



Rayonnements micro-ondes: temps de relaxation de Debye et deux expériences avec un four micro-onde domestique

Frédéric Élie,
(juin 2016, juillet 2017)

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Les interactions d'un rayonnement électromagnétique micro-ondes avec un milieu matériel sont principalement liées à la polarisation d'orientation de ce milieu: les molécules s'orientent constamment avec le champ électromagnétique variable et sinusoïdal parce que leurs moments électriques dipolaires génèrent, à leur tour, un champ en réponse à son effet. Ainsi, les molécules changent d'orientation, tournent, lors de la recherche d'un tel alignement, et ces mouvements produisent de la chaleur dans le milieu matériel: c'est le principe du chauffage par micro-ondes. La réponse des molécules du milieu matériel aux sollicitations du champ électromagnétique extérieur n'est pas instantanée: ce retard est le temps de relaxation. Celui-ci est minimal lorsqu'il est égal au temps de relaxation de Debye, lequel dépend de la fréquence du champ électromagnétique exciteur, ainsi que des propriétés d'amortissement du milieu. On comprend alors qu'à une valeur imposée au temps de Debye correspond une fréquence privilégiée du champ exciteur. Pour les fours à micro-ondes, ce compromis conduit au choix d'une fréquence égale à 2,45 GHz. C'est ce que nous expliquons succinctement dans l'article "Fours micro-ondes, expériences amusantes". Voir aussi l'article "Sur la nocivité des téléphones portables".

Dans le présent article, au chapitre 1, nous montrons de manière théorique comment l'on obtient l'expression du temps de relaxation de Debye à partir de la modélisation des processus d'interactions d'un milieu matériel et d'un champ électromagnétique; ces interactions mettent principalement en jeu la polarisation au sein du matériau. Pour d'autres gammes de fréquences de rayonnement, l'aimantation intervient aussi.

Au chapitre 2, le processus par lequel le four micro-onde chauffe ou cuit les aliments est succinctement présenté.

Au chapitre 3, on propose deux expériences très simples qui utilisent un four micro-onde domestique : a) retrouver la fréquence de fonctionnement du four à l'aide d'une tablette de chocolat ; b) allumer une ampoule électrique dans le four, le filament étant cassé ou bien intact, le tout avec les précautions d'usage.

SOMMAIRE

0. Cuisson par micro-ondes : généralités

1. Rayonnement électromagnétique, son interaction avec un milieu matériel dans le domaine des fréquences micro-ondes

1.1 – Polarisation et aimantation des milieux matériels

1.1.1 - Polarisation

1.1.2 - Aimantation

1.2 – Dispersion et absorption dans un milieu soumis à un champ électromagnétique

1.2.1 – équations de Maxwell

1.2.2 - milieu dispersif : théorie de Drude-Lorentz

1.2.3 - milieu conducteur ou isolant selon la théorie de Drude-Lorentz

1.2.4 - différents types de polarisation du milieu en présence d'un champ électromagnétique

1.2.4.1. Polarisation électronique

1.2.4.2. Polarisation ionique

1.2.4.3. Polarisation d'orientation : équations de Debye

1.2.4.4. Polarisation totale

1.2.4.4.1. Pour un milieu isolant

1.2.4.4.2. Pour un milieu conducteur

2. Fours micro-ondes

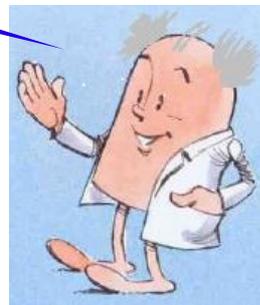
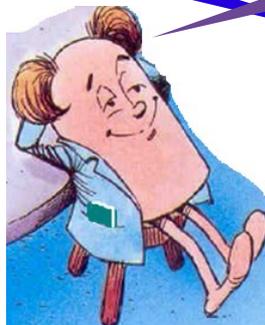
3. Deux expériences avec un four micro-onde domestique

3.1 – Allumer une ampoule électrique dans le four micro-onde

3.2 - Mesurer la fréquence avec une tablette de chocolat

Eh bien, Méson, que fais-tu là ?

Je me relaxe, Photon ! C'est le temps de la relaxation de Debye !



0. Cuisson par micro-ondes : généralités

Le rayonnement micro-onde fait partie, dans le spectre électromagnétique, des rayonnements hyperfréquences : ondes électromagnétiques, non ionisantes, de fréquences de 300 MHz à 30 GHz (MHz : Mégahertz = 10^6 Hz ; GHz : Gigahertz = 10^9 Hz). C'est le domaine des ondes

radars, des téléphones portables, des émissions dans les fours micro-ondes, de la WiFi, des communications par satellites (1)... A ces fréquences, le rayonnement pénètre très peu dans les métaux, et plus généralement dans les conducteurs, donc se réfléchit ; par contre il a une action thermique, due aux mouvements des molécules (translation, vