1 = -i \boldsymbol{\sigma}_2$; $\boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_2 = i \boldsymbol{\sigma}_1$; $\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 = i \boldsymbol{\sigma}_3$; $\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_3 = i \boldsymbol{\sigma}_2$ d'où

$$(\mathbf{M}(\mathbf{V}))^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \mathbf{1} + x_1 x_2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_1) + x_1 x_3 (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_1) + x_2 x_3 (\boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\sigma}_2)$$

Les trois derniers termes de la somme sont nuls par suite de l'anti-commutation des matrices de Pauli, il reste donc :

$$(\mathbf{M}(\mathbf{V}))^2 = \|\mathbf{V}\|^2 \mathbf{1} \quad (64)$$

On a aussi :

Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux de $E = \mathbf{R}^3$: $e_k \cdot e_j = \delta_{kj}$

Alors on obtient :

$$\mathbf{M}(e_1) \mathbf{M}(e_2) \mathbf{M}(e_3) = i(e_1 \times e_2) \cdot e_3 \mathbf{1} \quad (65)$$

Preuve de (65) :

$$\mathbf{M}(e_k) = e_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_k \text{ d'où } \mathbf{M}(e_1) \mathbf{M}(e_2) \mathbf{M}(e_3) = \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 = (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \boldsymbol{\sigma}_3 = (i \boldsymbol{\sigma}_3) \boldsymbol{\sigma}_3 = i \mathbf{1}$$

Or : $e_1 \times e_2 = e_3$ d'où : $i(e_1 \times e_2) \cdot e_3 \mathbf{1} = i e_3 \cdot e_3 = i \mathbf{1}$ d'où l'égalité.

CQFD de (65).

A l'aide de (64) et (65) on peut montrer que l'endomorphisme défini par :

$$\mathbf{R}_L : E \rightarrow E \\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}' = \mathbf{R}_L(\mathbf{V}) \\ \mathbf{M}(\mathbf{V}') = \mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}_L(\mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = L \mathbf{M}(\mathbf{V}) L^{-1} = L(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}) L^{-1}$$

où $L \in SU(2)$, conserve $\|\mathbf{V}\|^2$ et l'orientation de l'espace E , soit $\det(\mathbf{R}_L) > 0$, c'est-à-dire \mathbf{R}_L est une rotation dans E , élément de $SO(3)$. Ceci est une autre démonstration du théorème (62) qui énonce que l'on associe à toute transformation unitaire $L \in SU(2)$, ou quaternion, une rotation \mathbf{R}_L de $SO(3)$, et que cette correspondance est un morphisme D du groupe $SU(2)$ dans le groupe $SO(3)$, à savoir :

$$D(L)D(L')=R_L R_{L'}=R_{LL'}=D(LL')$$

Le centre de SU(2) est, par définition, le sous-ensemble C(SU(2)) des L' qui commutent avec tous les $L \in SU(2)$. On sait que l'on a :

$$C(SU(2)) = \{-1, \mathbf{1}\}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité 2x2. On applique le morphisme D aux éléments du centre :

$$D(\mathbf{1})=R_{\mathbf{1}}, \quad D(-\mathbf{1})=R_{-\mathbf{1}}=D(\mathbf{1})=R_{\mathbf{1}} \text{ d'après (63), d'où :}$$

$D(-\mathbf{1}\mathbf{1})=D(-\mathbf{1})=D(-\mathbf{1})D(\mathbf{1})=D(\mathbf{1})$ qui n'est possible que si $D(\mathbf{1})=D(-\mathbf{1})=\mathbf{1}$ donc le noyau (1) du morphisme de groupes D est le centre :

$$\text{Ker } D = C(SU(2))$$

Or un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est l'élément neutre, c'est-à-dire ici $\{1\}$; or ce n'est pas le cas puisque $\text{Ker } D = \{-1, \mathbf{1}\}$, donc D n'est pas une bijection : ce n'est pas un isomorphisme, SO(3) n'est pas une représentation fidèle de SU(2).

$L \in SU(2)$ Étant un quaternion, il est de la forme (1) :

$$[L] = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}$$

et sa norme vérifie : $\|L\|^2 = \det L = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ puisque L est unitaire. Or :

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

et $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ conduit à poser : $|z_1| = \cos \theta_3$ et $|z_2| = \sin \theta_3$.

Il s'ensuit que tout élément L de SU(2) est défini par 3 angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ tels que :

$$L(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) & -\sin \theta_3 (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ \sin \theta_3 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) & \cos \theta_3 (\cos \theta_1 - i \sin \theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \exp i \theta_1 & -\sin \theta_3 \exp(-i \theta_2) \\ \sin \theta_3 \exp i \theta_2 & \cos \theta_3 \exp(-i \theta_1) \end{pmatrix}$$

que l'on peut toujours mettre sous la forme d'un produit de 3 matrices unitaires :

$$L(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \exp i \frac{\alpha_1}{2} & 0 \\ 0 & \exp -i \frac{\alpha_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_2}{2} & \sin \frac{\alpha_2}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_2}{2} & \cos \frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp i \frac{\alpha_3}{2} & 0 \\ 0 & \exp -i \frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} \quad (66)$$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sont reliés aux $\theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$\theta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, \quad \theta_3 = -\frac{\alpha_2}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}$$

La relation (66) montre que le groupe SU(2) est paramétré par 3 angles tout comme SO(3) (pour SO(3) il s'agit des angles d'Euler par exemple), ce qui illustre la possibilité d'un morphisme entre ces groupes ; mais ces paramètres angulaires n'ont pas les mêmes domaines de variation :

Pour SO(3) :

$$\forall R \in SO(3), \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 : R = R_1(\beta_1) R_2(\beta_2) R_3(\beta_3) \text{ où } \beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi] \text{ et } \beta_3 \in [0, \pi]$$

1 Le noyau d'un morphisme D est l'ensemble des éléments du groupe qui ont l'élément neutre e comme image :

$$L \in \text{Ker } D \iff D(L) = e$$

Pour $SU(2)$, si $\alpha_1 \in [0, 2\pi]$ et $\alpha_2 \in [0, \pi]$ alors $\alpha_3 \in [0, 4\pi]$. Il existe donc des rotations construites avec $SU(2)$ qui permettent de revenir au même point initial au bout de 2 tours des axes sur eux-mêmes. On verra que cette propriété, que ne pouvait pas prévoir la formalisation classique des rotations, se rencontre chez les spineurs et leurs applications en mécanique quantique.

4.2.2 – Paramétrage des éléments de $SO(3)$

Le fait que les éléments de $SO(3)$ soient paramétrés par 3 angles est compatible avec l'écriture (33) ou (44) qui fait intervenir le générateur $G_\Omega = \Omega \cdot \mathbf{J}$:

$$R(\Omega) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J})$$

où le vecteur rotation Ω se décompose sur une base orthonormée de $E = \mathbf{R}^3$ selon (28) :

$$\Omega = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 = \|\Omega\| \mathbf{U}$$

ce qui caractérise la rotation également par 3 angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; l'angle total de rotation est $\|\Omega\|$ qui, rappelons-le, n'est pas du tout la somme des trois angles : c'est l'angle compris entre les projections du vecteur initial V et de son image V' sur le plan orthogonal au vecteur de rotation \mathbf{U} . Décrire les rotations, comme éléments de $SO(3)$, par Ω lui confère aussi la propriété de groupe de Lie à 1 paramètre. De ce point de vue, la différence avec l'écriture exprimée par les 3 angles $\beta_k, k = 1, 2, 3$ vue plus haut, est que :

$$\|\Omega\| \in [-\pi, \pi] \quad (67)$$

parce que la rotation, étant définie modulo 2π , elle ne fait pas passer le vecteur par un même point, donc Ω est dans la boule $B(O, \pi) \subset E = \mathbf{R}^3$ de centre O (qui correspond à $R(\Omega) = \mathbf{1}$ et de rayon π).

Pour ces mêmes raisons, les β_k sont bornés par :

$\beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi]$: le vecteur peut parcourir un tour entier dans 2 plans ...

$\beta_3 \in [0, \pi]$: mais pas dans le troisième plan, sinon il repasse par les mêmes points.

On dit alors : $\|\Omega\| \in \mathbf{R}$ modulo 2π .

Donc $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ définit une rotation de manière unique tant que $\|\Omega\| < \pi$; mais lorsque $\|\Omega\| = \pi$, donc lorsque $\Omega = -\pi\mathbf{U}$ ou $+\pi\mathbf{U}$, le vecteur atteint le même point par 2 rotations : $R(-\pi) = R(\pi)$ et les points opposés A et A' sur la boule $B(O, \pi)$ correspondent à la même rotation (figure 6) :

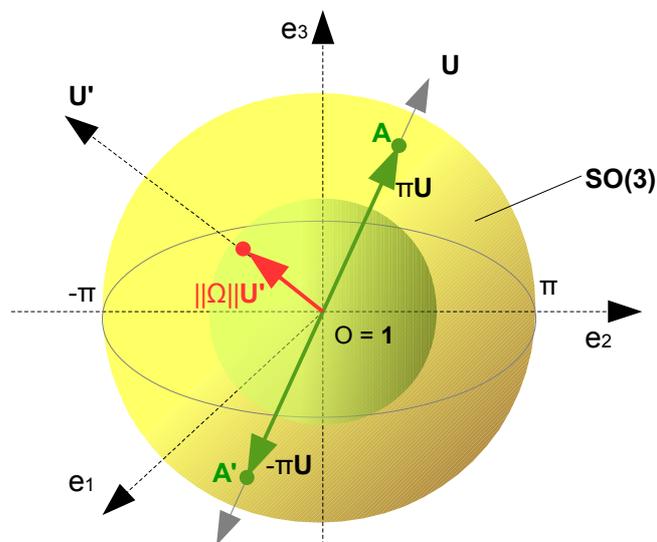


figure 6 : boule $SO(3)$

La remarque est la même pour les éléments de $SU(2)$: on a vu en (55) que la rotation s'exprime avec un angle total autour du vecteur unitaire \mathbf{n} donné par :

$\theta = \|\Omega\|$ avec : $\Omega = \|\Omega\| \mathbf{n} = \theta \mathbf{n}$, soit :

$$L(\theta) = \exp\left(i\Omega \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

appliquée à un quaternion pur \mathbf{P} isomorphe à un vecteur de \mathbf{R}^3 (voir point 2.2).

Le générateur $G_{\Omega} = i\Omega \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ qui intervient dans L joue le rôle de l'opérateur spin en mécanique quantique. Pour les mêmes raisons que pour les rotations $SO(3)$, on a cette fois :

$$\theta = \|\Omega\| \in [-2\pi, 2\pi] \quad (68)$$

puisque'il intervient par $\theta/2$ dans (55). Les vecteurs rotation Ω qui interviennent dans L de $SU(2)$ sont donc dans une boule $B(O, 2\pi) \subset \mathbf{R}^3$ de centre O (qui correspond à la rotation identité $\mathbf{1}$) et de rayon 2π . Mais les points pour lesquels $\theta = \pm 2\pi$ (points à la surface de la boule) sont identiques et coïncident avec la rotation $-\mathbf{1}$ de $SU(2)$, en effet :

$$L(2\pi) = L(-2\pi) = \cos(\pm\pi) \mathbf{1} = -\mathbf{1} \quad (69)$$

On a alors : $\|\Omega\| = \theta \in \mathbf{R}$ modulo 4π .

NB : Cette identification des points de la surface de la boule $B(O, 2\pi)$ à un seul point entraîne que $SU(2)$ est isomorphe à la sphère S^3 en tant que groupe de Lie. C'est d'ailleurs une conséquence de la définition de la norme dans $SU(2)$, donnée par (54) :

$$\|L\|^2 = \det L = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$$

qui est l'équation de la sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$.

D'autre part on a vu en (66) que les éléments de $SU(2)$ font intervenir 3 paramètres d'angle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ qui, pour les mêmes raisons évoquées ci-dessus sur le caractère d'unicité des rotations, prennent les valeurs :

$\alpha_1 \in [0, 2\pi]$: rotation complète dans un plan ;

$\alpha_2 \in [0, \pi]$: demi-rotation dans un autre plan ;

$\alpha_3 \in [0, 4\pi]$: double rotation complète dans un troisième plan pour revenir au même point, puisque globalement les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ doivent avoir la même couverture que pour $\theta = \|\Omega\|$.

Toujours dans $SU(2)$, revenant à la paramétrisation $\Omega = \|\Omega\| \mathbf{n} = \theta \mathbf{n}$ avec $\theta = \|\Omega\| \in [-2\pi, 2\pi]$ on a :

$$L(\theta + 2\pi) = \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{2} \right) \mathbf{1} + i \left(\sin \frac{\theta + 2\pi}{2} \right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -L(\theta)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} L(\theta + 2\pi) &= -L(\theta) \\ L(\theta + 4\pi) &= L(\theta) \end{aligned} \quad (70)$$

D'où le schéma représentatif de la boule $SU(2)$ figure 7.

La sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ à laquelle $SU(2)$ est isomorphe (elle est même difféomorphe) est une boule de dimension 3 dans \mathbf{R}^3 , où tous les points de la surface sont identifiés à un même point.

De même la sphère S^2 , telle un ballon ou la Terre, est un disque D^2 de dimension 2 dont le bord, le cercle qui le délimite, est identifié à un même point.

De même, le cercle S^1 est un segment $[-1, 1]$ dont les extrémités 1 et -1 sont identifiées à un même point.

De manière générale, une sphère de dimension n , S^n , est une boule B^n de dimension n dont tous les points de la surface, son bord ∂B^n , sont identifiés à un même point (figure 8).

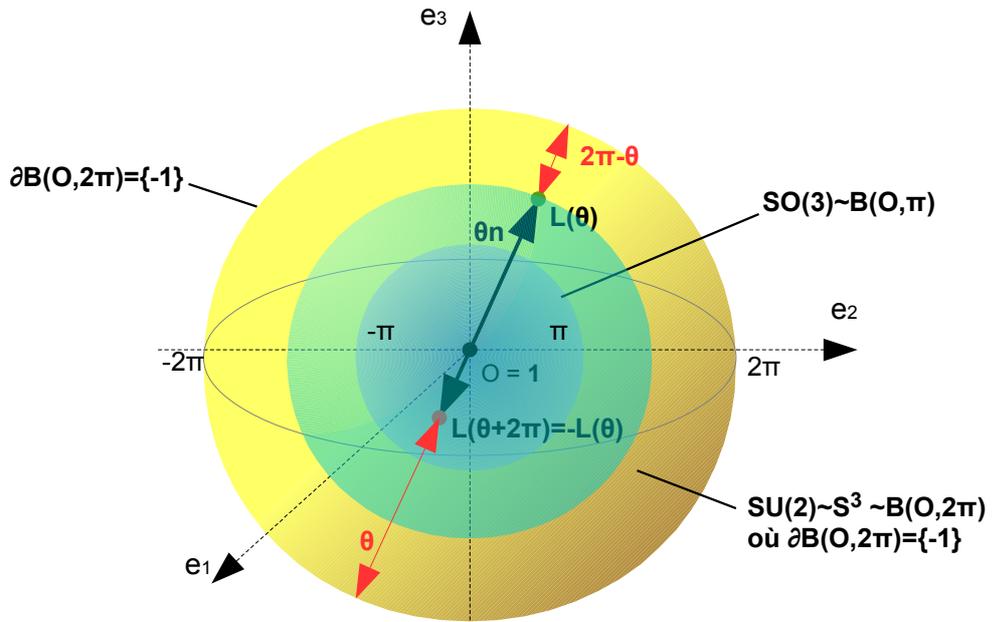


figure 7 : boule $SU(2)$ isomorphe à S^3

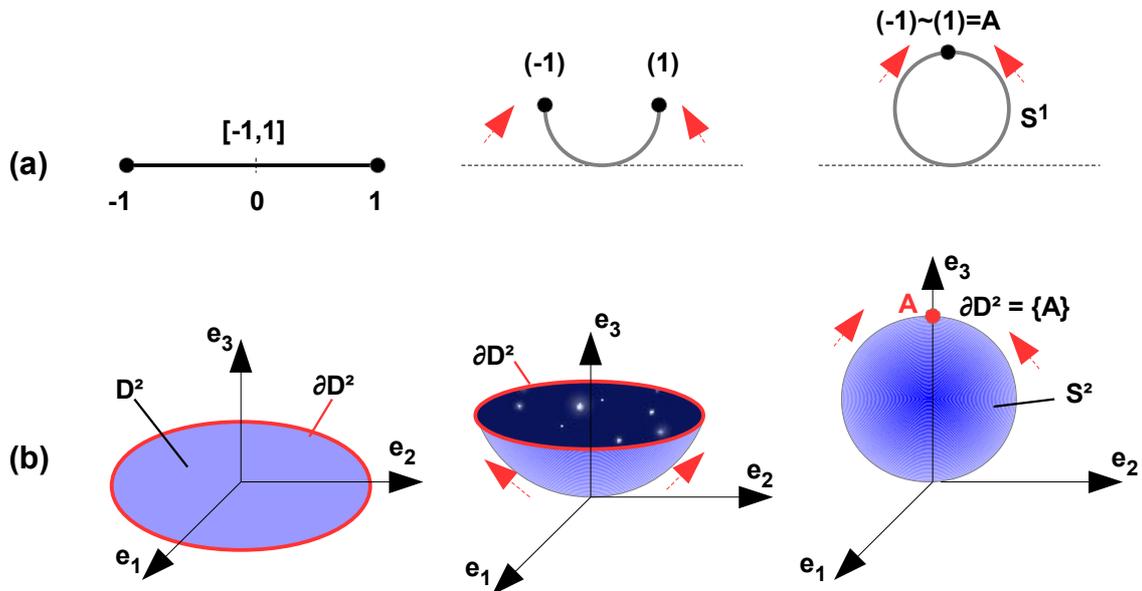


figure 8 : (a) correspondance d'une « boule » 1D, le segment $[-1,1]$ avec la « sphère » 1D, le cercle S^1
 (b) correspondance d'une « boule » 2D, le disque D^2 , avec la sphère 2D, S^2 , ces correspondances étant telles que les « bords » deviennent identifiés à un point, les extrémités (-1) et (1) pour le segment, le cercle ∂D^2 bord du disque D^2

4.2.3 – Utilisation en physique quantique

On a vu au point 3.5 que les générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ sont \mathbf{J}_k , $k = 1,2,3$ et que tout élément $R(\Omega) \in SO(3)$ s'exprime en fonction d'eux par (44) :

$$R(\Omega) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J}) = \exp G_\Omega$$

avec $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_k)_{k=1,2,3}$ et $\Omega = \|\Omega\| \mathbf{U} = \theta \mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k e_k$, \mathbf{U} vecteur unitaire définit l'axe de rotation, les générateurs de $SO(3)$ sont $G_\Omega = \Omega \cdot \mathbf{J}$ avec (29) :

$$\mathbf{J}_k = \left(\frac{\partial R_{e_k}}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0}$$

Une rotation au voisinage de l'unité s'écrit par (40) avec $h = \text{id}$:

$$\delta R_k = R_k(e_k, \delta \alpha_k) = \mathbf{1} + \mathbf{J}_k \delta \alpha_k$$

Les expressions (29) de \mathbf{J}_k permettent de les rassembler par l'écriture de leurs éléments de matrice :

$$[\mathbf{J}_k]_{ij} = \varepsilon_{ijk} \quad (71)$$

où ε_{ijk} est le pseudo-tenseur antisymétrique de Levi-Civita.

En mécanique quantique on remplace (40), (23) et (71) par les expressions suivantes afin de donner aux générateurs infinitésimaux la dimension d'un moment cinétique :

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{J}_k]_{ij} &= i \hbar \varepsilon_{ijk} \\ \delta R_k &= \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{J}_k \delta \alpha_k \\ \mathbf{J}_k &= i \hbar \left(\frac{\partial R_{e_k}}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \end{aligned} \right\} (72)$$

où $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck, homogène à une action (ou à un moment cinétique qui en a les mêmes dimensions) J.s. Les relations de commutation (43) sont alors remplacées par :

$$[\mathbf{J}_m, \mathbf{J}_j] = i \hbar \varepsilon_{mjk} \mathbf{J}_k \quad (73)$$

Les rotations de SO(3) données par (44) deviennent alors :

$$R(\Omega) = \exp\left(-i \theta \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \cdot \mathbf{U}\right) \quad (74)$$

Considérons maintenant une fonction h , ou opérateur, telle que celle présentée au point 3.4. Si la transformation continue f à p paramètres α_k de E_n dans E_n est une rotation $R(\alpha_k)$ (2), donc si $f = R(\alpha_k)$, alors la fonction induite par R sur h est, d'après (39) :

$$\forall V \in E_n : H(R(\alpha_k))h(V) = h(R(\alpha_k)(V))$$

soit :

$$H(R(\alpha_k))h = h(R(\alpha_k))$$

Pour une rotation infinitésimale, H devient, d'après (40) et (41) :

$$\begin{aligned} H(\delta R_k)h &= H(R(\delta \alpha_k))h = h(R(\delta \alpha_k)) = h(\mathbf{1} + \mathbf{J}_k \delta \alpha_k) \\ &= h(\mathbf{1}) + \left(\frac{\partial h}{\partial (\mathbf{J}_k \alpha_k)} \right)_{\alpha_k=0} \mathbf{J}_k \delta \alpha_k = h(\mathbf{1}) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k} h(R_k) \right)_{\alpha_k=0} \delta \alpha_k = h(\mathbf{1}) + \mathbf{J}_k' \delta \alpha_k \end{aligned}$$

où :

2 Où l'on a noté $G(\alpha_k)(V) = f(V, \alpha_k) = R(\alpha_k)(V)$ dans (39) pour simplifier l'écriture.

$$\mathbf{J}_k' = \left(\frac{\partial h(R_k)}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \quad (75)$$

générateurs infinitésimaux de l'opérateur h .

En mécanique quantique, $h(V)$ peut être la fonction d'onde $\psi(V)$ avec $V \in \mathbf{R}^3$. Soit $V' = R(V)$ l'image de V par la rotation R , élément de $SO(3)$ (on a omis α_k pour alléger l'écriture). La rotation donne une nouvelle fonction d'onde $\Psi'(V')$ telle que, puisque $V = R^{-1}(V')$:

$$\psi'(V) = \psi(R^{-1}V) =: [R]\psi(V) \quad (76)$$

où, par définition, $[R]\Psi$ est la fonction induite par R sur Ψ ; $[R]\Psi$ joue le rôle de $H(R)$ dans la relation $H(R)h = h(R)$ où R est remplacée par R^{-1} et h par Ψ dans (39). La correspondance entre Ψ et Ψ' étant bijective, on peut écrire formellement (figure 9):

$$\forall V \in \mathbf{R}^3 : \psi' = [R]\psi \quad (76\text{bis})$$

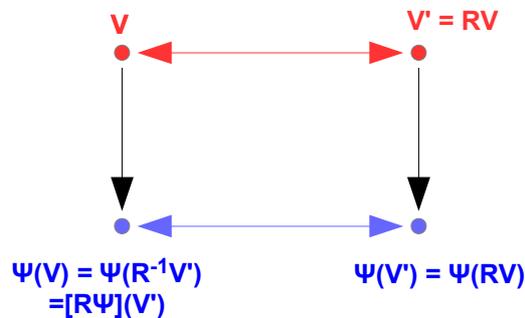


figure 9 : fonction induite par la rotation

La norme hilbertienne d'une fonction d'onde est inchangée par la rotation (principe quantique : la probabilité d'un état quantique ne dépend pas du système de coordonnées). Les fonctions d'onde sont éléments d'un espace de Hilbert \mathbf{H} , muni du produit scalaire des fonctions d'onde, que l'on note :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_E \psi(V) \varphi^*(V) d\omega$$

où $d\omega$ représente l'élément de volume d'intégration de l'espace de configuration ; c'est pourquoi on note encore par $|\psi\rangle$ la fonction d'onde, ou par $|a\rangle$ l'une de ses composantes représentant un des états superposés, ou par $\langle \psi |$ son hermitique conjugué. La norme est alors exprimée par :

$$\|\psi\|_{\mathbf{H}}^2 = \langle \psi | \psi \rangle$$

Celle-ci est conservée par $[R]$:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= [R]|\psi\rangle \\ \langle \psi'| &= \langle \psi | [R]^+ \end{aligned}$$

car : $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi' | [R]\psi \rangle = \langle [R]\psi | \psi' \rangle = \langle \psi | [R]^+ \psi' \rangle$ d'où : $\langle \psi' | = \langle \psi | [R]^+$; alors :

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | [R]^+ [R] | \psi \rangle$$

et comme R est un endomorphisme orthogonal (cf. (23)) on a : $[R]^+ = [R^+] = [R^{-1}] = [R]^{-1}$ donc :

$$[R][R^+] = [R]^+[R] = \mathbf{1} \quad (77)$$

Remarque : R vérifient la loi de groupe de SO(3) :

$$R(\alpha_k)R(\beta_j)=R(\gamma_m)\in SO(3)$$

mais ce n'est pas le cas des fonctions induites [R] : $|\psi''\rangle=[R']|\psi'\rangle$ et $|\psi'\rangle=[R]|\psi\rangle$ donnent $|\psi''\rangle=[R'] [R]|\psi\rangle$ qui a même norme, mais comme $|\psi\rangle, |\psi'\rangle, |\psi''\rangle$ diffèrent par une phase près qui disparaît dans leur norme, la composition des rotations maintient l'existence des phases $\varphi(R,R')$.
Donc pour la fonction induite, on n'a pas $[R'] [R]=[R' R]$ mais on a :

$$[R' R]=\varphi(R, R')[R'] [R] \quad (78)$$

En mécanique quantique, une observable est un opérateur différentiel qui agit sur une fonction d'onde pour donner une autre fonction d'onde :

$$A: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

Par exemple l'observable énergie, ou hamiltonien, est $A=H=i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$.

Comment les rotations agissent-elles sur les observables ?

Pour répondre, on utilise le principe posant que la valeur moyenne d'une observable, ou résultat de mesure, est indépendante du système de coordonnées ; cette valeur moyenne est celle de l'une des composantes $|a\rangle$ de la fonction d'onde $|\Psi\rangle$: $|\Psi\rangle = \sum_a a|a\rangle$ ainsi :

$$\langle a \rangle = \langle a | A | a \rangle = \langle a' \rangle = \langle a' | A' | a' \rangle \quad \text{où } |a'\rangle = [R]|a\rangle, \text{ d'où}$$

$$\langle a \rangle = \langle a' | A' [R] a \rangle = \langle a' | [R]^\dagger A' [R] | a \rangle, \quad \forall |a\rangle \in \mathbf{H} \text{ donc :}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= [R]^\dagger A' [R] \\ A' &= [R] A [R]^\dagger \end{aligned} \right| \quad (79)$$

Les relations (79) caractérisent la « rotation des états quantiques ».

■ Proposition : Une observable A est invariante par rotation R si et seulement si elle commute avec la rotation induite :

$$[A, [R]] = [[R], A] = 0$$

(80)

Preuve de (80) : - (79) donne $A = [R]^\dagger A' [R]$ et, d'après (77), on a : $A [R] = [R] A$, soit :
 $A [R] - [R] A = [A, [R]] = [[R], A] = 0$

CQFD de (80).

4.2.4 – Observable moment cinétique

Montrons, à partir de (74), qu'une rotation infinitésimale se traduit sur une fonction d'onde par l'action de l'observable moment cinétique.

Pour une rotation infinitésimale d'angle $\theta = \varepsilon \ll 1$ autour de \mathbf{U} , (74) devient :

$$R(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \cdot \mathbf{U}$$

où \mathbf{J} , en tant que générateur infinitésimal de SO(3), est donné par (72). Par ailleurs, en se restreignant à une rotation des repères autour de l'axe Oz = Oe_3 (on généralise facilement à un axe quelconque) les

transformations élémentaires des coordonnées du vecteur $V(x,y,z) \rightarrow V(x',y',z')$ s'écrivent (figure 10) :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon \approx x + y \varepsilon \\y' &= -x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon \approx y - x \varepsilon \\z' &= z\end{aligned}$$

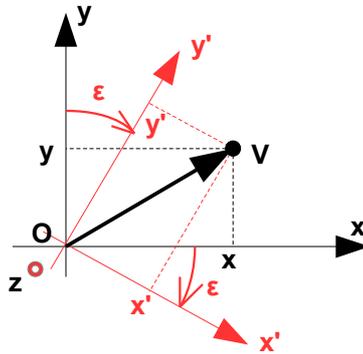


figure 10 : rotation des axes de coordonnées autour de Oz (et non rotation de V autour de Oz)

d'où :

$$[R_z(\varepsilon)]\psi(x, y, z) = \psi(x + y\varepsilon, -x\varepsilon + y, z) \approx \psi(x, y, z) + \varepsilon \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

La composante sur Oz de l'opérateur moment cinétique J_z est :

$$i \frac{J_z}{\hbar} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

soit : $[R_z(\varepsilon)]\psi = \psi - i\varepsilon \frac{J_z}{\hbar} \psi$ quelle que soit ψ , donc on a l'expression de la rotation induite infinitésimale suivant Oz :

$$[R_z(\varepsilon)] = 1 - i\varepsilon \frac{J_z}{\hbar} \quad (81a)$$

L'expression (81a) se généralise facilement pour une rotation induite infinitésimale d'axe \mathbf{U} par :

$$[R_U(\varepsilon)] = 1 - i\varepsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{U}}{\hbar} \quad (81b)$$

où : $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ avec $J_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $J_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (attention : J_x, J_y, J_z , bien que désignés par \mathbf{J} , ne doivent pas être confondus avec les \mathbf{J}_k , $k = 1, 2, 3$, générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ notés en gras, mais interviennent dans la *rotation induite* de la même façon qu'eux dans la rotation vectorielle). En comparant avec l'expression de la rotation infinitésimale des *vecteurs* vue ci-dessus, on constate que l'observable moment cinétique intervient de la même façon, en tant que générateur infinitésimal de $SO(3)$, dans l'expression de la rotation induite infinitésimale des *fonctions d'onde* ⁽³⁾.

Une rotation autour d'un point O fait correspondre de manière bijective un point de coordonnées $V(x,y,z)$ en un point de coordonnées $V'(x',y',z')$. Elle se décompose en 3 rotations suivantes (figure 11) :

$R_z(\alpha)$ rotation d'angle α autour de Oz qui transforme Oy en Ou ;

$R_U(\beta)$ rotation d'angle β autour de Ou qui transforme Oz en Oz₁ et Ox en Ox₁ ;

3 C'est pourquoi, lorsque cela n'entraînera aucune ambiguïté, dans la suite on dira tout simplement « rotation » au lieu de « rotation induite » quand il s'agira des actions de la rotation sur les fonctions d'onde.

$R_{z_1}(\gamma)$ rotation d'angle α autour de Oz_1 qui transforme Ou en Oy_1 ;

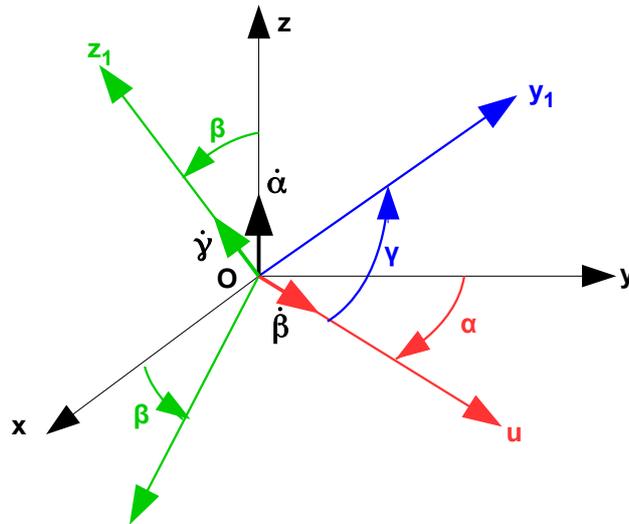


figure 11

d'où : $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z_1}(\gamma)R_u(\beta)R_z(\alpha)$. D'après (74) chaque rotation s'écrit :

$$R_{z_1}(\gamma) = \exp\left(-i\gamma \frac{J_{z_1}}{\hbar}\right) , \quad R_u(\beta) = \exp\left(-i\beta \frac{J_u}{\hbar}\right) , \quad R_z(\alpha) = \exp\left(-i\alpha \frac{J_z}{\hbar}\right) \text{ donc :}$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(-i\gamma \frac{J_{z_1}}{\hbar}\right) \exp\left(-i\beta \frac{J_u}{\hbar}\right) \exp\left(-i\alpha \frac{J_z}{\hbar}\right)$$

Or les composantes du moment cinétique \mathbf{J} sont déterminées sur les axes $Oxyz$, donc il faut exprimer la décomposition de $R(\alpha, \beta, \gamma)$ sur ces axes, donc calculer $R_{z_1}(\gamma)$ et $R_u(\beta)$ dans ces axes, $R_z(\alpha)$ étant déjà fournie. Pour cela, on applique la transformation des opérateurs \mathbf{J} à l'aide de (79) :

$$J_u = [R_z(\alpha)]J_y[R_z^+(\alpha)]$$

$$R_u(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^+(\alpha)$$

$R_{z_1}(\gamma)$ est la composition de la rotation $R_z(\alpha)$ puis de la rotation $R_u(\beta)$, appliquées à partir de $R_z(\gamma)$:

$$R_{z_1}(\gamma) = [R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^+(\alpha)][R_z(\alpha)R_z(\gamma)R_z^+(\alpha)][R_z(\alpha)R_y^+(\beta)R_z^+(\alpha)]$$

$$= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^+(\beta)R_z^+(\alpha)$$

puisque $RR^+ = \mathbf{1}$, et en remplaçant $R_{z_1}(\gamma)$ et $R_u(\beta)$ dans $R(\alpha, \beta, \gamma)$ il vient :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^+(\beta)R_z^+(\alpha)R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^+(\alpha)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

finalement :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = \exp\left(-i\alpha \frac{J_z}{\hbar}\right) \exp\left(-i\beta \frac{J_y}{\hbar}\right) \exp\left(-i\gamma \frac{J_z}{\hbar}\right) \quad (82)$$

De (82) on déduit que l'opérateur R commute avec l'opérateur $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$:

$$[J^2, R] = 0$$

donc J^2 est conservé par la rotation (il s'agit, encore une fois, de la rotation induite).

On montre au chapitre 6 que les valeurs propres de l'opérateur J^2 sont $j(j+1)\hbar^2$ où j entier, et que les vecteurs propres correspondants sont $|j m\rangle$ où m entier ou demi-entier :

$$J^2 |j m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j m\rangle$$

Et puisque J^2 et R commutent : $J^2 R |j m\rangle = R J^2 |j m\rangle$ soit : $R j(j+1) |j m\rangle = j(j+1) R |j m\rangle$ donc $R |j m\rangle$ est aussi un vecteur propre de J^2 : il est donc combinaison linéaire de vecteurs propres $|j m'\rangle$ de même valeur propre j :

$$R |j m\rangle = \sum_{m'} q_{m' m j} |j m'\rangle$$

les coefficients $q_{m' m j}$ s'obtiennent et projetant $R |j m\rangle$ sur la base formée des $|j m'\rangle$ qui est orthogonale, d'où :

$$q_{m' m j} = \langle j m' | R |j m\rangle \quad (83)$$

sont les coordonnées de $R |j m\rangle$ dans cette base. Puisque $|j m\rangle$ et $|j m'\rangle$ sont vecteurs propres de J_z , en utilisant (82) dans (83) on obtient :

$$\begin{aligned} q_{m' m j} &= \langle j m' | \exp(-i\alpha \frac{J_z}{\hbar}) \exp(-i\beta \frac{J_y}{\hbar}) \exp(-i\gamma \frac{J_z}{\hbar}) |j m\rangle \\ &= \langle j m' | \exp(-i\alpha m') \exp(-i\beta \frac{J_y}{\hbar}) \exp(-i\gamma m) |j m\rangle \\ &= \exp(i\alpha m') \exp(i\gamma m) \langle j m' | \exp(i\beta \frac{J_y}{\hbar}) |j m\rangle \end{aligned}$$

Le terme :

$$d_{m' m}^j(\beta) = \langle j m' | \exp(i\beta \frac{J_y}{\hbar}) |j m\rangle \quad (84)$$

est l'**élément de matrice réduite (EMR)** de l'opérateur rotation : la matrice de celui-ci, d'éléments $q_{m' m j}$, est connue dès que l'EMR est connue :

$$q_{m' m j}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(i\alpha m') d_{m' m}^j(\beta) \exp(i\gamma m) \quad (85)$$

En remplaçant $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$ (relation (170bis)) et en appliquant J_+ et J_- sur $|j m\rangle$ et $|j m'\rangle$, d'après (182) et (179), on montre que l'on a :

$$d_{m' m}^j(\beta) = \sum_p (-1)^p \frac{\sqrt{(j+m')!(j-m')!(j+m)!(j-m)!}}{(j+m'-p)!(j-m-p)!(p+m-m')!p!} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2j+m'-m-2p} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2p+m-m'} \quad (86)$$

■ Exemple : prenons le cas $j = 1/2$. Comme on le verra en Partie 2, on sait que $-j \leq m, m' \leq j$ donc m et m' sont égaux à $-1/2$ ou $+1/2$, alors (86) donne la matrice réduite :

$$d_{m' m}^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés des matrices réduites :

- Les matrices réduites sont réelles : $d_{m',m}^j(\beta) = d_{m',m}^{j*}(\beta)$
- Le changement de signe de m, m' s'accompagne de leur permutation : $d_{m',m}^j(\beta) = d_{-m-m',m}^j(\beta)$
- L'interchangeabilité des m, m' donne : $d_{m',m}^j(\beta) = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j(\beta)$
- On en déduit l'expression du conjugué de $q_{m'm_j}$:

$$q_{m'm_j}^*(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i\gamma m') d_{-m'-m}^j(\beta) \exp(-i\alpha m) (-1)^{j-m+j-m'} \quad (87)$$

Le conjugué de $q_{m'm_j}$ correspond à la rotation inverse $R^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = R(-\alpha, -\beta, -\gamma)$:

$$q_{m'm_j}^*(\alpha, \beta, \gamma) = q_{m'm_j}(-\alpha, -\beta, -\gamma) \quad (88)$$

- Le caractère unitaire de la rotation R conduit à la relation de fermeture :

$$\sum_{m''} q_{m'm''_j}(\alpha, \beta, \gamma) q_{m''m'_j}^*(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m''} q_{m'm''_j}(\alpha, \beta, \gamma) q_{m''m'_j}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \delta_{m'm'} \quad (89)$$

- Orthonormalisation : avec $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, l'élément de volume :
 $d\omega = d\alpha \sin\beta d\beta d\gamma$ s'intègre en :

$$\omega = \iiint d\omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma = 8\pi^2$$

Le produit scalaire hilbertien de deux matrices de rotation vérifie la relation d'orthonormalisation :

$$\int q_{mm'_j}(\alpha, \beta, \gamma) q_{kk'_j}^*(\alpha, \beta, \gamma) d\omega = \frac{8\pi^2}{j^2} \delta_{jj'} \delta_{mk} \delta_{m'k'} \quad (90)$$

On a vu en (75) que les moments cinétiques sont les générateurs infinitésimaux du groupe des rotations sur les fonctions d'onde selon (76). On a vu aussi en (80) qu'une observable (opérateur) A est invariante par rotation R si elle commute avec elle. Dans ce cas, A est un **opérateur scalaire**, parce qu'il ne dépend pas des axes de coordonnées ni de l'orientation de l'espace :

$$[A, R] = 0 \quad (91a)$$

Comme une rotation infinitésimale est : $R(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \cdot \mathbf{U}$, on a pour un opérateur scalaire :

$$[A, \mathbf{J}] = 0 \quad (91b)$$

Les opérateurs scalaires ont donc mêmes fonctions propres que **J**.

■ **Définition** : - Un opérateur A est un **opérateur vectoriel** s'il se transforme par une rotation R comme un vecteur.

■ **Proposition** : Un opérateur A est vectoriel si et seulement si :

$$\begin{aligned} [J_z, A_x] &= i\hbar A_y, & [J_z, A_y] &= -i\hbar A_x, & [J_y, A_x] &= -i\hbar A_z \\ [J_z, A_z] &= 0, & [J_x, A_x] &= 0 \text{ et relations similaires pour } [J_k, A_m] \end{aligned} \quad (92)$$

Preuve de (92) :

Par $R(\varepsilon)$, A se transforme par (cf. (79)) :

$$\begin{aligned} A' &= R(\varepsilon) A R^+(\varepsilon) \\ &= (1 - i\varepsilon \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \cdot \mathbf{U}) A (1 + i\varepsilon \frac{\mathbf{J}}{\hbar} \cdot \mathbf{U}) \\ &\approx A - i\varepsilon \frac{1}{\hbar} [\mathbf{J} \cdot \mathbf{U}, A] \end{aligned}$$

au premier ordre. Considérons la composante A_x et choisissons \mathbf{U} suivant l'axe de rotation Oy ; cette relation devient :

$$A_x' = A_x - \frac{i}{\hbar} \varepsilon [J_y, A_x]$$

Or, A étant vectoriel, il se transforme par une rotation élémentaire d'axe Oy par (cf. (31)) :

$$R_{Oy}(\varepsilon) A = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix}$$

d'où, puisque $\cos \theta_2 = \cos \varepsilon \approx 1$ et $\sin \theta_2 = \sin \varepsilon \approx \varepsilon$: $A'_x = A_x \cos \theta_2 - A_z \sin \theta_2 \approx A_x - \varepsilon A_z$; on a donc : $A_x - \varepsilon A_z = A_x - \frac{i}{\hbar} \varepsilon [J_y, A_x]$ soit : $[J_y, A_x] = -i \hbar A_z$

et raisonnement analogue pour les autres axes de rotation et les autres composantes de A .
CQFD de (92).

Les relations de commutation des opérateurs vectoriels et du moment cinétique (92) sont comparables à celles vues pour le moment cinétique en Partie 2. Elles suggèrent donc d'introduire de la même façon les opérateurs A_+ et A_- qui présentant l'intérêt, appliqués aux fonctions d'onde $|n j m\rangle$, de fournir les vecteurs propres de \mathbf{J}_z , ainsi qu'on va le voir :

$$\begin{aligned} A_+ &= A_x + i A_y \\ A_- &= A_x - i A_y \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (92) :

$$\left. \begin{aligned} [J_x, A_+] &= \hbar A_z \\ [J_x, A_-] &= -\hbar A_z \\ [J_y, A_+] &= [J_y, A_x + i A_y] = [J_y, A_x] + i [J_y, A_y] = -i \hbar A_z \\ [J_y, A_-] &= [J_y, A_x - i A_y] = [J_y, A_x] - i [J_y, A_y] = -i \hbar A_z \\ [J_z, A_+] &= \hbar A_+ \\ [J_z, A_-] &= -\hbar A_- \end{aligned} \right| \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} [J_+, A_+] &= 0 \\ [J_+, A_-] &= 2 \hbar A_z \\ [J_-, A_+] &= -2 \hbar A_z \\ [J_-, A_-] &= 0 \end{aligned} \right| \quad (94)$$

Considérons les vecteurs fonctions d'onde $|n j m\rangle$ dans l'espace \mathbf{H}_{nj} engendré par les $(2j+1)$ fonctions

propres de \mathbf{J}^2 et J_z (§ 6) et appliquons $[J_z, A_{\pm}] = \pm \hbar A_{\pm}$ vu précédemment, que l'on réécrit :

$$J_z A_{\pm} = A_{\pm} J_z \pm \hbar A_{\pm}$$

Alors : $J_z(A_{\pm}|n j m\rangle) = A_{\pm}(J_z|n j m\rangle) \pm \hbar A_{\pm}|n j m\rangle$; d'après (184bis), les vecteurs propres de J_z vérifient : $J_z|n j m\rangle = m \hbar|n j m\rangle$. Or on verra au § 6 :

$$\begin{aligned} J_z(A_+|n j m\rangle) &= (m+1)\hbar A_+|n j m\rangle \\ J_z(A_-|n j m\rangle) &= (m-1)\hbar A_-|n j m\rangle \end{aligned}$$

puisque A_+ et A_- vérifient les mêmes relations de commutation que J_+ et J_- . Donc $A_{\pm}|n j m\rangle$ sont fonctions propres de J_z , de valeurs propres $(m\pm 1)\hbar$. D'après (185) il suit que les éléments de matrice de A_{\pm} dans la représentation standard sont :

$$\left. \begin{aligned} \langle n j m | A_+ | n' j' m' \rangle &= \mu_m^+ \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'+1} \\ \langle n j m | A_- | n' j' m' \rangle &= \mu_m^- \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'-1} \end{aligned} \right\} (95)$$

où les μ_m^+ et μ_m^- ne sont plus les λ_m et λ_m' , car ils sont obtenus à partir de A_+ et A_- et de leurs relations de commutation avec J_z et \mathbf{J}^2 .

Sans développer ici, signalons seulement que ces valeurs se calculent à partir de ceci :

- Un opérateur vectoriel est linéairement associé à un opérateur tensoriel irréductible (OTI) qui suit les définitions de Racah (Partie 2). Soit A_{qp} un OTI, où $q, p = 1, 0, -1$, et A l'opérateur vectoriel associé, alors :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{ic}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \\ A_{10} &= -icA_z \\ A_{1-1} &= \frac{-ic}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) \end{aligned}$$

où c vérifie : $|c|^2 = 1$.

- Dans la représentation propre de l'OTI le théorème de Wigner-Eckart (Partie 2) établit la relation entre les éléments de matrice réduite (EMR) de l'OTI, A_1 , et les éléments de matrice réduite de l'opérateur $\mathbf{J}.A$:

$$\langle n j || \mathbf{J}.A || n' j' \rangle = -i\sqrt{j(j+1)} \langle n j | A_1 | n' j' \rangle \delta_{j j'}$$

- D'où l'on montre que l'on peut connaître l'élément de matrice de tout opérateur vectoriel A en fonction de son produit scalaire avec le moment cinétique (formule de Landé) :

$$\langle n j m | A_{1p} | n' j' m' \rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \langle n j m | \mathbf{J}.A | n' j' m' \rangle \langle n j m | J_{1p} | n' j' m' \rangle$$

(voir Partie 2, et référence [3] chapitre 13).

- (95) montre que tout opérateur vectoriel A est exprimé dans H_{nj} par une matrice :
 - diagonale pour sa composante A_z ;
 - dont les éléments non nuls sont de part et d'autre de la diagonale pour ses composantes A_x et A_y
- (95) montre aussi que les règles de sélection sont (voir Partie 2) :

- Pour A_- : $m' = m-1$
 - pour A_+ : $m' = m+1$
 - pour A_z : $m' = m$
- les éléments de matrice correspondants étant alors non nuls.

4.2.5 – Représentation adjointe de SU(2) et métrique de Killing

■ *Propositions :*

a) Soit $L \in SU(2)$, qui est donc un quaternion. On lui associe la représentation adjointe, notée $Ad(L)$: c'est une application de l'algèbre de Lie $su(2)$ dans elle-même qui, à un élément G_Ω de $su(2)$ associe un nouvel élément de $su(2)$ tel que :

$$\begin{aligned} Ad(L) : su(2) &\rightarrow su(2) \\ G_\Omega &\rightarrow Ad(L)G_\Omega = LG_\Omega L^{-1} \end{aligned} \quad (96)$$

Ad est la **représentation adjointe** de $SU(2)$ sur son algèbre de Lie $su(2)$.

NB : On a vu au point 4.1 que $su(2)$ et $so(3)$ sont isomorphes en vertu de l'identité de leurs produits de commutation et de leurs coefficients de structure. Il est donc légitime d'adopter G_Ω , générateur de $SO(3)$ donc élément de $so(3)$, pour désigner un élément de $su(2)$ dans (96).

b) On a vu au point 4.2.1 qu'à un vecteur $\Omega \in \mathbf{R}^3$ est associé un générateur $G_\Omega = \Omega \cdot \mathbf{J}$, où \mathbf{J} sont les générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ formant base de $so(3)$. Il s'ensuit que $su(2)$ est homéomorphe à \mathbf{R}^3 : $G_\Omega \in su(2) \Leftrightarrow \Omega \in \mathbf{R}^3$. Alors $su(2)$ possède une norme, appelée **métrique de Killing**, conservée par $Ad(L)$, et définie par :

$$\|G_\Omega\|^2 = 4 \operatorname{tr}(G_\Omega^+ G_\Omega) = \|\Omega\|^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \quad (97)$$

où $\Omega = \|\Omega\| \mathbf{n} = \theta \mathbf{n}$ avec $\theta = \|\Omega\|$ et $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dans une base orthonormée de \mathbf{R}^3 . Il s'ensuit que $Ad(L)$ est une rotation dans \mathbf{R}^3 : $Ad(L) = R_L \in SO(3)$.

c) L'application :

$$\begin{aligned} Ad : SU(2) &\rightarrow SO(3) \\ L &\rightarrow Ad(L) = R_L \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} Ad : SU(2) &\xrightarrow{\cong} SO(3) \\ \forall L, L' \in SU(2) : Ad(LL') &= Ad(L)Ad(L') \in SO(3) \end{aligned} \quad (98)$$

comme on l'a vu au point 4.2.1.

Preuve de (96) :

Montrons que $Ad(L)G_\Omega \in su(2)$: il faut et il suffit de montrer que :

- $Ad(L)G_\Omega$ vérifie : $[Ad(L)G_\Omega]^+ = -[Ad(L)G_\Omega]$
- $Ad(L)G_\Omega$ vérifie : $\operatorname{tr}[Ad(L)G_\Omega] = 0$

On a vu que à $\Omega \in \mathbf{R}^3$ on associe dans $su(2)$:

$$Q(\Omega) = \exp G_\Omega = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

avec $\Omega = \|\Omega\| \mathbf{n} = \theta \mathbf{n}$, $\|\mathbf{n}\| = 1$, où l'on rappelle que $\theta \in [0, 4\pi]$. Donc :

$$G_\Omega = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} (\theta_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \theta_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \theta_3 \boldsymbol{\sigma}_3) = \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

qui est (55).

Comme $[Q(\Omega)]^+ = [Q(\Omega)]^{-1}$ on a : $G_\Omega^+ = -G_\Omega$.

D'autre part : $\det [Q(\Omega)] = 1$ implique $tr(G_\Omega) = 0$.

Ces deux conditions sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que G_Ω , élément de l'algèbre de Lie $su(2)$ du groupe $SU(2)$, soit un générateur de $SO(3)$. On rappelle que :

$$\dim su(2) = 3$$

donc que $su(2) \cong \mathbf{R}^3$.

Montrons qu'il en est de même pour $Ad(L)G_\Omega$:

$$[Ad(L)G_\Omega]^+ = [LG_\Omega L^{-1}]^+ = (L^{-1})^+ G_\Omega^+ L^+ = -LG_\Omega L^{-1} = -Ad(L)G_\Omega$$

puisque par hypothèse $G_\Omega^+ = -G_\Omega$, $L^+ = L^{-1}$; et donc :

$$tr[Ad(L)G_\Omega] = tr[LG_\Omega L^{-1}] = tr G_\Omega = 0$$

donc : $Ad(L)G_\Omega \in su(2)$.

Remarque : le commutateur de G_Ω est développé comme suit :

$$[G_\Omega, G_{\Omega'}] = \sum_{j,k} \left[\frac{1}{2} \sigma_j \theta_j, \frac{1}{2} \sigma_k \theta_k \right] = \sum_m (\Omega \times \Omega')_m \left(-\frac{i}{2} \sigma_m \right)$$

soit :

$$[G_\Omega, G_{\Omega'}] = G_{\Omega \times \Omega'} \quad (99)$$

L'identité (99) est une autre façon de montrer que $su(2)$ et $so(3)$ sont des algèbres isomorphes. CQFD de (96).

Preuve de (97) :

On a vu que $G_\Omega = \frac{i}{2} \sigma \cdot \Omega \in su(2)$, d'où :

$$\begin{aligned} 4tr(G_\Omega^+ G_\Omega) &= 4tr \left[\left(\frac{i}{2} \sigma \cdot \Omega \right)^+ \left(\frac{i}{2} \sigma \cdot \Omega \right) \right] = 4tr \left[\frac{1}{4} (-i) (\sigma \cdot \Omega)^+ (i \sigma \cdot \Omega) \right] \\ &= tr [(\sigma \cdot \Omega)^+ (\sigma \cdot \Omega)] = tr [(\sigma \cdot \Omega) (\sigma \cdot \Omega)] \\ &= tr \left[\sum_{j,k} \theta_j \theta_k \sigma_j \sigma_k \right] = \sum_{j,k} \theta_j \theta_k tr(\sigma_j \sigma_k) \end{aligned}$$

puisque $\sigma^+ = \sigma$; or : $tr(\sigma_j \sigma_k) = \delta_{jk}$, d'où : $4tr(G_\Omega^+ G_\Omega) = \sum_j \theta_j^2 = \|\Omega\|^2 = \theta^2$.

Comment se transforme la norme $\|\Omega\|$ par $Ad(L)$?

$$\begin{aligned} 4tr \left[(Ad(L)G_\Omega)^+ (Ad(L)G_\Omega) \right] &= 4tr \left[(-Ad(L)G_\Omega) (Ad(L)G_\Omega) \right] \\ &= 4tr \left[-LG_\Omega L^{-1} LG_\Omega L^{-1} \right] = 4tr \left[L(-G_\Omega)G_\Omega L^{-1} \right] \\ &= 4tr \left[LG_\Omega^+ G_\Omega L^{-1} \right] = 4tr \left[G_\Omega^+ G_\Omega \right] = \|\Omega\|^2 \end{aligned}$$

puisque $-G_\Omega = G_\Omega^+$, donc $\|Ad(L)G_\Omega\| = \|G_\Omega\|$.

Conclusion : $Ad(L)$ est une transformation qui conserve la norme dans $su(2)$, donc c'est une rotation dans \mathbf{R}^3 : $Ad(L) \in SO(3)$.
 CQFD de (97).

Preuve de (98) :

$$\begin{aligned} Ad(LL')G_\Omega &= (LL')G_\Omega(LL')^{-1} = LL'G_\Omega L'^{-1}L^{-1} \\ &= Ad(L)(L'G_\Omega L'^{-1}) = Ad(L)(Ad(L')G_\Omega) \end{aligned}$$

donc : $Ad(LL') = Ad(L)Ad(L')$;

et l'on a : $Ad(-L)G_\Omega = -LG_\Omega(-L)^{-1} = LG_\Omega L^{-1} = Ad(L)G_\Omega$, donc :

$$Ad(-L) = Ad(L) = R_L$$

CQFD de (98).

Le schéma suivant (figure 12) récapitule les propositions (96), (97), (98), (99), et pose une relation avec le schéma de la figure 5 :

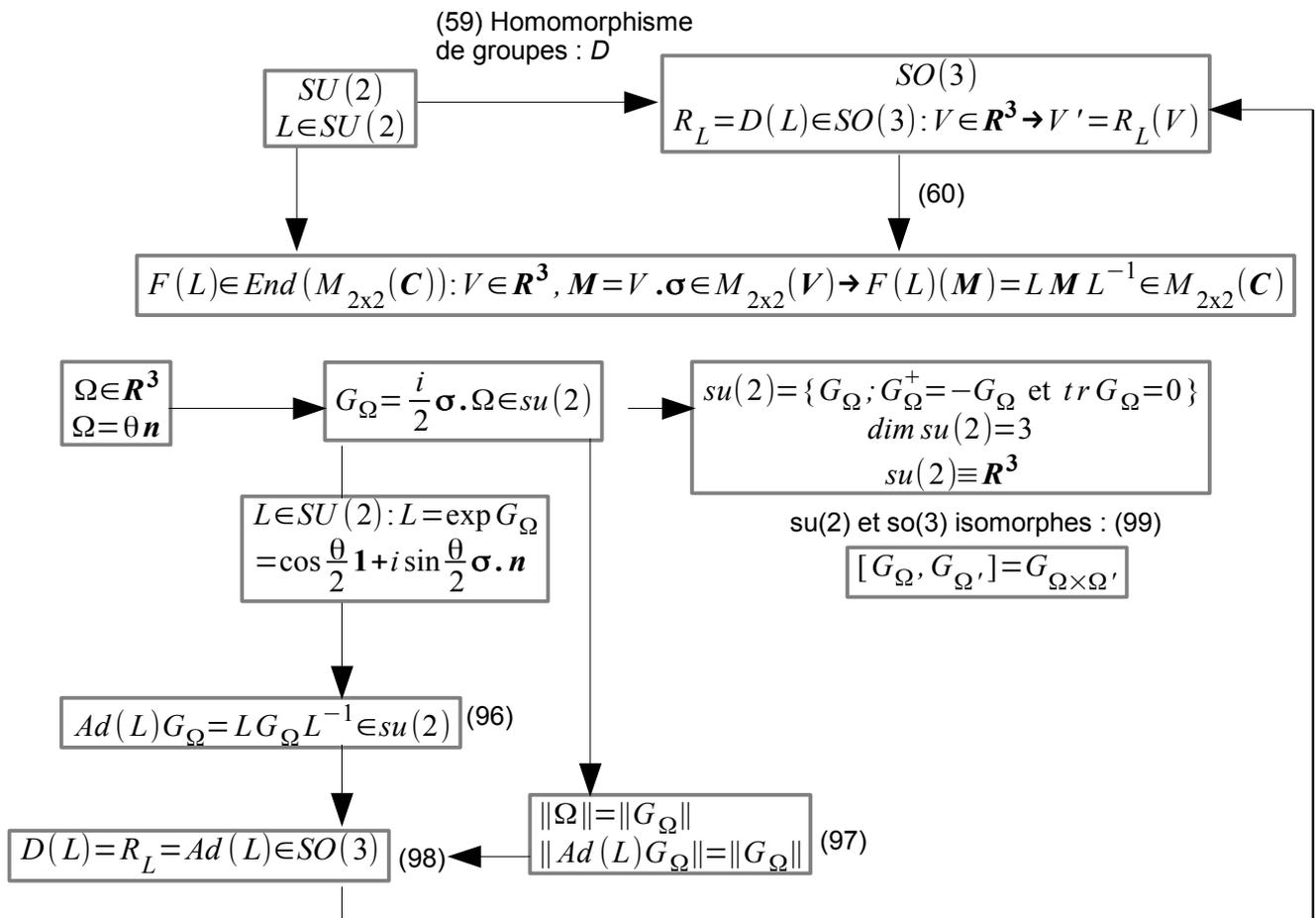


figure 12 : représentation adjointe de $SU(2)$ et rotation construite sur l'algèbre de Lie $su(2)$

4.2.6 – Résumé

En résumé, on a vu que $SO(3)$ et $SU(2)$ présentent des similitudes en tant que groupes munis de leurs produits de Lie :

- Les générateurs infinitésimaux de $SO(3)$, \mathbf{J}_k , vérifient les relations de commutation :

$$[\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_m] = -\varepsilon_{kmj} \mathbf{J}_j$$

(ϵ_{kmj} : coefficients de structure) qui définissent l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$, où les \mathbf{J}_k interviennent dans l'expression des rotations finies par exponentiation du générateur :

$$R(\theta) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J}) = \exp(\theta_1 \mathbf{J}_1 + \theta_2 \mathbf{J}_2 + \theta_3 \mathbf{J}_3) \in SO(3)$$

où $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dans une base orthonormée de $E = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3)$ avec :

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les générateurs infinitésimaux étant introduits dans :

$$\left(\frac{dR(\theta e_k)}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \mathbf{J}_k \cdot R(\theta_0 e_k)$$

d'où : $R(\theta e_k) = \exp(\theta \mathbf{J}_k) = \mathbf{1} + \theta \mathbf{J}_k + \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{J}_k^2 + \dots + \frac{\theta^n}{n!} \mathbf{J}_k^n + \dots$

- Les générateurs infinitésimaux de $SU(2)$ sont les matrices de Pauli σ_k , ils vérifient les relations de commutation :

$$\left[i \frac{\sigma_k}{2}, i \frac{\sigma_j}{2} \right] = -\epsilon_{kjm} i \frac{\sigma_m}{2}$$

ainsi que : $\sigma_k \sigma_j + \sigma_j \sigma_k = 2 \delta_{jk} \mathbf{1}$, $tr \sigma_j = 0$, $\sigma_j^+ = \sigma_j$ (matrices hermitiennes). Ils définissent l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, avec les coefficients de structure qui sont identiques à ceux de $\mathfrak{so}(3)$, et où les σ_k interviennent dans l'expression des rotations finies obtenues par exponentiation du générateur :

$$L(\theta) = \exp\left(i \Omega \cdot \frac{\sigma}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \sigma \in SU(2)$$

où $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dans une base orthonormée de $E = \mathbf{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ avec :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$SO(3)$ et $SU(2)$ ayant les mêmes coefficients de structure, et puisque à partir de ceux-ci les lois de groupe peuvent être construites localement, il existe une relation de représentation de $SU(2)$ par $SO(3)$ (ou homomorphisme) exprimée par (98) ou (59) :

$$D : SU(2) \rightarrow SO(3) \\ L \rightarrow D(L) = R_L$$

Les matrices de $SU(2)$ sont des quaternions, c'est-à-dire des matrices complexes 2×2 , L telles que :

- unitaires : $LL^+ = L^+L = \mathbf{1}$

- spéciales : $\det L = 1$

et de la forme : $L = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1 \end{pmatrix}$ avec : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

Par l'homomorphisme D de $SU(2)$ vers $SO(3)$, tout élément de $SU(2)$ peut être représenté par un élément de $SO(3)$, mais la réciproque est fautive : un élément de $SO(3)$ peut avoir deux éléments de $SU(2)$ dont il est l'image, ce qui est le cas de $D(L) = D(-L)$ (relation (63)). Dans le cas contraire on aurait un isomorphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$, la représentation serait fidèle.

Le fait qu'il ne puisse exister de représentation fidèle entre $SO(3)$ et $SU(2)$ provient de ce que ces espaces n'ont pas la même topologie.

En effet, on a vu au point 4.2.2 que $SU(2)$, en tant que groupe de Lie, est isomorphe à la sphère S^3 de rayon 2π , et que $SO(3)$, en tant que groupe de Lie, est isomorphe à la boule $B(O,\pi)$ de rayon π : lorsque $\|\Omega\| = \pi$, donc lorsque $\Omega = -\pi\mathbf{U}$ ou $+\pi\mathbf{U}$, le vecteur atteint le même point par 2 rotations : $R(-\pi) = R(\pi)$ et deux points opposés sur la « surface » de la boule $B(O,\pi)$ correspondent à la même rotation (voir figure 6). On en déduit que **$SO(3)$ est doublement connexe** : un chemin fermé parcouru deux fois successivement est homotope à un point (il peut être contracté indéfiniment jusqu'à un point).

En effet, puisque deux points opposés sur la surface de la boule $B(O,\pi)$ sont confondus, un chemin qui les relie ne peut pas se contracter indéfiniment autour d'un point quelconque puisque les deux points opposés demeurent fixes. Pour qu'il soit contracté autour d'un point, il faut qu'il soit au minimum dédoublé en un chemin infiniment voisin qui relie les deux points opposés. Chaque chemin peut alors se déformer vers un côté et vers un autre autour de deux points de la surface de la boule, tout en passant par l'un des deux points opposés, donc confondus en un seul point.

Essayons de visualiser ces propriétés par les figures 13 et 14 suivantes :

Dans \mathbf{R}^2 un chemin fermé (C) passant par un point A peut se contracter continûment en une suite infinie de chemins fermés $(C_1), (C_2), \dots$ devenant arbitrairement voisins à n'importe quel point B contenu dans le domaine délimité par (C) (figure 13).

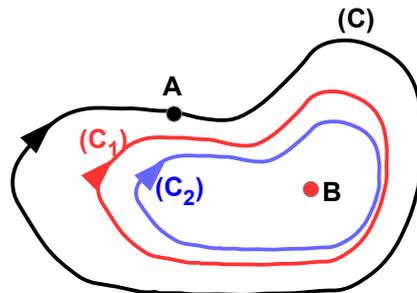


figure 13 : notion d'homotopie

Il n'en est pas de même pour un chemin fermé (C) dans $SO(3)$ passant par deux points opposés A et A', donc confondus en un seul point, donc contraints d'être fixes (figure 14).

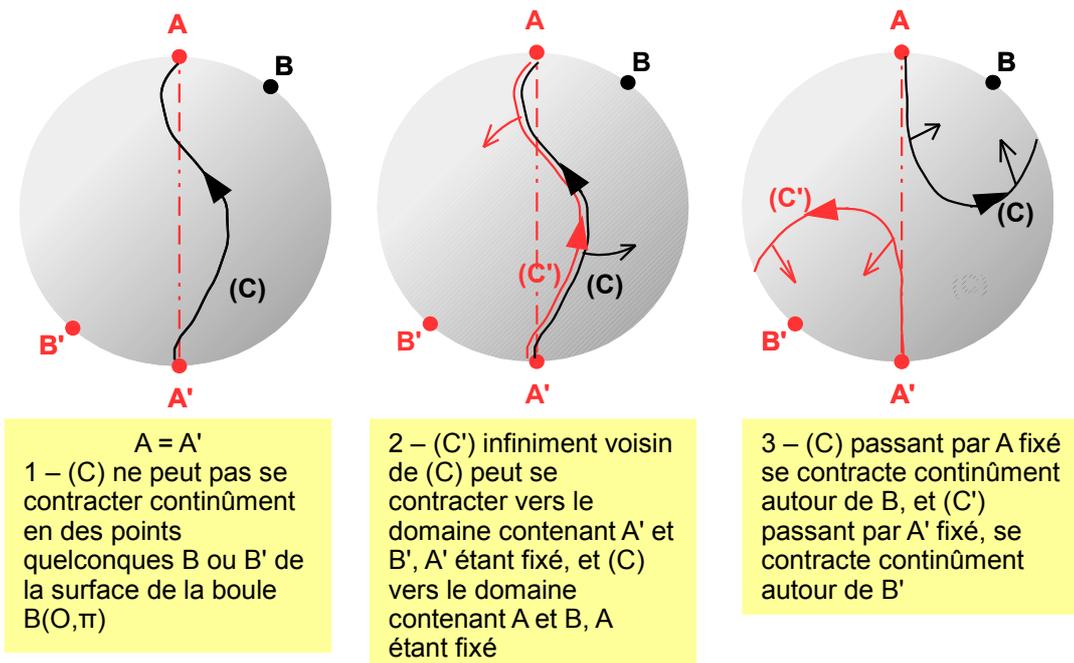


figure 14 : $SO(3)$ isomorphe à $B(O,\pi)$ est doublement connexe

Un chemin (C') infiniment voisin de (C), passant par A et A', peut se contracter continûment autour d'un point quelconque B' situé seulement dans une partie de la surface de B(O,π), et (C) peut se contracter continûment autour d'un autre point quelconque B situé seulement dans la partie complémentaire de la précédente.

Un chemin fermé dans SU(2) équivaut alors à un chemin fermé dans SO(3) qui est parcouru deux fois : ainsi, SU(2) est simplement connexe. On va le voir au point 4.3.

Une conséquence en mécanique quantique : une rotation de 4π dans l'espace physique (c'est-à-dire 2 tours) représente une rotation complète décrite par SU(2), c'est-à-dire un vecteur qui retrouve sa position et son orientation initiales.

En mécanique quantique l'utilisation de SO(3) et de SU(2) pour les rotations doit être adaptée à la représentation de l'objet physique : le chemin suivant lequel la rotation de l'objet physique s'effectue fait intervenir la loi du groupe et n'est pas le même selon qu'il s'agisse d'une représentation scalaire, vectorielle, complexe, spinorielle, tensorielle de l'objet. Une représentation réelle par SO(3) sera adaptée pour une fonction scalaire décrivant l'état de l'objet. Une représentation vectorielle par SO(3) sera adaptée pour une fonction vectorielle (exemple, une quantité de mouvement). Une représentation par SU(2) sera adaptée pour une fonction complexe ou un spineur (exemple, une fonction d'onde) :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

où $\psi_{1,2}$ sont complexes. Soit la fonction induite par une rotation, représentée par SU(2) avec (76) :

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = [L] \psi(\mathbf{r}, t) = \psi(L^{-1}(\mathbf{r}, t)) = \begin{pmatrix} \psi_1'(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2'(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

Si $\psi(\mathbf{r}, t)$ se transforme en :

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\Omega \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = (\exp -G_{\Omega}) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (100)$$

avec $\Omega = \theta \mathbf{n}$, alors par définition $\psi(\mathbf{r}, t)$ est un **spineur**.

Et comme vu en (70) :

$$\begin{aligned} \exp(-i(\theta+2\pi) \mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) &= -\exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) \\ \exp(-i(\theta+4\pi) \mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) &= \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}) \end{aligned}$$

autrement dit un spineur $\psi(\mathbf{r}, t)$ est invariant par une rotation $\theta = 4\pi$, tandis qu'il change de signe par une rotation $\theta = 2\pi$.

Remarque : théorème de Wigner :

On a vu en (78) que pour deux rotations R et R' de SO(3) leur composition vérifie le produit de rotations à une phase près $\varphi(R, R')$:

$$[R'R] = \varphi(R, R') [R'] [R]$$

où l'on rappelle que [R] désigne la rotation des états $\Psi(V)$ (relation (76)):

$$[R] \varphi(V) = \psi(R^{-1} V)$$

Dans la représentation qui utilise SU(2), que donne le produit des rotations pour la fonction induite,

autrement dit comment s'explique le produit suivant : $[R_{L'}][R_L]\psi$?

On a d'après (76) : $[R_L]\varphi(V) = \psi(R_L^{-1}V)$ où R_L est définie par (98) et (60) :

$$V = R_L(V') \Leftrightarrow V \cdot \sigma = L(V' \cdot \sigma) L^{-1} \quad \text{où} \quad L(G_\Omega) = \exp G_\Omega \quad \text{par conséquent :} \quad V' = R_L^{-1}(V) \Leftrightarrow V' \cdot \sigma = L^{-1}(V \cdot \sigma) L \quad ; \text{ alors :}$$

$$[R_{L'}][R_L]\psi(V) = \psi(R_{L'}^{-1} R_L^{-1} V)$$

avec : $(R_{L'}^{-1} R_L^{-1} V) \cdot \sigma = L'^{-1} (L^{-1}(V \cdot \sigma) L) L' = L'^{-1} L^{-1} (V \cdot \sigma) L L'$ où $L'(G_{\Omega'}) = \exp G_{\Omega'}$.

Mais par hypothèse, pour un spineur Ψ , (100) donne : $[R_L]\psi = (\exp G_\Omega)\psi$; donc :

$$[R_{L'}]([R_L]\psi) = (\exp G_{\Omega'})([R_L]\psi) = (\exp G_{\Omega'} \exp G_\Omega)\psi \equiv L(G_{\Omega'}) L(G_\Omega)\psi = L(G_{\Omega'}, G_\Omega)\psi$$

donc :

$$L(G_{\Omega'}) L(G_\Omega) = L(G_{\Omega'}, G_\Omega) \quad (101)$$

Le théorème de Wigner énonce alors que, tandis que dans la représentation $SO(3)$ on a (78), les représentations à une phase près du groupe des rotations $SO(3)$ sont des représentations exactes du groupe $SU(2)$ dont les éléments vérifient (101) lorsqu'ils s'appliquent à l'espace des états de spin 1/2 (ou spineurs) (voir par exemple [5]).

4.3 - $SU(2)$ est simplement connexe

4.3.1 – Difféomorphisme entre $SU(2)$ et S^3

Le groupe $SU(2)$ est l'ensemble des matrices 2×2 complexes, telles que, comme on l'a vu : $L^+ L = L L^+ = \mathbf{1}$ et $\det L = 1$. On a les propositions suivantes :

■ *Proposition* : $SU(2)$ est difféomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ (102)

Preuve de (102) : - Soit une matrice complexe 2×2 , élément de $M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$:

$$L = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$L \in SU(2)$ si et seulement si : $L^+ L = L L^+ = \mathbf{1}$ et $\det L = 1$. Les éléments de L vérifient donc : $z_{11} z_{22} - z_{21} z_{12} = 1$, $z_{11}^* z_{21} - z_{12}^* z_{22} = 0$, $|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2 = 1$, $|z_{21}|^2 + |z_{22}|^2 = 1$, d'où l'on tire : $z_{21} = -z_{12}^*$ et $z_{22} = z_{11}^*$; on a alors :

$$L = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$$

qui est équivalente à l'expression (1). L est un quaternion unitaire, comme on le savait déjà. L dépend de 3 paramètres réels indépendants puisque, en posant $z_1 = x_1 + i y_1$ et $z_2 = x_2 + i y_2$ où $x_k, y_k \in \mathbf{R}$, on a :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$$

qui est l'équation de la sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$, comme cela a été indiqué au point 4.2.2. Le quatrième paramètre étant lié aux trois autres, on a donc 3 paramètres indépendants.

Un difféomorphisme est une application bijective entre deux variétés, différentiable dans les deux sens (voir par exemple [4]). Soit l'application entre $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ et $SU(2)$:

$$f: S^3 \subset \mathbf{R}^4 \rightarrow SU(2)$$

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow L = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ -x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{pmatrix}$$

A partir des 4 nombres réels (x_1, y_1, x_2, y_2) on construit un quaternion unitaire $q(z_1, z_2) \in \mathbf{Q}_4$.

Soient i, j, k tels que : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, généralisant alors l'imaginaire pur i . L'élément $(1, i, j, k)$ forme une base de \mathbf{Q}_4 : par définition, tout quaternion q de \mathbf{Q}_4 s'écrit :

$$q = x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2$$

\mathbf{Q}_4 muni de la multiplication est un groupe non commutatif. On note encore q en séparant sa partie réelle et sa partie « imaginaire » ou vectorielle :

$q = x_1 + \mathbf{v}$ où : $\mathbf{v} = y_1 i + x_2 j + y_2 k$ appelé quaternion pur (cf. point 1.3) qui équivaut à un vecteur de

\mathbf{R}^3 : $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. L'inverse de q est : $q^{-1} = x_1 - \mathbf{v}$; en effet, on a :

$$(x_1 + \mathbf{v})(x_1 - \mathbf{v}) = x_1^2 - x_1 \mathbf{v} + \mathbf{v} x_1 - \mathbf{v}^2 = x_1^2 - \mathbf{v}^2 = x_1^2 - (y_1 i + x_2 j + y_2 k)^2$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_2 y_1 (ij + ji) - y_1 y_2 (ik + ki) + x_2 y_2 (jk + kj)$$

Comme $ij = -ji$, $ik = -ki$, $jk = -kj$ et q unitaire, il reste :

$$(x_1 + \mathbf{v})(x_1 - \mathbf{v}) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \text{ donc } q^{-1} = (x_1 + \mathbf{v})^{-1} = x_1 - \mathbf{v}$$

Le produit de deux quaternions suit la même loi que le produit de deux matrices de $SU(2)$:

$$LL' = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 \\ -z'^*_2 & z'^*_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z''_1 & z''_2 \\ -z''^*_2 & z''^*_1 \end{pmatrix}$$

qui donne après développement :

$$z''_1 = x_1 x'_1 - y_1 y'_1 - x_2 x'_2 - y_2 y'_2 + i(y_1 x'_1 + x_1 y'_1 + x_2 y'_2 - y_2 x'_2) = x''_1 + i y''_1$$

$$z''_2 = x_1 x'_2 + x_2 x'_1 - y_1 y'_2 + y_2 y'_1 + i(y_1 x'_2 + x_1 y'_2 + y_2 x'_1 - x_2 y'_1) = x''_2 + i y''_2$$

Le produit des deux quaternions correspondants donne quant à lui :

$$qq' = (x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2)(x'_1 + iy'_1 + jx'_2 + ky'_2)$$

$$= x_1 x'_1 - y_1 y'_1 - x_2 x'_2 - y_2 y'_2 + i(x_1 y'_1 + y_1 x'_1) + j(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + k(x_1 y'_2 + y_2 x'_1)$$

$$+ i j(y_1 x'_2 - x_2 y'_1) + i k(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) + j k(x_2 y'_2 - y_2 x'_2)$$

or : $ij = ijk(-k) = k$; $ik = -j$; $jk = i$ d'où :

$$\begin{aligned}
 qq' &= x_1 x'_1 - (y_1 y'_1 + x_2 x'_2 + y_2 y'_2) \\
 &+ x_1 (i y'_1 + j x'_2 + k y'_2) + x'_1 (i y_1 + j x_2 + k y_2) \\
 &+ i (x_2 y'_2 - y_2 x'_2) + j (y_2 y'_1 - y_1 y'_2) + k (y_1 x'_2 - x_2 y'_1)
 \end{aligned}$$

et l'on remarque que :

$$qq' = x_1 x'_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + x_1 \mathbf{v}' + x'_1 \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}' \quad (103)$$

Pour comparer à LL' on regroupe :

$$qq' = X_1 + i Y_1 + j X_2 + k Y_2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} X_1 = x_1 x'_1 - y_1 y'_1 - x_2 x'_2 - y_2 y'_2 \\ Y_1 = x_1 y'_1 + x'_1 y_1 + x_2 y'_2 - y_2 x'_2 \\ X_2 = x_1 x'_2 + x'_1 x_2 + y_2 y'_1 - y_1 y'_2 \\ Y_2 = x_1 y'_2 + x'_1 y_2 + y_1 x'_2 - x_2 y'_1 \end{cases}$$

à comparer avec $x''_1 + i y''_1 + j x''_2 + k y''_2$; on a bien :

$$x''_1 = X_1, \quad y''_1 = Y_1, \quad x''_2 = X_2, \quad y''_2 = Y_2$$

Donc un quaternion unitaire est bien isomorphe à une matrice de SU(2) :

$$\begin{aligned}
 g: \mathcal{Q}_4 &\rightarrow SU(2) \\
 q = x_1 + i y_1 + j x_2 + k y_2 &\rightarrow L = \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 & x_2 + i y_2 \\ -x_2 + i y_2 & x_1 - i y_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il revient au même de dire que les éléments de SU(2) sont des quaternions unitaires.

L'application g est bijective et différentiable, son inverse g^{-1} est aussi différentiable. L'application h qui associe à $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3$ un quaternion $q = x_1 + i y_1 + j x_2 + k y_2 \in \mathcal{Q}_4$ est elle aussi bijective et différentiable, donc $f = g \circ h: S^3 \rightarrow SU(2)$ est bien un difféomorphisme (figure 15).

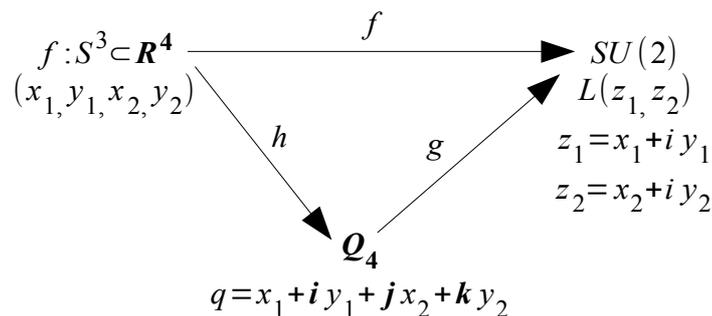


figure 15

Le difféomorphisme f transporte le produit de SU(2) à \mathcal{Q}_4 donc à S^3 .

CQFD de (102).

4.3.2 – Formule de Rodrigues

Puisque le quaternion $q = x_1 + i y_1 + j x_2 + k y_2 = x_1 + \mathbf{v}(y_1, x_2, y_2)$ est unitaire, c'est-à-dire

$$\|q\|^2 = x_1^2 + \|v\|^2 = 1$$

il peut s'écrire :

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2} \quad (104)$$

où n vecteur unitaire donné par $v = n \sin \frac{\theta}{2}$ et avec $x_1 = \cos \frac{\theta}{2}$, ainsi qu'on l'a vu aux points 2.1, 2.4, 4.1, et on a vu en (55) que la matrice de SU(2) correspondante est :

$$L(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} n \cdot \sigma$$

Soit p un quaternion pur de P_3 , c'est-à-dire un vecteur de \mathbf{R}^3 , on a vu au point 2.1 que l'application de P_3 dans P_3 , c'est-à-dire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 , définie par :

$$R_q(p) = p' = q p q^{-1}$$

est une rotation autour du vecteur unitaire n d'un angle θ , qui s'explicite par la formule de Olinde Rodrigues :

$$\begin{aligned} R_q(p) = p' &= (\cos \theta) p + (1 - \cos \theta)(p \cdot n) n + (\sin \theta) n \times p \\ &= (p - n(n \cdot p)) \cos \theta + (n \times p) \sin \theta + (p \cdot n) n \end{aligned}$$

donc :

$$p' = R_q(p) = p_{\perp} \cos \theta + (n \times p_{\perp}) \sin \theta + p_{\parallel} \quad (105)$$

où p_{\perp} composante de p orthogonale à n
 p_{\parallel} composante de p colinéaire à n .

4.3.3 – Connexité, chemins, homotopie, connexité par arcs, simple connexité

■ Définition : espace simplement connexe

Soit E un espace topologique. E est **connexe** si et seulement si E ne peut pas être obtenu par la réunion de deux ouverts disjoints X_1 et X_2 :

$$\neg (\exists X_1, X_2 \text{ ouverts } \subset E; X_1 \cap X_2 = \emptyset \text{ et } E = X_1 \cup X_2)$$

où \neg est l'opérateur logique « négation ». Intuitivement, cette définition traduit que E est en un seul morceau (figure 16).

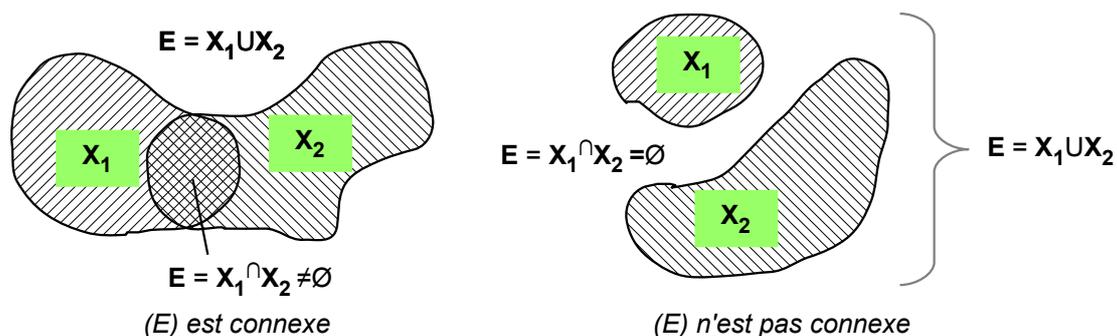


figure 16 : espace connexe et espace non connexe

Intuitivement, un espace topologique connexe est **simplement connexe** si, en plus d'être connexe, il n'a pas de « trous ». Pour préciser, tout lacet (ou chemin fermé) doit pouvoir se contracter de manière continue en un point de l'espace.

Une condition suffisante pour que E soit connexe est qu'il soit **connexe par arcs** : deux points quelconques de E peuvent toujours être reliés par un chemin continu.

Précisons ces notions topologiques de manière plus formelle.

■ **Définition** : chemins dans un espace vectoriel normé :

Soit E un espace topologique. Un **chemin** reliant deux points u et v de E est une application continue :

$$\varphi : [0, 1] \subset \mathbf{R} \rightarrow E \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = u, \varphi(1) = v \in E$$

$$x \mapsto \varphi(x) \in E$$

La relation notée $u \sim v$ exprimant « u et v sont reliés par un chemin » est une relation d'équivalence sur E : on appelle **composantes connexes par arcs** de E la classe d'équivalence (E, ~). En effet on a :

- « ~ » est réflexive : $u \sim u, \forall x \in [0, 1], \varphi(x) = u$
- « ~ » est symétrique : $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$: $\varphi(0) = u, \varphi(1) = v \Leftrightarrow \varphi'(0) = v, \varphi'(1) = u$ avec $\varphi'(x) = \varphi(1-x)$: φ' est le chemin inverse de φ où v est le point de départ et u le point d'arrivée.
- « ~ » est transitive : $u \sim v$ et $v \sim w \Rightarrow u \sim w$, $\varphi(0) = u, \varphi(1) = v$ et $\varphi'(0) = v, \varphi'(1) = w$ avec donc $\varphi'(0) = \varphi(1)$. Il suffit donc de trouver un chemin φ'' défini par :

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \varphi''(x) = \varphi(2x)$$

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], \varphi''(x) = \varphi'(2x-1)$$

et l'on a bien :

$$\varphi''(0) = \varphi(0) = u$$

$$\varphi''(1/2) = \varphi(1) = v = \varphi'(0)$$

$$\varphi''(1) = \varphi'(1) = w$$

■ **Définition** : espace vectoriel normé connexe par arcs :

L'espace vectoriel normé E est **connexe par arcs** si tout couple de points u , v de E est relié par un chemin entièrement inclus dans E (figure 17).

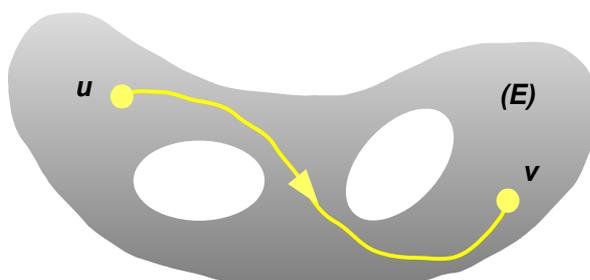
■ **Proposition** : Les applications continues f d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F conservent la connexité et la connexité par arcs : si E est connexe ou connexe par arcs, alors $F = f(E)$ est respectivement connexe ou connexe par arcs. (106)

Preuve de (106) :

Soient $u', v' \in f(E)$, alors il existe $u, v \in E$ tels que $u' = f(u), v' = f(v)$.

Soit le chemin : $\varphi : [0, 1] \rightarrow E, \varphi(0) = u, \varphi(1) = v$ alors $u' = f(\varphi(0)), v' = f(\varphi(1))$ et puisque φ et f sont continues, $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow f(E)$ est continue et est un chemin reliant u' à v', donc f(E) est connexe par arcs.

CQFD de (106).



(E) est connexe par arcs mais pas simplement connexe

figure 17 : espace connexe par arcs, non simplement connexe

■ **Définition : espace vectoriel normé localement connexe par arcs :**

Soit E un espace vectoriel normé. Une **base d'ouverts** de E est un ensemble d'ouverts $B_k \subset E$ tels que tout ouvert X de E est formé par la réunion d'ouverts de cet ensemble. Lorsque les ouverts de cette base sont connexes par arcs, alors E est dit **localement connexe par arcs**.

Tout espace vectoriel normé est localement connexe par arcs. C'est le cas de \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n .
 Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

■ **Définition : lacet, ou chemin fermé :**

Soit E un espace vectoriel normé. Un lacet sur E est un chemin $\varphi : [0, 1] \subset \mathbf{R} \rightarrow E$ tel que les points de départ et d'arrivée soient confondus : $\varphi(0) = u = \varphi(1) = v \in E$.

Une autre façon de définir le lacet est :

Soit S^1 le cercle unité dans \mathbf{C} : $|z|=1, z \in \mathbf{C}$; alors $\varphi : S^1 \rightarrow E$ est un lacet.

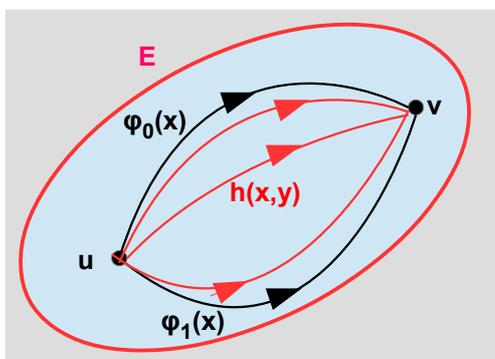
■ **Définition : simple connexité :**

Soit E un espace vectoriel normé connexe par arcs. E est **simplement connexe** si tout lacet est homotope à un point de E .

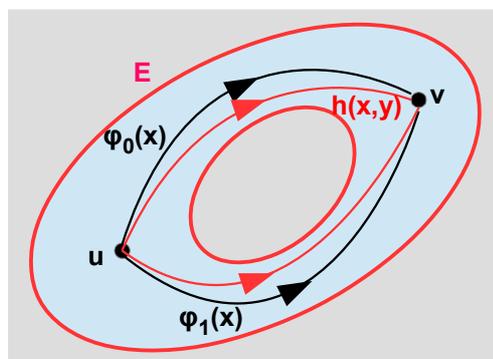
Deux chemins φ_0 et φ_1 de E sont **homotopes** s'il existe une application continue (appelée déformation) :

$$\left| \begin{array}{l} h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E \\ (x, y) \rightarrow h(x, y) \in E \\ h(x, 0) = \varphi_0(x) \ ; \ h(x, 1) = \varphi_1(x) \end{array} \right.$$

avec la condition que les chemins φ_0 et φ_1 ont mêmes extrémités : $\left. \begin{array}{l} \varphi_0(0) = \varphi_1(0) = u \in E \\ \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = v \in E \end{array} \right\} \text{ (figure 18).}$



φ_0 et φ_1 sont homotopes



φ_0 et φ_1 ne sont pas homotopes

figure 18 : homotopie

Un point de E équivaut à un lacet constant : $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = u \in E$. Un espace E est donc simplement connexe si tout lacet sur E est homotope à un lacet constant (on dit aussi que tout lacet est homotope à zéro).

■ **Exemples :**

$\mathbf{C} - \{0\}$ n'est pas simplement connexe : tout lacet autour de 0 ne peut lui être homotope.

Un tore n'est pas simplement connexe.

$SO(n)$ ($n \geq 2$) n'est pas simplement connexe.

La sphère S^n ($n \geq 2$) et $SU(n)$ sont simplement connexes.

■ **Définition : convexité :**

Soit E un espace vectoriel normé. Soient u et v deux vecteurs de E . On appelle **segment** $[u ; v]$ l'ensemble des vecteurs $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$ pour $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

E est **convexe** si tout segment est entièrement inclus dans E (figure 19).

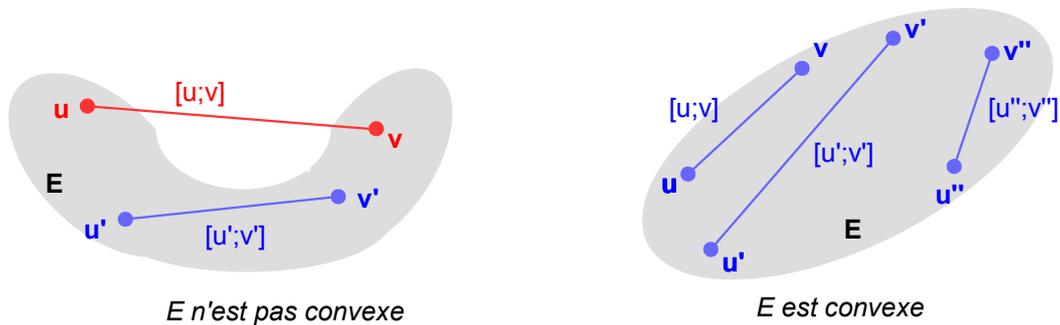


figure 19 : convexité

■ **Exemple :** Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé sur \mathbf{R} est simplement connexe.

■ **Proposition :** Un espace vectoriel normé E connexe par arcs est simplement connexe si et seulement si toute fonction continue injective $f : S^1 \rightarrow E$ peut être prolongée en une fonction continue $f' : D^2 \rightarrow E$ où $D^2 = \{z \in \mathbf{C} ; |z| \leq 1\}$ est le disque unité du plan complexe \mathbf{C} . (107)

■ **Définition : compacité :**

Soit E un espace vectoriel normé. Une famille d'ouverts $\{X_k\}_{k \in K}$ finie ou pas est un **recouvrement ouvert** de E si leur réunion est égale à E :

$$E = \bigcup_{k \in K} X_k$$

E est dit **compact** si on peut extraire de la famille $\{X_k\}_{k \in K}$ une famille finie $\{X'_m\}_{m=1, \dots, n}$ qui recouvre E :

$$E = \bigcup_{m=1, \dots, n} X'_m$$

On montre les propositions suivantes :

■ **Proposition :** Un espace vectoriel normé E est compact si et seulement si on peut extraire une suite convergente dans E (au sens de sa norme) à partir d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E$.

■ **Proposition :** Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie : $\dim E = n$. Alors ses sous-espaces compacts sont les ensembles topologiquement fermés et bornés.

■ **Proposition :** La 3-sphère S^3 est compacte, simplement connexe et sans bord. (108)

Puisque $SU(2)$ est difféomorphe à S^3 , il est lui aussi compact et simplement connexe.

5 – Spineurs (voir aussi [9], [7])

5.1 – Algèbre de Lie $su(2)$ de $SU(2)$

On récapitule sur les propriétés de $su(2)$:

On a vu que les éléments du groupe de Lie $SU(2)$ sont de la forme :

$$L(\theta) = \exp\left(i\Omega \cdot \frac{\sigma}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \sigma \in SU(2)$$

où $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta \mathbf{n}$ dans une base orthonormée de $E = \mathbf{R}^3$, $\theta = \|\Omega\|$ variant dans $[0, 4\pi]$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ avec les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les générateurs de $SU(2)$ sont $G_\Omega = i\Omega \cdot \frac{\sigma}{2}$ et en tant qu'éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, ils ont les propriétés caractéristiques : $G_\Omega^+ = -G_\Omega$ et $\text{tr} G_\Omega = 0$ (rappel : $L^+ = L^{-1}$ et $\det L = 1$). On a vu que le générateur est donc une matrice 2×2 de la forme :

$$G_\Omega = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} (\theta_1 \sigma_1 + \theta_2 \sigma_2 + \theta_3 \sigma_3) = \frac{i}{2} \sigma \cdot \Omega$$

Comme $L(\theta)$ est un quaternion unitaire : $L = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ -x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{pmatrix} = x_1 + \mathbf{i} y_1 + \mathbf{j} x_2 + \mathbf{k} y_2$ son égalité avec (57) donne :

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i n_3 \sin \frac{\theta}{2} & (n_2 + i n_1) \sin \frac{\theta}{2} \\ (-n_2 + i n_1) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - i n_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ -x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit les composantes du quaternion en fonction des paramètres de la rotation (θ, \mathbf{n}) :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \cos \frac{\theta}{2} ; & y_1 &= n_3 \sin \frac{\theta}{2} \\ x_2 &= n_2 \sin \frac{\theta}{2} ; & y_2 &= n_1 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

L'espace des générateurs de $SU(2)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$:

$$\mathfrak{su}(2) = \{ G \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C}) : G^+ = -G \text{ et } \text{tr} G = 0 \}$$

On a vu que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont des algèbres de Lie isomorphes.

5.2 – Définition des spineurs ⁽⁴⁾

On appelle spineurs les vecteurs complexes à deux composantes qui se transforment par une rotation d'angle $\theta = \|\Omega\|$ et d'axe $\Omega = \theta \mathbf{n}$ selon :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = L(\theta, \mathbf{n}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = L(\theta, \mathbf{n}) \psi \quad (110)$$

où $L(\theta, \mathbf{n}) \in SU(2)$ (voir point 5.1) ⁽⁵⁾.

|| **Remarque** : étant donné que les composantes de $L(\theta, \mathbf{n})$ sont complexes, si Ψ est un doublet de deux réels, sa transformation par rotation peut donner un doublet de deux complexes. Cela se traduit par :

4 Références proposées : [6], [7], [8], [9]

5 On rappelle qu'il s'agit ici de la rotation induite.

contrairement aux vecteurs réels, la rotation des spineurs ne conserve pas la nature réelle ou complexe de leurs composantes. Physiquement, cela implique que si une grandeur physique est décrite par un spineur, elle peut être observée comme un doublet de nombres réels pour un observateur et comme un doublet de nombres complexes pour un autre observateur dont les coordonnées se déduisent de celles du premier par rotation.

S'agissant de $SO(3)$, on a vu au point 4.2.2 que l'espace des vecteurs de rotation Ω , paramètres de $SO(3)$, est une boule $B(O,\pi)$ de \mathbf{R}^3 de rayon π dont les points diamétralement opposés sur la surface (la sphère) correspondent à la même rotation puisque $R(\pi\mathbf{U}) = R(-\pi\mathbf{U})$. On a vu au point 4.2.6 que cela a pour conséquence que cet espace est connexe mais non simplement connexe : un chemin reliant deux points opposés de la sphère n'est pas homotope à un point. Cette propriété topologique est globale sur l'espace des Ω associé au groupe $SO(3)$. En revanche, elle n'est pas vérifiée localement, c'est-à-dire au voisinage de la rotation identité $O = \mathbf{1}$ (le centre de $B(O,\pi)$) : tout chemin fermé γ est localement homotope à un point.

Or l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$ est formée des générateurs issus des développements limités au voisinage de $\mathbf{1}$. Elle n'a donc pas la même topologie que $SO(3)$. L'intérêt de $\mathfrak{so}(3)$ est que l'on peut obtenir une représentation continue du groupe $SO(3)$ par exponentiation :

$$R(\theta) = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J})$$

cette représentation étant bi-valuée puisque $\mathfrak{so}(3)$ et $SO(3)$ n'ont pas la même topologie. Cette situation est générale : la représentation d'un groupe de Lie \mathbf{G} obtenue à partir de son algèbre de Lie, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$, est multiplement valuée si \mathbf{G} et sa représentation n'ont pas la même topologie.

Pour récupérer la continuité de la représentation de $SO(3)$ il a été nécessaire de recourir aux matrices de $SU(2)$, qui est simplement connexe, pour associer la représentation à une matrice de rotation R_L de $SO(3)$ (relations (59), (60)) :

$$\forall V \in \mathbf{R}^3, L \in SU(2); \mathbf{M} = V \cdot \boldsymbol{\sigma} : R_L(\mathbf{M}) = L \mathbf{M} L^{-1}$$

Les composantes de L sont données par (109) : elles permettent de vérifier qu'un chemin fermé, reliant le centre $O = \mathbf{1}$ de $B(O,\pi)$ à la surface ($\|\Omega\| = \pi$), puis reliant la surface au centre $O = \mathbf{1}$, par variation continue $\pi \leq \|\Omega\| \leq 2\pi$, correspond dans $SU(2)$ à un chemin reliant $L = \mathbf{1}$ à $L = -\mathbf{1}$. En effet (109) donne :

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\rightarrow L(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \\ \theta = \pi &\rightarrow L(\pi) = \begin{pmatrix} i n_3 & n_2 + i n_1 \\ -n_2 + i n_1 & -i n_3 \end{pmatrix} \\ \theta = 2\pi &\rightarrow L(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} \end{aligned}$$

qui n'est pas un chemin fermé dans $SU(2)$. On aurait un chemin fermé dans $SU(2)$ pour :

$$\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi \rightarrow \theta = 2\pi \rightarrow \theta = 4\pi$$

ce qui se traduit par : pour les spineurs, auxquels s'appliquent les éléments de $SU(2)$ selon (110), la rotation nulle (ou identité) dans \mathbf{R}^3 correspond à une rotation $\theta = 0$ modulo 4π .

On démontre plus généralement :

■ **Théorème : Représentation n-valuée d'un groupe et connexité :**
Les représentations d'un groupe n-fois connexe sont au plus n-valuées.

(111)

■ **Exemple :** On a vu, en effet, que $SO(3)$ est doublement connexe (2-fois connexe) et que sa représentation est bi-valuée (2-valuée).

■ **Théorème : Recouvrement universel :**

Soit un groupe n -fois connexe \mathbf{G} , d'algèbre de Lie, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbf{G})$. Alors il existe un unique groupe \mathbf{G}' simplement connexe de même algèbre de Lie que \mathbf{G} :

$$\text{Lie}(\mathbf{G}') = \mathfrak{g}' = \text{Lie}(\mathbf{G}) = \mathfrak{g}$$

\mathbf{G}' est appelé **recouvrement universel** de \mathbf{G} .

■ Exemple : On a vu que $\mathbf{G}' = \text{SU}(2)$ est le recouvrement universel de $\mathbf{G} = \text{SO}(3)$ puisque $\text{SU}(2)$ est simplement connexe et que $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$.
Cependant la représentation $\text{SO}(3)$ de $\text{SU}(2)$ n'est pas fidèle, ce n'est pas un isomorphisme (points 4.2.1, 4.2.5), puisque $R_L = R_{-L}$.

5.3 – Revêtement universel

(voir aussi [25], [13], [10])

■ **Définition : groupe de revêtement universel :**

Soit E un espace vectoriel normé (ou plus généralement un espace topologique).

Un **revêtement** de E est un espace F pour lequel il existe un homéomorphisme local surjectif vers E (appelé projection) : $\pi : F \rightarrow E$ tel que pour tout $a \in E$ il existe un ouvert A contenant a tel que $\pi^{-1}(A)$ soit réunion disjointe d'ouverts B_j de F

$$\pi^{-1}(A) = \bigcup_j B_j \text{ et } \bigcap_j B_j = \emptyset$$

et si $\pi : B_j \subset F \rightarrow A$ est un difféomorphisme.

■ Exemple classique : Une hélice est le revêtement du cercle sur lequel se projettent ses arcs disjoints (des ouverts topologiques) (figure 20)

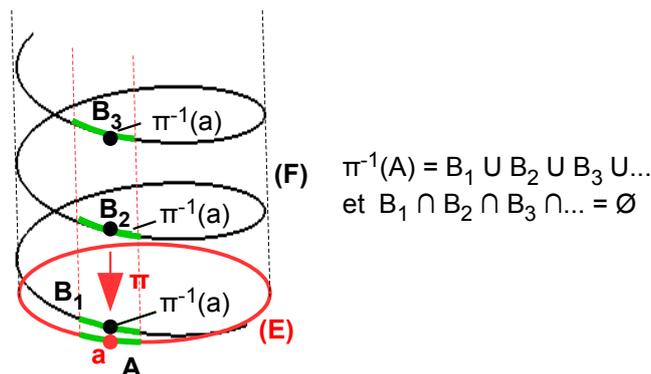


figure 20 : Revêtement

Plus précisément, pour tout $a \in E$ il existe un ouvert A contenant a , un espace discret D et un homéomorphisme :

$$h : \pi^{-1}(A) \rightarrow A \times D$$

$$v \in \pi^{-1}(A) \rightarrow h(v) = (a, d); a \in A, d \in D$$

qui commute avec les projections π :

$$h(v)=(a, d) \Rightarrow \pi(v)=a \in A$$

D est appelée **fibre discrète**, E est la **base**.

Un revêtement est **trivial** si :

$$\pi(h^{-1}(a, d))=a$$

■ **Exemple : revêtement du cercle par la droite réelle** (figure 21) : - Le cercle $S^1 \subset \mathbb{C}$ a pour revêtement \mathbb{R} par la projection :

$$\left| \begin{array}{l} \pi: F = \mathbb{R} \rightarrow E = S^1 \\ x \rightarrow \pi(x) = \exp(2i\pi x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \end{array} \right.$$

L'inverse donne : $\pi^{-1}(\pi(x)) = x \text{ mod } \mathbb{Z}$ puisque les éléments source sont définis à $2\pi n$ près, $n \in \mathbb{Z}$ donc la fibre D est infinie dénombrable : $D = \{2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$

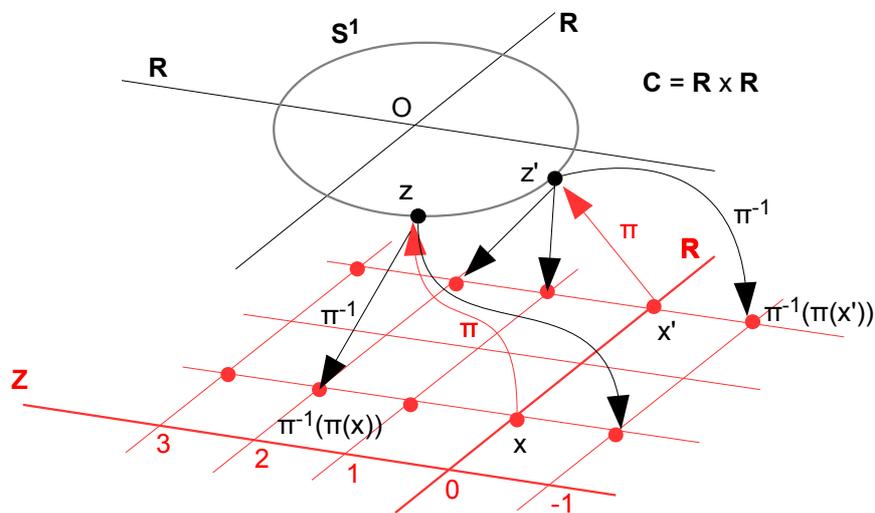


figure 21 : illustration du revêtement de S^1 par \mathbb{R}

Si le revêtement est connexe par arcs et si le groupe de ses automorphismes est transitif sur la fibre attachée à chaque point, il est dit **normal, ou régulier ou de Galois**.

■ **Définition : revêtement universel** :

On appelle **revêtement universel** de E un revêtement normal F tel que pour tout revêtement F' de E il existe un morphisme $f: F \rightarrow F'$.

■ **Définition : Simple connexité semi-locale** :

Un espace topologique E connexe par arcs est dit **semi-localement simplement connexe** si tout point $u \in E$ admet un voisinage X tel que tout lacet en u, contenu dans X, est homotope à une constante dans E.

■ **Définition : Relèvement** :

Soit E un espace topologique, et un revêtement $\pi: F \rightarrow E$. Soit $f: Y \rightarrow E$ une application continue. L'application $f': Y \rightarrow F$ telle que $f = \pi \circ f': Y \rightarrow E$ est appelée **relèvement** de f à F. De plus f' est appelée relèvement d'origine $u' = \pi^{-1}(u) \in F$ avec $u \in E$ si les points bases $y \in Y$ et $u \in E$ sont donnés fixés. (figure 22).

■ **Théorème** :

1°) Tout revêtement connexe est un revêtement universel.

(113)

2°) Un espace connexe par arcs possède un revêtement simplement connexe si et seulement s'il est semi-localement simplement connexe.

3°) En corollaire toute variété topologique possède un revêtement simplement connexe.

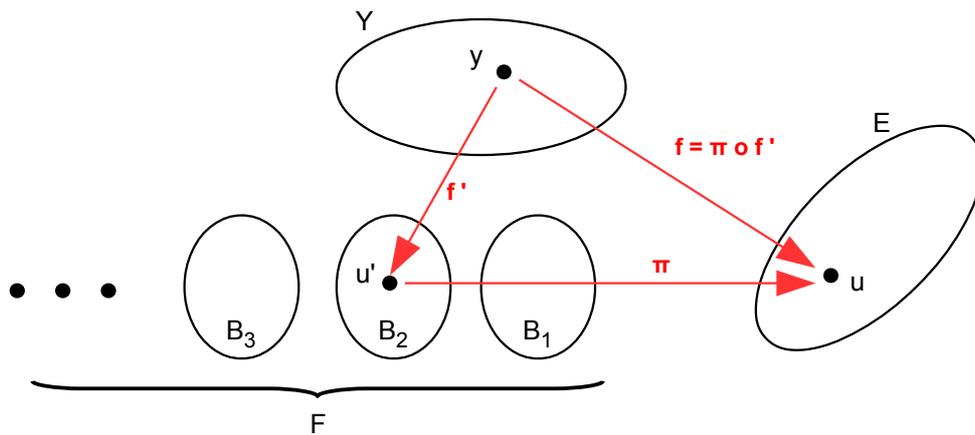


figure 22 : relèvement

5.4 – Groupe Spin(3) : c'est le revêtement universel de SO(3)

(voir aussi [27], [28], [30], [31], [14], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [29], [40])

5.4.1 – Définition : groupe Spin(3)

On sait que SO(3) est connexe, mais pas simplement connexe ; il est connexe par arcs. Et comme on a vu qu'il est localement connexe (point 4.2.6), du théorème (113-2) ci-dessus on déduit que SO(3) possède un revêtement simplement connexe.

On démontre que le revêtement simplement connexe est unique : plus précisément, s'il en existe deux alors il existe un isomorphisme unique entre eux [10].

D'une manière générale, soit E un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Pour un point-base $u \in E$, s'il existe deux revêtements connexes et simplement connexes de E, $\pi: F \rightarrow E$ et $\pi': F' \rightarrow E$, alors il existe un unique isomorphisme $f: F \rightarrow F'$ entre les revêtements.

Soit maintenant SO(n), groupe de Lie des matrices réelles de rotation nxn : comme pour SO(3), les SO(n) sont des variétés compactes et connexes par arcs, mais non simplement connexes. Ils possèdent chacun un revêtement simplement connexe, leur **revêtement universel**.

Le revêtement universel de SO(n) est, par définition, le **groupe Spin(n)** (ou groupe des spineurs). Comme il est simplement connexe, il est plus simple et plus pratique d'y traiter les rotations parce que celles-ci n'ont plus les ambiguïtés des rotations de SO(n) liées à leurs n-valuations.

■ **Exemple** : Pour SO(2), groupe des rotations dans le plan \mathbf{R}^2 , il est topologiquement équivalent au cercle S^1 puisque un élément de SO(2) s'écrit :

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ isomorphe à } z(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec donc } |z(\theta)|^2 = 1$$

On a vu que le revêtement universel de S^1 est le groupe $(\mathbf{R}, +)$: toute matrice $r(\theta)$ est la projection d'une infinité dénombrable de nombres réels θ , les angles, égaux modulo $2\pi n$ où $n \in \mathbf{Z}$. Il s'ensuit que le **groupe fondamental** de SO(2) (voir définition ci-après), ou ce qui est équivalent, de S^1 , est isomorphe à \mathbf{Z} , puisque à un chemin fermé autour de $z \in S^1$ correspondent n parcours fermés du cercle S^1 , $n \in \mathbf{Z}$.

■ **Définition** : Groupe fondamental d'un espace topologique E :

Soit $u \in E$ un point-base de l'espace topologique E. Le groupe fondamental, ou **groupe de Poincaré**, est par définition l'ensemble des classes d'équivalence des lacets pour la relation d'homotopie. La loi de groupe décrit la succession des lacets.

Prenons l'exemple du tore T^2 : il y a deux familles de chemins fermés du tore passant par un même point-base $u \in T^2$. Les chemins fermés de la première famille, ou première génératrice g_1 , sont tous homotopes entre eux ; les chemins fermés de la deuxième famille, ou seconde génératrice g_2 , sont tous homotopes entre eux (figure 23). Les lacets g_1 et g_2 n'appartiennent pas à la même classe d'homotopie : l'ensemble des lacets qui leur sont respectivement homotopes, muni de la loi de composition des lacets, forme le groupe fondamental du tore T^2 . L'élément neutre du groupe est la classe d'homotopie des lacets coïncidant avec u , l'inverse d'un lacet est le lacet parcouru dans le sens contraire, la composition des

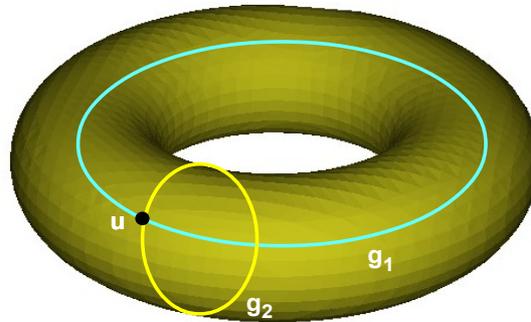


figure 23 : les lacets g_1 et g_2 sont des génératrices du tore T^2 passant par u fixe, ils ne peuvent pas être homotopes : ils définissent 2 classes d'équivalence de lacets qui leur sont homotopes

5.4.2 – Énoncé du théorème et remarques préliminaires : algèbre de Clifford, théorème de Cartan-Dieudonné, groupes Pin et Spin

■ *Théorème :*

A) Le revêtement universel de $SO(3)$ est $Spin(3)$.

B) $Spin(3)$ est connexe par arcs et simplement connexe. Il s'ensuit que $Spin(3)$ est isomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. (114)

On montre plus généralement que pour $n \geq 2$, $Spin(n)$ est connexe par arcs.

La preuve de (114-A et B) sera donnée aux points 5.4.3 et 5.4.4. Auparavant on aura besoin de ce qui suit :

En effet, une façon de montrer (114-A) est d'utiliser l'algèbre de Clifford (voir [1]) :

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbf{K} , de dimension $\dim E = n$, muni d'une forme bilinéaire $q(u,v)$, avec $u, v \in E$. C'est donc un espace vectoriel normé par la forme quadratique $q(u,u)$. Par exemple la forme bilinéaire est un produit scalaire. La forme quadratique peut être de signature positive ou bien négative.

Par rapport à la définition d'une algèbre de Clifford $C(E)$ sur E , où E muni de la forme bilinéaire q , une définition équivalente est donnée ci-après.

■ *Définition : Algèbre de Clifford :*

Soit $T(E)$ l'algèbre des tenseurs sur E et $Id(T(E))$ l'idéal engendré par les tenseurs :

$$u \otimes u + q(u, u) \mathbf{1}; \forall u \in E$$

L'algèbre de Clifford sur E , $C(E, q)$ est : $C(E, q) = T(E) / Id(T(E))$

C'est une algèbre associative unitaire. On démontre le théorème suivant de la **propriété universelle** d'une algèbre de Clifford :

■ **Théorème** : Soit U une algèbre associative unitaire et une application linéaire : $f : E \rightarrow U$ telle que : $\forall u \in E : f(u)^2 = -q(u, u)\mathbf{1}$; alors f se prolonge en un morphisme unique entre l'algèbre de Clifford $C(E, q)$ et l'algèbre U : $(f) : C(E, q) \rightarrow U$ et $C(E, q)$ est l'unique algèbre sur laquelle s'effectue ce prolongement. (115)

L'algèbre de Clifford est muni d'une opération **produit de Clifford**, noté ici « \circ » qui est telle que :

$$\forall u \in E : u \circ u = u^2 = -q(u, u)\mathbf{1} \quad (116)$$

autrement dit, le carré de u dans l'algèbre de Clifford est la forme quadratique. On avait noté dans [1] : $u \circ u = q(u, u)\mathbf{1}$, mais de façon générale on ne préjuge pas du signe de la forme quadratique. Une conséquence de (115) est que $C(E, q)$ est l'algèbre engendrée par E et par (116).

On appelle **caractéristique du corps K** , muni de l'addition (+) et du produit (\times), le plus petit entier $c > 0$ tel que :

$$c\mathbf{1}_K = \mathbf{1}_K + \mathbf{1}_K + \dots + \mathbf{1}_K = 0_K$$

← c termes →

où $\mathbf{1}_K$ est l'élément neutre pour le produit (\times) et 0_K l'élément neutre pour l'addition (+).

Une autre conséquence de (115) est que pour un corps K de caractéristique $c \neq 2$, l'algèbre de Clifford $C(E, q)$ est l'algèbre engendrée par E et par la relation :

$$\forall u, v \in E : u \circ v + v \circ u = -2q(u, v)\mathbf{1} \quad (117)$$

Dans [1] l'équivalent de (117) est le produit intérieur au signe près : $u \cdot v = \frac{1}{2}(u \circ v + v \circ u)$.

On a montré en [1] qu'une base de $C(E, q)$ est obtenue à partir d'une base $\{e_k\}$ ($k = 1, \dots, n$) de E par :

$$\{e_{k_1} \circ e_{k_2} \circ \dots \circ e_{k_j} ; 1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n ; 0 \leq j \leq n\}$$

et donc que :

$$\dim C(E, q) = 2^{\dim E} \quad (118)$$

Soit $\text{Diff}(E)$ l'espace des formes différentielles sur E (6). On montre qu'il existe un isomorphisme entre $\text{Diff}(E)$ et $C(E, q)$ tel que :

$$\alpha : \text{Diff}(E) \rightarrow C(E, q) \left| \begin{array}{l} e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \dots \wedge e_{k_j} \rightarrow e_{k_1} \circ e_{k_2} \circ \dots \circ e_{k_j} \end{array} \right. \quad (119)$$

où « \wedge » désigne le produit extérieur des formes différentielles.

■ **Exemple de (119)** : pour $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire ordinaire : $u, v \in \mathbf{R}^n : q(u, v) = u \cdot v$
 – Cas n°1 : E est la droite réelle \mathbf{R} ($n = 1$) avec un seul vecteur de base $\{e_1\}$, (116) donne :

$$e_1^2 = -1$$

Or la base de $C(\mathbf{R}, \cdot)$ est : $\{1, e_1\}$ et $\dim C(\mathbf{R}, \cdot) = 2^1 = 2$. D'où l'isomorphisme de $C(\mathbf{R}, \cdot)$ avec \mathbf{C} :

$$C(\mathbf{R}, \cdot) \sim \mathbf{C}$$

6 Voir par exemple [11], [12].

- Cas n°2 : la base de $E = \mathbf{R}^2$ est $\{e_1, e_2\}$ avec, selon (116) :

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 &= (e_1 \circ e_2)^2 = -1 \\ e_1 \circ e_2 &= -e_2 \circ e_1 \end{aligned}$$

$C(\mathbf{R}^2, \circ)$ a pour base $\{1, e_1, e_2, e_1 \circ e_2\}$ avec $\dim C(\mathbf{R}^2, \circ) = 2^2 = 4$. Par conséquent $C(\mathbf{R}^2, \circ)$ est isomorphe à l'algèbre des quaternions \mathbf{Q}_4 de dimension 4, les quaternions n'étant pas unitaires (ceux unitaires forment une sous-algèbre de dimension 3 comme on l'a vu, puisque une composante est liée aux trois autres) : $C(\mathbf{R}^2, \circ) \sim \mathbf{Q}_4$. On a vu au point 5.1 qu'un quaternion se décompose sur la base $\{1, i, j, k\}$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$:

$$L = x_1 + y_1 i + x_2 j + y_2 k$$

on a donc : $i = e_1 \circ e_2, j = e_1, k = e_2$.

- Cas n°3 : La base de $E = \mathbf{R}^3$ est $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec, selon (116) :

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 \circ e_2 \circ e_3 = -1$$

La base de $C(\mathbf{R}^3, \circ)$ est : $\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \circ e_2, e_1 \circ e_3, e_3 \circ e_1, e_1 \circ e_2 \circ e_3\}$ avec $\dim C(\mathbf{R}^3, \circ) = 2^3 = 8$. Cette base s'identifie à la somme ensembliste des bases des deux algèbres isomorphes à \mathbf{Q}_4 :

On a d'une part : $\{1, e_1 \circ e_2, e_2 \circ e_3, e_3 \circ e_1\} \sim \{1, i, j, k\}$,

et d'autre part : $\{e_1, e_2, e_3, e_1 \circ e_2 \circ e_3\} \sim \{i, j, k, -1\}$,

de sorte que $C(\mathbf{R}^3, \circ) \sim \mathbf{Q}_4 \oplus \mathbf{Q}_4$.

On appelle produit intérieur d'un vecteur $u \in E$ avec une forme différentielle $\omega \in \text{Diff}(E)$:

$$u \cdot \omega(u_1, \dots, u_{k-1}) = \omega(u, u_1, \dots, u_{k-1})$$

A partir de (119) on montre alors (cf. Annexe 4) :

$$\left. \begin{aligned} u \circ \alpha(\omega) &= \alpha(\alpha^{-1}(u) \wedge \omega - \alpha^{-1}(u) \cdot \omega) \\ \text{et: } \alpha(\omega) \circ u &= \alpha((-1)^k (\alpha^{-1}(u) \wedge \omega + \alpha^{-1}(u) \cdot \omega)) \end{aligned} \right\} (120)$$

Les relations (120) montrent que $(\text{Diff}(E), \wedge)$ et $C(E, q; \circ)$ sont isomorphes, ou encore : le produit extérieur des formes différentielles sur E est lié au produit de Clifford. On peut donc identifier ces deux algèbres.

Autre conséquence du théorème (115) :

Soit $\mu : (E, q) \rightarrow (E', q')$ une isométrie entre deux espaces vectoriels E et E' respectivement munis des formes bilinéaires q et q' :

$$q'(\mu(u), \mu(v)) = q(u, v)$$

alors μ se prolonge en un morphisme entre leurs algèbres de Clifford :

$$(\mu) : C(E, q) \rightarrow C(E', q') \quad (121)$$

Si $E' = E$ et si $\mu = -\text{id}$ alors :

$$\left. \begin{aligned} (u) &= (-id) : C(E, q) \rightarrow C(E, q) \\ e_{kl} \circ \dots \circ e_{kj} &\rightarrow (-1)^j e_{kl} \circ \dots \circ e_{kj} \end{aligned} \right| \quad (121\text{bis})$$

Soit $GC(E, q ; \circ)$ le groupe muni du produit de Clifford, constitué des éléments de $C(E, q)$ de norme non nulle :

$$GC(E, q ; \circ) = \{u \in C(E, q) ; q(u, u) \neq 0\}$$

Les éléments de $GC(E, q ; \circ)$ sont donc inversibles ; en effet, d'après (116) :

$$u \circ u = -q(u, u) \Leftrightarrow u^{-1} = \frac{-u}{q(u, u)} \quad (122)$$

Si le corps \mathbf{K} est \mathbf{R} ou \mathbf{C} , alors $GC(E, q ; \circ)$ est un groupe de Lie de dimension : $\dim GC(E, q ; \circ) = 2^n$.
Soit $\mathfrak{gc}(E, q)$ l'algèbre de Lie de $GC(E, q ; \circ)$. On montre que $\mathfrak{gc}(E, q)$ est isomorphe à $C(\mathbf{R}^n, q ; \circ)$:

$$\mathfrak{gc}(E, q) \sim C(\mathbf{R}^n, q ; [,])$$

où $[,]$ est le crochet de Lie :

$$\forall u, v \in C(\mathbf{R}^n, q ; [,]) : [u, v] = u \circ v - v \circ u$$

Soit le morphisme entre $GC(E, q ; \circ)$ et le groupe des applications linéaires agissant dans $C(E, q)$:

$$\left. \begin{aligned} Ad : GC(E, q ; \circ) &\rightarrow GL(C(E, q)) \\ u &\rightarrow (Ad(u) : v \in C(E, q) \rightarrow u \circ v \circ u^{-1}) \end{aligned} \right| \quad (123)$$

Par définition Ad est la **représentation adjointe** du groupe $GC(E, q ; \circ)$. Cette définition généralise celle que l'on a vue en (96).

La **différentielle de la représentation adjointe** DAd de Ad en $u = 0$ peut être calculée comme suit :

Soit φ un chemin dans $GC(E, q ; \circ)$, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = \left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=0} = a \in \mathfrak{gc}(E, q)$. Alors :

$DAd(1)(a)(v)$ est vecteur tangent en $u = 0$ à $Ad(\varphi(t))(v) = \varphi(t) \circ v \circ \varphi^{-1}(t)$ où $t \in [0, 1]$, soit :

$$DAd(1)(a)(v) = \varphi'(0) \circ v \circ \varphi(0) + \varphi(0) \circ v \circ (\varphi^{-1})'(0) = a \circ v - v \circ a$$

c'est-à-dire :

$$DAd(1)(a)(v) = [a, v] \quad (124)$$

La différentielle de la représentation adjointe en $u = 0$ donne le crochet de Lie.

Soit maintenant $u \in E$ tel que $q(u, u) \neq 0$. On a évidemment :

$$u \in E \subset GC(E, q ; \circ)$$

Alors la représentation adjointe Ad de E en tant que sous-espace de $GC(E, q ; \circ)$, a pour image E lui-même, et l'on a :

$$\forall v \in E, Ad(u)(v) = -v + 2 \frac{q(u, v)}{q(u, u)} u \quad (125)$$

Preuve de (125) : - De (122) et (123) on a :

$$\begin{aligned} \forall v \in E: -q(u, u) Ad(u)(v) &= -q(u, u) u \circ v \circ u^{-1} = -q(u, u) u \circ v \circ \left(-\frac{u}{q(u, u)} \right) = u \circ v \circ u \\ &= u \circ (v \circ u) = u \circ (-2q(u, v) - u \circ v) = -2q(u, v)u - u \circ u \circ v \\ &= -2q(u, v)u - (u \circ u) \circ v = -2q(u, v)u - (u^2)v = q(u, u)v - 2q(u, v)u \quad \text{d'après (117) et (116),} \end{aligned}$$

d'où le résultat (125).

CQFD de (125).

On a donc l'inclusion :

$$\{u \in E; q(u, u) \neq 0\} \subset \{w \in C(E, q); Ad(w)(E) = E\}$$

Il existe donc le sous-groupe de $GC(E, q; \circ)$ engendré par les vecteurs u de E vérifiant $q(u, u) \neq 0$; soit $G(E, q)$ ce sous-groupe :

$$G(E, q) = \{u \in GC(E, q; \circ); Ad(u)(E) = E\}$$

On démontre alors, en utilisant le **théorème de Cartan-Dieudonné**, la proposition suivante :

■ **Proposition** : La restriction sur $G(E, q)$ de la représentation adjointe sur le groupe orthogonal $O(E, q)$ agissant sur E muni de sa forme bilinéaire q , est un morphisme surjectif :

(126)

$$Ad|_{G(E, q)}: G(E, q) \rightarrow O(E, q)$$

Rappel : - Le groupe des endomorphismes orthogonaux dans E , $O(E, q)$, est constitué des endomorphismes qui conservent la forme quadratique :

$$O(E, q) = \{M \in GL(E); \forall u \in E, q(M(u), M(u)) = q(u, u)\} = \{M \in GL(E); q \circ M = q\}$$

■ **Théorème de Cartan-Dieudonné** : - Tout élément du groupe orthogonal de E , $M \in O(E, q)$ est le produit d'au plus n réflexions, où $n = \dim E$.

Plus exactement : soit $F = Ker(M - id)$ l'espace des invariants de M (espace des $u \in E$ tels que $M(u) = u$) et $c(M) = n - \dim F$ sa codimension. Alors M est le produit d'exactly $c(M)$ réflexions.

(127)

Une **réflexion** est une isométrie $r \in O(E, q)$ telle que $Ker(r - id)$ est un hyperplan de E .

■ **Exemples** : Dans $E = \mathbf{R}^2$, $r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ représente une réflexion, exprimée dans une base orthonormée (e_1, e_2) . C'est aussi une symétrie par rapport à Oe_1 (figure 24).

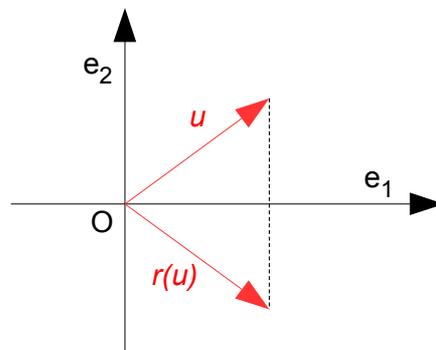


figure 24 : exemple de réflexion dans \mathbf{R}^2

Dans $E = \mathbf{R}^3$, $r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente une réflexion exprimée dans une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) , c'est aussi une symétrie orthogonale par rapport à un plan, en l'occurrence ici le plan Oe_2e_3 (figure 25).

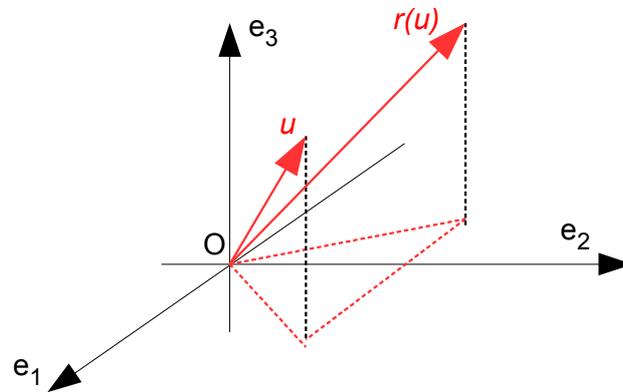


figure 25 : exemple de réflexion dans \mathbf{R}^3

■ **Définition : vecteur isotrope :**

Un vecteur $u \in E$ est **isotrope** pour la forme bilinéaire q si $q(u, u) = 0$, il est anisotrope dans le cas contraire. La forme bilinéaire q est dite isotrope s'il existe au moins un vecteur isotrope non nul $u \neq 0$.

■ **Proposition :** Si u et v de E sont deux vecteurs anisotropes, et si leurs formes quadratiques sont égales, alors $u+v$ ou $u-v$ sont également anisotropes. (128)

Preuve de (128) :

On a l'identité : $q(u+v, u+v) + q(u-v, u-v) = 2(q(u, u) + q(v, v))$

Par hypothèse : $q(u, u) \neq 0$ et $q(v, v) \neq 0$ et $q(u, u) = q(v, v)$, la relation précédente donne alors :

$$q(u+v, u+v) + q(u-v, u-v) = 4q(u, u) = 4q(v, v)$$

Si $u+v$ et $u-v$ étaient tous deux isotropes on aurait $q(u, u) = q(v, v) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $u+v$ ou $u-v$ est anisotrope.

CQFD de (128).

On définit maintenant les groupes pinoriel $\text{Pin}(E, q)$ et spinoriel $\text{Spin}(E, q)$, pour ce dernier il va s'agir de montrer qu'il est le revêtement universel de $\text{SO}(n)$.

■ **Définition : groupe pinoriel $\text{Pin}(E, q)$:**

Le **groupe pinoriel** de E est le sous-groupe de $G(E, q)$ engendré par les vecteurs $u \in E$ tels que :

$$q(u, u) = \pm 1$$

$$\text{Pin}(E, q) = \{ u_1 \circ \dots \circ u_m \in C(E, q), 1 \leq m \leq 2^n \text{ et } \forall k, u_k \in G(E, q) \text{ et } q(u_k, u_k) = \pm 1 \}$$

■ **Définition : groupe spinoriel $\text{Spin}(E, q)$:**

Le **groupe spinoriel** est le sous-groupe de $G(E, q)$ où m est pair :

$$\text{Spin}(E, q) = \{ u_1 \circ \dots \circ u_m \in C(E, q), m \text{ pair}, u_k \in G(E, q) \}$$

On démontre que les représentations adjointes de $\text{Pin}(E, q)$ et $\text{Spin}(E, q)$ respectivement vers le groupe orthogonal $O(E, q)$ et le groupe spécial orthogonal $\text{SO}(E, q)$ sont des applications surjectives :

$$\left. \begin{array}{l} Ad|_{Pin(E,q)}: Pin(E,q) \rightarrow O(E,q) \\ Ad|_{Spin(E,q)}: Spin(E,q) \rightarrow SO(E,q) \end{array} \right\} \text{ surjectives}$$

Venons-en maintenant au cas $E = \mathbf{R}^n$ où q est euclidienne. Les définitions de $Pin(E,q)$ et $Spin(E,q)$ deviennent ici :

$$Pin(\mathbf{R}^n, q) = Pin(n) = \{u_1 \circ \dots \circ u_m; 1 \leq m \leq 2^n \text{ et } \forall k, u_k \in \mathbf{R}^n \text{ et } \sqrt{q(u_k, u_k)} = \|u_k\| = 1\}$$

$$Spin(\mathbf{R}^n, q) = Spin(n) = \{u_1 \circ \dots \circ u_{2p}; \forall k, u_k \in \mathbf{R}^n \text{ et } \sqrt{q(u_k, u_k)} = \|u_k\| = 1\}$$

Montrons alors :

■ **Propositions :**

- a) Si $n \geq 2$, $Spin(n)$ est connexe par arcs.
- b) Si $n \geq 3$, $Spin(n)$ est simplement connexe et compacte.

Preuve de (a) : - Soient $u = u_1 \circ \dots \circ u_{2p}$ et $w = w_1 \circ \dots \circ w_{2q}$ deux éléments différents de $Spin(n)$ avec $p \geq q$, et considérons $2p+2q$ éléments de la sphère $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Pour $n \geq 2$, S^{n-1} est connexe par arcs, comme cela peut se vérifier avec (106) par des applications continues entre \mathbf{R}^n et S^{n-1} .

Comme $\|u_k\| = 1$ et $\|w_j\| = 1$ les composantes du produit de Clifford de u et w sont sur S^{n-1} . Comme S^{n-1} est connexe par arcs, il existe des chemins de S^{n-1} reliant u_k et w_k

$$\varphi: [0,1] \rightarrow Spin(n); k = 1, \dots, 2q$$

et reliant u_{2q+1} à u_1 et reliant u_{2q} à $-u_1$:

$$\varphi': [0,1] \rightarrow Spin(n); j = 2q+1, \dots, 2p$$

avec donc :

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= u_{2q+1}, \varphi'(1) = u_1 \text{ pour } j = 2q+1 \\ \text{et : } \varphi'(0) &= u_{2q}, \varphi'(1) = -u_1 \text{ pour } j = 2q \end{aligned}$$

Le produit de Clifford fournit alors un chemin reliant dans $Spin(n)$:

$$u = u_1 \circ \dots \circ u_{2p} \quad \text{à} \quad w \circ u_1 \circ (-u_1) \circ \dots \circ u_1 \circ (-u_1) = w_1 \circ \dots \circ w_{2q} \circ u_1 \circ (-u_1) \circ \dots \circ u_1 \circ (-u_1) = w$$

donc u et w sont reliés par un chemin dans $Spin(n)$ puisque leurs vecteurs constitutifs de leurs produits de Clifford appartiennent à S^{n-1} .

CQFD de (a).

La proposition (b) découle de ce que, d'après (108), S^3 est compacte et simplement connexe, et on applique un raisonnement comme pour (a).

■ **Définition :** Composantes paire et impaire d'une algèbre de Clifford $C(E,q)$:

Soit l'isométrie $\mu = \pm \text{id}$ dans (E,q) , dont le prolongement (μ) dans $C(E,q)$ est défini par la transformation (121bis). On définit alors le sous-espace de $C(E,q)$ tel que la transformation de ses éléments par (μ) donne leur alternance :

$$C^k(E, q) = \{u \in C(E, q) : (\mu)(u) = (-1)^k u\} \text{ avec } k \in \mathbf{Z}$$

et l'on montre que : $C^k(E, q) \circ C^m(E, q) \subset C^{k+m}(E, q)$. Pour k et $m = 0$ ou 1 , on montre que $C(E,q)$ est la somme directe :

$$C(E,q) = C^0(E,q) \oplus C^1(E,q)$$

où donc : $C^0(E, q) = \{u \in C(E, q) : (-id)u = u\}$ est la **composante paire** de $C(E, q)$, et :

$C^1(E, q) = \{u \in C(E, q) : (-id)u = -u\}$ est la **composante impaire** de $C(E, q)$.

Puisque $C^0(E, q)$ est stable par « \circ » c'est une sous-algèbre de $C(E, q)$:

$$\forall u, v \in C^0(E, q) : (-id)u \circ (-id)v = u \circ v \in C^0(E, q)$$

Ce n'est pas le cas de $C^1(E, q)$, qui est seulement un sous-espace vectoriel de $C(E, q)$:

$$\forall u, v \in C^1(E, q) : (-id)u \circ (-id)v = (-u) \circ (-v) = u \circ v \neq (-id)(u \circ v)$$

Par contre $C^0(E, q)$ et $C^1(E, q)$ sont isomorphes.

Pour le montrer il suffit de choisir $w \in C^1(E, q)$ avec $\|w\| = 1$ pour construire le morphisme :

$$\left| \begin{array}{l} (w) : C^0(E, q) \rightarrow C^1(E, q) \\ u \rightarrow w \circ u \end{array} \right.$$

avec donc : $(-id)(w \circ u) = ((-id)w) \circ u = -w \circ u$ donc $w \circ u \in C^1(E, q)$ et (w) est bijectif.

■ **Proposition** : Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire ordinaire q avec :

$$\forall u \in \mathbf{R}^n, q(u, u) = \|u\|^2$$

Son algèbre de Clifford est isomorphe à la composante paire de l'algèbre de Clifford de $E' = \mathbf{R}^{n+1}$ (129)

$$C(\mathbf{R}^n, q) \sim C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q)$$

Preuve de (129) :

Soient les bases orthonormées : (e_1, \dots, e_n) base de \mathbf{R}^n ; $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ base de \mathbf{R}^{n+1} . L'application linéaire :

$$\left| \begin{array}{l} f : \mathbf{R}^n \rightarrow C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q) \\ e_k \rightarrow f(e_k) = e_k \circ e_{n+1} \end{array} \right.$$

se prolonge en un isomorphisme (f) entre $C(\mathbf{R}^n, q)$ et $C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q)$ (figure 26) :

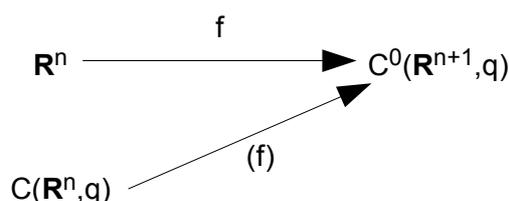


figure 26

En effet, on vérifie que la propriété universelle (115) s'applique :

$$\begin{aligned} (f(e_k))^2 &= (e_k \circ e_{n+1})^2 = e_k \circ e_{n+1} \circ e_k \circ e_{n+1} = -e_k \circ e_{n+1} \circ e_{n+1} \circ e_k \quad (\text{d'après (119)}) \\ &= -e_k \circ (e_{n+1})^2 \circ e_k = e_k \circ e_k = (e_k)^2 = -1 \end{aligned}$$

Alors f se prolonge en un morphisme unique entre $C(\mathbf{R}^n, q)$ et $C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q)$: (f)

Soit $e_{k_1} \circ \dots \circ e_{k_{2p}} = u_k$ un vecteur appartenant à la base de $C(\mathbf{R}^n, q)$, avec $1 \leq k_j \leq n$. Alors les éléments de $C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q)$: $(f)u_k = u_k \circ e_{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$ forment une famille libre, donc (f) est injective. On a :

$$C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q) = C(\mathbf{R}^n, q) \circ e_{n+1} \quad \text{donc} \quad \dim C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q) = \dim C(\mathbf{R}^n, q) = 2^n .$$

$C(\mathbf{R}^n, q)$ et $C^0(\mathbf{R}^{n+1}, q)$ ont même dimension, et puisque (f) est injective, il s'ensuit que (f) est bijective : (f)

est donc un isomorphisme.
CQFD de (129).

5.4.3 – Preuve de (114-A)

Il nous faut ensuite montrer la proposition suivante :

■ *Proposition* : Pour $n \geq 2$ la représentation adjointe Ad entre Spin(n) et SO(n) est un revêtement topologique non trivial à 2 **feuillet**s de SO(n), et pour $n \geq 3$ Spin(n) est le revêtement universel de SO(n). Plus précisément on a la **suite exacte** :

(130)

$$\{0\} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow Spin(n) \xrightarrow{Ad} SO(n) \rightarrow \{1\}$$

Avant de montrer (130), donnons la définition du nombre de feuillet d'un revêtement et celle de suite exacte :

■ *Définition* : Nombre de feuillet d'un revêtement :

Soit $\pi : F \rightarrow E$ un revêtement d'un espace connexe par arcs E ; pour tout élément u et u' de E il existe une bijection entre les fibres $\pi^{-1}(u)$ et $\pi^{-1}(u')$ et donc on a : $card \pi^{-1}(u) = card \pi^{-1}(u')$. Si ce cardinal est fini il est appelé **nombre de feuillet**s du revêtement ou degré.

■ *Définition* : Suite exacte :

Une **suite exacte** d'ensembles entre lesquels existent des morphismes, est une suite dans laquelle l'image par un morphisme d'un ensemble est exactement égale au noyau du morphisme suivant.

Soient $G_0, G_1, \dots, G_n, G_{n+1}, \dots$ des groupes, et les morphismes qui les relient :

$$G_0 \xrightarrow{g_0} G_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-1}} G_n \xrightarrow{g_n} G_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} \dots$$

Cette suite est exacte si : $\forall n : Im(g_n) = Ker(g_{n+1})$.

Preuve de (130) :

La preuve de (130) conduit à celle de (114-A).

Soit $s \in Spin(n) \subset C(\mathbf{R}^n, q)$. D'après sa définition :

$$Spin(n) = Pin(n) \cap C^0(\mathbf{R}^n, q) \subset C^0(\mathbf{R}^n, q)$$

Comme $(-id)s = s$, s est la combinaison linéaire d'éléments s_k tels que :

$$(-id)s_k = s_k = u_{k1} \circ \dots \circ u_{k2p} \text{ avec } u_{kj} \in C(\mathbf{R}^n, q)$$

Parmi ces éléments il y a s_0 tel que $(-id)s_0 = s_0$ et s_1 tels que $s_1 = e_k \circ u'_1$ où u'_1 ne contient pas e_k et où $(-id)e_k = -e_k$ et $(-id)u'_1 = -u'_1$ et donc $(-id)s_1 = s_1$. Donc s se décompose en :

$$s = s_0 + e_k \circ u'_1 \quad (131a)$$

avec $s_0 \in C^0(\mathbf{R}^n, q)$ et $u'_1 \in C^1(\mathbf{R}^n, q)$.

Or s_0 est combinaison linéaire de $e_{01} \circ \dots \circ e_{02p}$, donc : $e_k \circ s_0 = e_k \circ e_{01} \circ \dots \circ e_{02p} = e_{01} \circ \dots \circ e_{02p} \circ e_k$ après un nombre pair de commutations, ce qui ne change pas le signe :

$$e_k \circ s_0 = s_0 \circ e_k \quad (131b)$$

et u'_1 est combinaison linéaire de $e_{j1} \circ \dots \circ e_{j2q+1}$ où e_k ne figure pas dans ces produits, donc :

$e_k \circ u'_1 \circ e_k = e_k \circ e_{j_1} \circ \dots \circ e_{j_{2q+1}} = -e_k \circ e_k \circ u'_1$ après un nombre impair de commutations, ce qui change le signe et, puisque $e_k \circ e_k = -1$:

$$e_k \circ u'_1 \circ e_k = u'_1 \quad (131c)$$

De plus, si $s \in \text{Ker Ad}$ avec $Ad(s)(u) = s \circ u \circ s^{-1} \in SO(n)$, alors $Ad(s) = id$: $s \circ u \circ s^{-1} = u$, soit $s \circ u = u \circ s$. Pour $u = e_k$, on a alors, si $s \in \text{Ker Ad}$:

$$(s_0 + e_k \circ u'_1) \circ e_k = e_k \circ (s_0 + e_k \circ u'_1)$$

donc :

$$s_0 \circ e_k + e_k \circ u'_1 \circ e_k = e_k \circ s_0 + e_k \circ e_k \circ u'_1$$

et d'après (131 b,c) et avec $e_k^2 = -1$: $s_0 \circ e_k + u'_1 = e_k \circ s_0 - u'_1 = e_k \circ s_0 - u'_1$ d'où $-u'_1 = u'_1$ donc $u'_1 = 0$ et $s = s_0$ ne contient pas e_k .

On réitère le raisonnement pour tous les $k \leq n$: $s_0 \circ u = u \circ s_0$ où s_0 ne contient aucun e_k , donc $s_0 = +1$ ou -1 , c'est-à-dire :

$$\text{Ker Ad}|_{Spin(n)} = \{-1, 1\}$$

ce qui montre que $Ad|_{Spin(n)}$ est un revêtement de $SO(n)$ avec pour fibre discrète $\{-1, 1\}$: $Spin(n) \times \mathbf{Z}_2$:

$$\left. \begin{array}{l} Ad : \pi^{-1}(SO(n)) = Spin(n) \rightarrow SO(n) \times \mathbf{Z}_2 \\ s \rightarrow Ad|_{Spin(n)}(s) = (M, m); M \in SO(n), m = \pm 1 \end{array} \right\}$$

Le revêtement est trivial si :

$$\pi(Ad^{-1}(M, m)) = M \in SO(n) \quad \text{c'est-à-dire si} \quad \pi(Ad^{-1}(SO(n) \times \mathbf{Z}_2)) = SO(n) .$$

Montrons que cela n'est pas possible, ce qui revient à montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre $Spin(n)$ et $SO(n) \times \mathbf{Z}_2$ (dans le cas contraire $SO(n)$ pourrait être son propre revêtement via $Spin(n)$) :

On a : $\pi^{-1}(id) = \{(id, -1), (id, 1)\} \in SO(n) \times \mathbf{Z}_2$ qui forment 2 composantes connexes disjointes de $SO(n) \times \mathbf{Z}_2$. On a aussi $Ad^{-1}(id) = \{-1, 1\} \in Spin(n)$. Si les éléments de $Ad^{-1}(id)$ appartiennent à la même composante connexe, alors ils ne peut pas exister d'homéomorphisme entre $Spin(n)$ et $SO(n) \times \mathbf{Z}_2$. Or il existe un chemin continu entre 1 et -1 dans $Spin(n)$; en effet, soit un ensemble continu d'éléments paramétré par $0 \leq x \leq 1$:

$$s(x) = \cos \pi x + e_j \circ e_k \sin \pi x$$

où e_j et e_k sont deux vecteurs unitaires orthogonaux de \mathbf{R}^n . L'application :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : [0, 1] \rightarrow Spin(n) \\ x \rightarrow s(x) \end{array} \right\}$$

est continue et relie $s = -1$ à $s = 1$ car $\varphi(0) = s(0) = 1$ et $\varphi(1) = s(1) = -1$. Donc $s = -1$ et $s = 1$ sont dans la même composante connexe de $Spin(n)$, donc le revêtement $Ad|_{Spin(n)}$ n'est pas trivial.

Selon (114-B), qui sera démontrée au point 5.4.4, pour $n \geq 3$, $Spin(n)$ est simplement connexe. Comme $SO(n)$ est connexe par arcs et que $Spin(n)$ est un revêtement de $SO(n)$, alors d'après (113-2), $Spin(n)$ est le revêtement universel de $SO(n)$, défini par :

$$Spin(n) = \{s_1 \circ \dots \circ s_{2p} \in C(\mathbf{R}^n, q); s_k \in G(\mathbf{R}^n, q)\}$$

S'agissant de la compacité, on utilise cette proposition :

■ *Proposition* : Soit $\pi : F \rightarrow E$ un revêtement. Si E est compact, alors F est compact si et seulement si les fibres de π sont de cardinal fini.

Or $SO(n)$ est compact, et le revêtement $Ad|_{Spin(n)}$ a pour fibre discrète $\{-1, 1\}$ donc de cardinal 2 qui est fini. Donc $Spin(n)$ est compact. En particulier $Spin(3)$ est le revêtement universel de $SO(3)$ et il est compact.

CQFD de (114-A).

5.4.4 – Preuve de (114-B)

La preuve utilise les théorèmes et propositions suivantes relatifs aux relèvements (voir par exemple [13]) :

Soit E un espace topologique et un revêtement : $\pi : F \rightarrow E$; soit $f : Y \rightarrow E$ une application continue et le relèvement de f : $f' : Y \rightarrow F$. On a donc par définition $f = \pi \circ f' : Y \rightarrow E$. On suppose que f' est un relèvement d'origine : $u' = \pi^{-1}(u) \in F, u \in E$.

■ *Proposition* : Si Y est connexe, et si f possède un relèvement d'origine u' , alors ce relèvement est unique. (132)

Preuve de (132) : - On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux relèvements f' et f'' de même origine u' . Alors le sous-ensemble de Y :

$$X = \{v \in Y, f'(v) = f''(v)\} \subset Y$$

est un ouvert : en effet, considérons un voisinage de $f'(v)$, $V(f'(v))$ dans F ; dans ce voisinage $V(f'(v))$ le revêtement $\pi : V(f'(v)) \subset F \rightarrow E$ est un homéomorphisme : soit $V(v) \subset Y$ un voisinage de v , alors pour tout v' de $V(v)$ on peut avoir $\pi(x) = f'(v') \in E$ où la solution $x \in V(f'(v)) \subset F$ existe et est unique, soit : $x = f'(v') = f''(v) \in F$.

Donc X est aussi la réunion pour tous les $v \in Y$ des sous-ensembles des v' tels que $f'(v') = f''(v)$:

$$X = \bigcup_{v \in Y} \{v' \in Y, f'(v') = f''(v)\}$$

X est donc non vide, c'est un ouvert et aussi un fermé, donc $X = Y$, par conséquent $f' = f''$: le relèvement est unique.

CQFD de (132).

■ *Proposition* : Soit le revêtement $\pi : F \rightarrow E$, et un chemin dans E : $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$. Alors φ admet un relèvement $\varphi' : [0, 1] \rightarrow F$

$$\pi \circ \varphi' = \varphi : [0, 1] \rightarrow E$$

Soit $u \in E$ donné fixé et $u' = \pi^{-1}(u) \in F$. Alors il existe un relèvement unique φ' d'origine u' : (133)

$$\pi \circ \varphi' = \varphi : [0, 1] \rightarrow E$$

où il existe $x \in [0, 1]$ tel que $\varphi'(x) = u'$.

Preuve de (133) :

Soit le sous-espace du fibré $[0, 1] \times F$:

$$F_\varphi = \{(x, w) \in [0, 1] \times F : \varphi(x) = \pi(w) \in E\}$$

F_φ est un espace topologique et sa projection sur $[0,1]$ est un revêtement de $[0,1]$: $\pi' : F_\varphi \rightarrow [0,1]$ soit :

$$y \in [0,1], \pi'^{-1}(y) = w \in [0,1] \times F = (y, \pi^{-1}(u)) = (y, \pi^{-1}(\varphi(y)))$$

donc $\pi'^{-1} = \pi^{-1} \circ \varphi : [0,1] \rightarrow F$; $[0,1]$ est simplement connexe, donc π' est revêtement trivial de $[0,1]$:

$$\pi(\pi'^{-1}[0,1]) = \pi(F_\varphi) = [0,1]$$

Il existe donc une unique section de F_φ contenant le couple $(x=0, u')$, à laquelle on associe l'unique relèvement φ'' d'origine u' :

$$\begin{cases} \pi \circ \varphi'' = \varphi' : [0,1] \rightarrow F \\ \varphi'(x) = u' \end{cases}$$

(figure 27).
CQFD de (133).

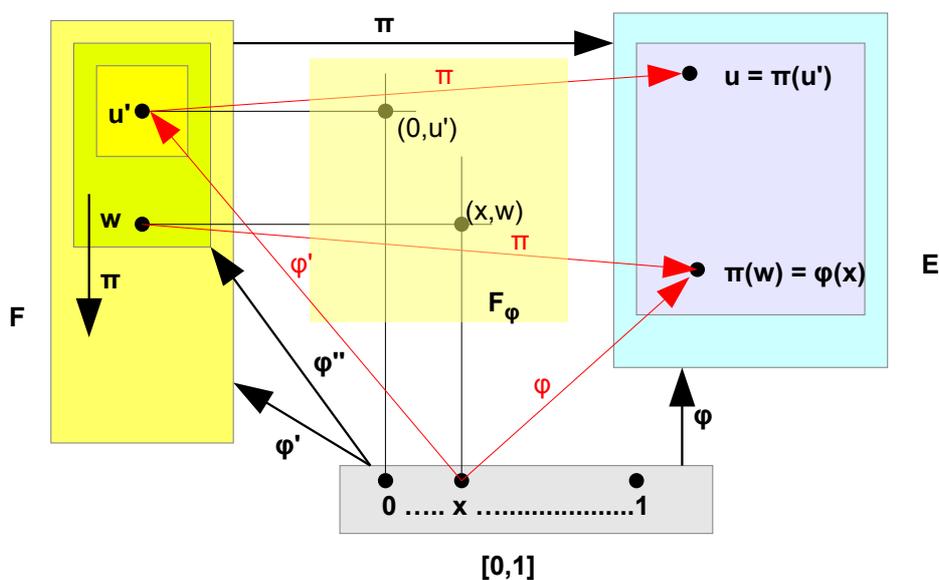


figure 27

Plus généralement l'espace topologique :

$$F_\varphi = \{ (x, w) \in A \times F : f(x) = \pi(w) \in E \}$$

où A est un espace topologique et $f : A \rightarrow E$ une application continue, est appelé **produit fibré** de A et F , relativement au revêtement $\pi : F \rightarrow E$.

L'espace topologique F_φ est un revêtement de E , la fibre de F_φ contenant $x \in A$ est identique à la fibre de F contenant $\pi^{-1}(f(x))$, c'est-à-dire au-dessus de $f(x)$.

Dans la preuve de (133), $[0,1]$ joue le rôle de A et φ celui de f .

De la généralisation de (133) aux espaces et applications évoqués ci-dessus, il résulte :

■ **Proposition** : Soit un revêtement $\pi : F \rightarrow E$ et $u' = \pi^{-1}(u)$ un point base de F , avec $u \in E$. Soit A un espace simplement connexe et $x \in A$ fixé. Alors toute application continue $f : A \rightarrow E$ telle que $f(x) = u$ admet un unique relèvement à F d'origine u' . (134)

■ **Proposition** : Soient E et E' deux espaces topologiques, un revêtement de E , $\pi : F \rightarrow E$ et une homotopie $h : [0,1] \times E' \rightarrow E$ entre deux chemins φ_0 et φ_1 en tant qu'applications continues de E' vers E : (135)

$$\left| \begin{array}{l} h: [0,1] \times E' \rightarrow E \\ (x, y) \rightarrow h(x, y) \in E \end{array} \right. \text{ avec } \left| \begin{array}{l} h(x, 0) = \varphi_0(x) \\ h(x, y_1) = \varphi_1(x) \end{array} \right.$$

Soient $u \in E$ fixé, $y \in E'$ fixé. Soit $u' = \pi^{-1}(u)$ dans F . Alors si φ_0 a un relèvement d'origine u' , h a aussi un relèvement d'origine u' , et donc φ_1 aussi.

La proposition (135) est une conséquence de (134) :

Pour tout $y \in E'$ le chemin $\varphi_y: x \in E' \rightarrow h(x, y) \in E$ a un unique relèvement $h': [0,1] \times E' \rightarrow F$ d'origine $u' \in F$ où φ_y et E' jouent le rôle respectivement de f et de A dans (134).

Un corollaire de (135) est :

■ *Proposition* : Tout espace topologique contractile est simplement connexe.

(136)

Preuve de (136) :

Il suffit de choisir dans (135) : $E' = E$ avec $\varphi_0 = \text{constante}$ et $\varphi_1 = \text{id}|_E$; la fonction d'homotopie est alors telle que : $h(x, 0) = \varphi_0(x) = \text{constante}$ et $h(x, y_1) = \varphi_1(x) = x$.

On montre alors :

Tout revêtement π de E possède une **section globale**, et donc que E est simplement connexe.

NB : Une section globale du feuilletage d'un revêtement est une courbe fermée simple, transverse à ce feuilletage, et contenant des points appartenant à toute demi-feuille régulière [14].

CQFD de (136).

Autre corollaire de (135) :

■ *Proposition* : Soit $\pi : F \rightarrow E$ un revêtement de E . Soient deux chemins dans E d'extrémités identiques et fixées : $\varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \rightarrow E$ avec $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u_0$ et $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = u_1$.

Soit $u' = \pi^{-1}(u)$ dans F . Soient φ'_1, φ'_2 les relèvements de φ_1, φ_2 de même origine u' :

$$\pi \circ \varphi'_1 = \varphi_1 \text{ et } \pi \circ \varphi'_2 = \varphi_2$$

(137)

Alors si φ_1 et φ_2 sont homotopes, on a $\varphi'_1(1) = \varphi'_2(1)$.

Il s'ensuit que si un lacet φ est homotope à une constante $u_0 \in E$ alors son relèvement φ' est aussi un lacet.

Preuve de (137) : - Puisque φ_1 et φ_2 sont homotopes, il existe :

$$h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E \quad \left| \text{ tel que : } \left| \begin{array}{l} h(x, 1) = u_1 = \varphi_1(1) = \varphi_2(1) \\ h(0, y) = u_0 = \varphi_2(0) = \varphi_1(0) \end{array} \right. \right.$$

Le relèvement h' de h vérifie : $h'(x, 1) \in \{\pi^{-1}(u_1)\}$ qui est un ensemble discret (par définition du revêtement à fibres discrètes), donc $h'(x, 1)$ ne dépend pas de $x \in [0,1]$, d'où :

$$\varphi'_1(1) = h'(0, 1) = h'(1, 1) = \varphi'_2(1)$$

CQFD de (137).

La proposition (137) permet de généraliser (136) au cas où l'espace topologique est localement connexe et simplement connexe par arcs, et non pas exclusivement contractile.

■ *Proposition* : Si E est localement connexe et simplement connexe par arcs, alors E est simplement connexe.

(138)

Preuve de (138) :

Rappel : un espace **simplement connexe par arcs** est un espace connexe par arcs où tout lacet est homotope à une constante.

Pour la démonstration de (138) on a besoin de la proposition :

■ **Proposition** : Soit le revêtement $\pi : F \rightarrow E$ avec E localement connexe par arcs. Soit F' une composante connexe de F . Alors la restriction de π à $F' : \pi|_{F'} : F' \rightarrow E$ est un revêtement.

(139)

Preuve de (139) : Soit $u \in E$ et $V(u)$ un **voisinage de u trivialisant**, c'est-à-dire tel que :

- $\pi^{-1}(V(u))$ est une réunion d'ouverts disjoints de F ,
- et la restriction de π sur chacun de ces ouverts est un homéomorphisme vers $V(u)$

$$\pi^{-1}(V(u)) = \bigcup_k B_k$$

avec B_k ouverts disjoints de F , et : $\forall k : \pi|_{B_k} : B_k \rightarrow V(u)$ homéomorphisme.

Il existe donc des sections S_j au-dessus de $V(u)$ telles que :

$$\pi^{-1}(V(u)) = \bigcup_j S_j(V(u)) \subset F$$

où S_j sont disjoints.

$V(u)$ est connexe puisque E est localement connexe par arcs. Alors $S_j(V(u))$ est connexe pour tous j . Donc les $S_j(V(u))$ sont soit dans la composante connexe F' , soit sont disjoints de F' . Il vient donc :

$$\pi|_{F'}^{-1}(V(u)) = \pi^{-1}(V(u)) \cap F' = \bigcup_j S_j(V(u))$$

où $S_j(V(u)) \subset F'$, donc $\pi|_{F'} : F' \rightarrow E$ est un revêtement.

CQFD de (139).

De (139), il suffit de montrer que les revêtements connexes de E sont triviaux.

Soit $\pi : F \rightarrow E$ un revêtement supposé connexe, $u \in E$, et soit u' et u'' éléments de $\{\pi^{-1}(u)\} \subset F$. Par hypothèse F est connexe, localement connexe par arcs, il est donc globalement connexe par arcs. Il existe alors un chemin φ reliant u' et u'' . Dans E tout lacet est homotope à une constante, soit ψ ce lacet, et φ est un relèvement de ψ :

$$\psi = \pi \circ \varphi : [0,1] \rightarrow E$$

et de (137) on déduit que le relèvement φ est aussi un lacet dans F . Donc $u' = u''$, donc le nombre de feuillettes du revêtement F est égal à 1. Donc F est un revêtement trivial.

CQFD de (138).

Preuve de (114-B) :

Il suffit de montrer que S_n est simplement connexe par arcs si $n \geq 2$.

■ **Définitions** :

- Un lacet φ dans l'espace topologique E est dit **basé** en $u \in E$ si : $\varphi(0) = \varphi(1) = u$

- La loi de **composition des chemins** dans E est une loi de groupe :

Soient deux chemins $\varphi_1 : [0,1] \rightarrow E$ et $\varphi_2 : [0,1] \rightarrow E$ tels que la terminaison de l'un soit le départ de l'autre : $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$. Leur composition $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est définie par :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1 \circ \varphi_2(x) = \varphi_1(2x) \text{ si: } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_1 \circ \varphi_2(x) = \varphi_2(2x-1) \text{ si: } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right.$$

L'inverse d'un chemin existe et est noté φ^{-1} : $\varphi^{-1}(x) = \varphi(1-x)$

- L'homotopie est une relation d'équivalence dont la classe se nomme **classe d'homotopie** : Soient H_1 une homotopie de φ_1 à φ_2 , et H_2 une homotopie de φ_2 à φ_3 , alors l'application :

$$H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$$

$$H(x, y) = H_1(2x, y) \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$H(x, y) = H_2(2x-1, y) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1]$$

est une homotopie du chemin φ_1 au chemin φ_3 : il y a donc transitivité de l'homotopie.

- L'ensemble des classes d'homotopie, à extrémités fixées $u \in E$, de lacets basés en u , est notée $\pi_1(E, u)$. Alors la loi de composition des lacets induit sur $\pi_1(E, u)$ une structure de groupe, appelé **groupe fondamental** ou **groupe de Poincaré**.

En effet, vérifions que la loi de composition des chemins satisfait les 4 conditions de groupe ; la relation d'homotopie entre deux chemins est notée \sim :

a) $\varphi_1 \sim \varphi'_1$ et $\varphi_2 \sim \varphi'_2 \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2 \sim \varphi'_1 \circ \varphi'_2$:

Soit H_1 homotopie de φ_1 à φ'_1 et H_2 homotopie de φ_2 à φ'_2 .

Alors l'application $H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$ définie par :

$$H(x, y) = H_1(x, 2y) \text{ si } y \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$H(x, y) = H_2(x, 2y-1) \text{ si } y \in [\frac{1}{2}, 1]$$

est une homotopie de $\varphi_1 \circ \varphi_2$ à $\varphi'_1 \circ \varphi'_2$.

b) Associativité : $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) \sim (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

c) Élément neutre : c'est le lacet constant basé en u : c'est u lui-même car $\varphi \circ u \sim u \circ \varphi \sim \varphi$.

d) Existence d'un inverse : $\varphi \circ \varphi^{-1} \sim \varphi^{-1} \circ \varphi \sim u$:

L'application $H : [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$ définie par :

$$H(x, y) = \varphi(2xy) \text{ si } y \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$H(x, y) = \varphi^{-1}(1-2(1-y)x) \text{ si } y \in [\frac{1}{2}, 1]$$

est une homotopie du lacet constant u à $\varphi \circ \varphi^{-1}$.

Donc : $(\pi_1(E, u), \circ)$ est un groupe.

NB : Si E est connexe par arcs tous les $\pi_1(E, u)$ pour $u \in E$ sont isomorphes, donc le groupe ne dépend plus d'un u particulier et on note $\pi_1(E)$.

- De ce qui précède il suit que : un espace topologique E est **simplement connexe par arcs** s'il est connexe par arcs et si son groupe fondamental $\pi_1(E, u)$ est trivial pour tout $u \in E$.

- Le groupe fondamental $\pi_1(E, u)$ est **trivial** si 2 chemins de mêmes extrémités sont toujours homotopes, c'est-à-dire si le groupe se réduit à l'élément neutre de la loi de composition \circ : $\pi_1(E, u) = \{\text{id}\}$.

En effet, $\varphi_1(0) = u_1 = \varphi_2(1)$ et $\varphi_1(1) = u_2 = \varphi_2(0)$ entraînent $\varphi_1 \circ \varphi_2(u) = \text{id } u$ donc $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

- Le groupe fondamental de la sphère, $\pi_1(S^n)$, est trivial si $n \geq 2$.

En effet :

Soit $\varphi : [0,1] \rightarrow S^n$ un lacet.

On suppose que φ ne passe pas par un point $u \in S^n$. Il est donc contenu dans $S^n - \{u\}$ qui est homéomorphe à \mathbf{R}^n .

Il s'ensuit que φ est homotope à une constante dans $S^n - \{u\}$, et donc dans S^n .

Montrons que tout lacet φ est homotope à un lacet qui ne passe pas par un point v .

Soit $\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ une projection.

Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ un chemin dans $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ affine par morceaux, c'est-à-dire qui est une succession continue de segments en nombre fini. On choisit ψ de la manière suivante :

★ Le chemin φ étant continûment uniforme, il existe un entier m tel que :

$$\text{pour } x, x' \in [0, 1], |x - x'| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{1}{2}$$

★ Donc il existe des points du chemin φ suffisamment proches entre eux avec lesquels le chemin affine par morceaux ψ coïncide : ces points de coïncidence de ψ avec φ correspondent à des multiples de $1/m$: j/m , et entre deux valeurs consécutives $(j-1)/m$ et j/m le chemin ψ est un segment.

On peut donc définir une homotopie affine de φ à ψ :

$$\left| \begin{array}{l} h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \\ (x, y) \rightarrow h(x, y) = (1-x)\varphi(y) + x\psi(y) \end{array} \right.$$

on a bien : $h(0, y) = \varphi(y)$ et $h(1, y) = \psi(y)$.

On définit une famille de m boules de centres $\varphi\left(\frac{j}{m}\right)$, $1 \leq j \leq m$, et de rayon $1/2$: $B_j = B\left(\varphi\left(\frac{j}{m}\right), \frac{1}{2}\right)$

Chaque boule B_j contient les segments dont les extrémités sont les coïncidences de φ et ψ :

$$\varphi\left(\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \cup \psi\left(\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \subset B_j$$

Il s'ensuit que chaque B_j contient les images de l'homotopie :

$$h\left([0, 1] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \subset B_j \quad \text{d'où } \{0\} \text{ est exclu.}$$

A fortiori $Im h$ ne contient pas $\{0\}$. Alors la projection sur S^n de l'homotopie h dans $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$:

$$h' = \pi \circ h$$

est une homotopie du chemin φ à la projection sur S^n du chemin ψ dans $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$:

$$h'' = \pi \circ \psi$$

Alors l'image de h'' est contenue dans une réunion finie de cercles de centres $\varphi\left(\frac{j}{m}\right)$, $1 \leq j \leq m$, et de rayon $1/2$:

$$Im h'' \subset \bigcup_{j=1}^m B\left(\varphi\left(\frac{j}{m}\right), \frac{1}{2}\right)$$

Si $n \geq 2$ cette réunion ne recouvre pas S^n : $Im h'' \neq S^n$; puisque le résultat précédent montre que deux chemins de mêmes extrémités, comme h' et h'' , sont toujours homotopes – tout chemin de S^n pouvant être ramené à h'' par homotopie – il s'ensuit que S^n est simplement connexe par arcs.

La figure (28) propose une illustration naïve de cette démonstration.

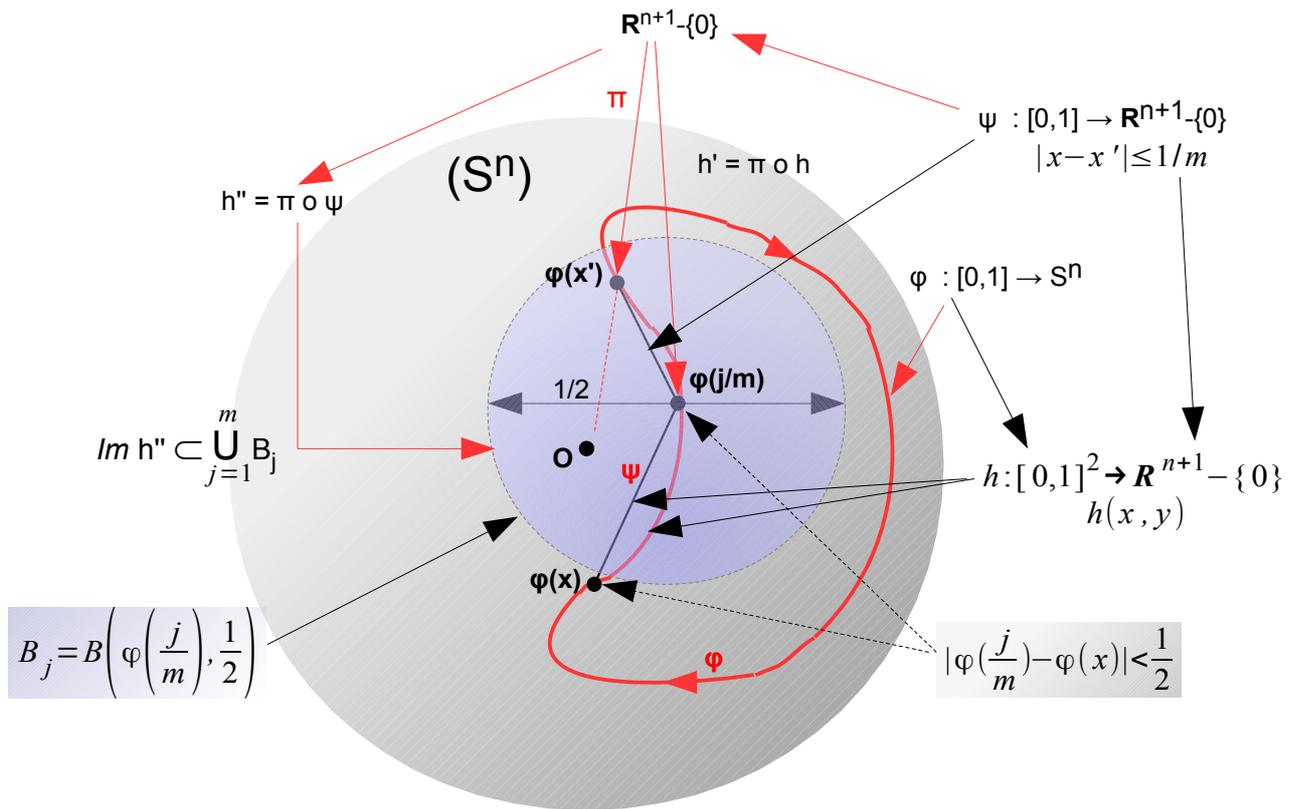


figure 28

5.5 – Rotation 4D et formule de Rodrigues en tant que leur restriction 3D

5.5.1 – Rotations 3D : lien entre la formule de Rodrigues et l'exponentiation

On a vu que $SO(n)$ est compacte, connexe par arcs, mais pas simplement connexe. Il en a été déduit que $SO(n)$ est lié à un revêtement universel unique qui est le groupe $Spin(n)$ dans lequel les rotations peuvent être décrites sans les ambiguïtés dont il a été fait mention à la fin du point 2.6.

Pour $n = 2$, $SO(2)$ est assimilé topologiquement au cercle S^1 , c'est-à-dire la sphère $S^1 \subset R^2$ ou C dont les éléments vérifient $x^2 + y^2 = 1$, ou $|z|^2 = 1$. Le groupe de revêtement de $SO(2)$, alors noté $Spin(2)$, est isomorphe à $(R, +)$, et son groupe fondamental est isomorphe à Z :

En effet une rotation dans le plan R^2 est représentée par une matrice 2×2 :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

L'application $\theta \in R/2\pi Z \rightarrow R(\theta) \in SO(2)$ est un isomorphisme de groupes $(R/2\pi Z, +)$ et $(SO(2), \cdot)$: cela signifie qu'à un nombre réel θ choisi comme angle correspondent une infinité dénombrable de nombres réels $\theta + 2k\pi$ où $k \in Z$ pour lesquels $R(\theta + 2k\pi)$ donne la même image.

Pour $n = 3$, le revêtement universel de $SO(3)$ est $Spin(3)$, qui est isomorphe à S^3 . On a vu que chaque élément de $SO(3)$ correspond à deux points diamétralement opposés de S^3 , et que $SO(3)$ est connexe, connexe par arcs mais pas simplement connexe, tandis que S^3 est simplement connexe. Alors le groupe fondamental de $SO(3)$ est isomorphe au groupe à 2 éléments Z_2 ; en effet :

$$\left| \begin{array}{l} Ad : \pi^{-1}(SO(n)) = Spin(n) \rightarrow SO(n) \times Z_2 \\ s \rightarrow Ad|_{Spin(n)}(s) = (M, m) \end{array} \right.$$

où $M \in SO(n)$ et $m = \pm 1 \in \mathbb{Z}_2$, est un revêtement non trivial de $SO(n)$, les valeurs $m = 1$ et $m = -1$ correspondant aux 2 éléments opposés sur S^3 décrivant la même rotation.

On a vu aussi que $Spin(3)$ est isomorphe au groupe des quaternions unitaires (\mathbf{Q}_4 ,.) muni de la multiplication, lui-même isomorphe à $SU(2)$. \mathbf{Q}_4 est représenté par les matrices réelles 4x4 ou par les matrices complexes 2x2 données par (109) où $\theta \in [0, 4\pi]$, que l'on écrit par exponentiation du générateur G_Ω , élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

$$L(\theta) = \exp G_\Omega = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \sin \frac{\theta}{2}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est le vecteur formé des 3 matrices de Pauli, et où $G_\Omega = \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ est le générateur de $SU(2)$, et où $\boldsymbol{\Omega} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\|\boldsymbol{\Omega}\| = \theta$.

On a vu qu'à un quaternion correspond la décomposition en un scalaire et un quaternion pur identifié à un vecteur ou « partie imaginaire » :

$$L(q) = \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 & x_2 + i y_2 \\ -x_2 + i y_2 & x_1 - i y_1 \end{pmatrix} \sim q = x_1 + \mathbf{v} \quad \text{où} \quad \mathbf{v} = i y_1 + j x_2 + k y_2 \quad \text{avec} :$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \|q\|^2 = \det L(q) = 1 \quad \text{et} :$$

$$x_1 = \cos \frac{\theta}{2}, y_1 = n_3 \sin \frac{\theta}{2}, x_2 = n_2 \sin \frac{\theta}{2}, y_2 = n_1 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{relation (109)}).$$

On a vu en (105) que, un vecteur de \mathbf{R}^3 pouvant être assimilé à un quaternion pur \mathbf{p} , il se transforme par la rotation d'angle θ selon la formule de Rodrigues :

$$\begin{aligned} R_q(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}' = (\cos \theta) \mathbf{p} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\sin \theta) \mathbf{n} \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p}_\perp \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\perp) \sin \theta + \mathbf{p}_\parallel \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\Omega} = \theta \mathbf{n}$, $\|\mathbf{n}\| = 1$, $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$.

On peut réécrire le produit vectoriel $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ comme l'action d'une matrice antisymétrique $[n]$ sur le vecteur \mathbf{p} (ou relation de Poisson) :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{p} = [n] \mathbf{p}$$

$$\text{avec : } [n] = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & -n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puisque} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} n_2 p_3 - n_3 p_2 \\ n_3 p_1 - n_1 p_3 \\ n_1 p_2 - n_2 p_1 \end{pmatrix}$$

où le quaternion pur a pour composantes : $\mathbf{p} = i p_1 + j p_2 + k p_3$. Les valeurs propres de $[n]$, λ sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det([n] - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -n_3 & n_2 \\ n_3 & -\lambda & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)) = 0$$

Comme $\|\mathbf{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, il vient : $\lambda = 0$, ou $\lambda = i$, ou $\lambda = -i$.

On a : $[n]([n] \mathbf{p}) = [n]^2 \mathbf{p} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p})$. Or d'après la formule du double produit vectoriel :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p} = [n]^2 \mathbf{p}$$

Donc dans la formule de Rodrigues : $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = [n]^2 \mathbf{p} + \mathbf{p}$, car : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$. D'où :

$$\mathbf{p}' = (\cos \theta) \mathbf{p} + (1 - \cos \theta)([n]^2 \mathbf{p} + \mathbf{p}) + (\sin \theta)[n] \mathbf{p}$$

soit :

$$\mathbf{p}' = [R] \mathbf{p} = \mathbf{p} + (\sin \theta)[n] \mathbf{p} + (1 - \cos \theta)[n]^2 \mathbf{p} \quad (140)$$

avec donc : $[R] = \mathbf{1} + (\sin \theta)[n] + (1 - \cos \theta)[n]^2$

$[R]$ est la matrice de rotation d'angle compté dans le sens trigonométrique autour de l'axe \mathbf{n} , c'est un élément de $SO(3)$; $[n]$ est élément de l'algèbre de Lie $so(3)$ de $SO(3)$.

La relation (140) est identique à la relation (27b).

En faisant le développement en série de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ autour de $\theta = 0$ et en l'injectant dans (140), la rotation prend la forme d'exponentiation :

$$[R(\theta, \mathbf{n})] = \exp(\theta [n]) \quad (141)$$

et l'on a bien : $[R(\theta)][R(\theta')] = [R(\theta + \theta')]$ et $[R(0)] = \mathbf{1}$. Ces relations montrent que $SO(3)$ est un groupe à un paramètre. (141) retrouve la formulation (32) ou (33) lorsque la rotation est la combinaison des rotations d'angles θ_k autour des axes vecteurs unitaires \mathbf{e}_k , $k=1,2,3$ orthogonaux :

$$[R(\Omega)] = \exp(\Omega \cdot \mathbf{J}) = \exp(\theta_1 \mathbf{J}_1 + \theta_2 \mathbf{J}_2 + \theta_3 \mathbf{J}_3)$$

où les \mathbf{J}_k sont les générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ donnés par (29) (à ne pas confondre avec les opérateurs moment cinétique J_k).

En partant de (140) on explicite la matrice de rotation :

$$[R(\theta)] = \begin{pmatrix} n_1^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & n_1 n_2(1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta & n_1 n_3(1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2(1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta & n_2^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & n_2 n_3(1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ n_1 n_3(1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta & n_2 n_3(1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta & n_3^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{pmatrix} \quad (142)$$

qui est la relation (27a) (où \mathbf{u} joue le rôle de \mathbf{n}).

Rappel : L'application exponentielle (141) est une application entre l'algèbre de Lie $so(n)$ et le groupe $SO(n)$:

$$\exp : so(n) \rightarrow SO(n)$$

$$G_\Omega \rightarrow \exp(G_\Omega) = \mathbf{1} + G_\Omega + \frac{1}{2} G_\Omega^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_\Omega^k}{k!}$$

Pour G_Ω antisymétrique, $\exp G_\Omega$ est une matrice de rotation. L'application exponentielle d'une matrice antisymétrique est une surjection sur $SO(n)$ puisque l'on peut construire toute matrice de rotation, élément de $SO(n)$, par exponentiation.

L'exponentiation est un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans $so(3)$ vers un voisinage de $\mathbf{1}$ dans $SO(3)$.

L'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} [n] : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = [n] \mathbf{v} \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de \mathbf{R}^3 dont le noyau, $\text{Ker } [n]$ contient le vecteur \mathbf{n} lui-même puisque :

$$[n] \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Pour deux vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 de \mathbf{R}^3 , dont leurs correspondants dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ sont $[\mathbf{n}_1]$ et $[\mathbf{n}_2]$, leur produit vectoriel s'identifie au crochet de Lie :

$$[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = [[\mathbf{n}_1], [\mathbf{n}_2]] \quad (143)$$

autrement dit la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel de deux vecteurs est égale au crochet de Lie de leurs matrices antisymétriques associées.

Dans (142), en remplaçant $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ et $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ on obtient $[R(\theta)]$ sous la forme suivante :

$$[R(\theta)] = \exp(\theta [\mathbf{n}]) = \begin{pmatrix} 2(n_1^2 - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 & 2n_1 n_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2n_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 2n_1 n_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2n_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 2n_1 n_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2n_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 2(n_2^2 - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 & 2n_2 n_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2n_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 2n_1 n_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2n_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 2n_2 n_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2n_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 2(n_3^2 - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 \end{pmatrix} \quad (144)$$

5.5.2 – Rotations 4D

Considérons à présent l'espace vectoriel normé $E = \mathbf{R}^4$, le groupe spécial de ses endomorphismes orthogonaux est $SO(4)$: il s'agit des rotations en 4D. Ces rotations 4D sont de deux types :

★ **Rotations simples** autour d'un centre O :

Elles laissent fixe un plan (P) passant par O . On dit qu'un plan est fixe lorsque tous ses vecteurs restent dans le plan par la rotation (ceci ne veut pas dire que ses vecteurs sont inchangés par la rotation). Par une rotation simple, le plan fixe se transforme alors en lui-même.

Soit (P') un plan orthogonal à (P) , c'est-à-dire contenant les vecteurs orthogonaux aux vecteurs du plan (P) . (P) et (P') se coupent selon une ligne droite (D) . Alors chaque point M de (D) est centre de la rotation simple laissant (P) fixe, et le vecteur axe de rotation \mathbf{u} est orthogonal à (P) en M donc est dans (P') . Tout vecteur \mathbf{V} de \mathbf{R}^4 se décompose en un vecteur \mathbf{v} de (P) et en un vecteur \mathbf{v}' de (P') : la rotation simple d'axe $M\mathbf{u}$ laisse les composantes \mathbf{v}' invariantes et transforme les composantes \mathbf{v} en vecteurs $R(\mathbf{v})$ qui restent dans (P) .

On peut alors décrire une rotation 4D simple, par exemple quand (P) est engendré par les vecteurs orthogonaux $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ de la base orthogonale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ (donc (P') est engendré par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

★ **Rotations doubles** :

Ce sont des rotations qui ont 2 plans de rotation orthogonaux entre eux. Ces rotations sont définies par 2 angles : l'un θ_1 pour la rotation de plan (P_1) , l'autre θ_2 pour la rotation de plan (P_2) ; autrement dit les vecteurs de (P_1) se transforment par rotation d'angle θ_1 , les vecteurs de (P_2) se transforment par rotation d'angle θ_2 , et tous les autres vecteurs de l'espace :

$$\mathbf{R}^4 = (P_1) \oplus (P_2)$$

se transforment selon des angles intermédiaires : $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$. Si (P_1) est engendré par (e_1, e_2) et (P_2) par (e_3, e_4) , la rotation double a pour matrice :

$$R(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Si $\theta_1 = \theta_2$ la rotation double est dite **isoclinique** (ou rotation équi-angulaire, ou déplacement de Clifford). Dans ce cas, il existe une infinité de façons de former une paire de plans de rotation orthogonaux. Prenons comme plans de rotation orthogonaux ceux engendrés par les paires de vecteurs de base :

$$(P_1) = (O, e_1, e_2), (P_2) = (O, e_3, e_4)$$

On distingue alors 4 rotations isocliniques dans (P_1) et (P_2) d'angle θ qui dépendent du sens de rotation :

- deux rotations **isocliniques droites** : $R_1(\theta, \theta), R_2(-\theta, -\theta)$;
- deux rotations **isocliniques gauches** : $R_3(\theta, -\theta), R_4(-\theta, \theta)$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$. Pour $\theta = 0$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \mathbf{1}$ (rotation identité). Pour $\theta = \pi$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = -\mathbf{1}$ (inversion centrale).

Chaque rotation dans (P_1) et (P_2) est une rotation plane, donc un élément de $SO(2)$: chaque paire de plans $((P_1), (P_2))$ est une paire de plans invariants par un sous-groupe de $SO(4)$ isomorphe à $SO(2) \times SO(2)$.

$SO(4)$ est un groupe de Lie compact de dimension 6. En effet, les rotations de $SO(4)$ sont le produit de rotations isocliniques droites et gauches. Les rotations isocliniques droites sont éléments du sous-groupe S_R de $SO(4)$, les rotations isocliniques gauches sont éléments du sous-groupe S_L de $SO(4)$. Or S_R et S_L sont tous deux isomorphes au groupe multiplicatif des quaternions unitaires (\mathbf{Q}_4, \cdot) qui est de dimension 3, lui-même isomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ comme on l'a vu.

On montre que S_R et S_L sont les deux seuls sous-groupes maximaux de $SO(4)$. Noter que S_R et S_L ne sont pas disjoints, car :

$$S_R \cap S_L = \{ -\mathbf{1}, \mathbf{1} \}$$

comme on l'a vu, et est le centre C_2 de $SO(4)$. Le groupe de recouvrement universel de $SO(4)$ est alors $S_R \times S_L$.

5.5.3 – Formulation des rotations par la transformation de Cayley ⁽⁷⁾

■ **Proposition** : Soit M une matrice 4×4 antisymétrique à coefficients réels. Alors l'application :

$$\left| \begin{array}{l} T_C : M_{4 \times 4}(\mathbf{R}) \rightarrow SO(4) \\ M \rightarrow T_C(M) = (\mathbf{1} + M)(\mathbf{1} - M)^{-1} \end{array} \right. \quad (145)$$

envoie la matrice antisymétrique vers une matrice de rotation 4D.

T_C est la **transformation de Cayley**.

Réciproquement, toute matrice de rotation R telle que $R + \mathbf{1}$ soit inversible, c'est-à-dire telle que R n'ait pas -1 comme valeur propre (ce qui correspond à $\theta = \pi$), peut se transformer en une autre matrice qui est antisymétrique :

$$R \rightarrow T_C^{-1}(R) = (R - \mathbf{1})(R + \mathbf{1})^{-1} = M \quad (145\text{bis})$$

⁷ Pour les points 5.5.3 à 5.5.6 voir aussi référence [15].

avec ${}^tM = -M$. Pour $SO(n)$, M a $n(n-1)/2$ coefficients indépendants, donc pour $n = 4$, M possède 6 coefficients indépendants, ce qui correspond bien au fait que $\dim SO(4) = 6$.
 Pour $n = 3$, M a 3 coefficients indépendants, par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sa transformée de Cayley (145) donne la matrice de $SO(3)$:

$$T_C(M) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \begin{pmatrix} 1+x_1^2-x_2^2-x_3^2 & 2x_1x_2-2x_3 & 2x_2+2x_1x_3 \\ 2x_1x_2+2x_3 & 1-x_1^2+x_2^2-x_3^2 & 2x_2x_3-2x_1 \\ 2x_1x_3-2x_2 & 2x_1+2x_2x_3 & 1-x_1^2-x_2^2+x_3^2 \end{pmatrix}$$

qui généralise (144). Le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ isomorphe à M porte l'axe de rotation. Si $x_1 = 1$ et $x_2 = x_3 = 0$,

alors $T_C(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une rotation de $\theta = \pi/2$ autour de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$. Si $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 1$,

alors $T_C(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une rotation de $\theta = \pi/2$ autour de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$. Si $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$,

alors $T_C(M) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une rotation de $\theta = \pi/2$ autour de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$.

Si $x_1 \gg 1$ alors on a l'approximation :

$$T_C(M) \rightarrow \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1^2 & -2x_1 \\ 0 & 2x_1 & -x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est une rotation d'axe $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3$ d'angle $\theta = \pi$. De même si $x_2 \gg 1$ ou $x_3 \gg 1$. Donc les rotations d'angle $\theta = \pi$ ne sont pas représentables par la transformation de Cayley.

5.5.4 – Valeurs propres d'une matrice 4x4 réelle antisymétrique

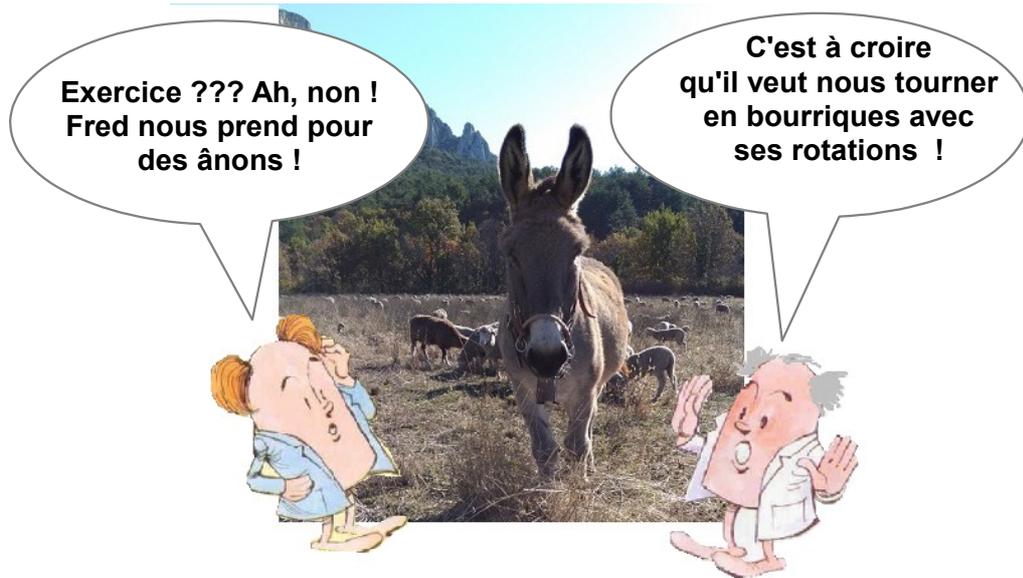
Une matrice antisymétrique de $M_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + 2\alpha\lambda^2 + \beta^2 = 0$$

où $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j < k} a_{jk}^2$ et $\beta = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$ (le montrer en exercice !).



Il y a 4 solutions :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \lambda_1 i, -\lambda_1 i, \lambda_2 i, -\lambda_2 i \\ \text{avec: } \lambda_1 \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \geq 0 \\ \lambda_2 \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \geq 0 \end{array} \right| \quad (146)$$

■ **Proposition** : Soit $M \in M_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique dont les valeurs propres sont exprimées par (146). Alors :

a) Pour $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ il existe deux matrices antisymétriques M_1 et M_2 sur lesquelles M se décompose de manière unique :

$$\begin{aligned} M &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \\ M_1 &= \frac{1}{\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (\lambda_2^2 M + M^3) \\ M_2 &= \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_1^2 M + M^3) \end{aligned}$$

elles vérifient donc : $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$, $M_1^3 = -M_1$, $M_2^3 = -M_2$

b) Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$:

$$M^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1}$$

c) Pour $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 > 0$:

$$M^3 = -\lambda_0^2 M$$

Preuve de (147) : - M étant antisymétrique, il existe une matrice A vérifiant $A^+A = \mathbf{1}$ et une matrice diagonale B telles que :

$$M = ABA^+$$

a) Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 i \end{bmatrix} = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$$

avec :

$$B_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Si l'on pose $M_1 = AB_1A^+$ et $M_2 = AB_2A^+$, alors on a : $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$

On a : $B_1^3 = -B_1$ et $B_2^3 = -B_2$ d'où :

$$\begin{aligned} M_1^3 &= (AB_1A^+)^3 = (AB_1A^+AB_1A^+)(AB_1A^+) \\ &= AB_1^2A^+AB_1A^+ = AB_1^3A^+ = -AB_1A^+ = -M_1 \end{aligned}$$

de même : $M_2^3 = -M_2$. On a donc :

$$M^2 = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)^2 = \lambda_1^2 M_1^2 + \lambda_2^2 M_2^2$$

et :

$$M^3 = -\lambda_1^3 M_1 - \lambda_2^3 M_2$$

On a deux équations matricielles à deux inconnues M_1, M_2 :

$$\begin{cases} M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \\ -M^3 = \lambda_1^3 M_1 + \lambda_2^3 M_2 \end{cases}$$

de solutions :

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (\lambda_2^2 M + M^3) \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\lambda_1^2 M + M^3)$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ alors :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_0 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_0 i \end{bmatrix}$$

donc :

$$M^2 = ABA^+ABA^+ = AB^2A^+$$

or $B^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1}$ d'où :

$$M^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1} A A^+ = -\lambda_0^2 \mathbf{1} \text{ car } A A^+ = \mathbf{1}$$

c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 > 0$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_0 i \end{bmatrix} = i\lambda_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$B^2 = -\lambda_0^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B^3 = -i\lambda_0^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\lambda_0^2 B$$

donc :

$$M^3 = A B A^+ A B A^+ A B A^+ = A B^3 A^+ = -\lambda_0^2 A B A^+$$

soit :

$$M^3 = -\lambda_0^2 M$$

CQFD de (147).

5.5.5 – Formule de Rodrigues des rotations 4D et valeurs propres des matrices de rotation 4D

De même que l'on a vu que les rotations 3D s'expriment par la formule de Rodrigues (141), en 4D on obtient, par exponentiation, une formule similaire, compte tenu de la décomposition d'une matrice 4x4 antisymétrique (147).

■ *Théorème* : Soit une matrice 4x4 antisymétrique $M \in M_{4 \times 4}(\mathbf{R})$, elle s'écrit donc, selon (147), avec les mêmes définitions :

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$

(148)

où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors son exponentiation donne la matrice de rotation, élément de SO(4) :

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \exp(M) = \mathbf{1} + M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1) + M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2)$$

NB : Ici, les λ_1, λ_2 qui interviennent dans les 4 valeurs propres de M, $\pm i\lambda_1$ et $\pm i\lambda_2$, sont les angles θ_1, θ_2 vus au point 5.5.2.

Preuve de (148) : - En général on ne peut pas écrire : $\exp(M) = \exp(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \exp(\lambda_1 M_1) \exp(\lambda_2 M_2)$ car la formule de BCH (50) l'interdit :

$$\exp X \exp Y = \exp Z \text{ avec } Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \dots$$

sauf si $[X, Y] = 0$. Or c'est le cas ici : M_1 et M_2 commutent puisque leur produit donne 0 d'après (147) :

$$M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0 \rightarrow [M_1, M_2] = 0$$

On peut donc écrire ici : $\exp(M) = \exp(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \exp(\lambda_1 M_1) \exp(\lambda_2 M_2)$.

On a vu que $M_1^3 = -M_1$ et $M_2^3 = -M_2$, donc le développement en série des exponentielles donne par une séparation des puissances paires et impaires :

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_1 M_1) &= \mathbf{1} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \lambda_1^k M_1^k \\ &= \mathbf{1} + \left(\frac{1}{1!} \lambda_1 - \frac{1}{3!} \lambda_1^3 + \frac{1}{5!} \lambda_1^5 + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \lambda_1^{2p+1} + \dots \right) M_1 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2!} \lambda_1^2 + \frac{1}{4!} \lambda_1^4 - \frac{1}{6!} \lambda_1^6 + \dots + \frac{(-1)^q}{(2q)!} \lambda_1^{2q} + \dots \right) M_1^2 \end{aligned}$$

où $p = 0, 1, 2, \dots$ et $q = 1, 2, 3, \dots$, soit :

$$\exp(\lambda_1 M_1) = \mathbf{1} + M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1)$$

On obtient de même :

$$\exp(\lambda_2 M_2) = \mathbf{1} + M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_1 M_1) \exp(\lambda_2 M_2) &= \mathbf{1} + M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1) + M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2) \\ &\quad + M_1 M_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + M_1 M_2^2 \sin \lambda_1 (1 - \cos \lambda_2) + M_1^2 M_2 \sin \lambda_2 (1 - \cos \lambda_1) + M_1^2 M_2^2 (1 - \cos \lambda_1) (1 - \cos \lambda_2) \end{aligned}$$

or d'après (147), $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$, donc :

$$\exp(\lambda_1 M_1) \exp(\lambda_2 M_2) = \mathbf{1} + M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1) + M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2) = \exp(M)$$

Vérifions que $\exp(M) \in SO(4)$ c'est-à-dire si $\det(\exp(M)) = 1$ et ${}^t \exp(M) \exp(M) = \mathbf{1}$.

Puisque M est antisymétrique, on a ${}^t M = -M$ donc :

$$\exp({}^t M) \exp(M) = \exp({}^t M + M) = \exp(0) = \mathbf{1} = {}^t(\exp(M)) \exp(M)$$

D'autre part, puisque M est antisymétrique on a $\text{Tr}(M) = 0$ donc :

$$\det(\exp(M)) = \exp(\text{Tr}(M)) = \exp(0) = 1$$

On a donc bien $\exp(M) \in SO(4)$.
CQFD de (148).

■ **Théorème** : Avec les mêmes notations qu'en (147) et (148), si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 > 0$ alors :

$$R(\lambda_0) = \exp(M) = \frac{1}{\lambda_0} M \sin \lambda_0 + \mathbf{1} \cos \lambda_0$$

(149)

est une rotation, élément de $SO(4)$.

Preuve de (149) : - D'après (147), $M^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1}$, le développement en série de l'exponentiation donne alors :

$$\begin{aligned}
R(\lambda_0) &= \exp(M) = \left(1 - \frac{1}{2!} \lambda_0^2 + \frac{1}{4!} \lambda_0^4 - \frac{1}{6!} \lambda_0^6 + \dots + \frac{(-1)^q}{(2q)!} \lambda_0^{2q} + \dots \right) \mathbf{1} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{1!} \lambda_0 - \frac{1}{3!} \lambda_0^3 + \frac{1}{5!} \lambda_0^5 + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \lambda_0^{2p+1} + \dots \right) M \\
&= \mathbf{1} \cos \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0} M \sin \lambda_0
\end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons que dans la preuve de (148), ${}^t R(\lambda_0) R(\lambda_0) = \mathbf{1}$ et $\det R(\lambda_0) = 1$.
CQFD de (149).

■ **Théorème** : Avec les mêmes notations qu'en (147) et (148), si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 > 0$, alors :

$$R'(\lambda_0) = \exp(M) = \mathbf{1} + \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} M + \frac{1 - \cos \lambda_0}{\lambda_0^2} M^2 \quad (150)$$

est une rotation, élément de SO(4).

Preuve de (150) : - Toujours d'après (147), $M^3 = -\lambda_0^2 M$ d'où :

$$\begin{aligned}
R'(\lambda_0) &= \exp(M) = \mathbf{1} + \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0^1}{1!} - \frac{\lambda_0^3}{3!} + \frac{\lambda_0^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \lambda_0^{2p+1} + \dots \right) M \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2}{2!} - \frac{\lambda_0^4}{4!} + \frac{\lambda_0^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{q+1}}{(2q)!} \lambda_0^{2q} + \dots \right) M^2
\end{aligned}$$

donc :

$$R'(\lambda_0) = \exp(M) = \mathbf{1} + \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} M + \frac{1 - \cos \lambda_0}{\lambda_0^2} M^2$$

qui est bien une rotation.
CQFD de (150).

Le théorème suivant traite du problème inverse : connaissant une matrice de rotation $R \in SO(4)$, quelle est la matrice antisymétrique M qui lui correspond par la formule de Rodrigues ?

■ **Théorème** : - Soit $R \in SO(4)$, on peut toujours écrire ses valeurs propres sous la forme :

$$\mu_1 = \exp i \lambda_1, \quad \mu_1^* = \exp -i \lambda_1, \quad \mu_2 = \exp i \lambda_2, \quad \mu_2^* = \exp i \lambda_2$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \neq \pi$. Alors la matrice antisymétrique $M \in M_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ telle que $R = \exp(M)$ est donnée par :

a) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$M = \lambda_1 \frac{R^2 - {}^t(R^2) - 2(R - {}^t R) \cos \lambda_2}{4 \sin \lambda_1 (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)} + \lambda_2 \frac{R^2 - {}^t(R^2) - 2(R - {}^t R) \cos \lambda_1}{4 \sin \lambda_2 (\cos \lambda_2 - \cos \lambda_1)} \quad (151)$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$:

$$M = \frac{\lambda_0}{2 \sin \lambda_0} (R - {}^t R)$$

c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$:

$$M = \frac{\lambda_0}{2 \sin \lambda_0} (R - {}^t R)$$

Preuve de (151) :

Cas (a) : M étant antisymétrique (148) s'applique :

$$R = \mathbf{1} + M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1) + M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2)$$

et M_1, M_2 vérifient : ${}^t M_1 = -M_1$ et ${}^t M_2 = -M_2$, d'où la transposée de R :

$${}^t R = \mathbf{1} - M_1 \sin \lambda_1 + M_1^2 (1 - \cos \lambda_1) - M_2 \sin \lambda_2 + M_2^2 (1 - \cos \lambda_2)$$

d'où :

$$R - {}^t R = 2 M_1 \sin \lambda_1 + 2 M_2 \sin \lambda_2 \quad (\clubsuit)$$

$$R^2 = \mathbf{1} + 2 M_1 \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 + 2 M_1^2 \sin^2 \lambda_1 + 2 M_2 \sin \lambda_2 \cos \lambda_2 + 2 M_2^2 \sin^2 \lambda_2$$

$${}^t (R^2) = \mathbf{1} - 2 M_1 \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 + 2 M_1^2 \sin^2 \lambda_1 - 2 M_2 \sin \lambda_2 \cos \lambda_2 + 2 M_2^2 \sin^2 \lambda_2$$

d'où :

$$R^2 - {}^t (R^2) = 4 M_1 \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 + 4 M_2 \sin \lambda_2 \cos \lambda_2 \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Les relations (\clubsuit) et ($\clubsuit\clubsuit$) sont deux équations linéaires à deux inconnues M_1, M_2 dont les solutions sont :

$$M_1 = \frac{R^2 - {}^t (R^2) - 2 (R - {}^t R) \cos \lambda_2}{4 \sin \lambda_1 (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)}$$

$$M_2 = \frac{R^2 - {}^t (R^2) - 2 (R - {}^t R) \cos \lambda_1}{4 \sin \lambda_2 (\cos \lambda_2 - \cos \lambda_1)}$$

et avec $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ on obtient le résultat annoncé.

Cas (b) : D'après (149) : $R = \frac{1}{\lambda_0} M \sin \lambda_0 + \mathbf{1} \cos \lambda_0$.

Comme ${}^t M = -M$ on a : ${}^t R = -\frac{1}{\lambda_0} M \sin \lambda_0 + \mathbf{1} \cos \lambda_0$ d'où :

$$M = \frac{\lambda_0}{2 \sin \lambda_0} (R - {}^t R)$$

Cas (c) : D'après (150) : $R = \mathbf{1} + \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} M + \frac{1 - \cos \lambda_0}{\lambda_0^2} M^2$.

Comme ${}^t M = -M$ on a : ${}^t R = \mathbf{1} - \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} M + \frac{1 - \cos \lambda_0}{\lambda_0^2} M^2$ d'où :

$$M = \frac{\lambda_0}{2 \sin \lambda_0} (R - {}^t R)$$

CQFD de (151).

NB : On peut déterminer les rotations de SO(4) par la transformation de Cayley, lorsque les valeurs propres d'une matrice antisymétrique $M \in M_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ sont données. La démarche, semblable à celle pour la formule de Rodrigues, s'appuie sur la proposition (147) voir Annexe 5).

5.5.6 – Représentation des rotations 4D par les quaternions

Soit R une rotation double, élément de SO(4) ; on a vu qu'elle est le produit d'une rotation isoclinique droite R_R et d'une rotation isoclinique gauche R_L . Dans une base orthonormale de \mathbf{R}^4 , sa matrice est :

$$R = R_L R_R$$

$$R_L = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & -x_2 & -y_2 \\ y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \\ x_2 & y_2 & x_1 & -y_1 \\ y_2 & -x_2 & y_1 & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_R = \begin{bmatrix} x'_1 & -y'_1 & -x'_2 & -y'_2 \\ y'_1 & x'_1 & y'_2 & -x'_2 \\ x'_2 & -y'_2 & x'_1 & y'_1 \\ y'_2 & x'_2 & -y'_1 & x'_1 \end{bmatrix} \quad (152)$$

où $x_1, y_1, x_2, y_2, x'_1, y'_1, x'_2, y'_2$ sont des réels tels que :

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad x'^2_1 + y'^2_1 + x'^2_2 + y'^2_2 = 1$$

Le produit (152) donne les composantes de la matrice de rotation R :

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = x_1 x'_1 - y_1 y'_1 - x_2 x'_2 - y_2 y'_2$	$a_{12} = -x_1 y'_1 - y_1 x'_1 - x_2 y'_2 - y_2 x'_2$	(152bis)
$a_{13} = -x_1 x'_2 - y_1 y'_2 - x_2 x'_1 + y_2 y'_1$	$a_{14} = -x_1 y'_2 + y_1 x'_2 - x_2 y'_1 - y_2 x'_1$	

$a_{21} = y_1 x'_1 + x_1 y'_1 + y_2 x'_2 + x_2 y'_2$	$a_{22} = -y_1 y'_1 + x_1 y'_1 - y_2 y'_2 + x_2 x'_2$	
$a_{23} = -y_1 x'_2 + x_1 y'_2 - y_2 x'_1 - x_2 y'_1$	$a_{24} = -y_1 y'_2 - x_1 x'_2 - y_2 y'_1 + x_2 x'_1$	

$a_{31} = -x_2 x'_1 + y_2 y'_1 + x_1 x'_2 - y_1 y'_2$	$a_{32} = x_2 y'_1 - x_2 x'_1 - x_1 y'_2 - y_1 x'_2$	
$a_{33} = -x_2 x'_2 + y_2 y'_2 + x_1 x'_1 + y_1 y'_1$	$a_{34} = -x_2 y'_2 + x_2 x'_2 + x_1 y'_1 - y_1 x'_1$	

$a_{41} = y_2 x'_1 - x_2 y'_1 + y_1 x'_2 + x_1 y'_2$	$a_{42} = -y_2 y'_1 - x_2 x'_1 - y_1 y'_2 + x_1 x'_2$	
$a_{43} = -y_2 x'_2 - x_2 y'_2 + y_1 x'_1 - x_1 y'_1$	$a_{44} = -y_2 y'_2 + x_2 x'_2 + y_1 y'_1 + x_1 x'_1$	

(152) est la **formule de Van Elfrinkhof**. On peut l'exprimer à l'aide des quaternions unitaires :

$$q_L = x_1 + y_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + y_2 \mathbf{k}$$

$$q_R = x'_1 + y'_1 \mathbf{i} + x'_2 \mathbf{j} + y'_2 \mathbf{k}$$

avec $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k} = -1$. Soit $v \in \mathbf{R}^4$ et sa transformée v' par la rotation R. Alors, si les

coordonnées de v sont : $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, v est équivalent à la somme d'un réel et d'un quaternion pur \mathbf{p} :

$$v = v_1 + \mathbf{p} \text{ où : } \mathbf{p} = v_2 \mathbf{i} + v_3 \mathbf{j} + v_4 \mathbf{k}$$

La formule (152) se traduit alors comme le produit des 3 quaternions :

$$\left. \begin{aligned} v' &= v'_1 + v'_2 \mathbf{i} + v'_3 \mathbf{j} + v'_4 \mathbf{k} = q_L v q_R \\ &= (x_1 + y_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + y_2 \mathbf{k})(v_1 + v_2 \mathbf{i} + v_3 \mathbf{j} + v_4 \mathbf{k})(x'_1 + y'_1 \mathbf{i} + x'_2 \mathbf{j} + y'_2 \mathbf{k}) \end{aligned} \right| \quad (153)$$

L'ordre des facteurs doit être respecté à cause de l'anti-commutativité des $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. (153) est la **formule de Cayley** pour les rotations 4D.

On peut retrouver la formule de Rodrigues pour les rotations 3D en choisissant la matrice R ainsi :

$$a_{11} = 1, a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0, a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$$

soit :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ce qui, compte tenu de (152bis), revient à poser :

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ y'_1 &= -y_1 \\ x'_2 &= -x_2 \\ y'_2 &= -y_2 \end{aligned} \right| \quad (154)$$

R est alors restreinte à la matrice 3D :

$$R = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 & 2(y_1 x_2 - x_1 y_2) & 2(y_1 y_2 + x_1 x_2) \\ 2(y_1 x_2 + x_1 y_2) & x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 & 2(x_2 y_2 - x_1 y_1) \\ 2(y_1 y_2 - x_1 x_2) & 2(x_2 y_2 + x_1 y_1) & x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \quad (155a)$$

La transformée d'un vecteur de \mathbf{R}^3 , qui est alors un quaternion pur, est obtenue alors par le produit des 3 quaternions q_L, v, q_L^{-1} :

$$\left. \begin{aligned} v' &= v'_1 \mathbf{i} + v'_2 \mathbf{j} + v'_3 \mathbf{k} = q_L v q_L^{-1} \\ &= (x_1 + y_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + y_2 \mathbf{k})(v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k})(x_1 - y_1 \mathbf{i} - x_2 \mathbf{j} - y_2 \mathbf{k}) \end{aligned} \right| \quad (155b)$$

où $q_L = x_1 + y_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + y_2 \mathbf{k}$ et $q_L^{-1} = x_1 - y_1 \mathbf{i} - x_2 \mathbf{j} - y_2 \mathbf{k}$, comme vu au point 4.3.1. Les quatre nombres x_1, y_1, x_2, y_2 sont les **paramètres d'Euler-Rodrigues**. (155b) est la **formule de Hamilton-Cayley**. (155a) équivaut à (144) ou (142) avec les relations (109) puisque $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$ et où n_1 et n_3 ont été intervertis.

5.6 – Représentation du spin par la sphère de Riemann

(voir aussi [23])

On a verra au § 10 que les états du spin d'une particule isolée sont décrits par deux fonctions d'onde possibles :

$$|s\sigma\rangle = \left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

où s intervient dans la valeur propre de S^2 (le carré de l'opérateur spin S) : $S^2|s\sigma\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s\sigma\rangle$ et qui vaut $s = \frac{1}{2}$ soit : $S^2 \left| \frac{1}{2} \sigma \right\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \left| \frac{1}{2} \sigma \right\rangle$ et où σ intervient dans la valeur propre de S_z (opérateur spin suivant Oz) : $S_z|s\sigma\rangle = \sigma \hbar |s\sigma\rangle$ soit, puisque $s = \frac{1}{2}$: $S_z \left| \frac{1}{2} \sigma \right\rangle = \sigma \hbar \left| \frac{1}{2} \sigma \right\rangle$.

On a vu aussi que σ prend deux valeurs possibles : $\sigma = \frac{1}{2}$ ou $\sigma = -\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que toute fonction d'onde $|\psi\rangle$ peut être représentée dans l'espace de spin par un spineur à deux composantes qui se transforme par rotation selon (110). On a de manière équivalente :

$$\left. \begin{aligned} |\psi\rangle &= a_+ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + a_- \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} \\ \text{où : } a_+ &= \langle \psi | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle, \quad a_- = \langle \psi | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

(156) représente un vecteur d'onde dans une direction donnée de spin, qui se projette sur la base liée à la direction Oz du spin suivant deux composantes a_+ et a_- qui sont deux nombres complexes.

On peut représenter cet état de superposition de spin, $|\psi\rangle$, au moyen de la sphère de Riemann.

■ **Définition : Sphère de Riemann :**

Soit \mathbf{C} le plan complexe. Un point $z = x + iy$ situé à l'infini n'est pas représentable dans ce plan.

Considérons alors une sphère unité S^2 dont le plan équatorial est contenu dans le plan complexe \mathbf{C} (figure 29).

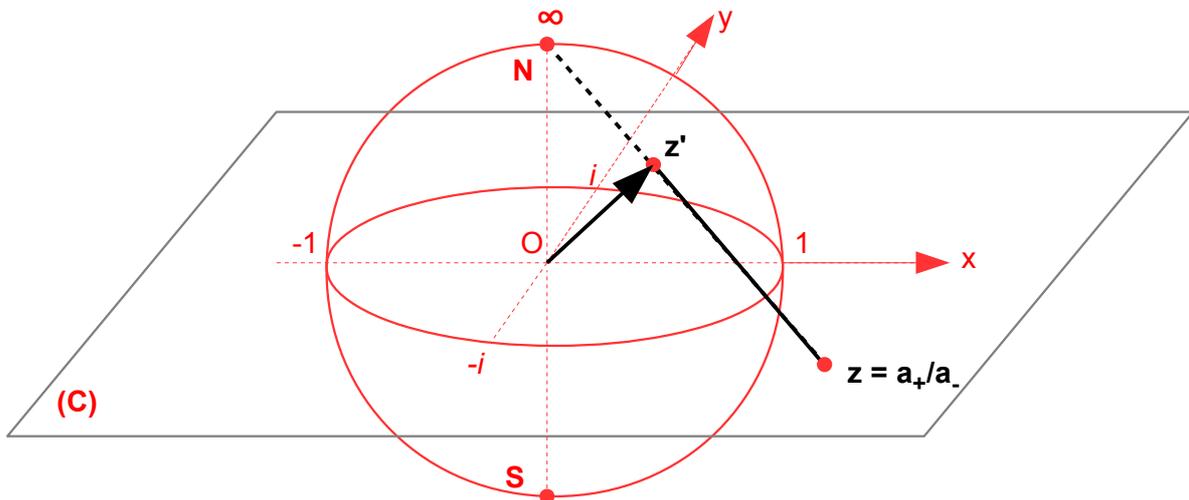


figure 29 : projection stéréographique d'une sphère de Riemann

Soit la **projection stéréographique** qui fait correspondre à un point z' de la sphère S^2 le point $z \in \mathbf{C}$ tels que le pôle nord N , z' et z soient sur la même droite. Par la projection stéréographique la sphère S^2 est homéomorphe à l'adhérence de \mathbf{C} :

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

Il s'ensuit qu'un point du plan complexe situé à l'infini correspond au pôle $N(\infty)$ de S^2 : il peut donc être représenté sur la sphère S^2 muni de $N(\infty)$, appelée **sphère de Riemann**.

Preuve de (157) :

La **droite projective** $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est l'ensemble des couples de points $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, autres que l'origine, formant un système de coordonnées homogènes, définissant une famille de droites complexes dans \mathbf{C}^2 d'équation :

$$z_1 z = z_2 z' \quad (158)$$

où z, z' sont les variables complexes (figure 30).

(158) définit une relation d'équivalence entre z_1 et z_2 , notée $z_1 \sim z_2$, et un point de \mathbf{C}^2 formé du couple (z_1, z_2) où $z_1 \sim z_2$ est noté $[z_1 : z_2]$.

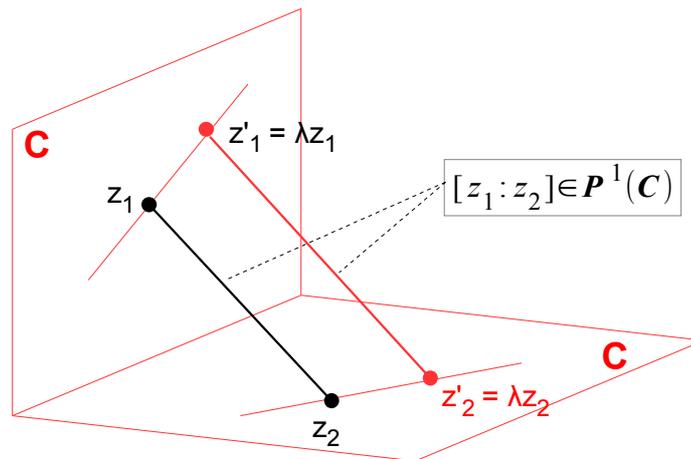


figure 30 : droite projective complexe

Deux points $[z_1 : z_2]$ et $[z'_1 : z'_2]$ de $(\mathbf{C}^2, [:])$ sont identiques et représentent donc la même famille de droites, c'est-à-dire un même point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, s'ils sont homothétiques :

$$\exists \lambda \neq 0, z'_2 = \lambda z_2 \text{ et } z'_1 = \lambda z_1 \iff [z'_1 : z'_2] = [z_1 : z_2]$$

La droite projective complexe est donc l'ensemble quotient : $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^2 - (0,0))/\mathbf{C}^*$ pour les homothéties de (\mathbf{C}^*, \cdot) .

L'application suivante est une bijection :

$$\left| \begin{array}{l} f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - [1 : 0] \\ z \rightarrow [z : 1] \end{array} \right.$$

Il en est de même pour :

$$\left| \begin{array}{l} f' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - [0 : 1] \\ z \rightarrow [1 : z] \end{array} \right.$$

Puisqu'il existe une identification de \mathbf{C} avec $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de $[1 : 0]$ ou de $[0 : 1]$, on peut définir une bijection entre S^2 et $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$:

On rappelle que $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, la bijection est :

$$\left| \begin{array}{l} h : S^2 \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + i x_2 : 1 - x_3] \text{ si } x_3 \neq 1 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 - i x_2 : 1 + x_3] \text{ si } x_3 \neq -1 \end{array} \right.$$

En effet, cette application admet une application réciproque : à tout point $[z : z']$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ correspond un

unique couple de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$:

$$h^{-1}(z, z') = \left(\frac{2zz'^*}{|z|^2 + |z'|^2}, \frac{|z|^2 - |z'|^2}{|z|^2 + |z'|^2} \right)$$

On sait que $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ est isomorphe à \mathbf{R}^3 , et comme

$$\left| \frac{2zz'^*}{|z|^2 + |z'|^2} \right|^2 + \left| \frac{|z|^2 - |z'|^2}{|z|^2 + |z'|^2} \right|^2 = 1$$

l'image réciproque de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par h^{-1} est identique à la sphère S^2 dont les points (x_1, x_2, x_3) satisfait :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2(x x' + y y')}{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2} \\ x_2 = 2 \frac{y x' - x y'}{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2} \\ x_3 = \frac{x^2 + y^2 - (x'^2 + y'^2)}{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

où $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est donc identifié à la sphère de Riemann. *CQFD de (157).*

Revenant à la fonction d'onde dans l'espace de spin :

$$|\psi\rangle = a_+ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + a_- \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

On sait que sa signification physique ne change pas si $|\psi\rangle$ est multiplié par un nombre complexe quelconque non nul, donc l'état de spin décrit par $|\psi\rangle$ est caractérisé par $z = a_+/a_-$: un même état de spin correspond donc à tout point équivalent à $[a_+ : a_-]$ de la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Puisque l'on a vu en (157) que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est la sphère de Riemann, cela équivaut à représenter un état de spin par un point de la sphère de Riemann. Plus exactement, on a le **théorème de Penrose** :

■ **Théorème** : Soit $z = a_+/a_- \in \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Alors la projection z' de z sur la sphère de Riemann, par la réciproque de la projection stéréographique, donne la direction du spin (159)

■ **Exemples** :

Comme la probabilité totale d'avoir tous les états de spin est égale à 1 on a :

$$|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$$

★ Si l'état de spin suivant Oz est $\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$ alors $a_+ = 1$ et $a_- = 0$ donc $z = a_+/a_- = +\infty$; Oz' correspond au pôle N(∞) : Oz' = ON(∞), et l'on a : $|\psi\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$.

★ Si l'état de spin suivant Oz est $\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$ alors $a_+ = 0$ et $a_- = +1$ donc $z = 0$; Oz' correspond au pôle « sud » S : Oz' = OS et l'on a : $|\psi\rangle = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$.

★ Si l'état de spin est suivant Ox alors $z = 1$ d'où $a_+ = a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$|\psi\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle)$$

★ Si l'état de spin est suivant – Ox alors $z = -1, a_+ = -a_-$:

$$|\psi\rangle_{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle)$$

★ Si l'état de spin est suivant Oy alors $z = i : a_+ = i a_-$:

$$|\psi\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle - i|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle)$$

★ Si l'état de spin est suivant – Oy alors $z = -i : a_+ = -i a_-$:

$$|\psi\rangle_{-y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + i|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle)$$

★ Pour tous les états intermédiaires on a (156) où $|a_+| \neq |a_-|$ et $|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$ (figure 31).

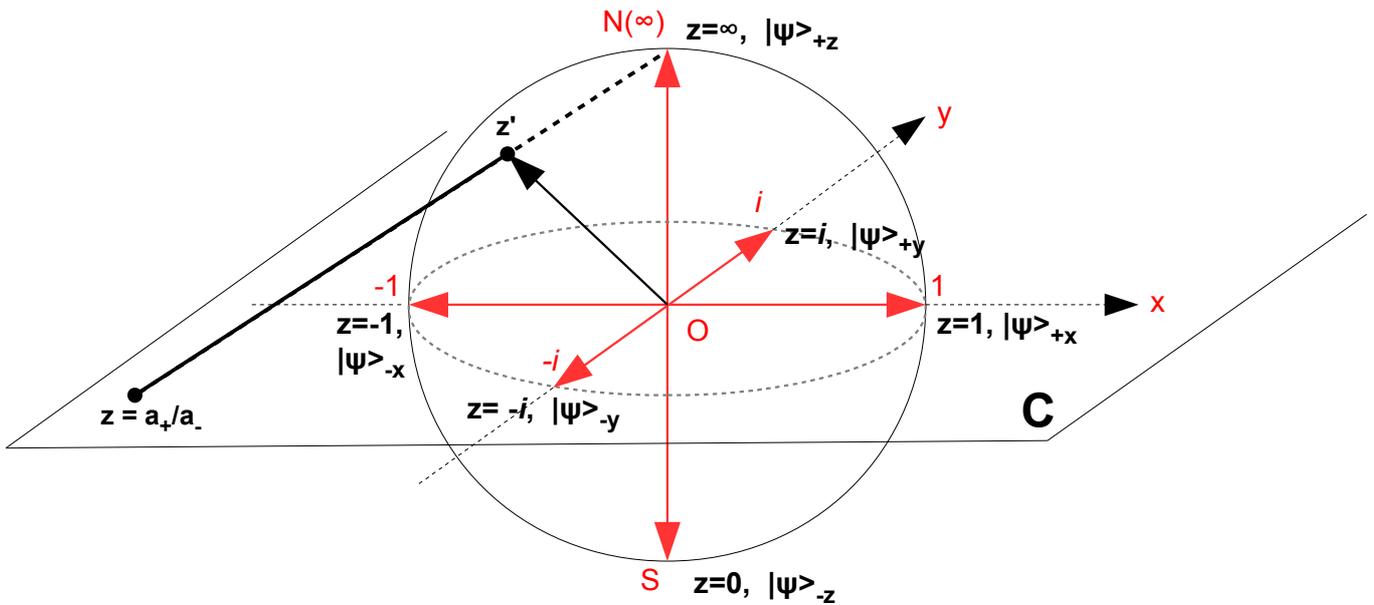


figure 31 : représentation de l'orientation de la polarisation d'un ensemble de spins sur la sphère de Riemann

La représentation des états de spin sur la sphère de Riemann concerne la direction moyenne d'un spin d'une particule sur laquelle sont effectuées plusieurs mesures : elle a une signification statistique. En effet on peut seulement obtenir des valeurs moyennes des projections du spin sur les trois axes Ox, Oy, Oz pour une particule dans un état de spin quelconque a priori inconnu. Sur chaque axe les valeurs moyennes sont :

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \langle \psi | S_x | \psi \rangle \\ \langle S_y \rangle &= \langle \psi | S_y | \psi \rangle \\ \langle S_z \rangle &= \langle \psi | S_z | \psi \rangle \end{aligned}$$

où S_x, S_y, S_z sont les opérateurs de spin (voir § 10). La direction moyenne du spin est alors donnée par le vecteur de composantes :

$$\langle S \rangle = (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$$

appelé vecteur **polarisation de spin**. C'est cette grandeur vectorielle qui est modifiée et mesurée, par l'interaction des nucléons avec les champs magnétiques en spectroscopie RMN (résonance magnétique nucléaire), ou par l'interaction des électrons en spectroscopie de résonance paramagnétique électronique (RPE).

5.7 – Représentation du spin par la sphère de Bloch

(voir aussi [26])

Considérons l'expression (156) d'une fonction d'onde décrivant la superposition de deux états de spin $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$ que l'on notera désormais $|+\rangle$ et $|-\rangle$ (On pourrait noter encore $|1\rangle$ et $|0\rangle$ pour exprimer ces états possibles comme des qu-bits en informatique quantique). Cette expression se généralise à un système quantique dont les états sont à deux niveaux $|+\rangle$ et $|-\rangle$:

$$|\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle$$

Considérant la condition de normalisation : $\langle \psi | \psi \rangle = 1 = \int \psi \psi^* d\omega$ on a

$$|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$$

On peut donc, sans modifier la signification physique de $|\psi\rangle$, poser a_+ et a_- de telle façon que $|\psi\rangle$ soit définie à une phase près :

$$|\psi\rangle = r_+ e^{i\varphi_+} |+\rangle + r_- e^{i\varphi_-} |-\rangle \quad \text{avec donc : } a_+ = r_+ e^{i\varphi_+} \quad \text{et} \quad a_- = r_- e^{i\varphi_-}$$

On ne change pas la densité de probabilité $|\psi|^2$ en multipliant $|\psi\rangle$ par $\exp(-i\varphi_+)$, on remplace alors $|\psi\rangle$ par :

$$|\psi'\rangle = e^{-i\varphi_+} |\psi\rangle = r_+ |+\rangle + r_- e^{i(\varphi_- - \varphi_+)} |-\rangle$$

r_+ et r_- sont des réels, et $r_- \exp i(\varphi_- - \varphi_+)$ est un nombre complexe : $r_- \exp i(\varphi_- - \varphi_+) = x_1 + i x_2$ où

$$x_1 = r_- \cos(\varphi_- - \varphi_+) \quad \text{et} \quad x_2 = r_- \sin(\varphi_- - \varphi_+)$$

La condition de normalisation $\langle \psi' | \psi' \rangle = 1$ conduit alors à : $r_+^2 + |x_1 + i x_2|^2 = 1$, soit :

$$r_+^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (160)$$

(160) est l'équation d'une sphère unitaire S^2 avec les coordonnées (x_1, x_2) du plan complexe $\mathbf{C} \sim \mathbf{R}^2$ et (r_+) de la droite réelle \mathbf{R} .

Or en coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) la sphère unitaire d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ fait intervenir les coordonnées sphériques par (figure 32) :

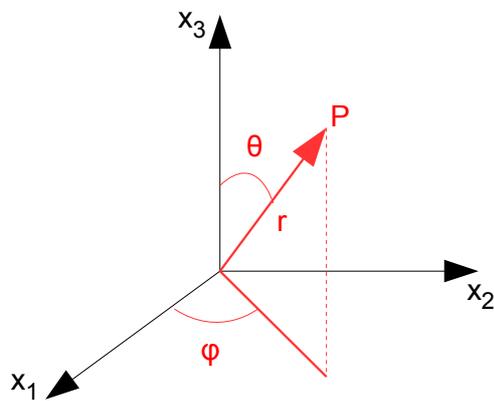


figure 32

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

tandis que dans (160) r_+ joue le rôle de x_3 : $r_+ = x_3$

De (160) il vient $r = 1$ donc en remplaçant dans l'expression de $|\psi'\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= x_3 |+\rangle + (x_1 + i x_2) |-\rangle \\ &= \cos \theta |+\rangle + \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) |-\rangle \end{aligned}$$

soit :

$$|\psi'\rangle = \cos \theta |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \theta |-\rangle \quad (161)$$

L'état quantique est défini par deux paramètres (θ, φ) . Il reste à identifier les domaines de définition de θ et φ , et les états qu'ils représentent.

★ $\theta = 0 \rightarrow |\psi'\rangle = |+\rangle$

★ $\theta = \pi/2 \rightarrow |\psi'\rangle = \exp(i\varphi) |-\rangle$

★ Soit un état $|\psi''\rangle$ situé sur un point opposé au point $|\psi'\rangle = \cos \theta |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \theta |-\rangle$ sur la sphère ;

alors $|\psi''\rangle = \cos \theta' |+\rangle + e^{i\varphi'} \sin \theta' |-\rangle$ avec : $\theta' = \pi - \theta$ et $\varphi' = \varphi + \pi$, d'où :

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle &= \cos(\pi - \theta) |+\rangle + e^{i(\varphi + \pi)} \sin(\pi - \theta) |-\rangle \\ &= -\cos \theta |+\rangle + e^{i\pi} e^{i\varphi} \sin \theta |-\rangle \\ &= -\cos \theta |+\rangle - e^{i\varphi} \sin \theta |-\rangle \end{aligned}$$

soit :

$$|\psi''\rangle = -|\psi'\rangle$$

En conséquence, il suffit de considérer la demi-sphère supérieure, c'est-à-dire les angles $0 \leq \theta \leq \pi/2$, les points de la demi-sphère inférieure se déduisant de ceux de la demi-sphère supérieure en les multipliant par -1.

On peut donc définir les points de l'hémisphère supérieure par des points sur la sphère complète en posant : $\theta' = 2\theta$ et $0 \leq \theta' \leq \pi$, et $|\psi'\rangle$ s'écrit alors :

$$|\psi'(\theta', \varphi)\rangle = \cos \frac{\theta'}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta'}{2} |-\rangle$$

et de manière générale à une phase près :

$$\left. \begin{aligned} |\psi(\theta, \varphi)\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \\ 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

(162) définit la **sphère de Bloch** (figure 33).

La représentation par la sphère de Bloch est équivalente à celle par la sphère de Riemann, où le rapport lié à la direction de la droite complexe est ici :

$$z = \frac{a_+}{a_-} = e^{-i\varphi} \cot \frac{\theta}{2}$$

■ **Proposition** : Deux états opposés sur la sphère de Bloch sont orthogonaux.

(163)

Preuve de (163) :

Soit un état $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$ et son opposé sur la sphère de Bloch :

$$|\bar{\psi}\rangle = \cos\frac{\pi-\theta}{2}|+\rangle + e^{i(\varphi+\pi)}\sin\frac{\pi-\theta}{2}|-\rangle = \cos\frac{\pi-\theta}{2}|+\rangle - e^{i\varphi}\sin\frac{\pi-\theta}{2}|-\rangle$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle\psi|\bar{\psi}\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi-\theta}{2}\langle+|+\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\langle+|-\rangle + e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi-\theta}{2}\langle-|+\rangle \\ &\quad - e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\langle-|-\rangle \end{aligned}$$

$|+\rangle$ et $|-\rangle$ étant orthogonaux et unitaires : $\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0$ et $\langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1$ donnent

$$\langle\psi|\bar{\psi}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi-\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\pi-\theta}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

CQFD de (163).

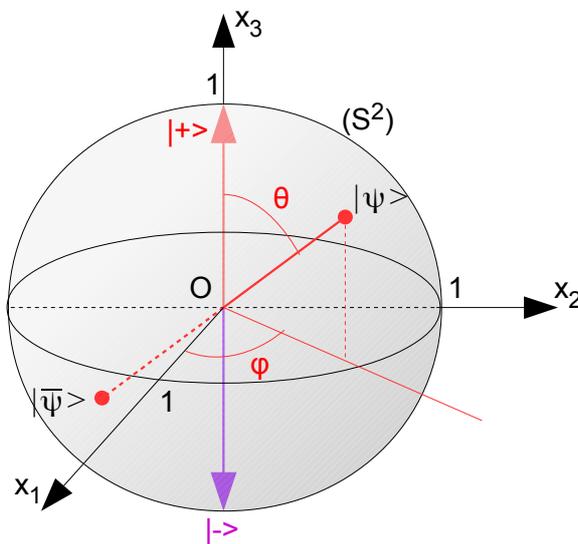


figure 33 : représentation de l'orientation de la polarisation d'un ensemble de spins sur la sphère de Bloch

Soit L un opérateur normal, c'est-à-dire tel que $L^+L = LL^+$. Sa décomposition spectrale sur une base $|n\rangle$ est :

$$L = \sum_n l_n |n\rangle\langle n|$$

Soit F une application qui transforme cet opérateur en un autre opérateur normal $L' = F(L)$:

$$L' = F(L) = \sum_n F(l_n) |n\rangle\langle n|$$

Si F est une série $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ alors $F(L)$ est une série en L :

$$\begin{aligned}
F(L) &= \sum_n F(l_n) |n\rangle \langle n| = \sum_n \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_n^k |n\rangle \langle n| \\
&= a_0 \sum_n l_n^0 |n\rangle \langle n| + a_1 \sum_n l_n^1 |n\rangle \langle n| + \dots + a_k \sum_n l_n^k |n\rangle \langle n| + \dots \\
&= a_0 \mathbf{1} + a_1 L^1 + a_2 L^2 + a_3 L^3 + \dots + a_k L^k + \dots
\end{aligned}$$

à cause de l'unitarité et de l'orthogonalité des $|n\rangle$. On applique ce résultat au développement en série de l'exponentiation d'un opérateur :

$$\exp(L) = \mathbf{1} + L + \frac{L^2}{2!} + \frac{L^3}{3!} + \dots + \frac{L^k}{k!} + \dots$$

Si $L^2 = \mathbf{1}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\exp(i\theta L) &= \mathbf{1} + i\theta L - \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{1} - i\frac{\theta^3}{3!} L + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{1} + i\frac{\theta^5}{5!} L + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^q}{(2q)!} \theta^{2q} + \dots \right) \mathbf{1} + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \theta^{2p+1} + \dots \right) L \\
&= \mathbf{1} \cos \theta + i L \sin \theta
\end{aligned}$$

Prenons maintenant $L \in SU(2)$ avec $L = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ avec $L^2 = \mathbf{1}$, où $\|\mathbf{n}\| = 1$, $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$ et $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, σ_k étant les matrices de Pauli. Alors on sait que :

$$R(\theta, \mathbf{n}) = \exp\left(i \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1} + i \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

représente une rotation d'un angle θ autour de l'axe \mathbf{n} , qui transforme tous les points de la sphère de Bloch de cette manière.

Toute transformation qui représente une rotation de la sphère de Bloch, c'est-à-dire un changement de polarisation de spin, s'écrit à une phase près :

$$R'(\theta) = \exp(i\psi) R(\theta, \mathbf{n})$$

PARTIE 2 : ROTATIONS ET MOMENTS CINÉTIQUES EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

6 – Vecteurs et valeurs propres des opérateurs moment cinétique

Le principe de correspondance de la mécanique quantique conduit à associer à la grandeur moment cinétique l'opérateur moment cinétique agissant sur les fonctions d'onde :

$$\mathbf{J} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla = -i\hbar \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k x_i \partial_j$$

(où \mathbf{r} est le rayon vecteur et \mathbf{e}_k les vecteurs de base) dont la projection sur les axes de coordonnées orthogonaux est :

$$\left. \begin{aligned}
J_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
J_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
J_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (164)$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) :
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$
 les composantes de \mathbf{J} sont :

$$\begin{cases} J_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ J_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ J_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (165)$$

et l'on a :

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J} \mathbf{J}^* = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_x J_x^* + J_y J_y^* + J_z J_z^* = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (166)$$

Les composantes du moment cinétique ne commutent pas entre elles :

$$\begin{cases} [J_x, J_y] = i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] = i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] = i\hbar J_y \end{cases} \quad (167)$$

que l'on regroupe en :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\hbar \mathbf{J} \quad (168)$$

avec :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = [J_y, J_z] \mathbf{e}_1 + [J_z, J_x] \mathbf{e}_2 + [J_x, J_y] \mathbf{e}_3$$

(167) montre que les composantes J_x, J_y, J_z du moment cinétique ne sont pas mesurables simultanément : ces composantes ne possèdent pas une base commune de vecteurs propres.

Par contre \mathbf{J}^2 commute avec \mathbf{J} :

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0 \quad (169)$$

De manière générale, on appelle **moment cinétique** tout opérateur qui vérifie (168) et (169).

Soient les opérateurs hermitiques conjugués :

$$\begin{cases} J_+ = J_x + iJ_y \\ J_- = J_x - iJ_y \end{cases} \quad (170)$$

avec donc $J_+^* = J_-$, $J_-^* = J_+$ alors :

$$\begin{cases} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases} \quad (170 \text{ bis})$$

et : $\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$ d'où :

$$\left. \begin{aligned} J_- J_+ &= \mathbf{J}^2 - J_z (J_z + \hbar) \\ J_+ J_- &= \mathbf{J}^2 - J_z (J_z - \hbar) \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \end{aligned} \right| \quad (171)$$

Puisque \mathbf{J}^2 et J_z commutent, \mathbf{J}^2 et J_z ont mêmes valeurs propres notés $|j m\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |j m\rangle &= \hbar^2 a_j |j m\rangle \\ J_z |j m\rangle &= \hbar m |j m\rangle \end{aligned}$$

où les valeurs propres a_j et m sont à déterminer. Les valeurs propres a_j de \mathbf{J}^2 sont les projections de \mathbf{J}^2 sur la base des vecteurs propres $|j m\rangle$:

$$\begin{aligned} \hbar^2 a_j &= \langle j m | \mathbf{J}^2 | j m \rangle \\ &= \langle j m | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | j m \rangle = \langle j m | J_x J_x^* + J_y J_y^* + J_z J_z^* | j m \rangle \\ &= \langle j m | J_x J_x^* | j m \rangle + \langle j m | J_y J_y^* | j m \rangle + \langle j m | J_z J_z^* | j m \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

donc :

$$a_j \geq 0 \quad (172)$$

■ *Établissement de la relation entre a_j et m :*

De (171) on a :

$$\begin{aligned} J_- J_+ |j m\rangle &= \left[\mathbf{J}^2 - J_z (J_z + \hbar) \right] |j m\rangle = \hbar^2 (a_j - m(m+1)) |j m\rangle \\ J_+ J_- |j m\rangle &= \left[\mathbf{J}^2 - J_z (J_z - \hbar) \right] |j m\rangle = \hbar^2 (a_j - m(m-1)) |j m\rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle j m | J_- J_+ | j m \rangle &= \hbar^2 (a_j - m(m+1)) \geq 0 \quad \text{car il s'agit de la norme de } J_+ |j m\rangle \\ \langle j m | J_+ J_- | j m \rangle &= \hbar^2 (a_j - m(m-1)) \geq 0 \quad \text{car il s'agit de la norme de } J_- |j m\rangle \end{aligned}$$

La première inégalité conduit à exprimer a_j sous la forme :

$$a_j = j(j+1)$$

et l'inégalité s'écrit : $j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+m+1) \geq 0$ donc :

$$j-m \geq 0 \quad \text{et} \quad j+m+1 \geq 0$$

ou :

$$j-m \leq 0 \quad \text{et} \quad j+m+1 \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$j \geq m \quad \text{et} \quad m \geq -j-1 \rightarrow j \geq m \geq -j-1 \quad (173)$$

ou :

$$j \leq m \quad \text{et} \quad m \leq -j-1 \rightarrow j \leq m \leq -j-1$$

qui équivaut à l'inégalité (173) puisque le signe de j est indéterminé, et qu'il suffit de remplacer j par $-j$.

La deuxième inégalité s'écrit alors : $j(j+1) - m(m-1) = (j+m)(j-m+1) \geq 0$ donc :

$$m \geq -j \quad \text{et} \quad m \leq 1+j \rightarrow -j \leq m \leq 1+j \quad (174)$$

La vérification simultanée de (173) et (174) donne alors :

$$\begin{cases} -j-1 \leq m \leq j \\ -j \leq m \leq 1+j \end{cases}$$

Comme $-j \geq -1-j$ et $j \leq 1+j$ on obtient la **première règle de sélection des moments cinétiques** :

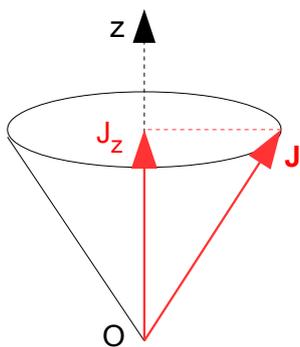
$$-j \leq m \leq j \quad (175)$$

Il faut maintenant déterminer les valeurs propres correspondant à j .
Le résultat est donné dans le théorème suivant :

■ **Théorème des valeurs propres des moments cinétiques** :

- Les valeurs propres de \mathbf{J}^2 sont $j(j+1)\hbar$ où $j \geq 0$ prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ ou bien dans $\{1/2, 3/2, \dots\}$
- Les valeurs propres de J_z sont $m\hbar$; m prend ses valeurs dans $\{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots\}$
- m prend $2j+1$ valeurs possibles puisque $-j \leq m \leq j$: $m = -j, -j+1, \dots, 0, j$.

(176)



Commentaire : le théorème (176) montre que le moment cinétique est complètement déterminé par son module \mathbf{J}^2 et par sa projection sur un des axes du repère orthogonal, par exemple Oz (figure 34).

figure 34

Preuve de (176) :

On a vu en (175) : $-j \leq m \leq j$. Pour la valeur maximale $m = j$, on a :

$$\langle j m | J_- J_+ | j m \rangle = \hbar^2 (j-m)(j+m+1) = 0$$

autrement dit la norme de $J_+ | j m \rangle$ est nulle pour $m = j$. Or une norme nulle implique ici que $J_+ | j m \rangle = 0$ ce qui arrive pour $m = j$:

$$J_+ | j j \rangle = 0$$

L'état maximum de moment cinétique est donc $| j j \rangle$.

Soit maintenant $m \neq j$, alors : puisque $[\mathbf{J}^2, J_+] = 0$, \mathbf{J}^2 et J_+ ont même vecteur propre :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 (J_+ | j m \rangle) &= J_+ (\mathbf{J}^2 | j m \rangle) \quad (\text{commutation}) \\ &= \hbar^2 J_+ j(j+1) | j m \rangle \\ &= \hbar^2 j(j+1) (J_+ | j m \rangle) \end{aligned}$$

Donc \mathbf{J}^2 et J_z ont pour vecteur propre $J_+ | j m \rangle$. À quelle valeur propre correspond-il ? Pour cela, on utilise $[J_z, J_+] = J_z J_+ - J_+ J_z = \hbar J_+$ d'où $J_z J_+ = J_+ (J_z + \hbar)$ donc :

$$\begin{aligned} J_z (J_+ | j m \rangle) &= J_+ (J_z + \hbar) | j m \rangle = \hbar J_+ (m+1) | j m \rangle \quad (\text{puisque } m \text{ est valeur propre de } J_z) \\ &= \hbar (m+1) (J_+ | j m \rangle) \end{aligned}$$

Donc, puisque $(m+1)$ est valeur propre de $J_z (J_+ | j m \rangle)$, l'état vecteur propre correspondant est :

$$J_+ | j m \rangle = \hbar | j m+1 \rangle$$

Si $j = m+1$, l'égalité précédente devient :

$$J_+ | j j-1 \rangle = \hbar | j j \rangle$$

d'où, puisque $J_+|jj\rangle=0$: $J_+(J_+|jj-1\rangle)=\hbar|jj\rangle=J_+^2|jj-1\rangle=\hbar J_+|jj\rangle=0$
 Si $j \geq m+1$ (le cas inverse $j \leq m+1$ étant exclu puisque $m \leq j$ d'après (175)), alors :

$$J_z(J_+^2|jm\rangle)=J_z(J_+(J_+|jm\rangle))$$

or $[J_z, J_+]=\hbar J_+$ donc $J_z J_+=\hbar J_+ + J_+ J_z$, d'où :

$$\begin{aligned} J_z(J_+^2|jm\rangle) &= (\hbar J_+ + J_+ J_z)(J_+|jm\rangle) \\ &= \hbar J_+^2|jm\rangle + J_+(J_z(J_+|jm\rangle)) \\ &= \hbar J_+^2|jm\rangle + \hbar J_+(m+1)J_+|jm\rangle \\ &= \hbar J_+^2(m+2)|jm\rangle = \hbar(m+2)J_+^2|jm\rangle \end{aligned}$$

donc $J_+^2|jm\rangle$ est vecteur propre de J_z avec pour valeur propre $(m+2)\hbar$, c'est donc un vecteur d'état $|jm+2\rangle$.

Et ainsi de suite : on raisonne par récurrence jusqu'à un rang n : $J_+^n|jm\rangle$ est vecteur propre de J^2 de valeur propre $j(j+1)\hbar^2$ et aussi vecteur propre de J_z de valeur propre $(m+n)\hbar$:

$$J_z(J_+^n|jm\rangle)=\hbar(m+n)J_+^n|jm\rangle$$

Si $j = m+n$ on montre, comme dans le cas $j = m+1$, que :

$$J_+^{n+1}|jm\rangle=0$$

$n = j-m$ est le nombre de fois où l'on applique J_+ , il est borné par j puisque $m \leq j$. Chaque étape donne les vecteurs propres de J^2 : $J_+|jm\rangle, J_+^2|jm\rangle, \dots, J_+^n|jm\rangle$ de valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et de J_z de valeurs propres : $(m+1)\hbar, (m+2)\hbar, \dots, (m+n)\hbar = j\hbar$.

Le même raisonnement s'applique à $J_-|jm\rangle$ et l'on trouve à l'itération $q = 1$:

$$J_-|j-j\rangle=0$$

$$J_z(J_-|jm\rangle)=\hbar(m-1)(J_-|jm\rangle)$$

ce qui montre que $J_-|jm\rangle=\hbar|jm-1\rangle$ est vecteur propre de J_z de valeur propre $(m-1)\hbar$, et de J^2 de valeur propre $j(j+1)\hbar^2$.

En itérant jusqu'à $q = j+m$ (avec $m \geq -j$) on obtient les vecteurs propres de J^2 :

$$J_-|jm\rangle, J_-^2|jm\rangle, \dots, J_-^q|jm\rangle$$

de valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et de J_z de valeurs propres : $(m-1)\hbar, (m-2)\hbar, \dots, (m-q)\hbar = -j\hbar$.

Les nombres d'itérations n et q sont des entiers qui vérifient donc :

$$\begin{aligned} n &= j-m \\ q &= j+m \end{aligned}$$

ce qui donne : $n+q = 2j$ ou : $j = (n+q)/2$.

Par conséquent les états propres de J^2 , de valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$, correspondent à j entier ou demi-entier positif : $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, et de valeurs propres $m\hbar$ où m peut être entier ou demi-entier positif ou négatif : $m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$, et m prend les $2j+1$ valeurs possibles, comprises entre $-j$ et j :

$$m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$$

CQFD de (176).

7 – Base de représentation standard de l'espace de Hilbert des états quantiques à partir des vecteurs propres de J^2 et J_z

Soit H_j le sous-espace (de Hilbert) engendré par les $(2j+1)$ vecteurs $|jm\rangle$, vecteurs propres de J^2 , de

valeurs propres $j(j+1)\hbar$, et de J_z de valeurs propres $m\hbar$. Pour m variable les vecteurs $|j m\rangle$ sont orthogonaux :

$$\langle j m | j m' \rangle = \delta_{mm'} \quad (177)$$

Des relations : $J_z(J_+|j m\rangle) = \hbar(m+1)(J_+|j m\rangle)$ et $J_z|j m+1\rangle = \hbar(m+1)|j m+1\rangle$ on déduit que $J_+|j m\rangle$ est proportionnel à $|j m+1\rangle$:

$$J_+|j m\rangle = \lambda_m |j m+1\rangle \quad (178)$$

Pour déterminer λ_m on calcule la norme de (178) :

$$\begin{aligned} \langle j m | J_- J_+ | j m \rangle &= \langle j m+1 | \lambda_m^* \lambda_m | j m+1 \rangle \\ &= |\lambda_m|^2 \langle j m+1 | j m+1 \rangle = |\lambda_m|^2 \end{aligned}$$

suite à (177).

Or on a vu que $\langle j m | J_- J_+ | j m \rangle = \hbar^2 (j-m)(j+m+1)$. On convient que la phase de $|j m+1\rangle$ est telle que λ_m soit un réel positif. Alors :

$$\lambda_m = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \quad (179)$$

Par ailleurs, des relations : $J_z(J_-|j m\rangle) = \hbar(m-1)J_-|j m\rangle$ et $J_z|j m-1\rangle = \hbar(m-1)J_-|j m-1\rangle$ on déduit que $J_-|j m\rangle$ est proportionnel à $|j m-1\rangle$:

$$J_-|j m\rangle = \lambda'_m |j m-1\rangle \quad (180)$$

d'où, en multipliant (180) par l'adjoint $\langle j m-1 |$:

$$\langle j m-1 | J_- | j m \rangle = \langle j m-1 | \lambda'_m | j m-1 \rangle = \lambda'_m \langle j m-1 | j m-1 \rangle = \lambda'_m$$

Or par (178) : $\langle j m-1 | J_- = (J_+ | j m-1 \rangle)^+ = (\lambda_{m-1} | j m \rangle)^+ = \langle j m | \lambda_{m-1}$ puisque λ_{m-1} est réel, d'où :

$$\langle j m | \lambda_{m-1} | j m \rangle = \lambda_{m-1} = \lambda'_m$$

Finalement :

$$\lambda'_m = \lambda_{m-1} \quad (181)$$

On a donc la construction d'une série de $2j+1$ vecteurs de base $|j m\rangle$ où $-j \leq m \leq j$, vérifiant :

$$\left. \begin{aligned} J_+ | j m \rangle &= \lambda_m | j m+1 \rangle \\ J_- | j m \rangle &= \lambda_{m-1} | j m-1 \rangle \end{aligned} \right| \quad (182)$$

où λ_m est donné par (179). En appliquant successivement J_+ et J_- sur $|j m\rangle$ de H_j , on construit une suite de $(2j+1)$ vecteurs orthonormés qui forment une base de H_j : $|j j\rangle, |j j-1\rangle, \dots, |j -j\rangle$, qui vérifient les équations aux valeurs propres :

$$\left. \begin{aligned} J^2 | j m \rangle &= \hbar^2 j(j+1) | j m \rangle \\ J_z | j m \rangle &= \hbar m | j m \rangle \end{aligned} \right| \quad (183)$$

les $|j m\rangle$ se déduisant par (182). Les opérateurs \mathbf{J}^2 , J_z , J_+ , J_- agissant sur un vecteur $|j m\rangle$ de \mathbf{H}_j donnent un autre vecteur $|j m'\rangle$ de \mathbf{H}_j . Le sous-espace \mathbf{H}_j est donc invariant par ces opérateurs.

Les grandeurs, autres que moments cinétiques, qui commutent avec \mathbf{J}^2 et J_z , telles que l'énergie (hamiltonien) etc., forment la **représentation standard**, notée $\{\mathbf{J}^2 J_z\}$. Leurs vecteurs propres correspondent à un même nombre quantique j et peuvent être regroupés en séries constituées de $(2j+1)$ vecteurs $|n j m\rangle$ qui se déduisent les uns des autres par (182) ; n est l'indice associé au sous-espace propre de l'hamiltonien H de valeur propre ε_n :

$$H|n j m\rangle = \varepsilon_n |n j m\rangle \quad (184)$$

et l'espace associé engendré par les $(2j+1)$ vecteurs propres de \mathbf{J}^2 et J_z et par ceux de H est indicé par n : on note $\mathbf{H}_{n j}$ au lieu de \mathbf{H}_j , et l'on réécrit (183) dans cet espace :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}^2 |n j m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |n j m\rangle \\ J_z |n j m\rangle &= \hbar m |n j m\rangle \end{aligned} \right| \quad (184\text{bis})$$

On a vu que quel que soit n , c'est-à-dire quelle que soit la grandeur physique concernée dans la représentation standard, on a :

$$\forall n : \dim \mathbf{H}_{n j} = 2j + 1$$

et (182) se réécrit dans $\mathbf{H}_{n j}$:

$$\left. \begin{aligned} J_+ |n j m\rangle &= \lambda_m |n j m+1\rangle \\ J_- |n j m\rangle &= \lambda_{m-1} |n j m-1\rangle \end{aligned} \right| \quad (184\text{ter})$$

L'application successive de (184ter) pour toute valeur j correspondant à la valeur propre $j(j+1)\hbar$ de \mathbf{J}^2 fournit une **base standard** de l'espace de Hilbert des fonctions d'onde :

$$\sum_{j m} |n j m\rangle \langle n j m| = \mathbf{1}$$

Pour $n \neq n'$ les sous-espaces $\mathbf{H}_{n j}$ et $\mathbf{H}_{n' j}$ sont orthogonaux du fait de (182), et la réunion des $\mathbf{H}_{n j}$ forme le sous-espace \mathbf{H}_j des vecteurs propres de \mathbf{J}^2 correspondant aux valeurs propres $j(j+1)\hbar$:

$$\bigcup_n \mathbf{H}_{n j} = \{ |j m\rangle ; \mathbf{J}^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle \} = \mathbf{H}_j$$

Dans la représentation standard on établit facilement que les éléments de matrices des opérateurs \mathbf{J}^2 , J_z , J_+ , J_- prennent la forme particulièrement simple :

$$\left. \begin{aligned} \langle n j m | J_z | n' j' m' \rangle &= m \hbar \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \\ \langle n j m | \mathbf{J}^2 | n' j' m' \rangle &= \hbar^2 j(j+1) \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'} \\ \langle n j m | J_+ | n' j' m' \rangle &= \lambda_m \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'+1} \\ \langle n j m | J_- | n' j' m' \rangle &= \lambda_{m-1} \delta_{nn'} \delta_{j j'} \delta_{m m'-1} \end{aligned} \right| \quad (185)$$

On déduit J_x et J_y par (170bis) :

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

λ_m , est donné par (179).

8 – Exemples de représentation standard

a) Pour $j = 0$, de (185) on déduit $m = 0$ donc $\lambda_m = \lambda_{m-1} = 0$, d'où les matrices de \mathbf{J}^2 , J_z , J_x , J_y , J_+ , J_- sont nulles.

b) Pour $j = 1/2$, $\dim \mathbf{H}_{nj} = 2j+1 = 1+1 = 2$.

Valeurs possibles de m : $-1/2 \leq m \leq 1/2$ soit : $m = -1/2$ ou $1/2$. Donc (185) donne :

$$J_z(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}^2(j=1/2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_+(j=1/2) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_-(j=1/2) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$J_x(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_y(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que J_z , J_x , J_y s'expriment avec les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ainsi :

$$J_z(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \sigma_3 ; \quad J_y(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \sigma_2 ; \quad J_x(j=1/2) = \frac{1}{2}\hbar \sigma_1 \quad (186)$$

Le cas $j = 1/2$ correspond donc au moment cinétique propre, ou spin.

c) Pour $j = 1$, $\dim \mathbf{H}_{nj} = 2j+1 = 2+1 = 3$.

Valeurs possibles de m : $m = -1, 0, 1$ donc (185) donne :

$$J_z(j=1) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{J}^2(j=1) = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_+(j=1) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_-(j=1) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$J_x(j=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_y(j=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

9 – Moment cinétique orbital

Le moment cinétique orbital est la transcription opératoire du moment cinétique ordinaire $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ où \mathbf{p} est le vecteur quantité de mouvement ; on le note en particulier par \mathbf{L} au lieu de \mathbf{J} qui est réservée au traitement du moment cinétique selon sa définition générale. L'opérateur moment cinétique orbital est donc donné par (164) :

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

et il satisfait les mêmes équations aux valeurs propres que tout moment cinétique :

$$\begin{aligned} L_z |l m\rangle &= m\hbar |l m\rangle \\ \mathbf{L}^2 |l m\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |l m\rangle \end{aligned}$$

où ℓ joue le rôle de j , noté spécialement pour le distinguer des autres types de moment cinétique, avec donc les mêmes règles de sélection :

$$l \geq 0 \quad \text{et} \quad -l \leq m \leq l$$

A priori ℓ pourrait être entier ou demi-entier. Mais on a la proposition suivante :

■ **Proposition** : Le moment cinétique orbital a pour valeurs propres de \mathbf{L}^2 , $\ell(\ell+1)\hbar^2$ avec ℓ entier positif : $\ell = 0, 1, 2, \dots$ (187)

Preuve de (187) :

Pour le montrer on exprime \mathbf{L} en coordonnées sphériques (figure 32), et l'on va calculer les fonctions propres communes à \mathbf{L}^2 et L_z , et l'on va examiner le fait qu'elles doivent rester inchangées lorsque l'on change l'azimut φ en $\varphi+2\pi$:

Du changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

on obtient L_z avec les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} (a) : L_x &= i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (b) : L_y &= i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (c) : L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (188)$$

d'où :

$$\begin{aligned} (a) : \mathbf{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ (b) : L_+ &= \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (c) : L_- &= \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (189)$$

Les fonctions propres communes à \mathbf{L}^2 et L_z ne dépendent pas de r et sont solutions des deux équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 |l, m, \theta, \varphi\rangle &= l(l+1)\hbar^2 |l, m, \theta, \varphi\rangle \\ L_z |l, m, \theta, \varphi\rangle &= m\hbar |l, m, \theta, \varphi\rangle \end{aligned}$$

soit en utilisant (188(c)) et (189(a)) :

$$\left. \begin{aligned} -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) |l, m, \theta, \varphi\rangle &= l(l+1) \hbar^2 |l, m, \theta, \varphi\rangle \\ -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} |l, m, \theta, \varphi\rangle &= m \hbar |l, m, \theta, \varphi\rangle \end{aligned} \right| \quad (190)$$

Les solutions de (190) sont les **harmoniques sphériques** :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = |l, m, \theta, \varphi\rangle = X_{lm}(\theta) \exp(im\varphi) \quad (191a)$$

où $X_{lm}(\theta)$ dépend seulement de θ :

$$X_{lm}(\theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (\sin \theta)^{-m} \frac{d^{(l-m)}}{d(\cos \theta)^{(l-m)}} (\sin \theta)^{2l} \quad (191b)$$

Les fonctions propres $|l, m, \theta, \varphi\rangle$ dépendent de φ seulement par le terme $\exp(im\varphi)$. Or elles sont uniformes si elles restent inchangées par une rotation de l'angle φ de 2π , donc : $\exp(im\varphi) = \exp(im(\varphi + 2\pi))$ ce qui donne $\exp i 2\pi m = 1$. Donc m est un nombre entier relatif.

Or on a vu en (176) que $(\ell+m)$ et $(\ell-m)$ sont entiers, donc ℓ est entier.

CQFD de (187).

De (191a et b) on calcule les harmoniques sphériques aux premiers indices $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$:

$$\begin{aligned} m = 0, \ell = 0 : Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ m = 0, \ell = 1 : Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ m = \pm 1, \ell = 1 : Y_{1\pm 1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ m = 0, \ell = 2 : Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ m = \pm 1, \ell = 2 : Y_{2\pm 1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \\ m = \pm 2, \ell = 2 : Y_{2\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \\ m = 0, \ell = 3 : Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ m = \pm 3, \ell = 1 : Y_{1\pm 3} &= -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\varphi} \end{aligned}$$

Les harmoniques sphériques jouent un rôle important en mécanique quantique, notamment par leur utilisation dans le couplage de moments cinétiques (par exemple le couplage spin-orbite $\mathbf{L.S}$), dans la résolution de l'équation de Schrödinger dans un potentiel central, la détermination des niveaux d'énergie d'une particule dans un puits de potentiel, les états des atomes hydrogénéoïdes, etc.

10 – Moment cinétique intrinsèque ou spin d'une particule

C'est par l'effet Zeeman anormal que le concept de spin a été introduit. Il a été observé que les raies de la série principale des atomes alcalins sont toujours doubles. Pour expliquer cette observation, Uhlenbeck et Goudsmit (1925) supposèrent que l'électron possède 3 degrés de liberté : le moment cinétique orbital et un moment magnétique intrinsèque résultant de la rotation de la charge sur elle-même, auquel correspond un nouveau moment cinétique appelé spin. Ce nouveau moment correspond à l'opérateur noté \mathbf{S} . Comme \mathbf{S} suit les mêmes règles que tout moment cinétique général, la valeur propre m du

moment de spin suivant Oz, S_z , prend un nombre de valeurs possibles égal à (cf. (176)) : $2s+1$, où s intervient dans la valeur propre de \mathbf{S}^2 : $s(s+1)\hbar^2$.

Or l'expérience montre que le moment de spin prend 2 états possibles (dédoublé des raies), par conséquent : $2s+1 = 2$, soit :

$$s = \frac{1}{2}$$

Les deux états possibles de S_z sont donc :

$$m = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2}$$

puisque $-s \leq m \leq s$ (relation (175)).

L'électron possédant un moment cinétique orbital \mathbf{L} , son moment cinétique total est :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

donc la projection sur Oz est : $J_z = L_z + S_z$.

Soit $L_z = \ell\hbar$ fixé et $S_z = 1/2.\ell\hbar$ et $-1/2.\ell\hbar$ les deux valeurs possibles de S_z . Alors J_z prend les seules valeurs possibles :

$$J_z = (l + \frac{1}{2})\hbar \quad \text{ou} \quad J_z = (l - \frac{1}{2})\hbar$$

donc $J_z = m\hbar$ avec $m = \ell \pm 1/2$ demi-entiers puisque ℓ est entier (proposition (187)).

Pour chaque valeur de ℓ il y a deux valeurs pour J_z , ce qui explique le dédoublement des raies spectrales. L'écart entre les raies, exprimé en longueur d'onde, représente l'énergie qu'il faut fournir pour intervertir l'orientation des spin. Pour la raie D du Sodium, cet écart est de l'ordre de 6\AA .

La composante du spin suivant Oz, S_z , est représentée à la figure 35.

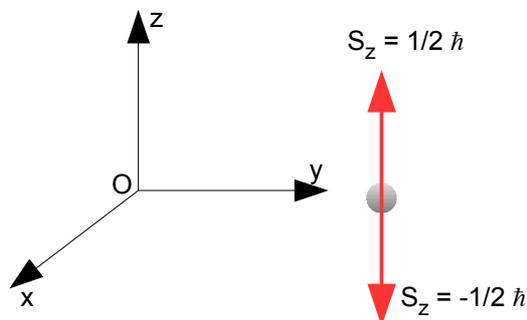


figure 35

L'**effet Zeeman normal**, c'est-à-dire qui ne tient pas compte du spin, est décrit par la quantification du moment cinétique orbital L_z avec ses valeurs propres :

$$L_z = l\hbar \quad ; \quad L_z |j l\rangle = l\hbar |j l\rangle$$

La révolution de l'électron sur son orbite autour du noyau s'effectue avec une fréquence angulaire ω , créant ainsi un courant dû au déplacement de la charge électronique :

$$I = \frac{dq}{dt} = v e^- = \frac{\omega}{2\pi} e^-$$

lequel génère un champ magnétique. Au cours de sa révolution, l'électron forme un dipôle magnétique de moment :

$$M_l = \pi r^2 \frac{\omega}{2\pi c} e^-$$

où r est le rayon orbital, c la célérité de la lumière. Comme L_z est aussi égal à :

$$L_z = m_e r^2 \omega \quad (m_e : \text{masse de l'électron})$$

il vient : $\omega r^2 = L_z / m_e$ que l'on remplace dans M_l :

$$M_l = \frac{e^- \hbar}{2 m_e c} l = \frac{e^-}{2 m_e c} L_z \quad (192a)$$

Pour $l = 1$, M_1 est la plus petite valeur possible du moment magnétique orbital dans un atome : elle correspond au **magnéton de Bohr** :

$$\mu_B = \frac{e^- \hbar}{2 m_e c} \quad (192b)$$

Sous l'action d'un champ magnétique extérieur \mathbf{B} l'atome a un mouvement de précession autour de l'axe du champ \mathbf{B} . En effet, le moment cinétique et le moment magnétique de l'électron en orbite dans l'atome sont perpendiculaires au plan de l'orbite. Le champ magnétique \mathbf{B} crée un couple qui tend à aligner le moment magnétique sur la direction de \mathbf{B} . Mais il est contrebalancé par la force d'inertie de rotation de l'électron en révolution orbitale. Il en résulte un mouvement de précession de l'axe du moment L_z (figure 36).

Soit θ l'angle de précession ; la projection du moment L_z sur l'axe de \mathbf{B} est :

$$L_{z,\theta} = L_z \cos \theta$$

qui est donc quantifiée selon :

$$l' = l \cos \theta$$

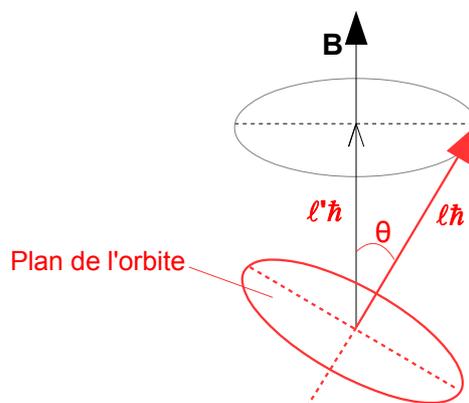


figure 36

$L_{z,\theta}$ étant aussi un moment cinétique, l' est un nombre entier :

$$L_{z,\theta} = l' \hbar$$

donc θ prend un nombre fini de valeurs, il est quantifié : il y a un nombre fini d'inclinaisons pour chaque valeur l fixée, soit $2l+1$ valeurs (figure 37) :

$$l' = -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l$$

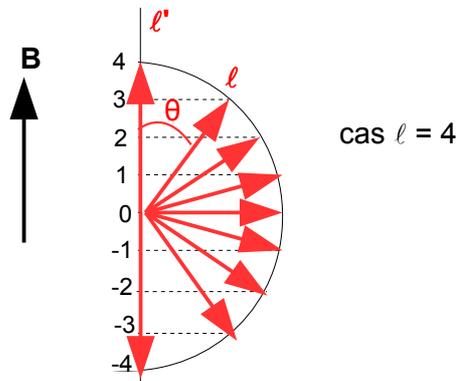


figure 37

En présence du champ magnétique **B** l'énergie de l'atome s'accroît des quantités pour chaque état de ℓ , égales à :

$$E_B = -M_\ell B \cos \theta = -M_\ell B \frac{l'}{l} \quad (193a)$$

De (192a) on tire : $E_B = -\frac{e^- \hbar}{2m_e c} B l'$. la différence d'énergie entre deux états ℓ' et $\ell'+1$ est donc :

$$\Delta E_B = \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B = h \nu_L \quad (193b)$$

où ν_L est la **fréquence de Larmor** :

$$\nu_L = \frac{e^- B}{4\pi m_e c} = 1,40 \cdot 10^6 B (s^{-1}) \quad (193c)$$

Pour accorder la théorie avec l'effet Zeeman anomal, il faut prendre comme moment M_ℓ non $(e\hbar/2m_e c)\ell$ mais :

$$M_s = 2 \frac{e^- \hbar}{2m_e c} s \quad (194)$$

en présence du spin s . Or on a vu que $s = 1/2$, donc (194) est exactement égal au magnéton de Bohr (192b) :

$$M_s = \mu_B \quad (195)$$

Donc : Le moment magnétique total, somme vectorielle du moment magnétique associé au seul mouvement orbital \mathbf{M}_ℓ , et du moment magnétique associé au spin, \mathbf{M}_s :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\ell + \mathbf{M}_s$$

n'a pas la même orientation que le moment mécanique

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

où \mathbf{L} est le moment cinétique orbital.

Tout vecteur non colinéaire au moment cinétique total \mathbf{J} tourne autour de l'axe de \mathbf{J} sous l'action du moment magnétique de spin (mouvement de **précession de Larmor**) (figure 38).

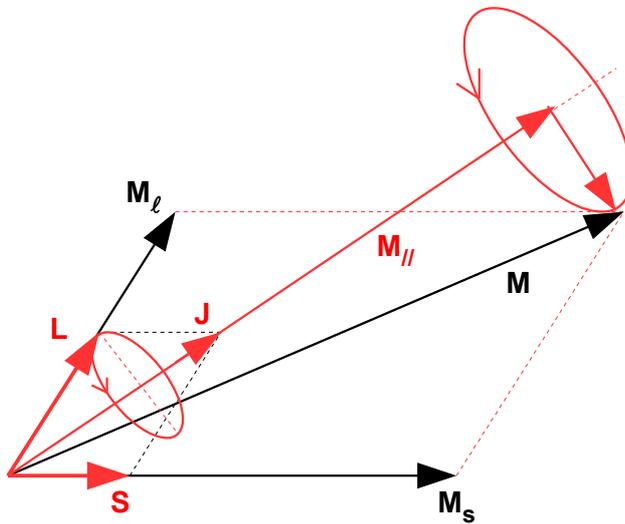


figure 38 : précession de Larmor ; le moment magnétique total \mathbf{M} n'étant pas colinéaire au moment cinétique total \mathbf{J} , son axe subit une précession autour de l'axe de \mathbf{J}

La valeur moyenne temporelle de \mathbf{M} est égale à sa composante parallèle à \mathbf{J} , notée $\mathbf{M}_{//}$, la valeur de sa composante orthogonale \mathbf{M}_{\perp} ayant une contribution nulle :

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{M}_{//}$$

Comme dans l'effet Zeeman normal, $\mathbf{M}_{//}$ a un mouvement de précession autour de \mathbf{B} due à la présence du moment cinétique, et l'inclinaison de l'axe de \mathbf{J} , ou de $\mathbf{M}_{//}$, sur l'axe de \mathbf{B} prend $2j+1$ valeurs possibles (où j est rattaché aux valeurs propres de \mathbf{J}^2). Avec Oz comme axe de \mathbf{B} , les valeurs propres de J_z sont $m\hbar$, d'où l'angle d'inclinaison donné par :

$$m = j \cos \theta$$

donc θ prend $2j+1$ valeurs. L'énergie magnétique pour une inclinaison d'angle θ est :

$$E_B(\theta) = -M_{//} B \frac{m}{j} = -M_{//} B \cos \theta$$

et l'écart entre deux énergies d'états m consécutifs est :

$$\Delta E_B = M_{//} \frac{B}{j}$$

Contrairement à l'effet Zeeman normal, le module de $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{M}_{//}$ n'est pas un multiple entier de μ_B , on n'a pas : $M_{//} = j\mu_B$, mais un facteur correctif g appelé **facteur de Landé** qui dépend de ℓ, j, s :

$$\langle M \rangle = M_{//} = g j \mu_B \quad (196)$$

d'où l'énergie magnétique supplémentaire :

$$E_B(\theta) = -M_{//} B \frac{m}{j} = -g m \frac{e^{-} \hbar}{2 m_e c} B$$

soit :

$$E_B(\theta) = -g m h \nu_L \quad (197)$$

où la fréquence de Larmor ν_L est donnée par (193c).

À cause du facteur de Landé, qui varie d'un terme j à l'autre, l'écart entre les niveaux d'énergie d'un même groupe j n'est plus le même que pour un autre groupe. La règle de transition entre deux états m_1 et m_2 satisfait :

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 0, \pm 1$$

mais comme m_1 et m_2 appartiennent à 2 groupes différents associés à j_1 et j_2 , et donc de g différent, les écarts de niveaux consécutifs entre les m_1 d'une part, et les m_2 d'autre part, ne sont plus identiques (figure 39).

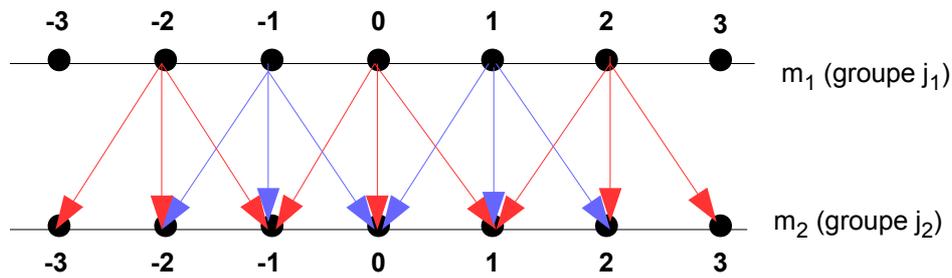


figure 39

Les raies dans l'effet Zeeman anomal dépendent du facteur de Landé associé aux deux états entre lesquels a lieu la transition.

■ Détermination du facteur de Landé g pour un groupe associé à j :

Rappel : j est le nombre quantique qui intervient dans les valeurs propres de \mathbf{J}^2 : $j(j+1)\hbar^2$.

Comme $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, et notant $(\ell, j) = \text{angle}(\mathbf{L}, \mathbf{J})$ et $(s, j) = \text{angle}(\mathbf{S}, \mathbf{J})$, et puisque $\mathbf{M}_{||}$ est colinéaire à \mathbf{J} , on a (figure 40) :

$$M_{||} = M_L \cos(\ell, j) + M_S \cos(s, j)$$

Or on a vu en (192a) et (194) que, sous leur forme d'opérateurs :

$$M_L = \mu_B L \quad \text{et} \quad M_S = 2\mu_B S$$

qu'il faut corriger de leurs facteurs de Landé respectifs :

$$M_L = g_L \mu_B L \quad \text{et} \quad M_S = g_S \mu_B S \quad (198)$$

|| Remarque : pour un électron on a donc $g_L = 1$ et $g_S = 2$.

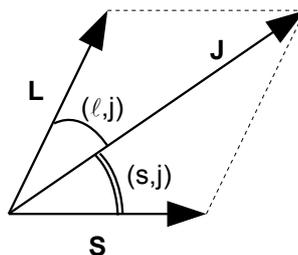


figure 40

On a vu aussi en (196) : $M_{||} = g \mu_B J$, où μ_B est donné par (192b). Il s'ensuit :

$$g \mu_B J = \mu_B (g_L L \cos(\ell, j) + g_S S \cos(s, j))$$

donc :

$$g J = g_L L \cos(\ell, j) + g_S S \cos(s, j)$$

Les relations du triangle entre les modules J, L, S de $\mathbf{J}, \mathbf{L}, \mathbf{S}$ fournissent $\cos(s, j)$ et $\cos(\ell, j)$:

$$J^2 + L^2 - S^2 = 2JL \cos(\ell, j), \quad J^2 + S^2 - L^2 = 2JS \cos(s, j)$$

d'où :

$$g = g_l \frac{J^2 + L^2 - S^2}{2J^2} + g_s \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2}$$

or J^2 , L^2 , S^2 ont respectivement pour valeurs propres : $j(j+1)\hbar^2$, $\ell(\ell+1)\hbar^2$, $s(s+1)\hbar^2$ d'où :

$$g = \frac{1}{2j(j+1)} \left[(g_l + g_s)j(j+1) + (g_s - g_l)(s(s+1) - \ell(\ell+1)) \right] \quad (199)$$

Pour un électron en orbite dans un atome, $g_l = 1$ et $g_s = 2$ (199) donne :

$$g = \frac{1}{2j(j+1)} (s(s+1) - \ell(\ell+1)) + \frac{3}{2}$$

L'**expérience de Stern et Gerlach** (1922) permet de mesurer le moment magnétique sur les atomes individuels. Elle utilise l'émission d'atomes d'argent dans l'entrefer d'un électroaimant, car l'atome d'argent est électriquement neutre. Il se comporte comme une particule de spin 1/2, de grande masse.

Dans le modèle de l'atome de Bohr (sans spin), le faisceau d'atomes serait dispersé suivant la verticale O_z parce que la composante M_ℓ du moment magnétique suivant Oz prendrait des valeurs selon (192a) :

$$M_l = \frac{e^-}{2m_e c} L_z . \text{ En présence du champ magnétique } \mathbf{B}, \text{ un atome émis suivant } Ox \text{ est dévié de sa}$$

direction initiale d'un angle approximativement égal à $M_l(\partial B_z / \partial z)x / E_c$ où x est la distance parcourue par l'atome dans le champ magnétique, et E_c son énergie cinétique initiale. La déviation est donc proportionnelle à M_ℓ . Or les atomes sont orientés au hasard, leurs moments magnétiques orbitaux M_ℓ sont donc distribués au hasard, et correspondent à toutes les valeurs permises comprises entre $-\ell$ et ℓ . L'angle de déviation prend donc toutes les valeurs correspondantes à celles comprises entre ces deux extrêmes. Les impacts des atomes sur l'écran devraient alors former une tache allongée suivant la verticale Oz .

Or l'expérience montre une suite de petites taches équidistantes alignées suivant Oz . La variation de B modifie la distance entre deux taches consécutives mais laisse le nombre de taches inchangé. Chaque tache correspond à une valeur fixée de M_ℓ . Pour les atomes d'argent, en particulier, on observe même deux taches symétriques. Le fait que le nombre de taches soit pair ne peut s'expliquer par la seule présence du moment cinétique orbital car celui-ci prend un nombre impair de valeurs $2j+1$.

Ceci confirme que les atomes d'argent possèdent un moment magnétique intrinsèque : le spin.

Le champ magnétique fortement inhomogène était obtenu par un entrefer en forme de biseau (figure 41). Les jets d'atomes d'argent sont formés par une source constituée d'un four chauffant une vapeur d'argent ; au niveau de l'orifice du four la paroi est refroidie pour retenir les atomes d'argent qui ne passent pas par l'orifice afin de supprimer toute perturbation du jet émis entre les pôles de l'électroaimant ; pour les mêmes raisons une pompe à vide est aménagée à l'entrée de l'enceinte ; à l'opposé, l'écran qui recueille les impacts d'atomes déviés est refroidi pour stabiliser ces impacts.

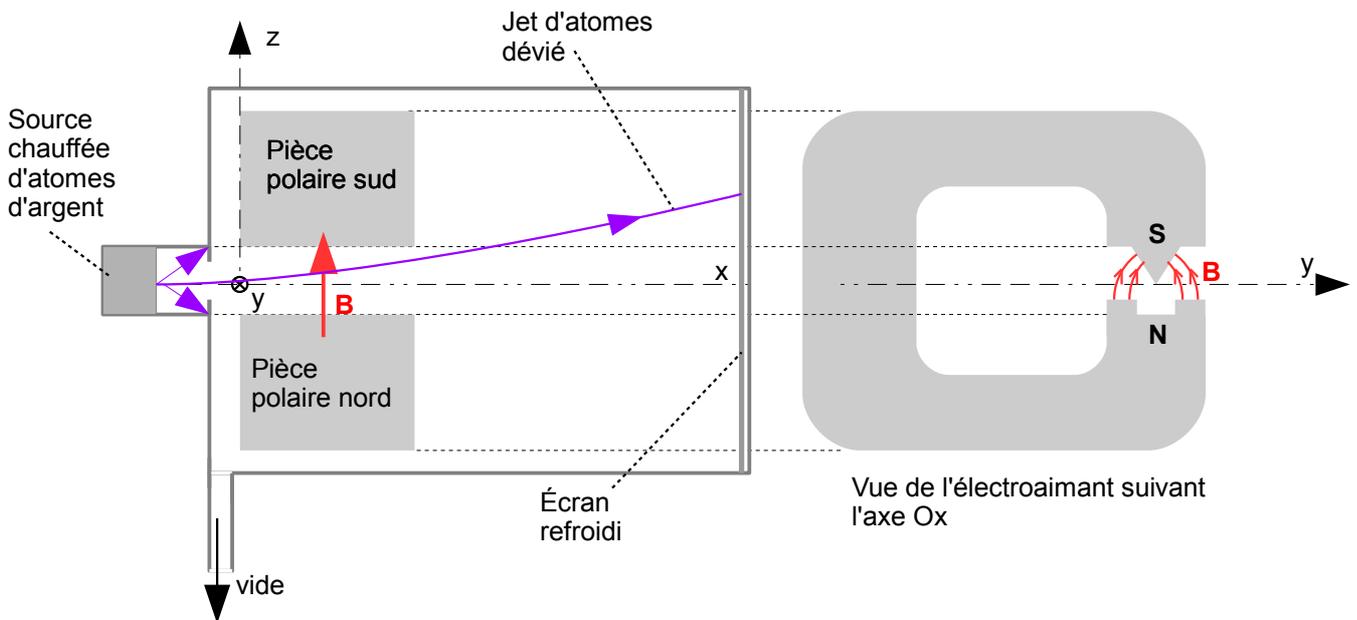


figure 41 : principe de l'expérience de Stern et Gerlach

Les opérateurs de spin, \mathbf{S}^2 et S_z , ont leurs équations aux valeurs propres de même forme qu'en (176), puisque \mathbf{S} est un moment cinétique selon la définition générale :

$$S_z |s\sigma\rangle = \sigma \hbar |s\sigma\rangle$$

$$\mathbf{S}^2 |s\sigma\rangle = s(s+1) \hbar^2 |s\sigma\rangle$$

Or on a vu que $s = 1/2$ et $\sigma = \pm 1/2$, donc :

$$S_z |\frac{1}{2}\sigma\rangle = \sigma \hbar |\frac{1}{2}\sigma\rangle$$

$$\mathbf{S}^2 |\frac{1}{2}\sigma\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \hbar^2 |\frac{1}{2}\sigma\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\frac{1}{2}\sigma\rangle$$

On définit :

$$S_+ = S_x + i S_y$$

$$S_- = S_x - i S_y$$

Soit λ_σ la valeur propre de S_+ , alors par (182) :

$$S_+ |\frac{1}{2}\sigma\rangle = \lambda_\sigma |\frac{1}{2}\sigma+1\rangle$$

$$S_- |\frac{1}{2}\sigma\rangle = \lambda_{\sigma-1} |\frac{1}{2}\sigma-1\rangle$$

d'où en appliquant une nouvelle fois S_+ :

$$S_+^2 |\frac{1}{2}\sigma\rangle = S_+(S_+ |\frac{1}{2}\sigma\rangle) = \lambda_\sigma S_+ |\frac{1}{2}\sigma+1\rangle = \lambda_\sigma \lambda_{\sigma+1} |\frac{1}{2}\sigma+2\rangle$$

Comme $\sigma = \pm 1/2$ on a : $\sigma+2 = \pm 1/2+2 = 3/2$ ou $5/2$, qui sont des valeurs exclues puisque d'après (176) on a : $\sigma+2 \leq s$ et $\sigma-2 \geq -s$. On a donc nécessairement :

$$S_+^2 = 0$$

De même en appliquant une nouvelle fois S_- :

$$S_-^2 | \frac{1}{2} \sigma \rangle = \lambda_{\sigma-1} \lambda_{\sigma-2} | \frac{1}{2} \sigma-2 \rangle$$

avec donc : $\sigma-2 = \pm 1/2-2 = -3/2$ ou $-5/2$, valeurs qui sont aussi exclues, donc :

$$S_-^2 = 0$$

Ces résultats sont compatibles avec ceux du chapitre 8 : $S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui donnent bien : $S_+^2 = S_-^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

On en déduit que :

$$S_x^2 = S_y^2$$

De cette égalité, il vient :

$$\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2 S_x^2 + S_z^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbf{1}$$

Comme $S_z = \sigma \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \mathbf{1}$ on a $S_z^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \mathbf{1}$ d'où $\frac{3}{4} \hbar^2 \mathbf{1} = 2 S_x^2 + \frac{1}{4} \hbar^2 \mathbf{1}$ qui donne $S_x^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \mathbf{1}$. Les trois composantes de l'opérateur spin vérifient donc :

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \mathbf{1} \quad (200)$$

D'autre part : $S_+^2 - S_-^2 = 2i(S_x S_y + S_y S_x) = 0$ d'où la relation d'anti-commutation :

$$S_x S_y + S_y S_x = 0 \quad (201a)$$

Et comme tout moment cinétique, \mathbf{S} vérifie aussi la relation générale de commutation (168) :

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i \hbar \mathbf{S}$$

qui se projette sur Oz en :

$$S_x S_y - S_y S_x = i \hbar S_z \quad (201b)$$

et relations analogues sur Ox, Oy. Compte tenu de (201a), (201b) conduit à :

$$S_x S_y = \frac{1}{2} i \hbar S_z \quad (201c)$$

Les relations (201) sont caractéristiques du spin.

Puisque les états du spin sont décrits par deux fonctions d'onde possibles : $|1/2, -1/2\rangle$ ou $|1/2, 1/2\rangle$, la fonction d'onde est représentée, dans l'espace du spin, par un vecteur à 2 composantes :

$$\psi(x, y, z, \pm 1/2) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

où : $\psi_+ = \langle xyz | \frac{1}{2} \rangle$ et $\psi_- = \langle xyz | -\frac{1}{2} \rangle$. $|\psi_+|^2 = \psi_+ \psi_+^*$ est la densité de probabilité de trouver l'électron aux coordonnées (x,y,z) avec un spin 1/2 ; $|\psi_-|^2 = \psi_- \psi_-^*$ est la densité de probabilité de trouver l'électron aux coordonnées (x,y,z) avec un spin -1/2.

Les opérateurs spin S_x, S_y, S_z etc. qui agissent sur la composante spin de la fonction d'onde $\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ sont

donc des matrices 2x2 :

$$S_x = \begin{pmatrix} a_{x11} & a_{x12} \\ a_{x21} & a_{x22} \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} a_{y11} & a_{y12} \\ a_{y21} & a_{y22} \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} a_{z11} & a_{z12} \\ a_{z21} & a_{z22} \end{pmatrix}$$

L'application des relations (201) permet de déterminer les éléments de matrice a_{xij} , a_{yij} , a_{zij} ($i,j = 1,2$) ce qui donne tout calcul fait :

$$S = \frac{1}{2} \hbar \sigma = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} \quad (202)$$

où $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$, les σ_j ($j = 1,2,3$) étant les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$S_x = \frac{1}{2} \hbar \sigma_x, \quad S_y = \frac{1}{2} \hbar \sigma_y, \quad S_z = \frac{1}{2} \hbar \sigma_z \quad (202\text{bis})$$

Remarque : S_z est diagonale, S_x et S_y ne le sont pas ; il s'ensuit que les spin suivant Ox et Oy ne peuvent pas être mesurés en même temps que le spin suivant Oz : seule leur moyenne statistique peut être connue en même temps que S_z .

Le moment magnétique généré par le spin est donné par (194), et compte tenu de (202) :

$$M_s = 2 \frac{e^- \hbar}{2 m_e c} \sigma_z \quad (203)$$

En présence d'un champ magnétique \mathbf{B} dans la direction Oz, l'énergie magnétique (en tant qu'opérateur) due au spin est d'après (197) :

$$E_B = - \frac{e^- \hbar}{2 m_e c} B \sigma_z \quad (204)$$

où $g = 1$ pour l'électron. En présence du champ magnétique, l'équation de Schrödinger stationnaire

$(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V - E)\psi = 0$ doit être remplacée par :

$$(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V - \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B \sigma_z - E)\psi = 0$$

qui se projette sur les 2 composantes de ψ selon :

$$(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V - (E + \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B))\psi_+ = 0, \quad (-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V - (E - \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B))\psi_- = 0$$

avec E énergie totale (valeur propre) et V énergie potentielle. On en conclut que la présence d'un électron de valence d'un atome dans un champ magnétique produit un doublet d'énergies :

$$E + \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B \quad \text{et} \quad E - \frac{e^- \hbar}{2m_e c} B$$

expliquant ainsi les doublets du spectre des atomes alcalins, tels que ceux d'argent neutre, dans

l'expérience de Stern et Gerlach.

On a vu les relations de commutation et d'anti-commutation des matrices de Pauli en (58) :

$$\begin{aligned} [\sigma_k, \sigma_j] &= \sigma_k \sigma_j - \sigma_j \sigma_k = 2i \varepsilon_{kjm} \sigma_m \\ \{\sigma_k, \sigma_j\} &= \sigma_k \sigma_j + \sigma_j \sigma_k = 2\delta_{kj} \mathbf{1} \\ \text{d'où : } \sigma_k \sigma_j &= \delta_{kj} \mathbf{1} + i \varepsilon_{kjm} \sigma_m \end{aligned} \quad (205)$$

Comme on l'a fait plus haut, on définit : $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on a :
 $\{\sigma_+, \sigma_-\} = \mathbf{1}$, $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, ce qui correspond bien à $S_+^2 = S_-^2 = 0$.

Remarque : La relation d'anti-commutation $\{\sigma_k, \sigma_j\} = 2\delta_{kj} \mathbf{1}$ montre que les matrices de Pauli sont les éléments générateurs de l'algèbre \mathbf{C}_3 de Pauli, ou algèbre d'espace de Clifford, comme indiqué à la relation (15) de [1].

Soient deux opérateurs vectoriels A et B sur E_3 isomorphe à \mathbf{R}^3 ; par définition ces opérateurs vérifient (92), où J_k , en tant qu'opérateur moment cinétique généralisé, peut être remplacé en particulier par σ_k , alors :
 En écrivant :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A &= A_x \sigma_x + A_y \sigma_y + A_z \sigma_z \\ \sigma \cdot B &= B_x \sigma_x + B_y \sigma_y + B_z \sigma_z \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \mathbf{1} + (A_x B_y \sigma_x \sigma_y + A_y B_x \sigma_y \sigma_x) \\ &+ (A_x B_z \sigma_x \sigma_z + A_z B_x \sigma_z \sigma_x) + (A_y B_z \sigma_y \sigma_z + A_z B_y \sigma_z \sigma_y) \\ &= (A \cdot B) \mathbf{1} + (A_x B_y - A_y B_x) \sigma_x \sigma_y + (A_x B_z - A_z B_x) \sigma_x \sigma_z + (A_y B_z - A_z B_y) \sigma_y \sigma_z \\ &= (A \cdot B) \mathbf{1} + (A_x B_y - A_y B_x) i \sigma_z + (A_x B_z - A_z B_x) i \sigma_y + (A_y B_z - A_z B_y) i \sigma_x \end{aligned}$$

donc :

$$(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = (A \cdot B) \mathbf{1} + i \sigma \cdot (A \times B) \quad (206)$$

Remarque : (206) est le **produit de Clifford** dans l'algèbre de Pauli défini à la relation (44) dans [1].

Comme indiqué en [1], une particule de masse m_e et de charge e , de quantité de mouvement \mathbf{p} , placée dans un champ électromagnétique de potentiel vecteur \mathbf{A} , possède un moment cinématique :

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

De (206) on obtient pour la quantité de mouvement \mathbf{p} , en tant qu'opérateur vectoriel :

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})(\sigma \cdot \mathbf{p}) = (\sigma \cdot \mathbf{p})^2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{1} = p^2$$

puisque $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0$, et pour le moment cinématique \mathbf{P} , en tant qu'opérateur vectoriel :

$$(\sigma \cdot \mathbf{P})(\sigma \cdot \mathbf{P}) = (\sigma \cdot \mathbf{P})^2 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{1} + i \sigma \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{P})$$

Dans cette expression $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ n'est pas nul, comme on va le voir :

On applique le principe de correspondance à \mathbf{p} et à \mathbf{P} :

$$\mathbf{p} = -i \hbar \nabla \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = -i \hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

Alors $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ se développe à l'aide des commutateurs :

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P} = [P_y, P_z] \mathbf{e}_x + [P_z, P_x] \mathbf{e}_y + [P_x, P_y] \mathbf{e}_z \quad (207)$$

Comme $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ (207) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times \mathbf{P} &= \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \times \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \\ &= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z\right] \mathbf{e}_x \\ &\quad + \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} A_z, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x\right] \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y\right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Or en mécanique quantique, le commutateur de 2 opérateurs est le correspondant du crochet de Poisson des 2 grandeurs auxquelles les opérateurs sont associés. En mécanique classique, le **crochet de Poisson** est défini par :

$$[u, v] = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

où p_k, q_k sont les variables conjuguées par les équations de Hamilton (H est le hamiltonien) :

$$\dot{q}_k = \frac{d q_k}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{et} \quad \dot{p}_k = \frac{d p_k}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

ce qui donne la loi dynamique de Poisson :

$$\frac{d u}{d t} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

et analogue pour v.

En présence d'un champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et d'un champ électrique de potentiel Φ , le hamiltonien est :

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} + e\Phi = \frac{1}{2m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + e\Phi$$

En prenant $x_k = q_k$, on a, puisque $\partial x_k / \partial p_k = 0$ et $\partial x_k / \partial x_k = 1$:

$$\frac{d x_k}{d t} = [x_k, H] = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = \frac{1}{m_e} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_k} = \frac{1}{m_e} \left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right) = \frac{P_k}{m_e}$$

donc :

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= \sum_k \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right) \frac{\partial}{\partial p_k} \left(p_j - \frac{e}{c} A_j\right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right) \frac{\partial}{\partial q_k} \left(p_j - \frac{e}{c} A_j\right) \right] \\ &= \sum_k \left[\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial q_k}\right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial p_k}\right) - \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial p_k}\right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial q_k}\right) \right] \end{aligned}$$

or : $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0$ et $\frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \delta_{jk}$, $\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$ d'où :

$$[P_i, P_j] = \sum_k \left[\frac{e}{c} (\delta_{ik} \frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \delta_{jk} \frac{\partial A_i}{\partial q_k}) + \frac{e^2}{c^2} (\frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_i}{\partial p_k} \frac{\partial A_j}{\partial q_k}) \right]$$

Comme $\sum_k (\frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_i}{\partial p_k} \frac{\partial A_j}{\partial q_k}) = 0$ il reste :

$$[P_i, P_j] = \frac{e}{c} (\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j}) = -\frac{e}{c} \epsilon_{ijk} B_k$$

qui sont, en mécanique classique, les coordonnées de :

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P} = -\frac{e}{c} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{e}{c} \mathbf{B} \quad (208)$$

En mécanique quantique, le principe de correspondance associe à $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ l'opérateur encore noté $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ avec la définition (207) :

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P} = i \hbar \frac{e}{c} \mathbf{B} \quad (209)$$

Plus généralement, le principe de correspondance associe à tout couple de grandeurs conjuguées de la mécanique classique, u et v, leurs opérateurs par :

$$[u, v] \text{ (crochet de Poisson)} \rightarrow \frac{1}{i \hbar} [u, v] \text{ (commutateur)}$$

En particulier, on a :

$$[u, H] \text{ (mécanique classique)} \rightarrow \frac{1}{i \hbar} [u, H] \text{ (mécanique quantique)}$$

en faisant attention que les $[,]$ n'ont pas la même définition en mécanique classique et en mécanique quantique.

De (209) on obtient finalement :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 = \mathbf{P}^2 + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{P}) = \mathbf{P}^2 - \hbar \frac{e}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (210)$$

Remarque : On peut retrouver (210) directement à partir de (207), et en faisant attention à la remarque suivante concernant le commutateur des opérateurs p_j et q_j avec un opérateur vectoriel ou scalaire u :
En effet, lorsqu'on écrit $[p_j, u]$ il faut toujours l'exprimer par son application à une fonction d'onde quelconque ψ au lieu de recourir à son développement formel :

$$[p_j, u] \psi = -i \hbar \frac{\partial}{\partial q_j} (u \psi) + i \hbar u \frac{\partial \psi}{\partial q_j}$$

or : $\frac{\partial}{\partial q_j} (u \psi) = \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} + u \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \psi$ que l'on remplace dans l'expression ci-dessus :

$$[p_j, u] \psi = -i \hbar \frac{\partial u}{\partial q_j} \psi - i \hbar u \frac{\partial \psi}{\partial q_j} + i \hbar u \frac{\partial \psi}{\partial q_j} = -i \hbar \frac{\partial u}{\partial q_j} \psi \text{ pour toute } \psi, \text{ donc :}$$

$$[p_j, u] = -i\hbar \frac{\partial u}{\partial q_j} \quad (211)$$

En utilisant (211) dans (207) on obtient les coordonnées de $\mathbf{P} \times \mathbf{P} = (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})$:

$$[p_j - \frac{e}{c} A_j, p_k - \frac{e}{c} A_k] = [p_j, p_k] - [p_j, \frac{e}{c} A_k] - \frac{e}{c} [A_j, p_k] + \frac{e^2}{c^2} [A_j, A_k]$$

or : $[p_j, p_k] = -\hbar^2 [\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_j}] = 0$, $[A_j, A_k] = A_j A_k - A_k A_j = 0$, et d'après (211) :

$[p_j, A_k] = -i\hbar \frac{\partial A_k}{\partial q_j}$. Quant à $[A_j, p_k]$ en suivant la recommandation plus haut, son explicitation avec

ψ donne :

$$\begin{aligned} [A_j, p_k] \psi &= A_j (p_k \psi) - p_k (A_j \psi) = A_j (p_k \psi) - (p_k A_j) \psi - A_j p_k \psi \\ &= -(p_k A_j) \psi = i\hbar \frac{\partial A_j}{\partial q_k} \psi \end{aligned}$$

donc l'opérateur $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ a pour coordonnées $[P_i, P_j] = i\hbar \frac{e}{c} (\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j})$ soit :

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P} = i\hbar \frac{e}{c} \nabla \times \mathbf{A} = i\hbar \frac{e}{c} \mathbf{B}$$

qui est (209), d'où (210).

Remarque : Qu'en est-il de $[q_i, u]$, où q_i est la variable conjuguée de p_i ?

Observons déjà que dans l'espace des moments, le crochet de Poisson de p_j et de u est :

$$[p_j, u] = \frac{\partial p_j}{\partial q_j} \frac{\partial u}{\partial p_j} - \frac{\partial p_j}{\partial p_j} \frac{\partial u}{\partial q_j} = -\frac{\partial u}{\partial q_j} \text{ puisque } \partial p_j / \partial p_j = 1 \text{ et } \partial p_j / \partial q_j = 0$$

Le principe de correspondance :

$$[p_j, u] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [p_j, u] = -\frac{\partial u}{\partial q_j}$$

associe donc à p_j l'opérateur : $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}$.

De même pour le crochet de Poisson : $[q_j, u] = \frac{\partial q_j}{\partial q_j} \frac{\partial u}{\partial p_j} - \frac{\partial q_j}{\partial p_j} \frac{\partial u}{\partial q_j} = \frac{\partial u}{\partial p_j}$

et par le principe de correspondance : $[q_j, u] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [q_j, u] = \frac{\partial u}{\partial p_j}$ ce qui donne

$$[q_j, u] = i\hbar \frac{\partial u}{\partial p_j} \quad (212)$$

Et lorsque dans $[p_j, u]$, u est remplacé par q_k , (211) donne :

$$[p_j, q_k] = -i\hbar \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = -i\hbar \delta_{kj}$$

ainsi les variables conjuguées (leurs opérateurs) de commutent pas :

$$[p_j, q_j] = -i\hbar \neq 0 \quad (213)$$

(213) signifie que le moment dynamique et la position ne peuvent pas être déterminés simultanément, et l'on montre que cela conduit aux **relations d'incertitude de Heisenberg** :

$$\Delta p_j \Delta q_j \geq \frac{\hbar}{2}$$

11 – Addition des moments cinétiques

Soit une particule possédant deux moments cinétiques \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , de moment cinétique total :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

Soient J_z, J_{1z}, J_{2z} leurs composantes suivant Oz, de valeurs propres respectives m, m_1, m_2 (où \hbar est sous-entendu). Soient $\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2$ de valeurs propres faisant intervenir respectivement j, j_1, j_2 (sous-entendu, on a $j(j+1)\hbar^2$, etc.). On a les équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1^2 |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ J_{1z} |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= m_1 \hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ \mathbf{J}_2^2 |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2 |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ J_{2z} |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= m_2 \hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

où les fonctions d'onde $|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ sont les vecteurs propres des opérateurs ci-dessus, différenciés par n qui représente l'ensemble des vecteurs propres des autres opérateurs qui commutent, par exemple n peut représenter un vecteur propre du hamiltonien H (relation (184)) :

$$H |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \varepsilon_n |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Pour un état n fixé, les fonctions propres sont produits tensoriels des états respectivement attachés à (\mathbf{J}_1^2, J_{1z}) et (\mathbf{J}_2^2, J_{2z}) :

$$|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |n j_1 m_1\rangle |n j_2 m_2\rangle$$

Soient \mathbf{H}_{nj_1} et \mathbf{H}_{nj_2} les sous-espaces de Hilbert engendrés respectivement par les $(2j_1+1)$ vecteurs propres $|nj_1 m_1\rangle$ et les $(2j_2+1)$ vecteurs propres $|nj_2 m_2\rangle$ (voir chapitre 7). Alors le sous-espace engendré par les vecteurs $|nj_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ est de dimension $(2j_1+1)(2j_2+1)$ et a pour base ces vecteurs (avec m_1 et m_2 qui prennent les valeurs $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ et $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$) :

$$\mathbf{H}_{nj} = \bigoplus_{m_1, m_2} (\mathbf{H}_{nj_1} \otimes \mathbf{H}_{nj_2})$$

On appelle **base découplée** la base formée par les $(2j_1+1)(2j_2+1)$ vecteurs $|nj_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ (où m_1 et m_2 prennent leurs valeurs permises).

Par contre, la **base couplée** est formée à partir des vecteurs propres de $(\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_z)$ au lieu des

vecteurs propres (\mathbf{J}_1^2, J_{1z}) et (\mathbf{J}_2^2, J_{2z}) ; on note la base couplée $|n(j_1 j_2) j m\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle \\ \mathbf{J}_2^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle \\ \mathbf{J}^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |n(j_1 j_2) j m\rangle \\ J_z |n(j_1 j_2) j m\rangle &= m\hbar |n(j_1 j_2) j m\rangle \end{aligned}$$

L'utilisation de la base découplée et de la base couplée permet de déterminer les états associés au moment cinétique total \mathbf{J}, J_z à partir de ceux associés aux moments $\mathbf{J}_1, J_{1z}, \mathbf{J}_2, J_{2z}$.

En effet, on va établir des relations de passage entre ces deux bases, moyennant les coefficients de Clebsch-Gordan, ce qui va conduire à 2 règles de sélection sur les valeurs propres m et j des opérateurs J_z et \mathbf{J}^2 . Ainsi :

– Projétons les états couplés $|n(j_1 j_2) j m\rangle$ dans la base découplée $|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$:

$$|n(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad (214a)$$

– Projétons les états découplés $|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ dans la base couplée $|n(j_1 j_2) j m\rangle$:

$$|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{j, m} \langle n(j_1 j_2) j m | n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle |n(j_1 j_2) j m\rangle \quad (214b)$$

Les coordonnées de ces deux projections sont appelées **coefficients de Clebsch-Gordan** :

$$\begin{aligned} &\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle \\ &\langle n(j_1 j_2) j m | n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \end{aligned} \quad (214c)$$

■ Théorème : Première règle de sélection

La valeur propre m de $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ est égale à la somme des valeurs propres m_1, m_2 de J_{1z} et J_{2z} :

$$m = m_1 + m_2 \quad (215)$$

Preuve de (215) : - On applique J_z à $|n(j_1 j_2) j m\rangle$ développé selon (214a) :

$$\begin{aligned} J_z |n(j_1 j_2) j m\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle J_z |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ &= \sum_m m\hbar |n(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_m \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle m\hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

Comme : $J_z |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z}) |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ il vient :

$$\begin{aligned} J_z |n(j_1 j_2) j m\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle (m_1 + m_2)\hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ &= \sum_m \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle m\hbar |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$m = m_1 + m_2$$

CQFD de (215).

Remarque : dégénérescence :

Dans (215) les m_1, m_2 prennent toutes leurs valeurs permises : $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ et $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, donc à une valeur de m correspondent plusieurs fonctions propres $|n_{j_1 m_1 j_2 m_2}\rangle$: on dit qu'il y a dégénérescence pour la valeur propre m .

Pour chaque m donné, le nombre de vecteurs propres correspondants s'appelle **degré de dégénérescence** $d(m)$.

■ **Théorème : Deuxième règle de sélection, ou théorème fondamental d'addition :**

Pour j_1 et j_2 fixées (m_1 et m_2 variables), les vecteurs propres définissent un espace vectoriel de Hilbert de dimension $(2j_1+1)(2j_2+1)$, dans lequel :

a) Les seules valeurs possibles de j (ou **règle du triangle**) sont :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

(216)

b) Pour chaque valeur de j correspond une seule série de $(2j+1)$ vecteurs propres $|n(j_1 j_2) j m\rangle$ de $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$

La démonstration de (216) permet, au passage, de déterminer le degré de dégénérescence $d(m)$ de la valeur propre m de \mathbf{J}_z .

Preuve de (216) :

Pour j fixé il existe $n(j)$ séries linéairement indépendantes de $(2j+1)$ vecteurs propres de \mathbf{J} , générateurs de l'espace \mathbf{H}_{nj} : $\dim \mathbf{H}_{nj} = 2j+1$.

Les vecteurs d'un même espace \mathbf{H}_{nj} se transforment l'un de l'autre par applications successives de \mathbf{J}_+ ou \mathbf{J}_- (théorème (176)). Ces $(2j+1)$ vecteurs de \mathbf{H}_{nj} correspondent aux $(2j+1)$ valeurs permises de m :

$$m = -j, -j+1, \dots, j$$

Soit c_m le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à m . Puisque $-j \leq m \leq j$, le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à m est, selon les valeurs de m :

$$|m| = j \rightarrow c_m = 1$$

$$|m| = j-1 \rightarrow c_m = 1$$

$$|m| = j-2 \rightarrow c_m = 2$$

.....

$$|m| = j-2q \rightarrow c_m = q+1$$

$$|m| = j-(2q+1) \rightarrow c_m = q+1$$

$$|m| = j-(2q+2) \rightarrow c_m = q+2$$

.....

et ceci tant que $-j \leq m \leq j$, avec j valeur maximale de m : $j = \max(m)$; et comme $m = m_1 + m_2$, on a :

$$\max(m_1) = j_1, \max(m_2) = j_2$$

car $|m_1| \leq j_1$ et $|m_2| \leq j_2$. Donc :

$$\max(j) = j_1 + j_2$$

Pour chaque valeur permise de j , on associe \mathbf{H}_{nj} , avec $\dim \mathbf{H}_{nj} = 2j+1$. Pour l'ensemble des j dans $[\min(j), \max(j)]$:

$$\bigoplus_{\min(j)}^{\max(j)} \mathbf{H}_{nj} = \mathbf{H}_{nj1} \otimes \mathbf{H}_{nj2}$$

donc :

$$\dim(\mathbf{H}_{nj1} \otimes \mathbf{H}_{nj2}) = (2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{\min(j)}^{\max(j)} (2j+1) = 2 \sum_{\min(j)}^{\max(j)} j + \sum_{\min(j)}^{\max(j)} 1$$

or :

$$\sum_{\min(j)}^{\max(j)} j = \min(j) + (\min(j)+1) + \dots + (\min(j)+N-1)$$

←-----N termes-----→

avec $\max(j) = \min(j) + N-1$, soit : $N = \max(j) - \min(j) + 1$; donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\min(j)}^{\max(j)} j &= N \min(j) + (1+2+\dots+N-1) = N \min(j) + \frac{1}{2} N(N-1) \\ &= \frac{1}{2} (\max(j)(\max(j)+1) - \min(j)(\min(j)-1)) \end{aligned}$$

et : $\sum_{\min(j)}^{\max(j)} 1 = \max(j) - (\min(j)-1)$ avec $\max(j) = j_1 + j_2$

D'où : $\dim(\mathbf{H}_{nj_1} \otimes \mathbf{H}_{nj_2}) = (2j_1+1)(2j_2+1) = (j_1+j_2)(j_1+j_2+2) - \min(j)^2 + 1$ et l'on tire de cette égalité : $\min(j)^2 = (j_1-j_2)^2$. Comme $j \geq 0$ on a : $\min(j) = |j_1-j_2|$, par conséquent la sélection des valeurs permises de j s'écrit : $|j_1-j_2| \leq j \leq j_1+j_2$.

Pour chaque j il y a $d'(j)$ vecteurs propres ; si $d'(j) > 1$ il y a dégénérescence. Lorsque m parcourt la gamme $-j \leq m \leq j$, c'est-à-dire $|m| \leq j$, ou inversement pour m fixé, lorsque j parcourt les valeurs permises $j \geq |m|$, le nombre de valeurs possibles de vecteurs propres associés à m est égal au nombre total de vecteurs propres associés à $j \geq |m|$:

$$c_m = \sum_{j \geq |m|} d'(j)$$

or d'après le tableau des valeurs de c_m vu plus haut, on a : $c_m = d(m) \geq 1$, soit :

$$d(m) = \sum_{j \geq |m|} d'(j)$$

qui exprime le degré de dégénérescence de m à partir de ceux de $j \geq |m|$. La relation précédente donne en particulier :

- pour $m = j$: $d(j) = \sum_{j' \geq |j|} d'(j') = d'(j) + d'(j+1) + \dots$
- pour $m = j+1$: $d(j+1) = \sum_{j' \geq |j+1|} d'(j') = d'(j+1) + \dots$

d'où : $d(j) - d(j+1) = d'(j) + d'(j+1) + \dots - (d'(j+1) + \dots)$ soit :

$$d'(j) = d(j) - d(j+1) \quad (217)$$

Donc pour obtenir le degré de dégénérescence $d'(j)$ de la valeur propre de J^2 exprimée avec j , il suffit de connaître le degré de dégénérescence $d(m)$ pour chaque valeur propre permise m .

Or d'après la première règle de sélection (215), $d(m)$ est le nombre de couples (m_1, m_2) vérifiant :

$$m = m_1 + m_2$$

Pour dénombrer $d(m)$ on utilise un diagramme d'axes (m_1, m_2) où l'on fixe j_1 et j_2 . Comme $m = m_1 + m_2$ chaque couple (m_1, m_2) est sur une diagonale dont le nombre de points est égal à $d(m)$, c'est-à-dire le degré de dégénérescence de m . On donne l'exemple pour $j_1 = 5/2$, $j_2 = 2$ à la figure 42.

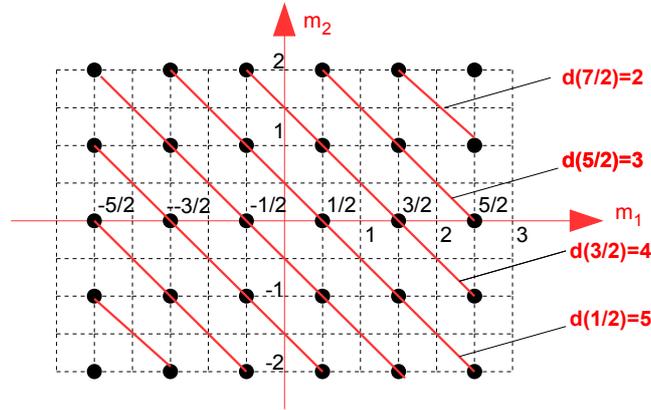


figure 42 : dénombrement des degrés de dégénérescence de $m = m_1 + m_2$ pour $j_1 = 5/2$ et $j_2 = 2$

Avec par exemple $j_1 > j_2$ on a :

$$\begin{cases} d(m)=0 & \text{si } |m| > j_1 + j_2 \\ d(m)=j_1 + j_2 + 1 - |m| & \text{si } j_1 + j_2 \geq |m| \geq |j_1 - j_2| \\ d(m)=2j_2 + 1 & \text{si } |j_1 - j_2| \geq |m| \geq 0 \end{cases}$$

en remplaçant $d(m)$ avec ces valeurs dans (217), on obtient toujours :

$$d'(j)=1 \quad \text{pour } |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

ce qui montre que le degré de dégénérescence de \mathbf{J}^2 est égal à 1 quelles que soient les valeurs permises de j : à chacune des valeurs permises de j correspond une série unique de $(2j+1)$ vecteurs propres du carré du moment cinétique total \mathbf{J} , $|n(j_1 j_2) j m\rangle$.

CQFD de (216).

■ Calcul des coefficients de Clebsch-Gordan :

Les coefficients de développement sur la base couplée ou sur la base découplée (214c) existent si (215) et (216) sont vérifiés. Les décompositions (214a) définissent $|n(j_1 j_2) j m\rangle$ à une phase près :

Comme $|n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |n j_1 m_1\rangle |n j_2 m_2\rangle$, (214a) devient :

$$|n(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m\rangle |n j_1 m_1\rangle |n j_2 m_2\rangle$$

On fixe la phase en imposant que pour $m = \max(m) = j$, $m_1 = \max(m_1) = j_1$, le coefficient de Clebsch-Gordan est un réel positif ; sous ces conditions : $m_2 = m - m_1 = j - j_1$, donc :

$$\langle n, j_1, j_1, j_2, j - j_1 | n(j_1 j_2) j j\rangle \geq 0 \quad (218)$$

Si $j = \max(j) = j_1 + j_2$ et $m = \max(m) = j$ alors :

$$\begin{aligned} |n(j_1 j_2) j m\rangle &= |n(j_1 j_2) j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle |n j_1 m_1\rangle |n j_2 m_2\rangle \end{aligned}$$

or ici : $m = j = j_1 + j_2 = m_1 + m_2$ donc : $m_1 = j_1 = \max(m_1)$ et $m_2 = j_2 = \max(m_2)$, d'où :

$$|n(j_1 j_2) j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = \langle n j_1 j_1 j_2 j_2 | n(j_1 j_2) j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle |n j_1 j_1\rangle |n j_2 j_2\rangle$$

qui est la décomposition maximale de $|n(j_1 j_2) j m\rangle$, de poids 1 :

$$\langle n j_1 j_1 j_2 j_2 | n(j_1 j_2) j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = 1 \quad (219)$$

La condition (218) entraîne aussi que les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels pour toutes valeurs permises de j_1, m_1, j_2, m_2, j, m :

$$\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle = \langle n(j_1 j_2) j m | n j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \quad (220)$$

Les conditions (218), (219) et (220) permettent alors de calculer par récurrence les coefficients de Clebsch-Gordan :

En effet, appliquant (178) à $|n(j_1 j_2) j m\rangle$ on a :

$$J_+ |n(j_1 j_2) j m\rangle = \lambda_m |n(j_1 j_2) j m+1\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle J_+ |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Comme $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ il vient :

$$\begin{aligned} J_+ |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= J_{1+} |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle + J_{2+} |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ &= \lambda_{m1} |n j_1 m_1 + 1 j_2 m_2\rangle + \lambda_{m2} |n j_1 m_1 j_2 m_2 + 1\rangle \end{aligned}$$

où λ_{m1} et λ_{m2} vérifient (179) donc sont connus :

$$\begin{aligned} \lambda_{m1} &= \hbar \sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} \\ \lambda_{m2} &= \hbar \sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)} \end{aligned}$$

Faisons le produit scalaire de $J_+ |n(j_1 j_2) j m\rangle$ et $\langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 |$:

$$\begin{aligned} &\langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | J_+ |n(j_1 j_2) j m\rangle = \\ &= \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | J_+ |n j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ &= \lambda_m \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n(j_1 j_2) j m+1\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle \\ &\quad \times [\lambda_{m1} \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n j_1 m_1 + 1 j_2 m_2 \rangle + \lambda_{m2} \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n j_1 m_1 j_2 m_2 + 1 \rangle] \end{aligned}$$

Les vecteurs étant orthogonaux, les quantité entre [...] sont égales à :

$$\lambda_{m1} \delta_{m'_1 m_1 + 1} \delta_{m'_2 m_2} + \lambda_{m2} \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2 + 1}$$

donc en retenant uniquement les termes m_1, m_2 qui vérifient $m'_1 = m_1 + 1$ et $m'_2 = m_2$, ou bien $m'_1 = m_1$ et $m'_2 = m_2 + 1$, la somme précédente se réduit à :

$$\begin{aligned} &\lambda_m \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n(j_1 j_2) j m+1 \rangle = \\ &= \lambda_{m'_1 - 1} \langle n j_1 m'_1 - 1 j_2 m'_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle + \lambda_{m'_2 - 1} \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 - 1 | n(j_1 j_2) j m \rangle \end{aligned}$$

De même, en appliquant J_- à $|n(j_1 j_2) j m\rangle$, compte tenu de (180) :

$$J_- |n(j_1 j_2) j m\rangle = \lambda'_m |n(j_1 j_2) j m-1\rangle$$

et avec (181) : $\lambda'_m = \lambda_{m-1}$ et $J_- = J_{1-} + J_{2-}$, le produit scalaire par $\langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 |$ donne :

$$\begin{aligned} &\lambda'_m \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n(j_1 j_2) j m-1 \rangle = \\ &= \lambda_{m'_1 + 1} \langle n j_1 m'_1 + 1 j_2 m'_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle + \lambda_{m'_2 + 1} \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 + 1 | n(j_1 j_2) j m \rangle \end{aligned}$$

Ces deux relations entre λ_m et λ_{m_1} , λ_{m_2} et entre λ'_m et λ'_{m_1} , λ'_{m_2} se rassemblent, en explicitant les λ_m et λ'_m par (179) et (181), en la **relation de récurrence sur les coefficients de Clebsch-Gordan** :

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \mp 1 \rangle = \\ & \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} \langle n j_1 m_1 \pm 1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle + \\ & \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 \pm 1 | n(j_1 j_2) j m \rangle \end{aligned} \right| \quad (221)$$

■ **Symbole « 3jm » de Wigner :**

Soient les coefficients de Clebsch-Gordan : $\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle$.

Les composantes $\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 |$ sont celles d'un vecteur covariant ;

les composantes $|n(j_1 j_2) j m \rangle$ sont celles d'un vecteur contravariant ; les unes et les autres n'ont pas la même symétrie. En effet, la permutation des termes donne

$$\begin{aligned} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n(j_1 j_2) j m \rangle &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle n j_2 m_2 j_1 m_1 | n(j_1 j_2) j m \rangle \\ &= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle n j_1 m_1 j - m | n j_2 - m_2 \rangle \\ &= (-1)^{j_1 - j + m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \langle n j m j_2 - m_2 | n j_1 m_1 \rangle \\ &= (-1)^{j_2 - j - m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle n j_1 - m_1 j m | n j_2 m_2 \rangle \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle n j_1 - m_1 j_2 - m_2 | n j - m \rangle \end{aligned}$$

où $(j_1 j_2)$ est sous-entendu dans $|n j m \rangle$: $|n(j_1 j_2) j m \rangle$.

j_1 , j_2 , j n'ont pas de rôle symétrique dans le développement de $|n(j_1 j_2) j m \rangle$, mais leurs vecteurs moments cinétiques l'ont par la relation : $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 = 0$, à condition de poser $\mathbf{J}_3 = -\mathbf{J}$. On introduit ainsi les coefficients de Wigner « 3jm », reliés aux coefficients de Clebsch-Gordan, pour conserver le rôle symétrique de \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 , \mathbf{J}_3 de l'addition vectorielle :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + m}}{\sqrt{2j+1}} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle \quad (222)$$

en posant $m_3 = -m$ et $j_3 = j$ on a les règles de symétrie suivantes :

- $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ (qui est (215))
- $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ est invariant par permutation circulaire des colonnes :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix}$$

- il est multiplié par $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$ quand m_1 , m_2 , m_3 changent de signe
- la règle du triangle (216) se traduit par :

$$\left. \begin{aligned} |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \\ |j_1 - j_3| \leq j_2 \leq j_1 + j_3 \\ |j_2 - j_3| \leq j_1 \leq j_2 + j_3 \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

• et les relations d'orthogonalité :

► Si $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ et $-j \leq m \leq j$:

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j' m' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'}$$

► Si $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ et $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle \langle n j_1 m'_1 j_2 m'_2 | n j m \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

(223bis)

► ainsi que :

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3+1} \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3}$$

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} (2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

On démontre, par les relations de récurrence (221), que les « 3jm » sont calculés par la **formule de Racah**, ce qui donne donc une expression analytique des coefficients de Clebsch-Gordan intervenant dans (222) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{\Delta(j_1 j_2 j_3)} \times \sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!} \\ &\times \sum_k (-1)^k \left[k!(j_3-j_2+k+m_1)!(j_3-j_1+k-m_2)!(j_1+j_2-j_3-k)!(j_1-k-m_1)!(j_2-k+m_2)! \right]^{-1} \end{aligned} \quad (224)$$

avec : $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ et :

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_2+j_3-j_1)!(j_3+j_1-j_2)!}{(1+j_1+j_2+j_3)!}$$

et \sum_k est la sommation sur toutes les valeurs entières de k telles que les factorielles soient positives.

Cette somme contient N+1 termes où :

$$N = \min \{ j_1 \pm m_1, j_2 \pm m_2, j_3 \pm m_3, j_1 + j_2 - j_3, j_2 + j_3 - j_1, j_3 + j_1 - j_2 \}$$

■ Quelques valeurs du symbole « 3jm » :

a) Si : $j = \max(j) = j_1 + j_2$ et $m = \max(m) = j = j_1 + j_2$, alors :

$$\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle = \langle n j_1 j_1 j_2 j_2 | n j_1 + j_2 j_1 + j_2 \rangle = 1$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 j_2 & -(j_1 + j_2) \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{2j_1}}{\sqrt{2(j_1 + j_2) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2(j_1 + j_2) + 1}}$$

b) Si : $j_2 = 0$, $m_2 = 0$, alors : $\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle = \langle n j_1 m_1 0 0 | n j m_1 \rangle = 1$ d'où :

$$\begin{pmatrix} j_1 0 & j_3 \\ m_1 0 & -m_1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 + m_1}}{\sqrt{2j_3 + 1}}$$

c) Si $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, alors :

– si $j_1 + j_2 + j_3$ est impair : $\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ 0 0 0 \end{pmatrix} = 0$

– si $j_1 + j_2 + j_3$ est pair, soit $j_1 + j_2 + j_3 = 2p$, alors :

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ 0 0 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \sqrt{\Delta(j_1 j_2 j_3)} \frac{p!}{(p-j_1)!(p-j_2)!(p-j_3)!}$$

où j_1, j_2, j_3 satisfont (223).

d) Si $m_1 = \pm j_1$ ou $m_2 = \pm j_2$ ou $m = \pm j$, alors :

$$\begin{aligned} \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle &= \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j j \rangle = \langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j - j \rangle \\ &= (-1)^{j_1 - m_1} \left[\frac{(2j+1)!(j_1 + j_2 - j)!}{(j_1 + j_2 + j + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!} \right]^{1/2} \left[\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

e) Si : $j = j_1 + j_2$ alors :

$$\langle n j_1 m_1 j_2 m_2 | n j m \rangle = \left[\frac{(2j_1)!(2j_2)!}{(2(j_1 + j_2))!} \right]^{1/2} \left[\frac{(j_1 + j_2 + m)!(j_1 + j_2 - m)!}{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!} \right]^{1/2}$$

f) La table ci-après concerne $j_2 = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ avec $0 \leq m_2 \leq j_2$, où l'on pose $j_3 = j = j_1 + x$, avec : $0 \leq x \leq j_2$, $0 \leq m_2 \leq j_2$, et $m_3 = -(m_1 + m_2) = -m$, les autres symboles « $3jm$ » de Wigner se déduisant par les relations de symétrie vues plus haut.

La table donne $W(m_2, x, j_2)$ qui intervient dans :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_1 j_2 & j_1 + x \\ m_1 m_2 & -(m_1 + m_2) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1 + m_1} \left[\frac{(2j_1 + x - j_2)!(j_1 + m_1 + m_2 + x)!}{(2j_1 + x + j_2 + 1)!(j_1 + m_1)!} \right]^{1/2} W(m_2, x, j_2) \end{aligned}$$

j_2	m_2	x	$W(m_2, x, j_2)$
0	0	0	$W(0,0,0)=1$
1/2	1/2	1/2	$W(1/2,1/2,1/2)=1$
1	0	0	$W(0,0,1)=-2m_1$
		1	$W(0,1,1)=-\sqrt{2(j_1-m_1+1)}$
	1	0	$W(1,0,1)=-\sqrt{2(j_1-m_1)}$
		1	$W(1,1,1)=1$
3/2	1/2	1/2	$W(1/2,1/2,3/2)=j_1-3m_1$
		3/2	$W(1/2,3/2,3/2)=-\sqrt{3(j_1-m_1+1)}$
	3/2	1/2	$W(3/2,1/2,3/2)=-\sqrt{3(j_1-m_1)}$
		3/2	$W(3/2,3/2,3/2)=1$
2	0	0	$W(0,0,2)=2(3m_1^2-j_1(j_1+1))$
		1	$W(0,1,2)=2m_1\sqrt{6(j_1-m_1+1)}$
		2	$W(0,2,2)=\sqrt{6(j_1-m_1+2)(j_1-m_1+1)}$
	1	0	$W(1,0,2)=(2m_1+1)\sqrt{6(j_1-m_1)}$
		1	$W(1,1,2)=2(j_1-2m_1)$
		2	$W(1,2,2)=-2\sqrt{j_1-m_1+1}$
	2	0	$W(2,0,2)=\sqrt{6(j_1-m_1)(j_1-m_1-1)}$
		1	$W(2,1,2)=-2\sqrt{j_1-m_1}$
		2	$W(2,2,2)=1$

12 – Exemple d'addition : addition de deux spins 1/2

Soit un système de Z particules de spin 1/2 (les considérations qui suivent ne sont plus valides pour les systèmes de spins entiers). L'espace de ses états est le produit tensoriel des espaces des états de chaque particule, et pour les états de spin il est de dimension 2^Z . Le spin de chaque particule individuelle (i) correspond à un système de matrices de Pauli $\sigma_{(i)}$ telles que $\sigma_{(i)}^2 = 3 \mathbf{1}$ (8), et le spin total du système est :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \sum_{i=1}^Z \sigma_{(i)}$$

Soient un système de deux nucléons ($Z = 2$), protons ou neutrons, en interaction qui dépend de leurs spins. On se place dans le référentiel de leurs propriétés relatives, dans lequel les considérations précédentes s'appliquent : leur position relative est $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ et leur quantité de mouvement relative est :

8 C'est le cas pour le spin d'un électron où le système de matrices de Pauli est $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, puisqu'on a bien : $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 3 \times \mathbf{1}$ (que l'on note simplement 3, omettant la matrice identité $\mathbf{1}$ lorsque cela n'entraîne pas d'ambiguïté) ; cependant, dans le cas général σ s'exprime en fonction des matrices de Pauli différemment, et il lui est seulement imposé que $\sigma^2 = 3$.

$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$. Le spin total est alors :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)})$$

Le produit de $\boldsymbol{\sigma}_{(1)}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{(2)}$ est directement relié à \mathbf{S}^2 . En effet :

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)})^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\boldsymbol{\sigma}_{(1)}^2 + \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \boldsymbol{\sigma}_{(1)} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)}^2) = \frac{\hbar^2}{4} (6 + 2 \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)})$$

puisque $\boldsymbol{\sigma}_{(1)}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{(2)}^2 = 3$. D'où :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} = 2 \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} - 3 \quad (225)$$

Le moment cinétique orbital du système des deux nucléons est : $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, le moment cinétique total est alors :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

Les deux nucléons interagissent, formant ainsi un système couplé, par un champ de potentiel $V(r)$, r étant le module de la position relative définie plus haut. L'hamiltonien, dans le système relatif, est :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{M} + V(r)$$

où M est la masse totale des nucléons. Les interactions qui restent invariantes par rotation (d'espace et/ou de spin) sont de quatre formes, ou sont leur combinaison :

a) $V(r) = V_1(r)$: indépendante du spin.

b) $V(r) = V_2(r) (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)})$. D'après (225) ce potentiel est directement relié au spin total :

$$V(r) = V_2(r) \left(2 \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} - 3 \right)$$

(NB : $V(r)$ a donc la forme d'une matrice, elle n'est pas un scalaire, puisque \mathbf{S}^2 intervient et que 3 est en fait facteur de la matrice identité $\mathbf{1}$).

Cette forme montre que l'on a $[V, \mathbf{L}] = 0$ et $[V, \mathbf{S}] = 0$. La commutation $[V, \mathbf{L}] = 0$ entraîne que $V(r)$ est invariante par rotation de l'espace seul (relations (80) et (91)) et la commutation $[V, \mathbf{S}] = 0$ entraîne que $V(r)$ est invariante par rotation des spins seuls.

Comme on a les commutations avec l'hamiltonien : $[H, \mathbf{L}^2] = 0$, $[H, \mathbf{S}^2] = 0$, $[H, L_z] = 0$, $[H, S_z] = 0$, les fonctions propres de H sont communes à \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , L_z , S_z . Leurs valeurs propres, indépendantes de L_z et S_z , ont un degré de dégénérescence :

$$d(H) = (2\ell + 1)(2s + 1)$$

où ℓ est rattaché à la valeur propre de \mathbf{L}^2 et s à celle de \mathbf{S}^2 .

c) $V(r) = V_3(r) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})$. De $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ on tire :

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{S}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

donc :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \quad (225bis)$$

alors :

$$V(r) = \frac{1}{2} V_3(r) (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$$

ce qui montre que V , et donc l'hamiltonien H , commutent avec \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z : $[H, \mathbf{L}^2]=0$, $[H, \mathbf{S}^2]=0$, $[H, \mathbf{J}^2]=0$, $[H, J_z]=0$. Mais H ne commute pas avec \mathbf{L} et \mathbf{S} . Les fonctions propres de H sont communes à celles de \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z et les valeurs propres de H ont un degré de dégénérescence :

$$d(H) = 2j + 1$$

où j est rattaché à la valeur propre de \mathbf{J}^2 .

$$d) \quad V(r) = V_4(r) \left[3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \right]$$

De : $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)})$ il vient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 &= \frac{\hbar^2}{4} (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left[(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})^2 + (\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r})^2 + 2(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{2} ((\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r}) + r^2) \end{aligned}$$

puisque d'après (206) $(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})^2 + (\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r})^2 = 2r^2$. Donc :

$$\hbar^2 (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_{(2)} \cdot \mathbf{r}) = 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \hbar^2 r^2 \quad (225ter)$$

d'où, et en utilisant (225) :

$$V(r) = V_4(r) \left[3 \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \hbar^2 r^2}{\hbar^2 r^2} - \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} \right] = V_4(r) \left[3 \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2}{\hbar^2 r^2} - 3 - 2 \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} + 3 \right]$$

donc :

$$V(r) = V_4(r) \frac{2}{\hbar^2} \left[3 \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} - \mathbf{S}^2 \right]$$

Il s'ensuit : $[V, \mathbf{S}^2]=0$ mais $[V, \mathbf{L}^2] \neq 0$. Les fonctions propres de H sont communes à celles de \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z .

Quelle que soit la forme du potentiel d'interaction des deux nucléons, le spin total \mathbf{S} a pour valeurs propres de \mathbf{S}^2 : $s(s+1)\hbar^2$ (attention, par suite de (225), (225bis), (225ter), ici s n'est pas égal à $1/2$ comme on le verra plus loin) :

$$\mathbf{S}^2 |s, \sigma\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, \sigma\rangle$$

où σ est la valeur propre de la composante S_z du spin total $S_z = S_{1z} + S_{2z}$:

$$S_z |s, \sigma\rangle = \hbar \sigma |s, \sigma\rangle$$

L'application du théorème d'addition (216) à s (qui joue le rôle de j dans l'énoncé) et à s_1 et s_2 (qui jouent le rôle de j_1 et j_2 dans ce même énoncé) donne :

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2$$

Or on a vu au § 10 que pour chaque particule isolée (ici chaque nucléon n°1 et 2) on a $s_1 = 1/2$ et $s_2 = 1/2$, la règle de sélection précédente devient alors :

$$|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0 \leq s \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

donc s prend les deux valeurs possibles : $s = 0$ ou 1 .

Lorsque s est fixé quelles sont les valeurs possibles de σ ?

Dans l'énoncé (216b), s jouant le rôle de j, et σ celui de m, on exprime : pour une valeur fixée de s il existe $(2s + 1)$ valeurs possibles de σ qui sont, d'après le théorème (176) :

$$\sigma = -s, -s+1, \dots, s$$

Comme s = 0 ou 1, on a les états de spin pour l'ensemble des deux nucléons (ou deuton) :

► s = 0 \rightarrow $\sigma = 0$ donc $|s \sigma\rangle = |0 0\rangle$: état singulet ;

► s = 1 \rightarrow $\sigma = -1, 0, 1$ donc $|s \sigma\rangle = |1 -1\rangle, |1 0\rangle, |1 1\rangle$: état triplet.

À $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ et $J_z = L_z + S_z$ correspondent des valeurs propres repérés par les nombres quantiques :

j pour \mathbf{J}^2 : $\mathbf{J}^2 |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j l m \mu s \sigma\rangle$

ℓ pour \mathbf{L}^2 : $\mathbf{L}^2 |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar^2 l(l+1) |j l m \mu s \sigma\rangle$

s pour \mathbf{S}^2 : $\mathbf{S}^2 |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar^2 s(s+1) |j l m \mu s \sigma\rangle$

m pour J_z : $J_z |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar m |j l m \mu s \sigma\rangle$

σ pour S_z : $S_z |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar \sigma |j l m \mu s \sigma\rangle$

μ pour L_z : $L_z |j l m \mu s \sigma\rangle = \hbar \mu |j l m \mu s \sigma\rangle$

avec $-j \leq m \leq j$ ($2j+1$ valeurs de J_z), $-s \leq \sigma \leq s$ ($2s+1$ valeurs de S_z), $-\ell \leq \mu \leq \ell$ ($2\ell+1$ valeurs de L_z).

Donc, pour un couple fixé (ℓ, s) il y a $(2s + 1)(2\ell + 1)$ combinaisons linéaires de vecteurs donnant un vecteur propre de \mathbf{J}^2 , repéré par j.

Le théorème d'addition (216), où l'on fixe $j_1 = \ell$ et $j_2 = s$, donne les valeurs possibles de j :

$$|\ell - s| \leq j \leq \ell + s$$

comme s = 0 ou 1, cela donne :

► pour s = 0 (état singulet de spin) : $|\ell - s| = |\ell| = \ell$ et $\ell + s = \ell$ soit : $j = \ell$

► pour s = 1 (état triplet de spin) : $|\ell - s| = |\ell - 1|$ et $\ell + s = \ell + 1$ soit :

$j = \ell - 1, \ell, \ell + 1$ si $\ell > 0$

$j = 1$ si $\ell = 0$

Ces différents états sont repérés par la notation des spectroscopistes dans le tableau ci-après :

Le moment orbital $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ est désigné respectivement par S, P, D, F, G,..., en indice inférieur est notée la valeur de j du moment cinétique total, et en indice supérieur gauche est notée la multiplicité du spin $(2s + 1)$: $^{2s+1}X_j$, avec X = S, P, D, F, G..., s = 0 ou 1, et j prenant $(2s + 1)(2\ell + 1)$ valeurs possibles.

s décroissant \rightarrow					
ℓ croissant \downarrow	j = 0		3P_0 $\ell = 1, s = 1$		1S_0 $\ell = 0, s = 0$
	j = 1	3S_1 $\ell = 0, s = 1$	3D_1 $\ell = 2, s = 1$	3P_1 $\ell = 1, s = 1$	1P_1 $\ell = 1, s = 0$
	j = 2	3P_2 $\ell = 1, s = 1$	3F_2 $\ell = 3, s = 1$	3D_2 $\ell = 2, s = 1$	1D_2 $\ell = 2, s = 0$
	j = 3	3D_3 $\ell = 2, s = 1$	3G_3 $\ell = 4, s = 1$	3F_3 $\ell = 3, s = 1$	1F_3 $\ell = 3, s = 0$

L'espace vectoriel défini sur la base des vecteurs propres, espace de Hilbert, peut se décomposer en deux sous-espaces complémentaires :

$$E = E' \oplus E'' = \{ \forall |u\rangle \in E, \exists |u'\rangle \in E' \text{ et } \exists |u''\rangle \in E'' : |u\rangle = |u'\rangle + |u''\rangle \}$$

On définit le **projecteur**, par exemple dans E'' , l'opérateur agissant dans E qui à tout vecteur $|u\rangle$ de E

associe sa composante $|u\rangle$ de E'' :

$$P_{E''}|u\rangle = |u''\rangle$$

On vérifie immédiatement que :

$$P^2 = P \quad (226)$$

(226) est la définition générale d'un opérateur projecteur. Les vecteurs propres de P définissent l'espace E'' sur lequel il projette.

Soit maintenant l'état singulet $|0\ 0\rangle$ qui engendre le sous-espace E_0 , et l'état triplet $|1\ -1\rangle$, $|1\ 0\rangle$, $|1\ 1\rangle$ qui engendre le sous-espace E_1 . On note P_0 le projecteur sur E_0 et P_1 le projecteur sur E_1 . Les valeurs propres de $\mathbf{S}^2 = s(s+1)\hbar^2$ sont : $\mathbf{S}^2 = 0$ si $s = 0$ (état singulet), $\mathbf{S}^2 = 2\hbar^2$ (état triplet). On a :

$$|u\rangle = |u_0\rangle + |u_1\rangle \quad \text{avec} \quad |u_0\rangle \in E_0 \quad \text{et} \quad |u_1\rangle \in E_1$$

$$P_0|u\rangle = |u_0\rangle \Rightarrow \mathbf{S}^2 P_0|u\rangle = \mathbf{S}^2|u_0\rangle = 0$$

$$P_1|u\rangle = |u_1\rangle \Rightarrow \mathbf{S}^2 P_1|u\rangle = \mathbf{S}^2|u_1\rangle = 2\hbar^2|u_1\rangle = 2\hbar^2 P_1|u\rangle$$

$$\text{donc : } P_1|u\rangle = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} |u\rangle \quad \text{soit} \quad P_1 = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} .$$

Comme $|u\rangle = P_0|u\rangle + P_1|u\rangle$ donc $P_1 + P_0 = 1$ il vient :

$$P_0 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2}$$

De (225) on obtient : $\frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} + 3)$ que l'on remplace dans P_0 et P_1 :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{4}(3 + \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)}) \\ P_0 &= \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)}) \end{aligned} \right| \quad (227a)$$

soit encore :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)} = P_1 - 3P_0 \quad (227b)$$

La relation (227b) présente l'intérêt de pouvoir écrire l'équation de Schrödinger du deuton pour chaque type de potentiel d'interaction (a), (b), (c), (d) vus précédemment, et identifier les caractéristiques des vecteurs propres dans chacun des cas :

■ *Premier cas : Le potentiel est la somme des potentiels de type (a) et de type (b) :*

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)})$$

On a vu que l'hamiltonien $H = \frac{\mathbf{p}^2}{M} + V(r)$ commute avec \mathbf{L} et \mathbf{S} : $[H, \mathbf{L}] = 0$ et $[H, \mathbf{S}] = 0$. Donc

les fonctions propres communes avec celles de H , $|\ell\ \mu\ s\ \sigma\rangle = |u\rangle$, sont les produits tensoriels contenant les fonctions propres : $|\ell\ \mu\rangle$ de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , $|\sigma\rangle$ de \mathbf{S}^2 et \mathbf{S}_z . Comme $s = 0$ ou 1 , ces fonctions propres se divisent en deux familles : celle obtenue par le projecteur P_0 , et celle obtenue par le projecteur P_1 . Or $V(r)$, donc H , s'expriment avec (227b) en faisant intervenir ces projecteurs :

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)(P_1 - 3P_0)$$

L'équation de Schrödinger, qui est l'équation aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien H , se décompose donc en deux équations, l'une pour les états $s = 0$, l'autre pour les états $s = 1$:

$$H|u\rangle = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(r) \right) |u\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(r) \right) |u\rangle = \varepsilon_n |u\rangle \rightarrow$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_1(r) + V_2(r)(P_1 - 3P_0) \right) |u\rangle = \varepsilon_n |u\rangle$$

pour $|u_0\rangle$ et $|u_1\rangle$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + (V_1 - 3V_2) \right) |u_0\rangle = \varepsilon_n |u_0\rangle \quad (228a)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + (V_1 + V_2) \right) |u_1\rangle = \varepsilon_n |u_1\rangle \quad (228b)$$

(228a) est l'équation de Schrödinger d'une paire de deutons équivalente à une particule de spin $s = 0$ placée dans un potentiel scalaire $V_1(r) - 3V_2(r)$; (228b) est l'équation de Schrödinger d'une paire de deutons équivalente à une particule de spin $s = 1$, placée dans un potentiel scalaire $V_1 + V_2$.

Dans les deux situations les vecteurs propres dépendent de la coordonnée radiale et des valeurs (ℓ, s) puisque H commute avec \mathbf{L} et \mathbf{S} : on note alors $|u\rangle = |r \ell s\rangle$.

■ *Deuxième cas : Le potentiel combine les formes (a), (b), (c) :*

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)(\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)}) + V_3(r)(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})$$

Alors, suite à (225) et (225bis), l'hamiltonien commute avec \mathbf{L}^2 et \mathbf{S}^2 : $[H, \mathbf{S}^2] = 0$, $[H, \mathbf{L}^2] = 0$.
Les fonctions propres communes à \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z sont de la forme :

$$|n j l m s\rangle = \Phi(r) \sum_{\sigma \mu} Y_l^\sigma(\theta, \varphi) |s \mu\rangle \langle l s \sigma \mu | j m\rangle$$

où la sommation porte sur les valeurs propres σ du spin total S_z et μ du moment cinétique orbital total L_z .

On applique l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien à $|n j l m s\rangle$ en coordonnées sphériques ; dans ces coordonnées, l'opérateur \mathbf{p}^2 s'exprime par :

$$\mathbf{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \quad (229)$$

Or en coordonnées sphériques \mathbf{L}^2 s'écrit :

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (230)$$

donc :

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{2M} p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{2M r^2} \quad (231a)$$

où p_r est la composante radiale de l'opérateur quantité de mouvement \mathbf{p} :

$$p_r = -i\hbar \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \right) \quad (231b)$$

et l'équation de Schrödinger devient :

$$\left[\frac{1}{2M} p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{2M r^2} + V(r) \right] |n j l m s\rangle = \varepsilon_n |n j l m s\rangle \quad (231c)$$

Les équations (231a,b,c) montrent que le principe de correspondance existe seulement en coordonnées cartésiennes : par exemple, p_r qui est donné par (231b) n'est pas une observable associée à la composante radiale du vecteur quantité de mouvement \mathbf{p} , il n'est qu'une composante radiale de l'opérateur \mathbf{p} . Il s'ensuit que (231c) est une équation de Schrödinger répondant au principe de correspondance sous la condition d'introduire le potentiel équivalent :

$$V_{eq} = V(r) + \frac{\mathbf{L}^2}{2M r^2} = V(r) + \hbar^2 \frac{l(l+1)}{2M r^2}$$

donc :

$$H|u\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{eq} \right) |u\rangle = \varepsilon_n |u\rangle$$

où l'on a noté $|u\rangle = |n j l m s\rangle$; ce vecteur propre se décompose selon :

$$|u\rangle = \Phi(r) Y_{j l m s}(\theta, \varphi)$$

avec :

$$Y_{j l m s}(\theta, \varphi) = \sum_{\sigma \mu} Y_l^\sigma(\theta, \varphi) |s \mu\rangle \langle l \sigma \mu | j m \rangle$$

où $\langle l \sigma \mu | j m \rangle$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan. Compte tenu de (231 a et b), (231c) devient alors :

$$H|u\rangle = \left(\frac{1}{2M} p_r^2 \Phi(r) \right) Y_{j l m s} + \Phi(r) \frac{\mathbf{L}^2}{2M r^2} Y_{j l m s} + V_1(r) \Phi(r) Y_{j l m s} + V_2(r) \Phi(r) (\boldsymbol{\sigma}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{(2)}) Y_{j l m s} + V_3(r) \Phi(r) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) Y_{j l m s}$$

En utilisant (225) et (225bis) il vient :

$$H|u\rangle = \frac{1}{2M} \left(p_r^2 \Phi(r) \right) Y_{j l m s} + \frac{\Phi(r)}{2M r^2} (\mathbf{L}^2 Y_{j l m s}) + V_1(r) \Phi(r) Y_{j l m s} + V_2(r) \Phi(r) \left(2 \frac{\mathbf{S}^2}{\hbar^2} - 3 \right) Y_{j l m s} + V_3(r) \Phi(r) \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) Y_{j l m s}$$

Des valeurs propres $\mathbf{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)$, $\mathbf{S}^2 = \hbar^2 s(s+1)$, $\mathbf{J}^2 = \hbar^2 j(j+1)$ on obtient :

$$H|u\rangle = \left[\frac{1}{2M} p_r^2 + \frac{\hbar^2}{2M r^2} l(l+1) + V_1(r) + V_2(r) (2s(s+1) - 3) + V_3(r) \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \right] |u\rangle$$

Comme la dépendance de $|u\rangle$ en (r) est séparée de la dépendance aux angles (θ, φ) on a : d'où :

$$\begin{aligned} p_r^2 |u\rangle &= -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \right] |u\rangle = -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r|u\rangle) \right) \right] \\ &= -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \left(\frac{1}{r} (|u\rangle + r \frac{d}{dr} |u\rangle) \right) = -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \left(\frac{1}{r} |u\rangle + \frac{d}{dr} |u\rangle \right) \\ &= -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(|u\rangle + r \frac{d}{dr} |u\rangle \right) = -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} |u\rangle + \frac{d}{dr} |u\rangle + r \frac{d^2}{dr^2} |u\rangle \right) \\ &= -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(2 \frac{d}{dr} |u\rangle + r \frac{d^2}{dr^2} |u\rangle \right) = -\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} r \right) |u\rangle \end{aligned}$$

L'équation de Schrödinger est alors :

$$H|u\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} r \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} + V_{jls}(r) \right) |u\rangle = \varepsilon_n |u\rangle \quad (232)$$

où le potentiel équivalent est : $V_{eq} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} + V_{jls}(r)$, où :

$$V_{jls}(r) = V_1(r) + V_2(r)(2s(s+1)-3) + \frac{\hbar^2}{2} V_3(r)(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)) \quad (233)$$

L'équation (232) se ramène à résoudre l'équation différentielle de la fonction radiale $\Phi(r)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} r \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} + V_{jls}(r) \right) \Phi(r) = \varepsilon_n \Phi(r) \quad (232bis)$$

Le cas du deuton placé dans un potentiel central radial est donc celui où $V_{jls}(r) = V_1(r)$, donc où le potentiel central ne varie pas en fonction du triplet (j, ℓ, s) . La quantité $\frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2}$ est appelée composante centrifuge.

Dans le cas général, Φ est paramétré par (j, ℓ, s) , et on notera $\Phi_{jls}(r)$ puisque $V_{eq} = V_{eq}(r, j, l, s)$.

Les fonctions propres communes $|u\rangle = |nj\ell ms\rangle$ sont orthogonales :

$$\langle nj\ell ms | nj'\ell' m's \rangle = \int Y_{j\ell ms}^*(\mathbf{r}) Y_{j'\ell' m's}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \int_0^\infty \Phi_{jls}^*(r) \Phi_{j'l's}(r) r^2 dr$$

Or les harmoniques sphériques $Y_{j\ell ms}$ sont orthonormales :

$$\int Y_{j\ell ms}^*(\mathbf{r}) Y_{j'\ell' m's}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

donc :

$$\int_0^\infty |\Phi_{jls}(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad (234)$$

De plus, p_r doit être un opérateur hermitique : $\langle u | p_r | u' \rangle = \langle u' | p_r^\dagger | u \rangle$ avec $p_r^\dagger = p_r$, ce qui est vérifié si et seulement si :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r |u(r)\rangle = 0 \quad (234bis)$$

Pour une *particule libre*, les potentiels sont nuls, (232) se simplifie alors en :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} r \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} \right) |u(r)\rangle = \varepsilon_n |u(r)\rangle \quad (235)$$

Avec le changement de variable : $v(r) = r |u(r)\rangle$, (235) devient :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + K^2 \right] v(r) = 0 \quad \text{avec} \quad K^2 = \frac{2M\varepsilon_n}{\hbar^2} \quad (236)$$

Pour l'état fondamental du moment orbital $\ell = 0$, (236) devient :

$$\frac{d^2}{dr^2}v(r) + K^2 v(r) = 0$$

de solution $v(r) = A \sin Kr + B \cos Kr$. De la condition $v = 0$ pour $r = 0$ il vient $B = 0$, soit :

$$v(r) = A \sin Kr$$

De la condition de normalisation (234) on déduit $A = \sqrt{2/\pi}$ soit :

$$|u(r)\rangle_{l=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin Kr}{r} \quad (237)$$

Pour $\ell > 0$ entier quelconque, par les changements de variables suivants : $|u(r)\rangle = K w(Kr)$ et $r' = Kr$, (236) devient :

$$\left(\frac{1}{r'} \left(\frac{d^2}{dr'^2} r' \right) + 1 - \frac{l(l+1)}{r'^2} \right) w = 0 \quad (238)$$

Les solutions régulières (c'est-à-dire qui doivent vérifier (234bis)) de (238) sont des fonctions de Bessel sphériques j_ℓ :

$$w_l = C j_l(r')$$

où C est une constante, et d'après la définition de w , les fonctions d'onde $|u\rangle$ sont donc :

$$|u(r)\rangle_l = A j_l(Kr)$$

où les fonctions de Bessel sphériques sont définies par :

$$j_l(Kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(Kr)$$

où $J_{\ell+1/2}$ est la fonction de Bessel d'ordre $(\ell + 1/2)$; de façon générale une fonction de Bessel d'ordre α est :

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\alpha} \frac{1}{n! \Gamma(\alpha+n+1)}$$

où Γ est la fonction d'Euler de 2ième espèce : $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ où $x > 0$.

Finalement :

$$|u(r)\rangle = |n j l m s\rangle = A \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(Kr) Y_{j l m s}(\theta, \varphi) \quad (239)$$

13 – Autre exemple de moment cinétique : isospin ou spin isotopique

Dans le deuton (§ 12) le proton p et le neutron n ont chacun un état de spin individuel ; pour éviter toute confusion avec les matrices de Pauli on utilise les indices (n,p) et non $(1,2)$ pour désigner le neutron et le proton, donc on a :

$$|s_n \sigma_n\rangle = |n\rangle = \left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{et} \quad |s_p \sigma_p\rangle = |p\rangle = \left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

Mais ils ne peuvent pas avoir le même spin (principe d'exclusion de Pauli) : $\sigma_n \neq \sigma_p$; si $\sigma_n = 1/2$ alors $\sigma_p = -1/2$, si $\sigma_n = -1/2$ alors $\sigma_p = 1/2$ et réciproquement.

En physique nucléaire il est d'usage de considérer le proton et le neutron comme une même particule – le nucléon – placée dans 2 états de spin possibles : l'état neutron et l'état proton.

On distingue l'état proton $|p\rangle$ et l'état neutron $|n\rangle$ par une variable dynamique supplémentaire qui peut prendre 2 valeurs possibles : le nombre de charges électriques Q.

Le passage d'un état à l'autre du nucléon est noté par les opérateurs :

$$\tau_p |n\rangle = |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{passage neutron} \rightarrow \text{proton}$$

$$\tau_n |p\rangle = |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{passage proton} \rightarrow \text{neutron}$$

ces deux états étant les seuls possibles pour le nucléon, les opérateurs vérifient les conditions :

$$\tau_p |p\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \tau_n |n\rangle = 0$$

Comme $\langle p|p\rangle = \langle p|\tau_p|n\rangle = \langle n|\tau_p^+|p\rangle$ et $\langle n|n\rangle = \langle n|\tau_n|p\rangle$ et de $\langle n|n\rangle = \langle p|p\rangle$ on cherche τ_p et τ_n tels que : $\tau_n = \tau_p^+$. On trouve alors :

$$\tau_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'espace du nombre de charges du nucléon est de dimension 2, tout comme l'espace de spin. Dans cet espace un vecteur $|x\rangle$ se décompose sur la base formée par $|p\rangle$ et $|n\rangle$:

$$|x\rangle = a|p\rangle + b|n\rangle$$

On cherche à définir un opérateur vectoriel qui agit dans l'espace de charges de dimension 2, et qui satisfait la propriété générale des spins donnée par les relations (201a,b,c). Soit T cet opérateur, il doit donc vérifier :

$$T \times T = iT$$

soit :

$$[T_k, T_m] = i \varepsilon_{kmn} T_n \quad (k, m, n = 1, 2, 3)$$

et :

$$T_1 T_2 + T_2 T_1 = 0, \quad T_1 T_2 = \frac{1}{2} iT_3, \quad T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = \frac{1}{4}$$

les T_k étant des matrices 2x2.

En remarquant que $\tau_p = J_+$ et $\tau_n = J_-$ (au facteur \hbar près) vus au § 10, et en appliquant les mêmes définitions :

$$\tau_p = T_+ = T_1 + iT_2$$

$$\tau_n = T_- = T_1 - iT_2$$

avec les mêmes contraintes que pour un spin : $T_3 = \pm \frac{1}{2} \mathbf{1}$, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \sigma \quad (240)$$

où $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$ est l'opérateur vectoriel défini avec les 3 matrices de Pauli, et l'on a :

$$\left. \begin{aligned} \tau_n + \tau_p = \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ i(\tau_n - \tau_p) = \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ [\tau_p, \tau_n] = \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right| \quad (241)$$

L'action de \mathbf{T} sur le vecteur de l'espace de charges $|x\rangle = a|p\rangle + b|n\rangle$ donne :

$$\mathbf{T}|x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1|x\rangle \\ \sigma_2|x\rangle \\ \sigma_3|x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -ib \\ a \end{pmatrix} |p\rangle + \begin{pmatrix} a \\ ia \\ -b \end{pmatrix} |n\rangle$$

En particulier en prenant $a = 1$ et $b = 0$, ainsi que $a = 0$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} T_3|p\rangle &= \frac{1}{2}|p\rangle \\ T_3|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle \end{aligned}$$

Les équations aux valeurs propres de \mathbf{T}^2 et T_3 sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2|x\rangle &= I(I+1)|x\rangle \\ T_3|x\rangle &= I_3|x\rangle \end{aligned}$$

où la fonction propre est $|x\rangle = |II_3\rangle$ avec $I = \frac{1}{2}$ et $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ rattachés aux valeurs propres, représentent les **états d'isospin** :

- proton, lorsque $I_3 = \frac{1}{2}$: $|p\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$
- neutron, lorsque $I_3 = -\frac{1}{2}$: $|n\rangle = |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$

Les projecteurs sur les états proton et neutron sont :

$$\left. \begin{aligned} P_p &= \frac{1}{2} + T_3 \\ P_n &= \frac{1}{2} - T_3 \end{aligned} \right| \quad (242)$$

Ce sont bien des projecteurs puisque $P_p^2 = P_p$ et $P_n^2 = P_n$; en effet :

$$P_p^2 = \left(\frac{1}{2} + T_3\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + T_3\right)\left(\frac{1}{2} + T_3\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}T_3 + T_3^2 = \frac{1}{4} + T_3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + T_3 = P_p$$

puisque $T_3^2 = \frac{1}{4}$; de même pour P_n^2 .

L'action de P_p et de P_n sur $|x\rangle$ est bien la projection respectivement sur $|p\rangle$ et sur $|n\rangle$:

$$\begin{aligned}
 P_p |x\rangle &= \left(\frac{1}{2} + T_3\right) (a|p\rangle + b|n\rangle) = \frac{1}{2}a|p\rangle + \frac{1}{2}b|n\rangle + aT_3|p\rangle + bT_3|n\rangle \\
 &= \frac{1}{2}a|p\rangle + \frac{1}{2}b|n\rangle + \frac{1}{2}a|p\rangle - \frac{1}{2}b|n\rangle = a|p\rangle
 \end{aligned}$$

de même pour $P_n |x\rangle$.

On associe à la charge du nucléon Q l'opérateur de Gell-Mann et Nishijima :

$$Q = eP_p = e\left(\frac{1}{2} + T_3\right) \quad (243)$$

où e est la charge élémentaire.

Le formalisme du **spin isotopique**, ou isospin, dans le traitement de la dynamique des nucléons est utile lorsque la charge ne se conserve pas, comme c'est le cas dans la radioactivité β . En effet, on peut montrer que, dans l'espace du nombre de charge, l'hamiltonien H d'un ensemble de Z protons et N neutrons, $N+Z$ nucléons, est indépendant de la charge si et seulement si l'hamiltonien est invariant par rotation dans l'espace des charges :

$$[H, \mathbf{T}] = 0$$

ce qui équivaut au fait avéré que les interactions nucléaires sont pratiquement indépendantes de la charge des nucléons.

14 – Autre exemple de moment cinétique : isospin des leptons et des quarks

Les nucléons – neutrons et protons – ne sont pas des particules ponctuelles. Ils sont constitués de 3 quarks, qui sont des fermions de spin intrinsèque :

$$\mathbf{S}_Q = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}_Q$$

où $\boldsymbol{\sigma}_Q$ est un vecteur équivalent à celui formé des matrices de Pauli, tel que les valeurs propres de \mathbf{S}_Q soient $-1/2$ ou $+1/2$ (en unité \hbar) ; ou dit plus brièvement :

$$\mathbf{S}_Q = \frac{1}{2} \quad \text{ou « spin } 1/2 \text{ »}$$

Il y a deux types de quark :

- quark (u) (« up ») de charge fractionnaire $\frac{2}{3}e$;
- quark (d) (« down ») de charge fractionnaire $-\frac{1}{3}e$

qui interagissent par l'interaction nucléaire forte.

Constitution des nucléons :

- proton (p) = (uud), charge = $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$
- neutron (n) = (ddu), charge = $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$

Les électrons (e^-) et les neutrinos (ν_e) sont aussi des fermions de spin $1/2$. Charge de l'électron = -1 , charge du neutrino = 0 .

Des doublets (électron-neutrino) et (quark u-quark d) sont formés. Comme pour les nucléons, vus au § 13 (relation (240)), chacun de ces doublets peut être décrit comme l'union de deux particules identiques dans des états d'isospin et de charge différents :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_D$$

Pour le doublet (e^-, ν_e) la particule est dans l'état :

– électron, lorsque $I_3 = -\frac{1}{2}$: $|e^- \rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$

– neutrino, lorsque $I_3 = \frac{1}{2}$: $|\nu_e \rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

avec I_3 valeur propre de T_3 et où $|x \rangle = |II_3 \rangle$: $T_3|x \rangle = I_3|x \rangle$.

Pour le doublet (u,d) la particule est dans l'état :

– quark d, lorsque $I_3 = -\frac{1}{2}$: $|d \rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$

– quark u, lorsque $I_3 = \frac{1}{2}$: $|u \rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

d'où le tableau :

doublet		spin S	charge (e)	isospin T	I_3
(e ⁻ , ν _e)	e ⁻	$S = \frac{1}{2}$	$Q = -1$	$T = \frac{1}{2}$	$I_3 = -\frac{1}{2}$
	ν _e		$Q = 0$		$I_3 = \frac{1}{2}$
(u,d)	u	$S = \frac{1}{2}$	$Q = \frac{2}{3}$	$T = \frac{1}{2}$	$I_3 = \frac{1}{2}$
	d		$Q = -\frac{1}{3}$		$I_3 = -\frac{1}{2}$

Les nucléons (neutron et proton) sont des baryons (masse au repos élevée) : on les caractérise par un nombre quantique interne, le nombre baryonique $B = 1$.

Comme ils sont constitués de 3 quarks, le **nombre baryonique** de chaque quark est $B = 1/3$.

L'électron et le neutrino sont des leptons (masse au repos très faible) : on les caractérise par un autre nombre quantique interne, le **nombre leptonique** $L = 1$, et pour eux on a $B = 0$.

La projection de l'état du doublet sur l'état porteur de charge est :

$$P_Q = T_3 + \frac{B-L}{2}$$

où l'indice Q désigne e⁻, ν_e, d ou u. En effet :

– dans le doublet (e⁻, ν_e) :

$$P_{(e^-)} = T_3 + \frac{B-L}{2} = I_3 + \frac{B-L}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 = Q(e^-)$$

$$P_{(\nu_e)} = T_3 + \frac{B-L}{2} = I_3 + \frac{B-L}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = Q(\nu_e)$$

– dans le doublet (u,d) :

$$P_{(u)} = I_3 + \frac{B-L}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-0) = \frac{2}{3} = Q(u)$$

$$P_{(d)} = I_3 + \frac{B-L}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-0) = -\frac{1}{3} = Q(d)$$

La relation de Gell-Mann et Nishijima donne, dans le cas des doublets concernés par les interactions nucléaires faibles, l'opérateur de charge du doublet :

$$Q = e \left(I_3 + \frac{B-L}{2} \right) \quad (244)$$

Le nombre $Y = B - L$ est l'**hypercharge** de la particule.

Remarque : Les nombres baryonique et leptonique d'une anti-particule sont de signe opposé de celui de la particule. Par exemple, l'anti-quark \bar{d} a pour nombre baryonique $B = -1/3$. Comme un méson est un doublet de quark et d'anti-quark, son B vaut $B(q) + B(\bar{q}) = B - B = 0$.



15 – Moment magnétique des leptons chargés

On a vu au § 10 qu'en présence d'un champ magnétique \mathbf{B} et d'un champ électrique de potentiel Φ , l'hamiltonien d'un électron, ou d'un lepton, de masse m , est : $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + e\Phi$ avec $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ où $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, \mathbf{A} étant le potentiel vecteur du champ magnétique, et où, d'après (210) :

$$\mathbf{P}^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 + \hbar \frac{e}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

Le moment magnétique est : $\mathbf{M}_S = 2\mu_B \frac{\mathbf{S}}{\hbar}$ où le spin est $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$, donc : $\mathbf{M}_S = \mu_B \boldsymbol{\sigma}$, μ_B étant le magnéton de Bohr (192b) : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$.

L'hamiltonien d'une particule à spin 1/2 de type lepton, en présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique, ou hamiltonien de Pauli, est donc :

$$H = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 + \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\Phi \quad (245)$$

Les états de spin sont $|\frac{1}{2}\sigma\rangle$ avec $\sigma = \pm \frac{1}{2}$; les fonctions propres de l'hamiltonien (245) se décomposent sur ces états selon :

$$|u\rangle = \sum_{\sigma} \langle u | \frac{1}{2}\sigma \rangle | \frac{1}{2}\sigma \rangle = u_+ | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle + u_- | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle$$

elles sont alors représentées comme vecteurs de l'espace 2D de spin : $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$ où les composantes

sont : $u_+ = \langle u | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle$ et $u_- = \langle u | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle$; elles correspondent aux amplitudes de probabilité de mesurer la particule dans l'un ou l'autre état de spin, elles vérifient la condition de normalisation :

$$\int (|u_+|^2 + |u_-|^2) d^3r = 1$$

Soit Q le nombre de charge du lepton, tel que défini en (244) ; alors son moment magnétique intrinsèque, dû au spin, ou **moment magnétique de Dirac**, est :

$$\mu_D = Q \mu_B = \frac{Q e \hbar}{2 m c}$$

Pour une particule non ponctuelle, c'est-à-dire formée de constituants internes, comme par exemple un nucléon, cette égalité n'est pas vérifiée.

On considère que l'électron et le muon, par exemple, qui sont des leptons, sont des particules ponctuelles puisque l'expérience montre que leurs moments magnétiques intrinsèques sont pratiquement égaux au moment magnétique de Dirac :

- électron : $m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg ;
moment magnétique intrinsèque mesuré $\mu_e = 1,001159652193 \mu_{De}$ à $\pm 10^{-11}$ près ;
- muon : $m_\mu = 1,8835327 \cdot 10^{-28}$ kg ;
moment magnétique ; moment magnétique intrinsèque mesuré $\mu_\mu = 1,001165923 \mu_{D\mu}$ à $\pm 8 \cdot 10^{-10}$ près.

16 – Moment magnétique des nucléons

L'expérience a montré, en revanche, que les nucléons, proton et neutron, ne vérifient pas l'égalité $\mu = \mu_D$ et donc sont constitués de particules : les quarks (Gell-Mann et Zweig, 1974) :

Si les nucléons étaient ponctuels, on aurait :

- pour le proton : $Q = 1$ et $\mu_D = \mu_{Bp} = e \hbar / 2 m_p c$ où $m_p = 1,672623 \cdot 10^{-27}$ kg (soit $938,27231$ MeV/c²) est la masse du proton ;
- pour le neutron : $Q = 0$ et $\mu_D = \mu_{Bn} = 0$ où $m_n = 1,674928 \cdot 10^{-27}$ kg (soit $939,56563$ MeV/c²) est la masse du neutron.

Or l'expérience donne :

$$\begin{aligned} \mu_p &= (2,79284739 \pm 6,3 \cdot 10^{-8}) \mu_{Bp} \\ \mu_n &= (-1,9130427 \pm 5 \cdot 10^{-8}) \mu_{Bn} \end{aligned}$$

Remarque : On a vu au § 14 qu'il existe deux types de quarks constitutifs des nucléons, avec (p) = (uud) et (n) = (ddu). Il existe en fait 6 quarks, les d et u étant ceux de première génération (tableau ci-après) :

quark	Q(e)	génération (masse croissante)	Masse (MeV/c ²)
d (down)	-1/3	1	$4 < m_d < 8$
u (up)	2/3		$1,5 < m_u < 4$
s (strange)	-1/3	2	$80 < m_s < 130$
c (charm)	2/3		$1150 < m_c < 1350$
b (bottom)	-1/3	3	$4 < m_b < 4600$
t (top)	2/3		$m_t = (174 \pm 5) \cdot 10^3$

A chaque quark correspond un anti-quark de même masse et de charge opposée. Dans le modèle standard le quark t est la particule élémentaire de plus grande masse.

La liaison des nucléons dans le noyau atomique résulte d'interactions entre leurs quarks constitutifs, appelées **force de couleur** (ou **interaction forte**). Les quanta de la force sont les gluons, bosons de spin 1, sans masse au repos (comme les photons qui sont les bosons de l'interaction électromagnétique) (voir références [16], [17]). Il existe 3 couleurs : rouge (r), vert (g), jaune (y) ; chaque quark possède une

couleur. Une conséquence de l'interaction forte est que les quarks ne sont pas observables à l'état libre. Les seules particules libres sont non colorées (ou « blanches »), c'est-à-dire mélange de 3 couleurs différentes ; les autres particules sont toujours à l'état confinés, et en ce qui concerne (u) et (d), ils sont confinés dans les nucléons sur une distance de 10^{-15} m. Dans le nucléon l'interaction forte entre deux quarks (q) possède un potentiel proportionnel à leur distance et indépendant de la charge :

$$V(r) = Br \quad (B > 0)$$

et l'interaction forte entre un quark (q) et un anti-quark (\bar{q}) est :

$$\bar{V}(r) = 2V(r) = 2Br$$

Il s'ensuit qu'un diquark (qq) se comporte comme un antiquark (\bar{q}), ce qui a été vérifié expérimentalement. Il a été montré que dans un nucléon, formé de 3 quarks de moment orbital total $L = 0$ ($\ell = 0$) un diquark (q_1q_2) = $(q)_{12}$ est formé, le 3e quark (q_3) restant indépendant. Le potentiel d'interaction entre le diquark $(q)_{12}$, qui se comporte comme un anti-quark, et le quark q_3 est donné par Badhuri et al :

$$V = -\frac{16}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^3 \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}_j \left[-\frac{W}{r_{ij}} + \frac{r_{ij}}{R^2} - D + \frac{\hbar^2 W}{m_i m_j} \frac{\exp(-r_{ij}/r_0)}{r_0^2 r_{ij}} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \right]$$

où les \mathbf{B}_i , \mathbf{B}_j sont les couleurs, $\boldsymbol{\sigma}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_j$ les spins, r_{ij} les distances entre le quark q_i et le quark q_j , m_i , m_j leurs masses. Lorsque les quarks s'éloignent, $r_{ij} \rightarrow +\infty$, V tend alors vers les termes en $r_{ij}/R^2 - D$ donc l'interaction devient attractive et croît avec les $r_{ij} = DR^2$ où elle s'annule, donc DR^2 est le rayon de confinement maximal. Valeurs :

$W = 102,67 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, $D = 913,5 \text{ MeV}$, $R = 0,0326 \text{ (MeV}^{-1} \text{ fm)}^{1/2}$, $r_0 = 112,2 \text{ fm}$, où 1 fm (femtomètre) = 10^{-15} m , $1 \text{ MeV} = 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, ce qui donne :

$DR^2 = 913,5 \times 0,0326^2 \text{ fm} = 0,971 \text{ fm} \approx 10^{-15} \text{ m}$ qui est la portée de l'interaction forte.

Les quarks (u) et (d) ont pratiquement la même masse qui, elle-même, est pratiquement le 1/3 de la masse du nucléon, puisque celui-ci est constitué de 3 quarks :

$$m_u \approx m_d \approx m_p/3 \approx m_n/3 = 336 \text{ MeV}/c^2 = 6 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Leurs moments de Dirac individuels sont :

$$\mu_{Du} = \frac{Q_u e \hbar}{2 m_u c} = \frac{2}{3} \frac{e \hbar}{2 m_u c} \approx 2 \mu_B^N$$

$$\mu_{Dd} = \frac{Q_d e \hbar}{2 m_d c} = -\frac{1}{3} \frac{e \hbar}{2 m_d c} \approx -\mu_B^N$$

où $\mu_B^N = \frac{e \hbar}{2 m_p c}$ est le magnéton nucléaire. À partir de ces données, quel est le moment magnétique d'un nucléon ? On serait tenté d'écrire qu'il est $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ si le nucléon est composé des quarks (q_1) , (q_2) , (q_3) . Ce n'est pas le cas. Il faut utiliser le résultat suivant :

■ *Proposition* : Le moment magnétique μ d'un nucléon (plus généralement d'un baryon) de spin 1/2, constitué de 3 quarks (q_1) , (q_2) , (q_3) , dont deux d'entre eux forment un diquark $(q)_{12}$ de spin $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{1}$, est égal à :

$$\mu = \frac{2}{3} (\mu_1 + \mu_2) - \frac{1}{3} \mu_3$$

(246)

Ce résultat (246) se démontre en utilisant le théorème de Wigner-Eckart concernant les éléments de matrice réduits (EMR) d'un produit tensoriel d'opérateurs tensoriels irréductibles (OTI), dont la définition fait intervenir les transformations par rotation du système de coordonnées donc les commutations avec l'opérateur moment cinétique.

Les OTI et le théorème de Wigner-Eckart font l'objet du § 17. On admet (246) ici, que l'on applique au nucléon selon qu'il s'agisse du proton ou du neutron.

Soit $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3$ le spin total du nucléon, le diquark $(q)_{12}$ a pour spin $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, où $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ sont les spins des quarks 1, 2, 3 (figure 43).

- Si $\mathbf{S}_{12} = 0$ alors $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3$ donc $\mu = \mu_3$
- Si $\mathbf{S}_{12} = 1$ alors on a (246).

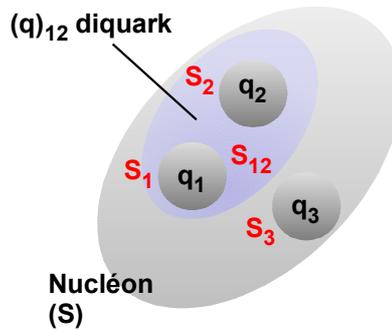


figure 43 : nucléon et ses 3 quarks

► cas du proton (p) = (uud) :

On a les confinements possibles a priori suivants :

- diquark $(q)_{12} = (ud)$ avec $\mathbf{S}_{12} = 0$ et $(q_3) = (u)$:

$$\mu_p = \mu_3 = \mu_u = 2\mu_B^N$$

- diquark $(q)_{12} = (ud)$ avec $\mathbf{S}_{12} = 1$ et $(q_3) = (u)$:

$$\mu_p = \frac{2}{3}(\mu_u + \mu_d) - \frac{1}{3}\mu_u = \frac{1}{3}\mu_u + \frac{2}{3}\mu_d = \frac{2}{3}\mu_B^N - \frac{2}{3}\mu_B^N = 0$$

- diquark $(q)_{12} = (uu)$ avec $\mathbf{S}_{12} = 0$ et $(q_3) = (d)$:

$$\mu_p = \mu_d = -\mu_B^N$$

- diquark $(q)_{12} = (uu)$ avec $\mathbf{S}_{12} = 1$ et $(q_3) = (d)$:

$$\mu_p = \frac{2}{3}(\mu_u + \mu_u) - \frac{1}{3}\mu_d = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\mu_B^N = 3\mu_B^N$$

Seule cette dernière relation correspond pratiquement à la valeur obtenue expérimentalement μ_p vue plus haut. Le proton est donc constitué d'un diquark (uu) de spin 1 et d'un quark (d) de spin 1/2.

► cas du neutron (n) = (ddu) :

Seul le cas diquark $(q)_{12} = (dd)$ de spin 1 et quark $(q_3) = (u)$ de spin 1/2 correspond à la valeur expérimentale μ_n vue plus haut : $\mu_n = -2\mu_B^N$. Bien que de charge neutre, le neutron interagit avec un

champ magnétique par son moment magnétique intrinsèque, lequel est relativement élevé.

17 – Moments cinétiques et tenseurs irréductibles, application au moment magnétique des baryons

■ *Définition : Sous-espaces irréductibles :*

On a vu en (82) que tout opérateur de rotation s'exprime avec les composantes J_x ou J_y , et J_z du moment cinétique total \mathbf{J} :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(-i\alpha \frac{J_z}{\hbar}\right) \exp\left(-i\beta \frac{J_y}{\hbar}\right) \exp\left(-i\gamma \frac{J_x}{\hbar}\right)$$

et que : $[\mathbf{J}^2, R] = 0$. Les $(2j+1)$ fonctions propres communes de \mathbf{J}^2 et J_z , $|j m\rangle$ engendrent un espace \mathbf{H}_{nj} . Les vecteurs de \mathbf{H}_{nj} se transforment les uns des autres par rotation : on dit que \mathbf{H}_{nj} est un **espace invariant par rotation**.

Pour toute fonction d'onde, ou vecteur, $|u\rangle$ de \mathbf{H}_{nj} , on associe l'espace formé des vecteurs $R|u\rangle$ obtenus par rotation sur $|u\rangle$: cet espace engendre \mathbf{H}_{nj} , ses vecteurs forment une base de \mathbf{H}_{nj} . D'où la définition :

Un espace \mathbf{H}_{nj} engendré par les transformations par rotation de l'un de ses vecteurs $|u\rangle$ quelconque est dit **espace irréductible par rapport aux rotations**.

À l'inverse, s'il existait un vecteur $|v\rangle$ de \mathbf{H}_{nj} dont l'ensemble des vecteurs transformés par rotation $R|v\rangle$ engendre seulement une partie de \mathbf{H}_{nj} , alors \mathbf{H}_{nj} serait dit **réductible par rapport aux rotations**.

■ *Proposition :* Un espace \mathbf{H}_{nj} irréductible par rapport aux rotations est engendré par l'action de J_+ ou de J_- sur ses vecteurs.

(247)

Preuve de (247) :

Une rotation infinitésimale s'exprime, comme on l'a vu, par :

$$R(\varepsilon) = \mathbf{1} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}$$

soit : $\mathbf{J} \cdot \mathbf{U} = -i \frac{\hbar}{\varepsilon} (\mathbf{1} - R(\varepsilon))$ d'où $J_x = -i \frac{\hbar}{\varepsilon} (\mathbf{1} - R_x(\varepsilon))$ et $J_y = -i \frac{\hbar}{\varepsilon} (\mathbf{1} - R_y(\varepsilon))$ et $J_+ = J_x + iJ_y$ et $J_- = J_x - iJ_y$ donnent :

$$J_+ |u\rangle = \frac{\hbar}{\varepsilon} (\mathbf{1} - i + i R_x(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)) |u\rangle$$

$$J_- |u\rangle = \frac{\hbar}{\varepsilon} (-\mathbf{1} - i + i R_x(\varepsilon) + R_y(\varepsilon)) |u\rangle$$

Soit $\mathbf{E}(R|u\rangle)$ le sous-espace engendré par les vecteurs $R|u\rangle$. Chaque vecteur de $J_- |u\rangle$ et $J_+ |u\rangle$: $\mathbf{1}|u\rangle$, $i|u\rangle$, $R_x(\varepsilon)|u\rangle$, $R_y(\varepsilon)|u\rangle$ est élément de $\mathbf{E}(R|u\rangle)$ donc $J_- |u\rangle$ et $J_+ |u\rangle$ sont aussi éléments de $\mathbf{E}(R|u\rangle)$. Or pour tout vecteur $|u\rangle$ de \mathbf{H}_{nj} :

$$|u\rangle = \sum_{-j \leq m \leq j} \langle j m | u \rangle |j m\rangle$$

Soit m' la plus petite valeur de m telle que $\langle j m' | u \rangle \neq 0$. On applique J_+ , (178) donne :

$$J_+ |u\rangle = \sum_m \langle j m | u \rangle J_+ |j m\rangle = \sum_m \langle j m | u \rangle \lambda_m |j m+1\rangle$$

où λ_m est donné par (179). En appliquant l'opération $(j-m')$ fois on obtient :

$$J_+^{j-m'} |u\rangle = C_{jm', |j m' + (j-m')\rangle} = C_{jm', |j j\rangle}$$

$J_+^{j-m'} |u\rangle$ est élément de $\mathbf{E}(R|u\rangle)$ puisque $J_+ |u\rangle$ l'est aussi. Alors $|j j\rangle$ est aussi vecteur de $\mathbf{E}(R|u\rangle)$. Or tous les vecteurs de \mathbf{H}_{nj} s'obtiennent par application itérative de J_- , comme indiqué au § 7, donc sont aussi éléments de $\mathbf{E}(R|u\rangle)$. Il s'ensuit que $\mathbf{E}(R|u\rangle) = \mathbf{H}_{nj}$, c'est-à-dire que \mathbf{H}_{nj} est irréductible par rapport aux rotations.

CQFD de (247).

Comme vu au § 7, les sous-espaces \mathbf{H}_{nj} sont orthogonaux entre eux pour n variable, et d'après (247) ils sont irréductibles par rapport aux rotations. Dans la représentation standard construite sur la base de représentation des états quantiques à partir des vecteurs propres de $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$, les composantes du moment cinétique total \mathbf{J} sont indépendantes des états quantiques représentés par (n) (hamiltonien, par exemple), selon les relations (185). Suite à la commutation de R et de \mathbf{J}^2 , il en est de même pour la représentation de R dans chaque \mathbf{H}_{nj} par une matrice également de $(2j+1)$ dimensions, dont les éléments sont aussi indépendants de (n) :

$$\begin{aligned} (R)_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma) &= \langle n j m | R(\alpha\beta\gamma) | n j m' \rangle \\ &= \langle n j m | e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar} | n j m' \rangle \end{aligned} \quad (248)$$

(248) décrit les **matrices de rotation** avec la représentation standard $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ dans un sous-espace \mathbf{H}_{nj} .

Quelques propriétés des matrices de rotation :

- À un ensemble d'angles d'Euler (α, β, γ) correspond une seule matrice $(R)^j(\alpha, \beta, \gamma)$.
- À une rotation R correspond :
 - une seule matrice $(R)^j(\alpha, \beta, \gamma)$ si $j \in \mathbb{N}$
 - 2 matrices opposées $(R)^j$ et $[(R)^j]^{-1}$ si j est demi-entier
- Soit la matrice d'élément $(r)^j(\beta)$:

$$(r)_{mm'}^j(\beta) = \langle j m | e^{-i\beta J_y/\hbar} | j m' \rangle$$

alors :

- ▶ $(r)_{mm'}^j(\beta)$ est réel.
- ▶ $(r)_{mm'}^j(\beta) = (r)_{m'm}^j(-\beta) = (-1)^{m-m'} (r)_{-m-m'}^j(\beta)$
- ▶ $(R)_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma) = (\exp -i\alpha m) (r)_{mm'}^j(\beta) (\exp -i\gamma m')$

- Rotation inverse :

$$[(R)^j]^{-1}(\alpha\beta\gamma) = (R)^j(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

(attention à l'ordre des angles !)

- Déterminant : $\det(R)^j = 1$
- Rotation infinitésimale : $R(\varepsilon) = \mathbf{1} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}$
- Rotation finie : $R(\theta) = \exp(-i \frac{\theta}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U})$
- Uniformité : $R^j(2\pi) = \exp(-i \frac{2\pi}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}) = (-1)^{2j}$
- Calcul des éléments de matrice $(R)_{mm'}^j$ par la formule de Wigner : posant $C = \cos \beta/2$, $S = \sin \beta/2$:

$$(r)_{mm'}^j(\beta) = \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-m'-k)!k!(k-m+m')!} C^{2j+m-m'-2k} S^{2k-m+m'}$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs entières de k pour lesquelles les arguments des factoriels sont ≥ 0 . Le nombre de termes de cette somme est N+1 où $N = \min \{j - m, j + m, j - m', j + m'\}$. La matrice complète s'obtient ensuite par la relation vue plus haut :

$$(R)_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma) = (\exp -i\alpha m)(r)_{mm'}^j(\beta)(\exp -i\gamma m')$$

Les sous-espaces H_{nj} ont chacun une base composée de (2j+1) vecteurs $|njm\rangle$. Ces vecteurs se transforment par une rotation $R(\alpha,\beta,\gamma)$ selon :

$$R(\alpha\beta\gamma)|njm\rangle = \sum_{m'} |njm'\rangle (R)_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

où $(R)_{m'm}^j(\alpha,\beta,\gamma)$ sont donnés par (248). Réciproquement, si (2j+1) vecteurs $|u_m\rangle$ de H_{nj} (avec $-j \leq m \leq j$) se transforment par une rotation selon :

$$R(\alpha\beta\gamma)|u_m\rangle = \sum_{m'} |u_{m'}\rangle (R)_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

alors ils sont vecteurs propres de J^2 et J_z :

$$J^2|u_m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|u_m\rangle \quad \text{et} \quad J_z|u_m\rangle = m\hbar|u_m\rangle$$

et se déduisent les uns des autres par les récurrences (182) :

$$J_+|u_m\rangle = \lambda_m|u_{m+1}\rangle$$

$$J_-|u_m\rangle = \lambda_{m-1}|u_{m-1}\rangle$$

où λ_m est donné par (179).

■ **Définition : opérateur scalaire :**

Un opérateur A_s est scalaire si et seulement s'il est invariant par rotation R, donc d'après (80), s'il commute avec R :

$$[A_s, R] = 0$$

Or toute rotation est le produit des rotations infinitésimales : $R(\epsilon) = 1 - i \frac{\epsilon}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}$. La condition ci-dessus devient alors :

$$[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{U}), A_s] = 0 \quad (249)$$

qui équivaut à (91b)

Remarque : Pour une rotation infinitésimale, on a le droit d'écrire au premier ordre en ϵ que la rotation est le produit des composantes de rotation autour de Ox, Oy, Oz :

$$R(\epsilon) \approx R_x(\epsilon U_x) R_y(\epsilon U_y) R_z(\epsilon U_z) \approx 1 - i \frac{\epsilon}{\hbar} (U_x J_x + U_y J_y + U_z J_z)$$

où $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ est le vecteur unitaire de rotation, et $R_k(\epsilon) = 1 - i \frac{\epsilon}{\hbar} (J_k U_k)$ $k = x, y, z$. Mais, attention : l'égalité ci-dessus n'est pas vraie en rotation finie.

■ **Définition : opérateur vectoriel :**

Un opérateur A_v est vectoriel si et seulement s'il se transforme par rotation comme un vecteur :

$$A'_v = R A_v R^+$$

et pour les mêmes raisons que ci-dessus, cette condition se traduit avec la rotation infinitésimale par :

$$A'_v = R(\varepsilon) A_v R^+(\varepsilon)$$

Soit un vecteur unitaire \mathbf{v} et $A_v \cdot \mathbf{v}$ la projection de A_v sur lui. Alors de l'expression de $R(\varepsilon)$ il vient :

$$A'_v \cdot \mathbf{v} = R(\varepsilon) A_v \cdot \mathbf{v} R(\varepsilon)^+ = A_v \cdot \mathbf{v} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} [(U \cdot J), (A_v \cdot \mathbf{v})]$$

Or pour un vecteur, une rotation infinitésimale d'angle ε autour de \mathbf{U} se traduit, pour sa composante $A'_v \cdot \mathbf{v}$ sur \mathbf{v} par :

$$A'_v \cdot \mathbf{v} \approx A_v \cdot [\mathbf{v} + \varepsilon (\mathbf{U} \times \mathbf{v})]$$

d'où l'égalité : $A_v \cdot [\mathbf{v} + \varepsilon (\mathbf{U} \times \mathbf{v})] = A_v \cdot \mathbf{v} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} [(U \cdot J), (A_v \cdot \mathbf{v})]$ donc :

$$[(U \cdot J), (A_v \cdot \mathbf{v})] = i \hbar A_v \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{v}) \quad (250)$$

(249) et (250) conduisent alors à la proposition suivante sur le moment cinétique total :

■ *Proposition : Moment cinétique total :*

Soit un système dont les observables (opérateurs) forment une suite d'opérateurs scalaires $A_{s,k}$ et d'opérateurs vectoriels $A_{v,q}$. Alors \mathbf{J} est le moment cinétique total de ce système si et seulement si :

a) \mathbf{J} est un opérateur vectoriel
 b) ses composantes $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{U}) = (J_x, J_y, J_z)$ commutent avec tous les opérateurs scalaires $A_{s,k}$ (249) :

$$[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{U}), A_{s,k}] = 0 \quad \text{pour tout } k$$

c) ses composantes vérifient avec les composantes des $A_{v,q}$ les relations de commutation (250) :

$$[(U \cdot J), (A_{v,q} \cdot \mathbf{v})] = i \hbar A_{v,q} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{v})$$

(251)

Remarque : Par définition, un opérateur moment cinétique vérifie les relations de commutation (168) et (169) :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i \hbar \mathbf{J} \quad \text{et} \quad [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}] = 0$$

Mais l'une de ses composantes $J_{v,q}$ ne vérifie pas (250) alors *il n'est pas un moment cinétique total* du système. Cette situation se rencontre pour un système constitué de N particules dont chaque moment cinétique satisfait (250) mais dont un opérateur égal à la somme de certains d'entre eux ne le satisfait pas.

Comme une rotation finie $R(\alpha, \beta, \gamma)$ est le produit de rotations infinitésimales, la condition suffisante pour qu'une fonction d'onde $|u\rangle$ soit invariante par rotation, $R|u\rangle = |u\rangle$, est qu'elle soit invariante par \mathbf{J} :

$$R(\varepsilon)|u\rangle = (1 - i \frac{\varepsilon}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \mathbf{U})|u\rangle = |u\rangle \quad \text{si} \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{R}^3, (\mathbf{J} \cdot \mathbf{U})|u\rangle = 0$$

c'est-à-dire l'application à $|u\rangle$ d'une composante quelconque du moment cinétique total donne zéro :

$$\mathbf{J}|u\rangle = 0$$

ou encore la condition suffisante : $\mathbf{J}^2|u\rangle = 0$.

D'où la proposition suivante :

■ *Proposition : invariance par rotation d'une fonction d'onde :*

Une condition *suffisante* pour qu'une fonction d'onde $|u\rangle$ soit invariante par rotation est qu'elle appartienne au noyau de \mathbf{J}^2 , \mathbf{J} étant le moment cinétique total :

$$\mathbf{J}^2|u\rangle = 0$$

Remarque : cas où l'opérateur scalaire est l'hamiltonien ; dégénérescence de rotation :

L'hamiltonien H est un opérateur scalaire, on a donc d'après (249) : $[\mathbf{J}, H] = 0$ et de manière équivalente : $[R, H] = 0$, où R est une rotation quelconque. On en déduit que l'équation de Schrödinger est invariante par rotation :

$$H|u\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|u\rangle$$

Si $|u\rangle$ est solution, alors $|u'\rangle = R|u\rangle$ est aussi solution ; en effet, puisque $HR = RH$, il vient :

$$H|u'\rangle = HR|u\rangle = RH|u\rangle = R(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})|u\rangle = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t})R|u\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|u'\rangle$$

Il s'ensuit que le sous-espace associé à chaque valeur propre de H est invariant par rotation, et que : $[\mathbf{J}^2, H] = 0$, $[\mathbf{J}, H] = 0$. Par conséquent les fonctions propres de H font partie de l'ensemble des fonctions propres communes de \mathbf{J}^2 et J_z , tandis que les valeurs propres de H sont indépendantes des $(2j+1)$ valeurs propres de J_z . Pour une valeur propre de \mathbf{J}^2 fixée, donc pour j fixé, il correspond des séries de $(2j+1)$ fonctions propres des sous-espaces \mathbf{H}_{nj} .

Pour une valeur propre de H fixée, donc pour n fixé, les vecteurs d'un même espace \mathbf{H}_{nj} , $|njm\rangle$ se déduisent les uns des autres par les relations de récurrence (178) par application de J_+ ou J_- , \mathbf{H}_{nj} étant alors un sous-espace invariant irréductible par rapport aux rotations. Le fait que pour chaque n il y ait des séries de sous-espaces \mathbf{H}_{nj} engendrés par $(2j+1)$ vecteurs propres $|njm\rangle$ signifie que pour une valeur propre de H il existe plusieurs vecteurs propres qui se déduisent les uns des autres par rotation : c'est la **dégénérescence de rotation**.

La définition d'opérateur tensoriel généralise celle d'opérateur vectoriel. Rappelons d'abord la définition d'un tenseur.

■ *Définition : Tenseur :*

Dans un espace E_N de dimension N , les vecteurs sont des tenseurs à N composantes si et seulement s'ils se transforment les uns les autres par rotation.

Rappel : à chaque rotation est associé un opérateur linéaire agissant dans E_N , comme c'est le cas pour les opérateurs moment cinétique.

■ *Exemples de tenseurs :*

- Les spineurs sont des tenseurs d'ordre 2.
- Les vecteurs de $E_3 = \mathbf{R}^3$ de même norme sont des tenseurs d'ordre 3.
- Les vecteurs ou fonctions d'onde $|u\rangle$ d'un espace de Hilbert, décrivant un système quantique, qui se transforment par rotation, sont des tenseurs d'ordre infini.
- Les vecteurs ou fonctions d'onde $|njm\rangle$ d'un espace \mathbf{H}_{nj} , engendrés par les fonctions propres de \mathbf{J}^2 et J_z communes à celles de l'opérateur de valeurs propres représentées par (n) (par exemple l'hamiltonien) sont des tenseurs à $(2j+1)$ composantes : $\dim \mathbf{H}_{nj} = 2j+1$.
- Produit tensoriel de deux vecteurs \mathbf{U} , \mathbf{V} de $E = \mathbf{R}^3$ chacun représenté dans une base par 3 composantes $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$, $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$: c'est le tenseur 3×3 à 9 composantes :

$$(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})_{ij} = (U_i V_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Dans une base de E_N une rotation est représentée par une matrice $N \times N$. Par exemple pour $|u\rangle$ de H_{nj} qui se décompose sur la base $|njm\rangle$ selon les coordonnées $u_m = \langle njm|u\rangle$:

$$|u\rangle = \sum_{-j \leq m \leq j} \langle njm|u\rangle |njm\rangle = \sum_m u_m |njm\rangle$$

La rotation $R(\alpha, \beta, \gamma)$ donne le vecteur de H_{nj} :

$$|u'\rangle = R(\alpha, \beta, \gamma)|u\rangle = \sum_m u'_m |njm\rangle \quad \text{où} \quad u'_m = \sum_{m'} (R)_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) u_{m'}$$

, les éléments de la matrice de rotation $(R)_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ sont donnés par (248) dans la représentation standard $\{J^2, J_z\}$.

L'effet des rotations sur le produit tensoriel est le suivant : soit $\mathbf{U}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{V}$, alors :

$$(\mathbf{U}' \otimes \mathbf{V}')_{ij} = (U'_i V'_j) \quad \text{avec} \quad U'_i = (R)_{ik} U_k \quad \text{et} \quad V'_j = (R)_{jp} V_p \quad \text{où} \quad i, j, k, p = 1, 2, \dots, N$$

comme, selon la convention d'Einstein, on somme sur les indices qui se répètent, les éléments d'indices différents peuvent commuter, ce qui donne :

$$(\mathbf{U}' \otimes \mathbf{V}')_{ij} = ((R)_{ik} U_k (R)_{jp} V_p) = (R)_{ik} (R)_{jp} U_k V_p$$

on a ainsi :

$$(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})'_{ij} = (R)_{ik} (R)_{jp} (\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})_{kp} \quad (254)$$

■ **Définition : tenseur irréductible :**

Un tenseur est irréductible si et seulement si l'espace E_N sur lequel il est défini est irréductible par rapport aux rotations.

■ **Exemples de tenseurs irréductibles :**

- Vecteurs de $E = \mathbf{R}^3$ de norme invariante.
- Spineurs.
- Vecteurs $|njm\rangle$ de H_{nj} .

Comme vu au § 11, le sous-espace H_{nj} engendré par les vecteurs $|nj_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |nj_1 m_1\rangle |nj_2 m_2\rangle$ est la somme des produits tensoriels des espaces H_{nj_1} et H_{nj_2} engendrés par les $(2j_1+1)$ vecteurs $|nj_1 m_1\rangle$ (avec $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$) et les $(2j_2+1)$ vecteurs $|nj_2 m_2\rangle$ (avec $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$). On a donc ici :

$$\dim H_{nj} = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

Les vecteurs de H_{nj} sont des tenseurs à $(2j_1+1)(2j_2+1)$ composantes. Par contre, ce ne sont pas des tenseurs irréductibles. Ils sont projetables sur des sous-espaces constitués de tenseurs irréductibles comme le montre le théorème fondamental d'addition (216).

■ **Définition : Opérateur tensoriel irréductible (OTI) :**

N opérateurs sont les composantes d'un opérateur tensoriel à N dimensions si et seulement si, par une rotation, ils se transforment linéairement comme N vecteurs linéairement indépendants d'un espace E_N . Ces transformations des composantes de l'opérateur tensoriel donnent les composantes de ce même opérateur dans une autre représentation (une autre base de E_N).

L'opérateur tensoriel est irréductible si et seulement si E_N est irréductible par rapport aux rotations.

|| **Remarque :**

Le produit tensoriel de deux opérateurs vectoriels \mathbf{U} et \mathbf{V} , $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$, de composantes $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})_{ij} = (U_i V_j)$ est un opérateur tensoriel *non irréductible* bien que \mathbf{U} et \mathbf{V} le soient.

Un opérateur T_k est un OTI d'ordre k si et seulement si ses $N = 2k+1$ composantes standard $T_{k,p}$ (avec : $-k \leq p \leq k$) se transforment par rotation du système de coordonnées comme combinaison linéaire de ces composantes :

$$R T_{k,p} R^{-1} = \sum_{p'} T_{k,p'} R_{k p' p} \quad (255)$$

où $R^{-1} = R^\dagger$.

(255) est la même loi de transformation que celle d'une base $|k p\rangle$ d'une représentation standard d'un espace E_N à $N = 2k+1$ dimensions, irréductible par rapport aux rotations :

$$R |k p\rangle = \sum_{p'} |k p'\rangle R_{k p' p}$$

Une condition suffisante pour que (255) soit vérifiée est qu'elle le soit pour une rotation infinitésimale ; dans ce cas les éléments de matrice $R_{k p' p}$ deviennent :

$$R_{k p' p} = \langle k p' | R_U(\varepsilon) | k p \rangle = \langle k p' | \mathbf{1} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} J_U | k p \rangle = \delta_{p p'} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} \langle k p' | J_U | k p \rangle$$

où $J_U = \mathbf{J} \cdot \mathbf{U}$. En remplaçant dans (255) :

$$(\mathbf{1} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} J_U) T_{k,p} (\mathbf{1} + i \frac{\varepsilon}{\hbar} J_U) = \sum_{p'} (\delta_{p p'} - i \frac{\varepsilon}{\hbar} \langle k p' | J_U | k p \rangle) T_{k p'}$$

Le développement au premier ordre en ε donne :

$$[J_U, T_{k p}] = \sum_{p'} \langle k p' | J_U | k p \rangle T_{k p'} \quad (256)$$

Si l'on identifie l'axe de rotation \mathbf{U} à Oz l'élément de matrice devient :

$$\langle k p' | J_U | k p \rangle = \hbar p \delta_{p p'}$$

puisque $J_z |k p\rangle = \hbar p |k p\rangle$ où p joue ici le rôle de m et k celui de j . (256) donne alors la relation de commutation d'un OTI :

$$[J_z, T_{k p}] = \hbar p T_{k p} \quad (257)$$

Si l'on identifie \mathbf{U} à Ox puis à Oy, et avec $J_+ = J_x + iJ_y$ et $J_- = J_x - iJ_y$, l'élément de matrice devient successivement : $\langle k p' | J_\pm | k p \rangle$. D'après (182) et (179) on a :

$$J_\pm |k p\rangle = \hbar \sqrt{(k \pm p + 1)(k \mp p)} |k p \pm 1\rangle$$

donc :

$$\langle k p' | J_\pm | k p \rangle = \hbar \sqrt{(k \pm p + 1)(k \mp p)} \delta_{p', p \pm 1}$$

que l'on remplace dans (256) :

$$\left[\begin{aligned} [J_\pm, T_{k p}] &= \hbar \sqrt{(k \pm p + 1)(k \mp p)} T_{k p \pm 1} \\ &= \hbar \sqrt{k(k+1) - p(p \pm 1)} T_{k p \pm 1} \end{aligned} \right] \quad (258)$$

Les relations (257) et (258) sont les **définitions des OTI de Racah**.

■ **Théorème de Wigner-Eckart, représentation des OTI :**

Dans les représentations d'un OTI de rang k on est amené à calculer les éléments de matrice :

$$\langle n j m | T_{k,q} | n' j' m' \rangle$$

dans une base orthonormale :

$$\langle n j m | n' j' m' \rangle = \delta_{nn'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{n j m} |n j m\rangle \langle n j m| = \mathbf{1}$$

■ **Théorème de Wigner-Eckart :**

Dans la représentation standard $\{J^2 J_z\}$ de vecteurs de base $|n j m\rangle$ l'élément de matrice de la p-ième composante standard d'un OTI d'ordre k, T_k : $\langle n j m | T_{k,p} | n' j' m' \rangle$ est égal au produit du coefficient de Clebsch-Gordan (définition (214c)) $\langle n' j' m' k p | n j m \rangle$ (dans la base découplée) par un facteur indépendant de m, m', p :

(259)

$$\langle n j m | T_{k,p} | n' j' m' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \langle n' j' m' k p | n j m \rangle \langle n j | T_k | n' j' \rangle$$

$\langle n j | T_k | n' j' \rangle$ est l'**élément de matrice réduit (EMR)** de l'opérateur tensoriel d'ordre k, T_k .

En utilisant le symbole « 3jm » de Wigner (222), (259) s'écrit encore :

$$\langle n j m | T_{k,p} | n' j' m' \rangle = (-1)^{j'-k+m} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ m' & p & -m \end{pmatrix} \langle n j | T_k | n' j' \rangle$$

où la correspondance des indices dans (222) est : $j_1 \rightarrow j'$, $m_1 \rightarrow m'$, $j_2 \rightarrow k$, $m_2 \rightarrow p$.

Preuve de (259) :

Soient les $(2k+1)(2j'+1)$ vecteurs $T_{k,p}|n'j'm'\rangle$ (où $-k \leq p \leq k$ et $-j' \leq m' \leq j'$) et leurs combinaisons linéaires :

$$|n'' j'' m''\rangle = \sum_{m', p} T_{k,p} |n' j' m'\rangle \langle j' m' k p | j'' m''\rangle$$

Or on a vu en (223bis) que les coefficients CG vérifient les relations d'orthogonalité :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle &= \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ \sum_{j, m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j m \rangle &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned} \right| \quad (260)$$

qui, appliquées à la relation précédente sur $|n'' j'' m''\rangle$, donnent :

$$T_{k,p} |n' j' m'\rangle = \sum_{j'', m''} |n'' j'' m''\rangle \langle j' m' k p | j'' m''\rangle$$

En appliquant (258) il vient :

$$J_+ T_{k,p} |n' j' m'\rangle = [J_+, T_{k,p}] |n' j' m'\rangle + T_{k,p} J_+ |n' j' m'\rangle \\ = \hbar \sqrt{k(k+1) - p(p+1)} T_{k,p+1} |n' j' m'\rangle + \hbar \sqrt{j'(j'+1) - m'(m'+1)} T_{k,p} |n' j' m'+1\rangle$$

d'où :

$$J_+ |n'' j'' m''\rangle = \hbar \sum_{m', p} T_{k,q} |n' j' m'\rangle \times \\ \times [\sqrt{k(k+1) - p(p-1)} \langle j' m' k p-1 | j'' m''\rangle + \sqrt{j'(j'+1) - m'(m'-1)} \langle j' m'-1 k p-1 | j'' m''\rangle]$$

En utilisant les relations de récurrence des coefficients CG (221) le terme en [...] est égal à :

$$\sqrt{j''(j''+1) - m''(m''+1)} \langle j' m' k p | j'' m''+1\rangle$$

soit :

$$J_+ |n'' j'' m''\rangle = \hbar \sqrt{j''(j''+1) - m''(m''+1)} |n'' j'' m''+1\rangle \quad (261a)$$

Des calculs similaires donnent aussi :

$$J_- |n'' j'' m''\rangle = \hbar \sqrt{j''(j''+1) - m''(m''-1)} |n'' j'' m''-1\rangle \quad (261b)$$

$$J_z |n'' j'' m''\rangle = m'' \hbar |n'' j'' m''\rangle \quad (261c)$$

Les relations (261a,b,c) montrent que les $(2j''+1)$ vecteurs $|n'' j'' m''\rangle$ correspondent à la même valeur j'' donc :

a) soit tous les $|n'' j'' m''\rangle = 0$

b) soit les $|n'' j'' m''\rangle$ sont des fonctions propres de J^2 et J_z , dans ce cas :

$$\langle n j m | n'' j'' m''\rangle = \delta_{j j''} \delta_{m m''}$$

Il y a donc $(2j+1)$ produits scalaires $\langle n j m | n'' j'' m''\rangle$ non nuls qui sont indépendants de m .
Comme :

$$T_{k,p} |n' j' m'\rangle = \sum_{j'', m''} |n'' j'' m''\rangle \langle j' m' k p | j'' m''\rangle$$

il s'ensuit :

$$\langle n j m | T_{k,p} |n' j' m'\rangle = \sum_{j'', m''} \langle n j m | n'' j'' m''\rangle \langle j' m' k p | j'' m''\rangle$$

d'où (259).

CQFD de (259).

■ **Corollaire : règles de sélection de l'OTI T_k :**

Une condition nécessaire pour que $\langle n j m | T_{k,p} |n' j' m'\rangle \neq 0$ est que soient vérifiées simultanément :

$$p = m - m' \\ |j - j'| \leq k \leq j + j'$$

(262)

■ **Exemples d'OTI :**

- *Opérateurs vectoriels* : On a vu qu'un opérateur vectoriel A_v se transforme par rotation selon :

$$A'_v = R A_v R^+$$

et donc qu'il vérifie les relations de commutation avec le moment cinétique total (251) :

$$\begin{aligned} [J_z, A_{vx}] &= -i\hbar A_{vy} \\ [J_z, A_{vy}] &= i\hbar A_{vx} \\ [J_z, A_{vz}] &= 0 \end{aligned}$$

Soit alors un OTI de rang $k = 1$, noté A : il a $N = 2k+1 = 3$ composantes $(A_{kp})_{k=1,p=-1,0,1}$:

$$A = (A_{11}, A_{10}, A_{1-1}) \text{ puisque } -k \leq p \leq k$$

D'après les relations de Racah (257), A_{kp} vérifient :

$$[J_z, A_{1p}] = \hbar p A_{1p} \text{ où } p = -1, 0, 1$$

Pour $p = 0$ (257) donne $[J_z, A_{10}] = 0$, ce qui permet de poser que A_{vz} et A_{10} sont proportionnels, puisque $[J_z, A_{vz}] = 0$:

$$A_{10} = -i\alpha A_{vz}$$

où α est un coefficient qui doit vérifier certaines conditions que nous déterminerons plus loin. De (258), pour $p = 0$, on a :

$$[J_{\pm}, A_{10}] = \sqrt{2}\hbar A_{1\pm 1}$$

et compte tenu de $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ il vient :

$$A_{1\pm 1} = -i \frac{\alpha}{\hbar\sqrt{2}} ([J_x, A_{vz}] \pm i[J_y, A_{vz}])$$

Les composantes $[J_x, A_{vz}]$ et $[J_y, A_{vz}]$ sont respectivement celles qui interviennent dans (250), avec $\mathbf{U} = e_x$ respectivement e_y , et $\mathbf{V} = e_z$, et vérifient donc :

$$\begin{aligned} [J_z, A_{vx}] &= i\hbar A_v \cdot (e_x \times e_z) = -i\hbar A_{vy} \\ [J_y, A_{vy}] &= i\hbar A_v \cdot (e_y \times e_z) = i\hbar A_{vx} \end{aligned}$$

en remplaçant dans $A_{1\pm 1}$ on obtient l'**expression standard d'un opérateur vectoriel** A_v :

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} (A_{vx} + iA_{vy}) \\ A_{10} &= -i\alpha A_{vz} \\ A_{1-1} &= -\frac{i\alpha}{\sqrt{2}} (A_{vx} - iA_{vy}) \end{aligned} \right| \quad (263)$$

et réciproquement : la représentation cartésienne en fonction de la représentation standard :

$$\left. \begin{aligned} A_{vx} &= \frac{i}{\alpha\sqrt{2}}(-A_{11} + A_{1-1}) \\ A_{vy} &= -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(A_{11} + A_{1-1}) \\ A_{vz} &= \frac{i}{\alpha}A_{10} \end{aligned} \right| \quad (264)$$

Les transformations (263) et (264) correspondent à un changement de bases orthogonales (e_x, e_y, e_z) et (e_{11}, e_{10}, e_{1-1}), avec : $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $i, j = x, y, z$, et $e_{1m} \cdot e_{1m'} = \delta_{mm'}$, $m, m' = -1, 0, 1$:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y) & e_x &= \frac{i}{\alpha\sqrt{2}}(-e_{11} + e_{1-1}) \\ e_{10} &= -i\alpha e_z & e_y &= -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(e_{11} + e_{1-1}) \\ e_{1-1} &= -\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y) & e_z &= \frac{i}{\alpha}e_{10} \end{aligned} \right| \quad (265)$$

(265) s'exprime aussi sous forme d'une matrice de changement de base :

► passage de (e_j) à (e_{1m}) : $e_{1m} = \langle e | 1m \rangle = \sum_j \langle e | j \rangle \langle j | 1m \rangle = \sum_j e_j \langle j | 1m \rangle$

où $\langle j | 1m \rangle$ sont les coefficients de e_x, e_y, e_z dans les relations (265), par exemple : $\langle x | 11 \rangle = i \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$;

► passage de (e_{1m}) à (e_j) : $e_j = \langle e | j \rangle = \sum_m \langle e | 1m \rangle \langle 1m | j \rangle = \sum_m e_{1m} \langle 1m | j \rangle$

où $\langle 1m | j \rangle$ sont les coefficients de e_{11}, e_{10}, e_{1-1} dans (265), par exemple : $\langle 1-1 | e_y \rangle = -\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$.

Un opérateur vectoriel A_v est donc décrit sur la base (e_j) ou sur la base (e_{1m}) :

$$A_v = \sum_j e_j A_{vj} \quad \text{ou bien :} \quad \left\{ \begin{aligned} A_v &= \sum_m \langle e | 1m \rangle \langle 1m | A_v \rangle = \sum_m e_{1m} A_{1m}^+ \\ &= \sum_m \langle A_v | 1m \rangle \langle 1m | e \rangle = \sum_m e_{1m}^+ A_{1m} \end{aligned} \right.$$

De même pour un autre opérateur vectoriel B_v :

$$B_v = \sum_j e_j B_{vj} \quad \text{ou} \quad B_v = \sum_m e_{1m} B_{1m}^+ = \sum_m e_{1m}^+ B_{1m}$$

En faisant le produit scalaire de A_v et B_v , on obtient dans l'une ou l'autre base :

$$\langle A_v | B_v \rangle = \langle B_v | A_v \rangle = \sum_j \langle A_v | j \rangle \langle j | B_v \rangle = \sum_j A_{vj} B_{vj} = A_v \cdot B_v$$

et aussi :

$$\langle A_v | B_v \rangle = \sum_m \langle A_v | 1m \rangle \langle 1m | B_v \rangle = \sum_m A_{1m} B_{1m}^+ = \sum_m A_{1m}^+ B_{1m}$$

En explicitant les A_{1m} et B_{1m} au moyen de (263) il vient :

$$\begin{aligned} \langle A_v | B_v \rangle &= A_{11}^+ B_{11} + A_{1-1}^+ B_{1-1} + A_{10}^+ B_{10} \\ &= |\alpha|^2 (A_{vx} B_{vx} + A_{vy} B_{vy} + A_{vz} B_{vz}) = |\alpha|^2 A_v \cdot B_v \end{aligned}$$

et puisque $\langle A_v | B_v \rangle = A_v \cdot B_v$, on a la condition sur α :

$$|\alpha|^2 = 1 \quad (266)$$

Soit le produit tensoriel de deux opérateurs vectoriels A_v et B_v : $(A_v \otimes B_v)_{kp}$ dans la représentation standard. D'après (262) : $|j - j'| \leq k \leq j + j'$, et puisque $-k \leq p \leq k$, pour $j = j' = 1$ on a : $k = 0, 1, 2$ et $p = 0$ ou : $p = -1, 0, 1$, ou : $p = -2, -1, 0, 1, 2$.
De manière générale on a :

$$(A_v \otimes B_v)_{kp} = \sum_{m, m'} \langle 1 m 1 m' | k p \rangle A_{1m} B_{1m'} = \sum_{m, m'} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} m' m k \\ 1 1 p \end{pmatrix} A_{1m} B_{1m'} \quad (267)$$

(267) devient , pour les cas suivants :

a) $k = 0, p = 0$: le produit tensoriel est le **produit scalaire** :

$$(A_v \otimes B_v)_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} A_v \cdot B_v$$

b) $k = 1, -k \leq p \leq k$: le produit tensoriel est le **produit vectoriel** :

$$(A_v \otimes B_v)_{1p} = \sqrt{3} \sum_{m, m'} \begin{pmatrix} m' m 1 \\ 1 1 p \end{pmatrix} A_{1m} B_{1m'}$$

Dans le cas particulier où $p = 0$ on obtient : $(A_v \otimes B_v)_{10} = -\frac{i\alpha^2}{\sqrt{2}} (A_v \times B_v)_z = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (A_v \times B_v)_{10}$.

Plus généralement pour $-k \leq p \leq k$, on montre :

$$(A_v \times B_v)_{1p} = -\frac{\sqrt{6}}{\alpha} \sum_{m, m'} \begin{pmatrix} m' m 1 \\ 1 1 p \end{pmatrix} A_{1m} B_{1m'} \quad (268)$$

où $m, m', p = -1, 0$ ou 1 .

c) $k = 2, -k \leq p \leq k$: c'est le **produit tensoriel** proprement dit : les composantes de $(A_v \otimes B_v)_{2p}$ sont :

$$\left. \begin{aligned} (A_v \otimes B_v)_{2\pm 2} &= -\frac{1}{2} (A_{1\pm 1} + B_{1\pm 1}) \\ (A_v \otimes B_v)_{2\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{10} B_{1\pm 1} + A_{1\pm 1} B_{10}) \\ (A_v \otimes B_v)_{20} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (A_{11} B_{1-1} + A_{1-1} B_{11} + 2 A_{10} B_{10}) \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

• **Opérateur identité** : il est défini par $\mathbf{1} |njm\rangle = |njm\rangle$, c'est évidemment un OTI. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \langle n j m | \mathbf{1} | n' j' m' \rangle &= \langle n j m | n' j' m' \rangle = \delta_{nn'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ &= \begin{pmatrix} m 0 j' \\ j 0 m' \end{pmatrix} \langle n j | \mathbf{1} | n' j' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle n j | \mathbf{1} | n' j' \rangle \end{aligned}$$

donc l'EMR de $\mathbf{1}$ est :

$$\langle n j | \mathbf{1} | n' j' \rangle = \sqrt{2j+1} \delta_{nn'} \quad (270)$$

Rappel : pour déterminer les éléments de matrice complets à partir des EMR on utilise le théorème de Wigner-Eckart (259).

- *Opérateur moment cinétique* J_z : d'après (263) son expression standard est (avec $\alpha = 1$) :

$$J_{10} = -i J_z$$

L'élément de matrice de J_z est :

$$\langle n j m | J_z | n' j' m' \rangle = \langle n j m | \hbar m' | n' j' m' \rangle$$

par suite de l'équation aux valeurs propres de J_z : $J_z | n' j' m' \rangle = \hbar m' | n' j' m' \rangle$, donc :

$$\begin{aligned} \langle n j m | J_z | n' j' m' \rangle &= \hbar m' \langle n j m | n' j' m' \rangle = \hbar m' \delta_{nn'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ &= \langle n j m | -i J_{10} | n' j' m' \rangle = -i \langle n j m | J_{10} | n' j' m' \rangle \end{aligned}$$

on applique (259) à l'élément $-i \langle n j m | J_{10} | n' j' m' \rangle$:

$$-i \langle n j m | J_{10} | n' j' m' \rangle = -i \begin{pmatrix} m & 1 & j' \\ j & 0 & m' \end{pmatrix} \langle n j | J_1 | n' j' \rangle$$

où J_1 est l'OTI d'ordre $k = 1$ moment cinétique J_z . Comme :

$$\begin{pmatrix} m & 1 & j' \\ j & 0 & m' \end{pmatrix} = \frac{m \delta_{jj'}}{\sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{mm'}}$$

l'EMR de J_z est :

$$\langle n j | J_1 | n' j' \rangle = i \hbar \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{nn'} \delta_{jj'} \quad (271)$$

► Exemple : Si $J_1 = \frac{1}{2} \hbar \sigma_1$ est l'opérateur spin suivant Oz, on a $j' = j = 1/2$ rattaché à l'état propre de \mathbf{J}^2 et (271) devient :

$$\langle n j | \frac{1}{2} \hbar \sigma_1 | n' j' \rangle = \frac{1}{2} \hbar \langle n \frac{1}{2} | \sigma_1 | n' \frac{1}{2} \rangle = i \hbar \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} \delta_{nn'}$$

donc :

$$\langle n \frac{1}{2} | \sigma_1 | n' \frac{1}{2} \rangle = i \sqrt{6} \delta_{nn'} \quad (272)$$

- *Produit scalaire du moment cinétique total* \mathbf{J} avec un opérateur vectoriel A_v :

Le produit scalaire $(\mathbf{J} \cdot A_v)$ est aussi un OTI. On a vu plus haut, dans le cas $k = 0$ et $p = 0$ du produit tensoriel de 2 opérateurs vectoriels, que le produit scalaire s'écrit :

$$(\mathbf{J} \otimes A_v)_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{J} \cdot A_v)$$

L'EMR de (\mathbf{J}, A_v) est :

$$\langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j' \rangle = \sum_{n'', j''} (-1)^{j+j''+1} \frac{\delta_{jj'}}{\sqrt{2j+1}} \langle n j | J_1 | n'' j'' \rangle \langle n'' j'' | A_1 | n' j' \rangle$$

où A_1 est la représentation standard de A_v d'ordre 1 dans la base standard. On applique (271) aux EMR :

$$\langle n j | J_1 | n'' j'' \rangle :$$

$$\langle n j | J_1 | n'' j'' \rangle = i \hbar \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{nn''} \delta_{jj''}$$

$$\text{d'où : } \langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j' \rangle = \sum_{n'', j''} (-1)^{j+j''+1} \frac{\delta_{jj'}}{\sqrt{2j+1}} i \hbar \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{nn''} \delta_{jj''} \langle n'' j'' | A_1 | n' j' \rangle$$

Finalement l'EMR de (\mathbf{J}, A_v) est :

$$\langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j' \rangle = -i \hbar \sqrt{j(j+1)} \langle n j | A_1 | n' j' \rangle \delta_{jj'} \quad (273)$$

■ *Formule de Landé et moments magnétiques des baryons :*

■ *Proposition :*

Les éléments de matrice d'un opérateur vectoriel A_v s'expriment en fonction de l'opérateur moment cinétique total \mathbf{J} selon la **formule de Landé** :

(274)

$$\langle n j m | A_{1p} | n' j' m' \rangle = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{j(j+1)} \langle n j m | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j m \rangle \langle n j m | J_{1p} | n' j m' \rangle$$

Preuve de (271) :

De (271) on a :

$$\langle n j m | A_{1p} | n' j m' \rangle = -i \langle n j m | A_1 | n' j m' \rangle = -i \frac{m}{\sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{mm'}} \langle n j | A_1 | n' j \rangle$$

$$\langle n j m | J_{1p} | n' j m' \rangle = -i \langle n j m | J_1 | n' j m' \rangle = -i \frac{m}{\sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{mm'}} \langle n j | J_1 | n' j \rangle$$

Donc :

$$\frac{\langle n j m | A_{1p} | n' j m' \rangle}{\langle n j m | J_{1p} | n' j m' \rangle} = \frac{\langle n j | A_1 | n' j \rangle}{\langle n j | J_1 | n' j \rangle}$$

et d'après (273) : $\langle n j | A_1 | n' j \rangle = \frac{i}{\hbar \sqrt{j(j+1)}} \langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j \rangle$, mais d'après (271) :

$$\langle n j | J_1 | n' j \rangle = i \hbar \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \text{ donc :}$$

$$\frac{\langle n j m | A_{1p} | n' j m' \rangle}{\langle n j m | J_{1p} | n' j m' \rangle} = \frac{\langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j \rangle}{\hbar^2 \sqrt{j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)}} = \frac{\langle n j | \mathbf{J} \cdot A_v | n' j \rangle}{\hbar^2 \sqrt{2j+1} j(j+1)}$$

donc l'élément de matrice de A_v s'exprime en fonction de l'opérateur moment cinétique total par l'intermédiaire de son produit scalaire avec A_v :

$$\langle n j m | A_{1p} | n' j m' \rangle = \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)\sqrt{2j+1}} \langle n j m | J_{1p} | n j m' \rangle \langle n j | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j \rangle \quad (275)$$

Or l'EMR $\langle n j | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j \rangle$ est relié à l'élément de matrice $\langle n j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j m \rangle$ par le théorème de Wigner-Eckart (259) :

$$\langle n j | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j \rangle = \sqrt{2j+1} \langle n j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j m \rangle$$

d'où l'élément de matrice de l'opérateur vectoriel \mathbf{A}_v :

$$\langle n j m | A_{1p} | n' j' m' \rangle = \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)} \langle n j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_v | n' j m \rangle \langle n j m | J_{1p} | n' j m' \rangle$$

qui est le résultat annoncé.
CQFD de (274).

La formule de Landé permet de calculer le moment magnétique moyen d'un fermion de moment cinétique orbital \mathbf{L} et de moment de spin \mathbf{S} . On a vu en (196) et (198) que les valeurs moyennes temporelles des moments magnétiques \mathbf{M}_ℓ et \mathbf{M}_s associés à chacun des moments cinétiques \mathbf{L} et \mathbf{S} font intervenir les facteurs de Landé g_ℓ et g_s ; le moment magnétique total moyen est donc :

$$\mathbf{M} = \mu_B (g_\ell \mathbf{L} + g_s \mathbf{S})$$

où le magnéton de Bohr du fermion est $\mu_B = \frac{Q e \hbar}{2 m_F c}$ où Qe est la charge et m_F la masse du fermion.

Soit M_{1p} les composantes de l'opérateur vectoriel M_1 associé à ce moment magnétique total. Ses éléments de matrice sont obtenus par la formule de Landé (274) où l'état (n) rassemble les états associés aux valeurs de L et S , $n = (LS)$:

$$\langle n j m | M_{1p} | n j m \rangle = \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)} \langle n j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{M} | n j m \rangle \langle n j m | J_{1p} | n j m \rangle$$

Or le moment cinétique total est : $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, d'où le produit scalaire :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot \mu_B (g_\ell \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) = \mu_B (g_\ell \mathbf{L}^2 + g_s \mathbf{S}^2 + (g_\ell + g_s) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S})$$

D'après (225bis) : $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$, d'où :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{M} = \frac{1}{2} \mu_B ((g_\ell - g_s) \mathbf{L}^2 + (g_s - g_\ell) \mathbf{S}^2 + (g_\ell + g_s) \mathbf{J}^2)$$

Quant à $\langle n j m | J_{1p} | n j m \rangle$ il est calculé par (259) :

$$\langle n j m | J_{1p} | n j m \rangle = \begin{pmatrix} m & 1 & j \\ j & p & m \end{pmatrix} \langle n j | J_1 | n j \rangle$$

Les règles de sélection dans $\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$ données en (223), avec les rôles correspondants, entraînent $p = 0$ et :

$$\begin{pmatrix} m & 1 & j \\ j & 0 & m \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}$$

De (271) on a : $\langle n j | J_1 | n j \rangle = i \hbar \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)}$ d'où :

$$\langle n j m | J_{1p} | n j m \rangle = \frac{i \hbar}{\sqrt{2j+1}} \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}} \sqrt{2j+1} \sqrt{j(j+1)} \delta_{p0} = i \hbar m \delta_{p0}$$

La valeur moyenne du moment magnétique total du fermion est finalement :

$$\langle M_{1p} \rangle = \langle n j m | M_{1p} | n j m \rangle = \frac{i}{\hbar} m \delta_{p0} \mu_B f(j, l, s)$$

où : $f(j, l, s) = \frac{1}{2j(j+1)} ((g_l - g_s) L^2 + (g_s - g_l) S^2 + (g_l + g_s) J^2)$. Les opérateurs L^2 , S^2 , J^2 ont respectivement pour valeurs propres : $\hbar^2 l(l+1)$, $\hbar^2 s(s+1)$, $\hbar^2 j(j+1)$ donc :

$$\langle M_{1p} \rangle = i \hbar m \delta_{p0} \mu_B g_L \quad (276a)$$

où g_L est le facteur de Landé du fermion :

$$g_L = \frac{1}{2} (g_l - g_s) \frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)} + \frac{1}{2} (g_l + g_s) \quad (276b)$$

qui est égal à (199).

La détermination du moment magnétique total moyen d'un baryon constitué d'un di-quark de spin \mathbf{S}_{12} et d'un quark de spin \mathbf{S}_3 (par exemple un nucléon) nécessite l'emploi des **coefficients « 6j »** définis par :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & l_3 \\ j_1 & l_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_3 & l_1 & m_2 \\ l_3 & n_1 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & l_2 & m_2 \\ l_1 & n_2 & j_3 \end{pmatrix} \quad (277)$$

On a les moments cinétiques :

$$\begin{aligned} \text{spin : } \mathbf{S}_{12} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \\ \text{total : } \mathbf{J} &= \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_3 \end{aligned}$$

Le moment magnétique du baryon est la valeur moyenne d'un OTI d'ordre $k = 1$, T_1 , de composantes T_{1p} . De manière générale on montre que pour un OTI de rang k , T_k , on a :

$$\langle (s_{12} s_3) s | T_k | (s'_{12} s'_3) s' \rangle = \delta_{s_{12} s'_{12}} \sqrt{2s+1} \sqrt{2s'+1} (-1)^{s_{12} + s'_3 + s + k} \begin{Bmatrix} s_{12} & s_3 & s \\ k & s' s'_3 \end{Bmatrix} \langle s_3 | T_k | s'_3 \rangle \quad (278)$$

À l'exemple du baryon, (278) donne, avec les correspondances $s \rightarrow J$, et $s'_3 = s_3$, $s' = s \rightarrow J$:

– l'EMR de $T_{1p}(\mathbf{S}_3)$ lorsque T_1 agit sur le quark de spin \mathbf{S}_3 :

$$\langle (s_{12} s_3) J | T_k | (s_{12} s_3) J \rangle = \sqrt{2J^2+1} (-1)^{s_{12} + s_3 + J + 1} \begin{Bmatrix} s_{12} & s_3 & J \\ 1 & J & s_3 \end{Bmatrix} \langle s_3 | T_1 | s_3 \rangle \quad (279)$$

– l'EMR de $T_{1p}(\mathbf{S}_{12})$ lorsque T_1 agit sur le di-quark de spin \mathbf{S}_{12} :

$$\langle (s_{12} s_3) J | T_k | (s_{12} s_3) J \rangle = \sqrt{2J^2+1} (-1)^{J+s_3+s+1} \begin{Bmatrix} J & J & 1 \\ s_{12} & s_{12} & s_3 \end{Bmatrix} \langle s_{12} | T_1 | s_{12} \rangle \quad (280)$$

Or l'OTI agissant sur \mathbf{S}_{12} se décompose en : $T_{1p}(\mathbf{S}_{12}) = T_{1p}(\mathbf{S}_1) + T_{1p}(\mathbf{S}_2)$ que l'on remplace dans (280), et en appliquant (278) à $T_1(\mathbf{S}_1)$ et $T_1(\mathbf{S}_2)$ qui fournit les EMR correspondants, il vient, tout calcul fait (réf. [3]) :

$$\langle s_{12} | T_1 | s_{12} \rangle = \sqrt{2s_{12}^2+1} (-1)^{s_1+s_2+s_{12}+1} \left[\begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} & 1 \\ s_1 & s_1 & s_2 \end{Bmatrix} \langle s_1 | T_1 | s_1 \rangle + \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} & 1 \\ s_2 & s_2 & s_1 \end{Bmatrix} \langle s_2 | T_1 | s_2 \rangle \right] \quad (281)$$

– Lorsque T_1 agit sur le baryon de moment cinétique total \mathbf{J} , on a :

$$T_{1p}(\mathbf{J}) = T_{1p}(\mathbf{S}_{12}) + T_{1p}(\mathbf{S}_3)$$

En utilisant (281) pour $T_1(\mathbf{S}_{12})$ et (279) pour $T_1(\mathbf{S}_3)$, et puisque $s_1 = s_2 = s_3 = s$, on obtient l'EMR correspondant à $T_1(\mathbf{J})$:

$$\begin{aligned} \langle J | T_1 | J \rangle = & \sqrt{2J^2+1} \sqrt{2s^2+1} (-1)^{J-s} \begin{Bmatrix} J & J & 1 \\ s_{12} & s_{12} & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} & 1 \\ s & s & s \end{Bmatrix} \times (\langle s_1 | T_1 | s_1 \rangle + \langle s_2 | T_1 | s_2 \rangle) + \\ & + \sqrt{2J^2+1} (-1)^{J+s_{12}+s+1} \begin{Bmatrix} s_{12} & s & J \\ 1 & J & s \end{Bmatrix} \langle s_3 | T_1 | s_3 \rangle \end{aligned} \quad (282)$$

Or pour un baryon $J = 1/2$ donc (282) devient :

$$\begin{aligned} \langle J | T_1 | J \rangle = & \sqrt{2s_{12}^2+1} \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}^2 (\langle s_1 | T_1 | s_1 \rangle + \langle s_2 | T_1 | s_2 \rangle) + \\ & + 2(-1)^{s_{12}} \begin{Bmatrix} s_{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \langle s_3 | T_1 | s_3 \rangle \end{aligned} \quad (283)$$

(283) montre que l'EMR de T_1 agissant sur le moment cinétique total du baryon dépend seulement du spin \mathbf{S}_{12} du diquark. Deux cas se présentent alors :

1°) Diquark de spin $s_{12} = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} s_{12} & s_{12} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = 0 \\ \begin{Bmatrix} s_{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(283) devient :

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \langle J | T_1 | J \rangle = \langle s_3 | T_1 | s_3 \rangle \quad (284)$$

Le moment magnétique moyen d'un baryon de spin $J = 1/2$ constitué d'un diquark de spin nul et d'un quark est égal au moment magnétique du quark libre de spin \mathbf{S}_3 : $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{M}_3$.

2°) Diquark de spin $s_{12} = 1$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc} s_{12} & s_{12} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = -\frac{1}{3} \\ \left(\begin{array}{ccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s_{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(283) devient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M} \rangle = \langle J | T_1 | J \rangle &= \frac{2}{3} (\langle s_1 | T_1 | s_1 \rangle + \langle s_2 | T_1 | s_2 \rangle) - \frac{1}{3} \langle s_3 | T_1 | s_3 \rangle \\ &= \frac{2}{3} (\langle \mathbf{M}_1 \rangle + \langle \mathbf{M}_2 \rangle) - \frac{1}{3} \langle \mathbf{M}_3 \rangle \end{aligned} \quad (285)$$

Le moment magnétique moyen d'un baryon de spin $J = 1/2$ constitué d'un diquark de spin $s_{12} = 1$ et d'un quark de spin \mathbf{S}_3 est égal à (285).

(285) est la relation (246) où $\langle \mathbf{M} \rangle$, $\langle \mathbf{M}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{M}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{M}_3 \rangle$ sont notés respectivement μ , μ_1 , μ_2 , μ_3 .

Annexe 1 : Application exponentielle et formule BCH

(Voir aussi références [18], [19], [20], [21], [22]).

Soient G et G' deux matrices de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ de $SO(n)$. On sait que $\exp(G)$ et $\exp(G')$ sont des matrices de rotation R et R' de $SO(n)$. Pour $n = 2$, R et R' commutent, on peut donc avoir :

$$R'' = \exp(G)\exp(G') = \exp(G')\exp(G) = \exp(G+G') = RR' = R'R$$

Ce n'est généralement plus vrai pour $n \geq 3$. En effet le développement en série des exponentiations conduit à exprimer leur produit sous la forme :

$$\exp(G)\exp(G') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{n_j+m_j > 0 \\ 1 \leq j \leq k}} \frac{G^{n_1} G'^{m_1} \dots G^{n_k} G'^{m_k}}{n_1! m_1! \dots n_k! m_k!} \quad (\text{A1.1})$$

On exprime l'argument G'' de $\exp(G'') = \exp(G)\exp(G')$ pour les premiers termes du développement au voisinage de 0. Pour raisonner sur les ordres il est commode d'écrire G et G' sous la forme :

$$G = \theta J \quad \text{et} \quad G' = \theta J'$$

où J et J' sont des matrices de l'algèbre de Lie, $\theta \ll 1$ un réel. Alors :

$$G''(\theta) = \log(\exp(G'')) = \log(\exp(G)\exp(G'))$$

En considérant les premiers termes en θ^k du développement (A1.1) il vient :

$$\begin{aligned} G''(\theta) &= \log \left[\left(\mathbf{1} + \theta J + \frac{1}{2} \theta^2 J^2 + o(\theta^3) \right) \left(\mathbf{1} + \theta J' + \frac{1}{2} \theta^2 J'^2 + o(\theta^3) \right) \right] \\ &= \log \left[\mathbf{1} + \theta (J + J') + \frac{1}{2} \theta^2 (J^2 + 2JJ' + J'^2) + o(\theta^3) \right] \\ &= \theta (J + J') + \frac{1}{2} \theta^2 (J^2 + 2JJ' + J'^2) - \frac{1}{2} \theta^2 (J + J')^2 + o(\theta^3) \\ &= \theta (J + J') + \frac{1}{2} \theta^2 (JJ' - J'J) + o(\theta^3) \end{aligned}$$

en revenant à G et G' :

$$G'' = G + G' + \frac{1}{2} [G, G'] + \dots$$

En prolongeant le calcul suivant le même principe aux ordres supérieurs on obtient la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$\exp(G'') = \exp(G)\exp(G') = G + G' + \frac{1}{2} [G, G'] + \frac{1}{12} [G, [G, G']] - \frac{1}{12} [G', [G, G']] - \dots \quad (\text{A1.2})$$

Annexe 2 : preuve de $\det(\mathbf{R}_L) > 0$

Cette preuve directe de $\det(\mathbf{R}_L) > 0$ contribue à la proposition (62).

■ Calcul du déterminant de \mathbf{R}_L :

- Calcul des éléments de la matrice 3×3 \mathbf{R}_L : $R_L = (r_{ij})_{i,j=1,2,3}$

On a vu qu'un vecteur $V(x_i)$ se transforme en un vecteur $V'(x'_i)$ selon (61), où $\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{M}' \boldsymbol{\sigma}_i) = \frac{1}{2} \text{tr}(L \mathbf{M} L^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i) = \frac{1}{2} \text{tr}(L(V \cdot \boldsymbol{\sigma}) L^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \text{tr}(L x_j \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \text{tr}(L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i) x_j = \sum_{j=1}^3 r_{ij} x_j \end{aligned}$$

Or, comme $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, il vient :

$$\text{tr}(L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i) = \text{tr}((L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1}) \boldsymbol{\sigma}_i) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_i (L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1})) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_i L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1})$$

donc :

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_i L \boldsymbol{\sigma}_j L^{-1}) \quad (\text{A2.1})$$

où L est donnée par (57) : $L = \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix}$ avec donc $L^+ = \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = L^{-1}$ et où :

$z = \cos \frac{\theta}{2} + i n_3 \sin \frac{\theta}{2}$, $z' = (-n_2 + i n_1) \sin \frac{\theta}{2}$ et les matrices de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit donc à calculer :

$$\text{où : } \Delta_{11} = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} , \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} r_{21} & r_{23} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix} , \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

► Calcul de r_{11} :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 L \boldsymbol{\sigma}_1 L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z'^2 + z^{*2} & z'z + z^*z'^* \\ -zz' - z'^*z^* & z^2 - z'^{*2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$r_{11} = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_1 L \boldsymbol{\sigma}_1 L^{-1}) = \frac{1}{2} ((z^2 - z'^2) + (z^2 - z'^2)^*) \quad \text{soit :}$$

$$r_{11} = \text{Re}(z^2 - z'^2) \quad (\text{A2.3})$$

► Calcul de r_{13} :

$$\sigma_1 L \sigma_3 L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z'z^* & |z'|^2 - |z|^2 \\ |z|^2 - |z'|^2 & 2zz'^* \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{13} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_1 L \sigma_3 L^{-1}) = 2((zz'^*) + (zz'^*)^*) \text{ soit :}$$

$$r_{13} = 4 \text{Re}(zz'^*) \quad (\text{A2.4})$$

► Calcul de r_{12} :

$$\sigma_1 L \sigma_2 L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z'^2 + z^{*2} & -zz' + z^*z'^* \\ zz' - z'^*z^* & -z^2 - z'^{*2} \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{12} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_1 L \sigma_2 L^{-1}) = \frac{i}{2} ((z'^2 - z^2) - (z'^2 - z^2)^*) \text{ soit :}$$

$$r_{12} = \text{Im}(z^2 - z'^2) \quad (\text{A2.5})$$

► Calcul de r_{22} :

$$\sigma_2 L \sigma_2 L^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -z'^2 - z^{*2} & zz' - z^*z'^* \\ zz' - z'^*z^* & -z^2 - z'^{*2} \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{22} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_2 L \sigma_2 L^{-1}) = \frac{1}{2} ((z^2 + z'^2) + (z^2 + z'^2)^*) \text{ soit :}$$

$$r_{22} = \text{Re}(z^2 + z'^2) \quad (\text{A2.6})$$

► Calcul de r_{33} :

$$\sigma_3 L \sigma_3 L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|^2 - |z'|^2 & 2zz'^* \\ -2z'z^* & |z|^2 - |z'|^2 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{33} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_3 L \sigma_3 L^{-1}) = |z|^2 - |z'|^2 \quad (\text{A2.7})$$

► Calcul de r_{23} :

$$\sigma_2 L \sigma_3 L^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -2z'z^* & |z|^2 - |z'|^2 \\ |z|^2 - |z'|^2 & 2zz'^* \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{23} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_2 L \sigma_3 L^{-1}) = i(zz'^* - (zz'^*)^*) \text{ soit :}$$

$$r_{23} = -2 \text{Im}(zz'^*) \quad (\text{A2.8})$$

► Calcul de r_{32} :

$$\sigma_3 L \sigma_2 L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z z' - z^* z'^* & -z^2 - z'^*{}^2 \\ -z'^2 - z^*{}^2 & z z' - z^* z'^* \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{32} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_3 L \sigma_2 L^{-1}) = i(z z' - (z z')^*) \text{ soit :}$$

$$r_{32} = -2 \text{Im}(z z') \quad (\text{A2.9})$$

► Calcul de r_{21} :

$$\sigma_2 L \sigma_1 L^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'^2 - z^*{}^2 & -z z' - (z z')^* \\ -z z' - (z z')^* & z^2 - z'^*{}^2 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{21} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_2 L \sigma_1 L^{-1}) = \frac{i}{2} ((z'^2 - z^*{}^2) + (z^2 - z'^*{}^2)) = \frac{i}{2} (2i \text{Im}(z'^2) + 2i \text{Im}(z^2)) \text{ soit :}$$

$$r_{21} = -\text{Im}(z^2 + z'^2) \quad (\text{A2.10})$$

► Calcul de r_{31} :

$$\sigma_3 L \sigma_1 L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -z'^* \\ z' & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^* & z'^* \\ -z' & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z z' - (z z')^* & z^2 - z'^*{}^2 \\ z'^2 - z^*{}^2 & -z z' - (z z')^* \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$r_{31} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_3 L \sigma_1 L^{-1}) = -((z z') + (z z')^*) \text{ soit :}$$

$$r_{31} = -2 \text{Re}(z z') \quad (\text{A2.11})$$

$\det(\text{RL})$ est réel : en effet tous les termes qui interviennent dans son développement (A2.2) sont réels comme le montrent (A2.3) à (A2.11).

• Calcul des Δ qui interviennent dans (A2.2) :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32} = \text{Re}(z^2 + z'^2)(|z|^2 - |z'|^2) - 4 \text{Im}(z z'^*) \text{Im}(z z') \\ \Delta_{12} &= r_{21} r_{33} - r_{31} r_{23} = -\text{Im}(z^2 + z'^2)(|z|^2 - |z'|^2) - 4 \text{Re}(z z') \text{Im}(z z'^*) \\ \Delta_{13} &= r_{21} r_{32} - r_{22} r_{31} = 2 \text{Im}(z^2 + z'^2) \text{Im}(z z') + 2 \text{Re}(z z') \text{Re}(z^2 + z'^2) \end{aligned} \right\} (\text{A2.12})$$

• Calculs intermédiaires conduisant au déterminant :

En utilisant (A2.12), (A2.3), (A2.4), (A2.5) dans (A2.2), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \det(R_L) &= \text{Re}(z^2 - z'^2) [\text{Re}(z^2 + z'^2)(|z|^2 - |z'|^2) - 4 \text{Im}(z z'^*) \text{Im}(z z')] \\ &+ \text{Im}(z^2 - z'^2) [\text{Im}(z^2 + z'^2)(|z|^2 - |z'|^2) + 4 \text{Re}(z z') \text{Im}(z z'^*)] \\ &+ 8 \text{Re}(z z'^*) [\text{Im}(z^2 + z'^2) \text{Im}(z z') + \text{Re}(z z') \text{Re}(z^2 + z'^2)] \end{aligned} \right\} (\text{A2.13})$$

où l'on rappelle que : $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ avec $a = c$, $b = n_3 s$, $a' = -n_2 s$, $b' = n_1 s$ où l'on a posé : $c = \cos \frac{\theta}{2}$, $s = \sin \frac{\theta}{2}$, ces quantités vérifiant les conditions d'unitarité :

$$|z|^2 + |z'|^2 = 1 \rightarrow a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 = 1$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

ainsi que, bien sûr : $c^2 + s^2 = 1$. Les termes intervenant dans (A2.13) s'expriment alors avec ces quantités :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2 + z'^2) &= a^2 + a'^2 - (b^2 + b'^2) \\ \operatorname{Im}(z^2 + z'^2) &= 2(ab + a'b') \\ \operatorname{Re}(z^2 - z'^2) &= a^2 - a'^2 - (b^2 - b'^2) \\ \operatorname{Im}(z^2 - z'^2) &= 2(ab - a'b') \\ \operatorname{Re}(zz') &= aa' - bb' \\ \operatorname{Im}(zz') &= ab' + a'b \\ \operatorname{Re}(zz'^*) &= aa' + bb' \\ \operatorname{Im}(zz'^*) &= -(ab' - a'b) \\ |z|^2 - |z'|^2 &= a^2 + b^2 - (a'^2 + b'^2) \end{aligned}$$

En utilisant ces expressions dans (A2.2) et les définitions de a, b, a', b', il vient tout calcul (fastidieux) fait :

$$\begin{aligned} \det(R_L) = & \left. \begin{aligned} & c^6 + s^6 [n_1^6 + n_2^6 + n_3^6 + 3n_1^4 - n_1^3 n_3^2 - n_1^2 n_3^4 - 2n_1^2 n_2^4 + 20n_1^3 n_2^2 n_3 + 3n_2^4 n_3^2 + 3n_2^2 n_3^4 - 8n_1 n_2^2 n_3^2] \\ & + s^4 c^2 [14n_1^2 n_2^2 + 14n_2^2 n_3^2 - n_3^4 + 3n_1^4 + 7n_2^4 + 14n_1^2 n_3^2] \\ & + s^2 c^4 [-n_3^2 + 4n_1^2 + 7n_2^2] \\ & + s^5 c [-16n_1 n_2 n_3^3 + 4n_1^4 n_3 - 4n_1 n_2^3 n_3 - 8n_2^3 n_3^2 + n_1^2 n_3^3 - 16n_1^3 n_2 n_3] \\ & + s^3 c^3 [-8n_1 n_2 n_3] \end{aligned} \right| \quad (\text{A2.14}) \end{aligned}$$

■ Signe de $\det(R_L)$:

Pour déterminer le signe de $\det(R_L)$ on raisonne en ordre de grandeur le plus grand en valeur absolue, compte tenu de la condition : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ et de $c^2 + s^2 = 1$:

Puisque $|n_1|, |n_2|, |n_3|$ sont < 1 , et que (A2.14) montre que $\det(R_L)$ est une somme de termes du type $n_1^p n_2^q n_3^r$, avec $p+q+r \leq 6$, les termes les plus grands sont ceux pour lesquels les exposants p, q, r sont les plus petits : $|n_1^p n_2^q n_3^r| \ll |n_1^{p'} n_2^{q'} n_3^{r'}|$ si $p'+q'+r' > p+q+r$, et $\det(R_L)$ est de l'ordre des termes aux exposants les plus petits, affectés des facteurs $s^n c^m$ avec $n+m = 6$ et où $|s|, |c| < 1$.

Dans (A2.14) les exposants les plus petits correspondent au terme : $s^2 c^4 (-n_3^2 + 4n_1^2 + 7n_2^2)$.

- Cas où $n_1^2 \sim n_2^2 \sim n_3^2 \sim n^2 \sim 1/3$: (A2.14) est de l'ordre de :

$$\det(R_L) \sim s^2 c^4 (-1 + 4 + 7) n^2 = 10 n^2 s^2 c^4 > 0$$

- Cas où $n_1^2 \sim 1$: Alors : $n_2^2, n_3^2 \ll 1$ donc : $\det(R_L) \sim 4n_1^2 s^2 c^4 + s^6 + c^6 > 0$
- Cas où $n_2^2 \sim 1$: Alors : $n_1^2, n_3^2 \ll 1$ donc : $\det(R_L) \sim 7n_2^2 s^2 c^4 + s^6 + c^6 > 0$
- Cas où $n_3^2 \sim 1$: Alors : $n_1^2, n_2^2 \ll 1$ donc : $\det(R_L) \sim s^6 + c^6 - s^2 c^4$

▶ si $s^2 \ll 1$, alors $\det(R_L) \sim c^6 > 0$

▶ si $c^2 \ll 1$, alors $\det(R_L) \sim s^6 > 0$

▶ si $s^2 \sim c^2$, alors $\det(R_L) \sim 2s^6 - s^6 = s^6 > 0$

Donc on a pour tous les cas $\det(R_L) > 0$, ce qui termine la preuve de (62).

Annexe 3 : Preuve du théorème de Cartan-Dieudonné

On utilise le **théorème de Cartan** :

■ Théorème de Cartan :

Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q.
Le groupe des endomorphismes orthogonaux dans E, $O(E, q)$ est engendré par les réflexions.

(A3.1)

Preuve de (A3.1) :

La démonstration se fait par récurrence sur $n = \dim E \geq 1$. Soit M un élément de $O(E, q)$.

• Pour $n = 1$, $M = \pm \text{id}$: id est le produit de zéro réflexion, tandis que -id est la réflexion par rapport à l'hyperplan nul.

• Pour $n \geq 2$, on suppose que (A3.1) est vérifié pour $(n-1)$. On a :

a) Soit il existe un vecteur u de E anisotrope, c'est-à-dire pour lequel $q(u, u) \neq 0$, tel que $M(u) = u$.
Soit le sous-espace orthogonal au sous-espace (u) engendré par u :

$$(u)^\perp = \{v \in E : q(u, v) = 0\}$$

De l'identité : $q(u, v) = \frac{1}{2} [q(u+v, u+v) - q(u, u) - q(v, v)]$ il s'ensuit que $q(u, v) = 0$ entraîne :

$$q(v, v) = q(u, u) - q(u+v, u+v)$$

Montrons que $(u)^\perp$ est anisotrope ; pour cela supposons, au contraire, que v est isotrope : pour $v \neq 0$, $q(v, v) = 0$, alors l'égalité précédente donne : $q(u, u) = q(u+v, u+v)$ et comme par hypothèse $u = M(u)$, il vient : $q(M(u), M(u)) = q(M(u)+v, M(u)+v)$ donc $v = 0$, donc $(u)^\perp$ est isotrope, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $(u)^\perp$ est anisotrope.

Il s'ensuit que q induit dans $(u)^\perp$ une forme quadratique $q' = q|_{(u)^\perp}$ non dégénérée, c'est-à-dire telle que $\text{Ker}(q') = \{0\}$:

$$\forall v \in (u)^\perp, q(u, M(v)) = q(M(u), M(v)) = q(u, v) = 0$$

puisque M conserve l'orthogonalité, donc $M(u)^\perp \subset (u)^\perp$, et M induit une isométrie M' de $(u)^\perp$.
Comme au rang n-1, par hypothèse M' est le produit de k réflexions :

$$M' = r'_1 r'_2 \dots r'_k$$

sur $(u)^\perp$. En prolongeant ces k réflexions sur $(u)^\perp$ par les réflexions identité sur (u) , on obtient que M' est une composition de réflexions sur $E = (u) \oplus (u)^\perp$. Puisque $M(u) = u$, on a :

$$M = r_1 r_2 \dots r_k$$

b) Soit u ∈ E est isotrope si $M(u) = u$: $M(u) = u \Rightarrow q(u, u) = 0$.

On examine la contraposée de cette implication, ce qui conduit à 2 cas :

b1) $q(u, u) \neq 0 \Rightarrow v = M(u) \neq u$, avec u-v anisotrope. Soit alors r' la réflexion par rapport au sous-espace $(u-v)^\perp$. De l'identité $q(u+v, u-v) = q(u, u) - q(v, v)$ il vient :

$$q(u+v, u-v) = q(u, u) - q(M(u), M(u)) = 0$$

puisque M conserve la forme quadratique : $q \circ M = q$, donc u+v est orthogonal à u-v :

$$u+v \in (u-v)^\perp$$

Donc : puisque $v = \frac{1}{2}((v+u)-(u-v))$ une réflexion $r'(v)$ donne :

$$r'(v) = \frac{1}{2}(r'(v+u) - r'(u-v))$$

Or : $r'(v+u) = v+u$ et $r'(u-v) = -(u-v)$ car r' est la réflexion par rapport à $(u-v)^\perp$ donc renvoie $u-v$ à $-(u-v)$:

$$r'(v) = \frac{1}{2}(v+u+u-v) = u$$

r' échange donc u avec v , et comme $v = M(u)$ on a : $r'(M(u)) = u$ soit $r' \circ M = \text{id}$, qui nous ramène à la situation (a) précédente, avec $M = r_1 r_2 \dots r_k$.

b2) $q(u,u) \neq 0 \Rightarrow v = M(u) \neq u$, avec $u-v$ isotrope : $q(u-v, u-v) = 0$.

Puisque $q(v,v) = q(M(u), M(u)) = q(u,u) \neq 0$, d'après la proposition (128), $u+v$ est anisotrope.

Soient r' la réflexion par rapport à $(u)^\perp$ et r'' la réflexion par rapport à $(u+v)^\perp$. Comme vu au cas (b1) :

$$r'(u) = -u \text{ et } r''(v) = -u \text{ avec } v = M(u)$$

d'où : $r' r'' M = \text{id}$, qui se ramène au cas (a) : $r' r'' M = r_1 r_2 \dots r_k$ et donc :

$$M = r' r''^{-1} r_1 \dots r_k = r' r''^{-1} r_1 \dots r_k$$

qui est donc bien une composition de réflexions.

CQFD de (A3.1).

On peut maintenant terminer la démonstration du théorème (127) :

■ Pour $n = 2$: soit $O^-(E,q) = O(E,q) - O^+(E,q)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant égal à -1 ou 0, $O^+(E,q)$ étant l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant égal à +1.

On a la proposition :

■ *Proposition :*

Pour $n = 2$, $O^-(E,q)$ est l'ensemble des réflexions de E .

(A3.2)

Preuve de (A3.2) :

Pour $M \in O^-(E,q)$ il existe $u \in E$ anisotrope et une réflexion r telle que cette fois : $r \circ M(u) = \pm u$, donc : $r \circ M = \pm \text{id}$ est de déterminant +1 donc $r \circ M \in O^+(E,q)$ et $M = \pm r^{-1} \circ \text{id} = \pm r$ est une réflexion.

CQFD de (A3.2).

■ Pour $n > 2$:

Soit $M' = M - \text{id} \in O(E,q)$, alors $M'(u) = (M - \text{id})(u) = 0$ si $M(u) = u$, ce qui, d'après le cas (b), implique $q(u,u) = 0$; ainsi : $u \in \text{Ker}(M') \Rightarrow q(u,u) = 0$.

Si $q(u,u) \neq 0$, alors avec $v = M(u) \neq u$, le cas (b2) donne :

$$q(M'(u), M'(u)) = q(M(u) - \text{id}(u), M(u) - \text{id}(u)) = q(v - u, v - u) = 0$$

soit $q(M'(u), M'(u)) = 0$.

• Montrons que si $w \in \text{Im}(M')$ alors $w = M'(u) = 0 \Rightarrow q(w,w) = 0$ (on dit dans ce cas que $\text{Im}(M')$ est un **seti**).

On raisonne par l'absurde :

Soit $u \in E$ avec $q(u,u) \neq 0$. Alors $q(M'(u), M'(u)) = 0$ d'après ce qui précède.

Soit maintenant $q(u,u) = 0$. Puisque $\dim(u)^\perp = n-1 \geq 2$, on a $(u)^\perp \not\subset (u)$, avec $(u) = ((u)^\perp)^\perp$.

Soit $u' \in (u)^\perp$ tel que $q(u', u') \neq 0$. Alors d'après l'identité :

$$q(u-u', u-u') = q(u, u) + q(u', u') - 2q(u, u')$$

et par hypothèse $q(u,u) = 0$ et $q(u, u') = 0$ (puisque $u' \in (u)^\perp$), on a : $q(u-u', u-u') = q(u', u') \neq 0$. De même : $q(u+u', u+u') = q(u, u) + q(u', u') + 2q(u, u') = q(u', u') \neq 0$.

D'où : $q(M'(u-u'), M'(u-u')) = q(M'(u+u'), M'(u+u')) = q(M'(u'), M'(u')) = 0$.
 Donc on a : $q(w, w) = 0$ avec $w = M'(u) \in \text{Im}(M')$.

• Montrons que $n = \dim(E)$ est pair et que $\text{Ker}(M')$ et $\text{Im}(M')$ sont des setim :

Soit ν l'indice de la forme quadratique q . Par définition l'**indice d'une forme quadratique** est la dimension maximale des sous-espaces totalement isotropes, donc sur lesquels q restreinte à eux est nulle. Si q est non dégénérée :

$$\nu \leq \dim(E)/2 = n/2$$

D'après le **théorème du rang** : $n = \dim(E) = \dim \text{Ker}(M') + \dim \text{Im}(M') \leq 2\nu \leq n$ donc $n = 2\nu$, q est une forme quadratique hyperbolique, $\text{Ker}(M')$ et $\text{Im}(M')$ sont deux setim.

• Montrons que $\det(M) = 1$:

On a : $\dim \text{Ker}(M') = \nu$, soit alors une base de $\text{Ker}(M')$ constituée de ν vecteurs $\{e'_1, \dots, e'_\nu\}$. Une base de E est formée de l'ensemble des vecteurs de base de $\text{Ker}(M')$ et de vecteurs $\{e''_1, \dots, e''_\nu\}$ tels que :

$$\forall 1 \leq k, j \leq \nu : q(e''_k, e''_j) = 0 \text{ et } q(e'_k, e''_j) = \delta_{kj}$$

Puisque $n = 2\nu$: la base orthogonale de E est constituée ainsi :

$$\{e_1, \dots, e_n\} = \{e'_1, \dots, e'_\nu, e''_1, \dots, e''_\nu\}$$

Par hypothèse :

$M(e'_k) = e'_k$ puisque $e'_k \in \text{Ker}(M')$ et que $\forall 1 \leq k, j \leq \nu : q(M(e''_j), M(e'_k)) = q(e'_k, e''_j) = \delta_{kj}$; donc $M \in O(E, q) : \det(M) = +1$.

Il s'ensuit que $\det(r \circ M) = -1$ puisque r est une réflexion et $r \circ M$ vérifie le cas (a) ou le cas (b1) vus plus haut : $r \circ M$ est donc le produit de n réflexions au maximum, mais comme $n = 2\nu$ est pair, $r \circ M$ est le produit d'au plus $(n-1)$ réflexions.

On vient de montrer que M est le produit d'au plus n réflexions. Mais on plus précisément la proposition suivante :

■ **Proposition** :

M élément de $O(E, q)$ est le produit d'exactly $c(M)$ réflexions, où :

$$c(M) = n - \dim(F) \leq n$$

où $F = \text{Ker}(M - \text{id})$.

(A3.3)

Preuve de (A3.3) :

Reprenons le raisonnement par récurrence, cette fois pour $c(M)$:

• Pour $c(M) = 0$: alors on a $\text{Ker}(M - \text{id}) = E$ donc $M = \text{id}$, M est alors le produit de 0 réflexion.

• Pour $c(M) \geq 1$:

Hypothèse de récurrence : toute isométrie N telle que

$$c(N) = n - \dim \text{Ker}(N - \text{id}) < c(M)$$

est le produit d'exactly $c(N)$ réflexions.

Montrons que la composition de cette isométrie avec une réflexion r ajoute à N un point fixe v , $N(v) = v$, et donc incrémente de 1 la dimension de l'espace de ses invariants. On construit ainsi de proche en proche la décomposition d'un élément de $O(E, q)$ par des réflexions.

Soit $F = \text{Ker}(M - \text{id}) \subset E$, on alors $E = F \oplus F^\perp$. On a $\text{Im}(M(F^\perp)) \subset F^\perp$: l'image par M d'un vecteur w de F^\perp , $M(w)$, appartient encore à F^\perp puisque M conserve l'orthogonalité. Il est donc possible de restreindre M à F^\perp et d'avoir : $M|_{F^\perp} \in O(F^\perp, q)$, puisque $M|_{F^\perp}$ est une isométrie. Il est commode de décomposer $M|_{F^\perp}$ dans F^\perp puisque $\text{Ker}(M|_{F^\perp}) = \{0\}$, et de prolonger ensuite cette décomposition dans E .

En effet, $\text{Ker}(M|_{F^\perp}) = \{0\}$ puisque :

► $\forall u \in E, \exists v \in F$ et $\exists w \in F^\perp$ tels que $u = v + w$, avec $q(v,w) = 0$.

Par définition $\text{Ker}(M|_{F^\perp}) = \{w \in F^\perp; M(w) = 0\}$, donc : $M(u) = M(v+w) = M(v)+M(w) = M(v)$ donc $w = 0$, donc 0 est un élément de $\text{Ker}(M|_{F^\perp})$.

► Réciproquement : si $q(v,w) = 0$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$, et $M(w) = 0$, alors :
 $q(M(v),M(w)) = q(v,w) = 0$

donc $w = 0$ pour $v \in F$ quelconque.

• Soit maintenant $u' \neq 0$ tel que $M|_{F^\perp}(u') \neq u'$ et :

$$q(M|_{F^\perp}(u'),M|_{F^\perp}(u')) = q(u',u')$$

autrement dit, on choisit un vecteur u' qui n'est pas un point fixe de l'endomorphisme orthogonal $M|_{F^\perp}$. Soit alors l'hyperplan de F^\perp orthogonal au sous-espace engendré par $M|_{F^\perp}(u') - u'$:

$$H = (M|_{F^\perp}(u') - u')^\perp = \{v' \in E / q(v',M|_{F^\perp}(u') - u') = 0\}$$

Dans cet hyperplan H , par définition : $q(v',M|_{F^\perp}(u') - u') = 0$; il existe donc une réflexion par rapport à H telle que, par hypothèse de récurrence, on ait :

$$N|_{F^\perp}(u') = r|_{F^\perp} \circ M|_{F^\perp}(u') = u'$$

Par conséquent : $N|_{F^\perp} \in O(F^\perp, q)$, et l'espace vectoriel engendré par u' est inclus dans l'espace des vecteurs fixes de $N|_{F^\perp}$:

$$(u') \subset \text{Ker}(N|_{F^\perp} - \text{id})$$

donc avec $c(N|_{F^\perp}) = n - \dim \text{Ker}(N|_{F^\perp} - \text{id})$ on a : $c(N|_{F^\perp}) \leq \dim(F^\perp) - 1$.

Or : $\dim(F^\perp) = \dim(E-F) = n - \dim(F) = n - \dim \text{Ker}(M - \text{id}) = c(M)$, donc :

$$c(N|_{F^\perp}) \leq c(M) - 1 \quad (\text{A3.4})$$

Selon l'hypothèse de récurrence :

$$N|_{F^\perp} = r|_{F^\perp} \circ M|_{F^\perp} = r_1|_{F^\perp} \circ \dots \circ r_{c(N|_{F^\perp})} \quad (\text{A3.5})$$

On peut maintenant prolonger dans E cette décomposition restreinte à F^\perp :

On définit : $r_k = \text{id}|_F + r_k|_{F^\perp}$, $1 \leq k \leq c(N|_{F^\perp})$;

Il est clair que $r_k \in \text{GL}(E, q)$.

On définit aussi : $r = \text{id} + N$ où $N = r|_{F^\perp} \circ M|_{F^\perp}$ avec $r \in \text{GL}(E, q)$.

D'après l'hypothèse de récurrence (A3.5) on a donc :

$$M = r \circ r_1 \circ \dots \circ r_{c(N)}$$

qui est donc le produit de $c(N)+1$ réflexions.

• Il reste à montrer que l'on ne peut pas avoir moins de $c(N)$ réflexions composant $M \in O(E, q)$.

Soient m hyperplans H_1, \dots, H_m de E . On suppose que les réflexions r_j par rapport à ces hyperplans H_j , avec $1 \leq j \leq m$, composent exactement M :

$$M = r_1 \circ \dots \circ r_m$$

Dans ce cas les vecteurs u qui appartiennent simultanément à ces m hyperplans H_j sont tels que :

$$(r_1 \circ \dots \circ r_j \circ \dots \circ r_m)u = u = Mu$$

c'est-à-dire :

$$\bigcap_{j=1}^m H_j \subset F = \text{Ker}(M - id) \rightarrow \dim \bigcap_{j=1}^m H_j \leq n - c(M)$$

Une famille de vecteurs $\{u_j\}_{j=1, \dots, m}$ orthogonaux aux hyperplans H_j engendrent un sous-espace $(u_j)_{1 \leq j \leq m}$ orthogonal à tous les H_j . Donc l'orthogonal de cet espace $(u_j)_{1 \leq j \leq m}^\perp$ est l'intersection des H_j :

$$\bigcap_{j=1}^m H_j = (u_j)_{1 \leq j \leq m}^\perp$$

Comme $m \leq n$ on a :

$$\dim \bigcap_{j=1}^m H_j \geq n - m$$

d'où :

$$n - m \leq \dim \bigcap_{j=1}^m H_j \leq n - c(M)$$

donc : $m \geq c(M)$. Mais comme M est le produit d'au plus $c(N)+1$ réflexions, on a aussi $m \leq c(N)+1$. Or : $c(N)+1 \leq c(M)$, ce qui donne : $c(M) \leq m \leq c(N)+1 \leq c(M)$; finalement $m = c(M)$.

CQFD de (A3.3).

Annexe 4 : Preuve de (120)

Il suffit de prouver (120) pour les vecteurs de base : $u = e_j, 1 \leq j \leq n$

$$\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \quad \text{où } p \text{ est l'ordre de } (\text{Diff}(E), \wedge)$$

• Supposons $i_k = j$, alors $\omega \wedge u = 0$, et quelle que soit la famille $(u_1, \dots, u_{k-1}) \in \mathbf{R}^{k-1}$ on a :

$$\begin{aligned} u \cdot \omega(u_1, \dots, u_{p-1}) &= e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(e_j, u_1, \dots, u_{p-1}) \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_j, u_k, \dots, u_{p-1}) && \text{(antisymétrie de } \wedge) \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, \dots, u_{p-1}) \end{aligned}$$

Donc : $u \cdot \omega = (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$

Et d'après (119) :

$$\begin{aligned} u \cdot \omega &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_{k-1}} \circ e_{i_{k+1}} \circ \dots \circ e_{i_p} \\ &= (-1)^k e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_{k-1}} \circ (e_{i_k} \circ e_{i_k}) \circ e_{i_{k+1}} \circ \dots \circ e_{i_p} \end{aligned}$$

par antisymétrie de « \circ » avec les vecteurs orthogonaux de base. Or : $(e_{i_k} \circ e_{i_k}) = e_{i_k}^2 = -1$ d'où :

$$u \cdot \omega = (-1)^{2k-1} e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}$$

Or $e_{i_k} = e_j = u$, $\omega = e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}$ et $(-1)^{2k-1} = -1$:

$$u \cdot \omega = -u \circ \omega = (-1)^p \omega \circ u$$

• Pour $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ on a $u \cdot \omega = 0$ puisque e_j est orthogonal aux e_{i_k} , et il reste :

$$\begin{aligned} u \wedge \omega &= e_j \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \\ &= e_j \circ e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p} && \text{d'après (119)} \\ &= u \circ \omega && \text{puisque } u = e_j \\ &= (-1)^p \omega \circ u \end{aligned}$$

CQFD de (120).

Annexe 5 : Détermination des rotations 4D, éléments de SO(4), par la transformation de Cayley

A5.1 – Formule de Cayley des rotations 4D

Voir référence [15].

On reprend les mêmes notations et définitions qu'aux points (5.5.2), (5.5.3), (5.5.4), (5.5.5).

■ Théorème :

Soit une matrice 4x4 antisymétrique $M \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbf{R})$, elle s'écrit donc selon (147) avec les mêmes définitions :

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$

Alors :

a) Si les valeurs propres de M sont telles que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la matrice suivante est une rotation 4D, élément de SO(4) :

$$\begin{aligned} R(\lambda_1, \lambda_2) &= T_C(M) = (\mathbf{1} + M)(\mathbf{1} - M)^{-1} \\ &= \mathbf{1} + \frac{2\lambda_1}{1 + \lambda_1^2} M_1 + \frac{2\lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2} M_1^2 + \frac{2\lambda_2}{1 + \lambda_2^2} M_2 + \frac{2\lambda_2^2}{1 + \lambda_2^2} M_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A5.1})$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 > 0$ la matrice suivante est une rotation 4D, élément de SO(4) :

$$R(\lambda_0) = T_C(M) = (\mathbf{1} + M)(\mathbf{1} - M)^{-1} = \frac{1 - \lambda_0^2}{1 + \lambda_0^2} \mathbf{1} + \frac{2}{1 + \lambda_0^2} M^2$$

c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 > 0$ la matrice suivante est une rotation 4D, élément de SO(4) :

$$R(\lambda_0) = T_C(M) = (\mathbf{1} + M)(\mathbf{1} - M)^{-1} = \mathbf{1} + \frac{2}{1 + \lambda_0^2} M + \frac{2}{1 + \lambda_0^2} M^2$$

Preuve de (A5.1) :

• Cas (a) : On effectue le développement en série de $(\mathbf{1} - M)^{-1}$:

$$(\mathbf{1} - M)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{m \geq 1} M^m$$

D'après la proposition (147) :

$$\begin{aligned} M^2 &= (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \\ &= \lambda_1^2 M_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 M_1 M_2 + \lambda_2 \lambda_1 M_2 M_1 + \lambda_2^2 M_2^2 \\ &= \lambda_1^2 M_1^2 + \lambda_2^2 M_2^2 \end{aligned}$$

puisque $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$. On montre de même :

$$\begin{aligned} M^3 &= -\lambda_1^3 M_1 - \lambda_2^3 M_2 \\ M^4 &= -\lambda_1^4 M_1^2 - \lambda_2^4 M_2^2 \\ M^5 &= \lambda_1^5 M_1 + \lambda_2^5 M_2 \end{aligned}$$

$$M^{2p} = (-1)^{p+1} (\lambda_1^{2p} M_1^2 + \lambda_2^{2p} M_2^2)$$

$$M^{2q+1} = (-1)^q (\lambda_1^{2q+1} M_1 + \lambda_2^{2q+1} M_2)$$

où $p, q = 1, 2, 3, \dots$ Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}-M)^{-1} &= \mathbf{1} + (\lambda_1 - \lambda_1^3 + \lambda_1^5 - \dots + (-1)^q \lambda_1^{2q+1} + \dots) M_1 \\ &+ (\lambda_1^2 - \lambda_1^4 + \lambda_1^6 - \dots + (-1)^{p+1} \lambda_1^{2p} + \dots) M_1^2 \\ &+ (\lambda_2 - \lambda_2^3 + \lambda_2^5 - \dots + (-1)^q \lambda_2^{2q+1} + \dots) M_2 \\ &+ (\lambda_2^2 - \lambda_2^4 + \lambda_2^6 - \dots + (-1)^{p+1} \lambda_2^{2p} + \dots) M_2^2 \\ &= \mathbf{1} + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} R &= (\mathbf{1}+M)(\mathbf{1}-M)^{-1} \\ &= (\mathbf{1} + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \left(\mathbf{1} + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2 \right) \end{aligned}$$

Comme $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$ il vient :

$$R = \mathbf{1} + \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 + \frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{2\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2$$

Vérifions que R est bien orthogonal et unitaire : $\det(R) = 1, {}^t R R = \mathbf{1}$.

Puisque ${}^t M_1 = -M_1$ et ${}^t M_2 = -M_2$ on a :

$${}^t R = \mathbf{1} - \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 - \frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{2\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2$$

d'où immédiatement, compte tenu de $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$: ${}^t R R = R {}^t R = \mathbf{1}$.

$\det(R) = \det[(\mathbf{1}+M)(\mathbf{1}-M)^{-1}]$; or : $\det(\mathbf{1}+M) = \det(\mathbf{1}-M)$, donc : $\det(R) = 1$.

• Cas (b) : D'après (147) : $M^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1}$, d'où le développement en série de $(\mathbf{1}-M)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}-M)^{-1} &= (1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^4 - \lambda_0^6 + \dots + (-1)^p \lambda_0^{2p} + \dots) \mathbf{1} \\ &+ (1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^4 - \lambda_0^6 + \dots + (-1)^p \lambda_0^{2p} + \dots) M \\ &= \frac{1}{1+\lambda_0^2} (\mathbf{1}+M) \end{aligned}$$

donc : $R = T_C(M) = \frac{1}{1+\lambda_0^2} (\mathbf{1}+M)(\mathbf{1}+M) = \frac{1}{1+\lambda_0^2} (\mathbf{1}+M^2+2M)$. Comme $M^2 = -\lambda_0^2 \mathbf{1}$ il vient :

$$R = \frac{1}{1+\lambda_0^2}(\mathbf{1} - \lambda_0^2 \mathbf{1} + 2M) = \frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M$$

M étant antisymétrique : ${}^t M = -M$ d'où : ${}^t R = \frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} - \frac{2}{1+\lambda_0^2} M$

$$\begin{aligned} {}^t R R &= \left(\frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} - \frac{2}{1+\lambda_0^2} M \right) \left(\frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M \right) \\ &= \frac{1}{(1+\lambda_0^2)^2} (1+\lambda_0^4 - 2\lambda_0^2 + 4\lambda_0^2) \mathbf{1} = \frac{(1+\lambda_0^2)^2}{(1+\lambda_0^2)^2} \mathbf{1} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit : $\det({}^t R R) = \det \mathbf{1} = 1 = (\det({}^t R))(\det(R)) = (\det(R))^2$ donc $\det(R) = 1$.

• Cas (c) : D'après (147) : $M^3 = -\lambda_0^2 M$ d'où :

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - M)^{-1} &= \mathbf{1} (1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^4 - \lambda_0^6 + \dots + (-1)^p \lambda_0^{2p} + \dots) M \\ &+ (1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^4 - \lambda_0^6 + \dots + (-1)^p \lambda_0^{2p} + \dots) M^2 \\ &= \mathbf{1} + \frac{1}{1+\lambda_0^2} (M + M^2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} R &= T_C(M) = (\mathbf{1} + M)(\mathbf{1} - M)^{-1} = \mathbf{1} + M + \frac{1}{1+\lambda_0^2} (M + M^2 + M^2 + M^3) \\ &= \mathbf{1} + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M^2 \end{aligned}$$

et :

$${}^t R = \mathbf{1} - \frac{2}{1+\lambda_0^2} M + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M^2$$

Alors puisque $M^3 = -\lambda_0^2 M$ on a :

$$\begin{aligned} {}^t R R &= \mathbf{1} + \frac{4}{1+\lambda_0^2} M^2 - \left(\frac{2}{1+\lambda_0^2} \right)^2 M^2 + \left(\frac{2}{1+\lambda_0^2} \right)^2 M^4 \\ &= \mathbf{1} + \frac{4}{1+\lambda_0^2} M^2 - \left(\frac{2}{1+\lambda_0^2} \right)^2 M^2 - \lambda_0^2 \left(\frac{2}{1+\lambda_0^2} \right)^2 M^2 \\ &= \mathbf{1} + \frac{4M^2}{1+\lambda_0^2} \left(1 - \frac{1}{1+\lambda_0^2} - \frac{\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \right) = \mathbf{1} \end{aligned}$$

d'où : $\det(R) = 1$.

CQFD de (A5.1).

A5.2 – Matrice antisymétrique ayant une matrice de rotation par transformation de Cayley, de valeurs propres données

On traite maintenant le problème inverse : Connaissant une matrice de rotation $R \in SO(4)$, on détermine la matrice antisymétrique M dont elle est l'image par la transformation de Cayley.

■ **Théorème :**

Soit $R \in SO(4)$ dont les 4 valeurs propres sont de la forme :

$$\frac{(1+i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2}, \quad \frac{(1-i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2}, \quad \frac{(1+i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2}, \quad \frac{(1-i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2}$$

Alors il existe une matrice antisymétrique $M \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ dont la transformation de Cayley est : $R = T_C(M)$, et égale à :

a) Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$M = \frac{(1+\lambda_1^2)^2(1+\lambda_2^2)}{16(\lambda_2^2-\lambda_1^2)} \left[R^2 - {}^t(R^2) - \frac{2(1-\lambda_2^2)}{1+\lambda_2^2} (R - {}^t R) \right] + \frac{(1+\lambda_2^2)^2(1+\lambda_1^2)}{16(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \left[R^2 - {}^t(R^2) - \frac{2(1-\lambda_1^2)}{1+\lambda_1^2} (R - {}^t R) \right] \quad (\text{A5.2})$$

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$:

$$M = \frac{1+\lambda_0^2}{4} (R - {}^t R)$$

c) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 > 0$:

$$M = \frac{1+\lambda_0^2}{4} (R - {}^t R)$$

Pour prouver (A5.2) il nous faut d'abord établir les valeurs propres de $T_C(M)$.

■ **Lemme :**

Soit $M \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique. Elle se décompose suivant deux matrices M_1 et M_2 selon (148) :

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$

où $\lambda_1, \lambda_2, M_1, M_2$ sont définies par (147).

Alors sa transformée par la formule de Cayley, $R = T_C(M)$ a pour valeurs propres :

$$\frac{(1+i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2}, \quad \frac{(1-i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2}, \quad \frac{(1+i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2}, \quad \frac{(1-i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2}$$

Preuve de (A5.3) :

Comme vu en (147), avec les mêmes définitions et propriétés :

$$M = A B A^+$$

où $A A^+ = A^+ A = \mathbf{1}$ et :

$$B = \begin{bmatrix} i\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\lambda_2 \end{bmatrix}$$

D'où : $R = (\mathbf{1} + A B A^+) (\mathbf{1} - A B A^+)^{-1}$.

Or : $(\mathbf{1} - A B A^+)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{1} - A B A^+)} {}^t \text{Com}(\mathbf{1} - A B A^+)$ où Com désigne la co-matrice ⁽⁹⁾, et puisque :

$$\det(R) = 1 = \det(\mathbf{1} + M) \det(\mathbf{1} - M)^{-1} = \frac{\det(\mathbf{1} + M)}{\det(\mathbf{1} - M)} \text{ soit } \det(\mathbf{1} - M) = \det(\mathbf{1} + M)$$

on a :

$$R = A(\mathbf{1} + B)(\mathbf{1} - B)^{-1} A^+$$

Et puisque :

$$(\mathbf{1} + B)(\mathbf{1} - B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1+i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-i\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-i\lambda_2)^2}{1+\lambda_2^2} \end{bmatrix}$$

et que A est unitaire, il s'ensuit que R a pour valeurs propres les composantes de $(\mathbf{1} + B)(\mathbf{1} - B)^{-1}$.
CQFD de (A5.3).

Preuve de (A5.2) :

• Cas (a) : D'après le cas (a) de la preuve (A5.1) :

$$R = \mathbf{1} + \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 + \frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{2\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2$$

9 La co-matrice d'une matrice nxn, $Q = (q_{km})$, $k, m = 1, \dots, n$, est la matrice des cofacteurs c_{ps} de Q : $\text{Com}(Q) = (c_{ps})$.
Le cofacteur d'un élément q_{ps} de Q est égal au déterminant de la matrice (n-1)x(n-1) obtenue en enlevant la ligne p et la colonne s (c'est-à-dire le mineur m_{ps}) multiplié par $(-1)^{p+s}$: $c_{ps} = (-1)^{p+s} m_{ps}$.

De ${}^t M_1 = -M_1$ et ${}^t M_2 = -M_2$ il vient :

$${}^t R = \mathbf{1} - \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{2\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2} M_1^2 - \frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 + \frac{2\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} M_2^2$$

et puisque $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0$, on a les deux équations linéaires aux deux inconnues M_1 et M_2 :

$$\left| \begin{array}{l} R - {}^t R = \frac{4\lambda_1}{1+\lambda_1^2} M_1 + \frac{4\lambda_2}{1+\lambda_2^2} M_2 \\ R^2 - {}^t(R^2) = \frac{8\lambda_1(1-\lambda_1^2)}{(1+\lambda_1^2)^2} M_1 + \frac{8\lambda_2(1-\lambda_2^2)}{(1+\lambda_2^2)^2} M_2 \end{array} \right.$$

dont les solutions sont les résultats annoncés.

• Cas (b) : Du cas (b) de (A5.1) on a :

$$R = \frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M$$

$$\text{d'où : } {}^t R = \frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \mathbf{1} - \frac{2}{1+\lambda_0^2} M$$

$$\text{d'où : } R - {}^t R = \frac{4}{1+\lambda_0^2} M \text{ ce qui donne :}$$

$$M = \frac{1+\lambda_0^2}{4} (R - {}^t R)$$

• Cas (c) : Du cas (c) de (A5.1) on a :

$$R = \mathbf{1} + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M^2$$

$${}^t R = \mathbf{1} - \frac{2}{1+\lambda_0^2} M + \frac{2}{1+\lambda_0^2} M^2$$

$$\text{d'où : } R - {}^t R = \frac{4}{1+\lambda_0^2} M \text{ ce qui donne :}$$

$$M = \frac{1+\lambda_0^2}{4} (R - {}^t R)$$

CQFD de (A5.2).

A5.3 – Types de rotation 4D selon les valeurs propres de la matrice antisymétrique d'où est obtenue la rotation par la formule de Rodrigues ou la transformation de Cayley

On a vu que d'une matrice antisymétrique $M \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbf{R})$ on peut construire une matrice de rotation 4D, élément de $\text{SO}(4)$, au moyen de :

- une exponentiation (formule de Rodrigues), théorème (148), donnant la matrice de rotation $R(\lambda_1, \lambda_2)$ dont les valeurs propres sont indiquées dans (151) ;
- la transformation de Cayley (théorème A5.1) donnant la matrice de rotation $R(\lambda_1, \lambda_2)$ dont les valeurs propres sont indiquées dans (A5.3),

où, dans les deux cas, λ_1, λ_2 interviennent dans les valeurs propres de M (voir (146)) :

$$i\lambda_1, -i\lambda_1, i\lambda_2, -i\lambda_2 \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Ces valeurs propres conditionnent directement le type de rotation 4D :

- Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$ ou si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$, R est une rotation 4D simple (point 5.5.2).
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, R est une rotation 4D double, avec $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \pi$.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 > 0$, R est une rotation 4D isoclinique, avec $0 \leq \lambda_0 \leq \pi$.

Références et bibliographie

- [1] Frédéric Élie : *Spineurs et algèbre vectorielle en physique quantique ; application à l'équation de Dirac*, site <http://fred.elie.free.fr> , octobre 2017
- [2] Pierre Colmez : *Éléments d'analyse et d'algèbre*, Éditions de l'École Polytechnique, septembre 2011
- [3] Elbaz Edgard: *Quantique*, éd. Marketing, coll. Ellipses, Paris 1995
- [4] Marcel Berger, Bernard Gostiaux : *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces* – Presses Universitaires de France, janvier 2013
- [5] Chanfray Guy, Smadja Gérard : *Les particules et leurs symétries* – Masson 1997
- [6] Appel Walter : *Mathématiques pour la physique et les physiciens* – H & K editions 2005
- [7] Bertrand Delamotte : *Un soupçon de théorie des groupes: groupe des rotations et groupe de Poincaré*. DEA. 2006. cel-00092924
- [8] Frédéric Faure : *Cours de géométrie et topologie pour la physique pour Master M2 de physique*, 2010. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/geometrie_topologie_M2/index.html
- [9] Frédéric Faure : *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*, 2014 https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/
- [9] Hall B. : *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations : An Elementary Introduction*. Springer-Verlag New York, 2004.
- [10] François Labourie, suivant les notes de Pierre Pansu et Laurent Clozel : *Groupe fondamental et revêtements*. Laboratoire de Mathématique d'Orsay, 11 avril 2008, <http://www.math.u-psud.fr/~pansu>
- [11] Godbillon Claude: *Géométrie différentielle et mécanique analytique* – Hermann, 1969
- [12] Marcel Berger, Bernard Gostiaux : *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces* – Presses Universitaires de France, janvier 2013
- [13] Nicolas Bergeron : *Revêtements et groupe fondamental*. Cours Master 1, université Paris 13, 2010, <https://www.math.univ-paris13.fr/~ginot//RGF/> et https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/GpFund%26Revt.pdf
- [14] Claude Danthony : *Feuilletages orientés des surfaces : le problème de la section globale*. Annales de l'institut Fourier, tome 38, no 2 (1988), p. 201-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_2_201_0>
- [15] Melek Erdoğdu, Mustafa Özdemir : *Simple, Double and Isoclinic Rotations with a Viable Algorithm*. Mathematical Sciences and Applications e-Notes 8 (1) 1-14 (2020)
[HTTPS://DOI.ORG/10.36753/MATHENOT.642208](https://doi.org/10.36753/MATHENOT.642208)
- [16] R. K. Bhaduri : *Models of the Nucleon from Quarks to Soliton* – Addison-Wesley, Redwood, California (1988)
- [17] Jean-Marc Richard : *An introduction to the quark model* - Université de Lyon & Institut de Physique Nucléaire de Lyon IN2P3-CNRS & UCB (Lectures at the Niccolò Cabeo School at Ferrara in May 2012)
- [18] Thomas Richez, sous la direction de M. Rausch De Traubenberg : *Étude des symétries en physique des particules* - Rapport de stage de deuxième année de Magistère, UFR de Mathématique et d'Informatique, Magistère de Mathématique de Strasbourg. Année : 2011/2012
https://t-richez.pagesperso-orange.fr/ressources/recherche/rapport_stage_m1.pdf

- [19] Yvette Kosmann-Schwarzbach : *Groupes et Symétries, Groupes finis, Groupes et Algèbres de Lie, Représentations* - Promotion 2001, Année 3, Majeure 1 MAT553, Achevé d'imprimer le 25 septembre 2003 sur les presses de l'imprimerie de l'École polytechnique ♦ Dépôt légal : 3e trimestre 2003 N° ISBN 2 – 7302 – 1060 – 1 - https://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_1257_4.pdf
- [20] Grégory Ginot : *Groupes et Algèbres de Lie* - Université Pierre et Marie Curie, Master de Mathématiques, 2014-2015 - https://webusers.imj-prg.fr/~gregory.ginot/GL/GAL_2015.pdf
- [21] Michel Goze : *Algèbres de Lie : classifications, déformations et rigidité, géométrie différentielle* - Novembre 2, 2018, Cours donné à l'ENSET d'Oran en novembre 2006 durant la cinquième École de Géométrie différentielle et Systèmes Dynamiques ; arXiv:0805.0468v1 [math.RA], 5 mai 2008 <https://arxiv.org/pdf/0805.0468.pdf>
- [22] M. A. Naimark, A. I. Stern : *Theory of Group Representations*, Springer, 1982
- [23] Appel Walter : *Mathématiques pour la physique et les physiciens* – H & K editions 2005
- [24] F. Delduc : *Introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens*, Laboratoire de physique de l'ENS Lyon, septembre 2008 - http://perso.ens-lyon.fr/francois.delduc/Groupes_2008.pdf
- [25] Michèle Audin : *Topologie : revêtements et groupe fondamental* - Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin> , version du 22 septembre 2004
- [26] Ian Glendinning : *The Bloch Sphere* - European Centre for Parallel Computing at Vienna, QIA Meeting, TechGate, February 16, 2005 - <http://www.vcpc.univie.ac.at/~ian/hotlist/qc/talks/bloch-sphere.pdf>
- [27] Christophe Desmonts : *Géométrie spinorielle et surfaces de R^3* – Université de Lorraine, Mémoire de Master, Sujet proposé et encadré par M. Oussama Hijazi, Professeur à l'Institut Elie Cartan de Nancy (IECN), septembre 2012 - <https://www.theses.fr/187871086>
- [28] Manon Ruffini : *Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Application.* http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~mruffini/Files/Other/ruffini_memoire.pdf
- [29] Pierron Théo : *Topologie algébrique*, ENS Ker Lann <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tpier758/cours/topa.pdf>
- [30] P. Pansu : *Groupe fondamental, revêtements* – 4 avril 2007 https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pansu/web_maitrise/revetements.pdf
- [31] Alexandru Oancea : *Notes de cours de Topologie algébrique : Fibrés vectoriels et classes caractéristiques* - Université Pierre et Marie Curie, Master de mathématiques fondamentales, 2ème année, <https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html> , 22 novembre 2016
- [32] Basile Pillet. *Géométrie complexe globale et infinitésimale de l'espace des twisteurs d'une variété hyperkählérienne*. Géométrie symplectique [math.SG]. Université Rennes 1, 2017. Français. NNT : 2017REN1S021. Tel-01624829 - <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01624829/document>
- [33] Daniel Lévy : *Homotopies et application à l'étude des R -algèbres en dimension finie* - Concours 2012 <https://ai.stanford.edu/~danilevy/pdf/Tipe.pdf>
- [34] Geoffroy Horel : *Topologie algébrique* - École Normale Supérieure, année 2019-2020 <https://geoffroy.horel.org/Topologie%20alg%C3%A9brique.pdf>
- [35] Romain Siméon : *Classification des surfaces compactes* - Travail d'Étude et de Recherche, M1 mathématiques générales, Année universitaire 2018 – 2019 ; tuteur : Deraux Martin <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~M1maths/fichiers/TER%20Simeon%20Romain%20Classification>

[36] Jean-Baptiste Campesato et Agnès Marchand : *Groupe fondamentale et revêtements* - Mémoire de M1, 10 mai 2011, mémoire sous la direction de M. Ingo Waschkie
<http://www.math.toronto.edu/campesat/docs/memoire.pdf>

[37] Daniel Perrin : *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[38] Johan Ernest Mebius : *A matrix-based proof of the quaternion representation theorem for four-dimensional rotations* - September 2004, arXiv:math/0501249v1 [math.GM]

[39] Thomas Haettel : *Introduction à la théorie géométrique des groupes* - Cours de Master 2, année 2016-2017, Université de Montpellier - <https://imag.umontpellier.fr/~haettel/TGG.pdf>

[40] Sophie Lejeune : *Introduction à la théorie des revêtements et applications* - M2 MFA, Université de Poitiers, Année universitaire 2012 – 2013, Professeur référent : M. Nadir Matringe
<http://nuxeo.edel.univ-poitiers.fr/nuxeo/site/esupversions/ceab57aa-2552-48e3-8357-b5bcbd95564a>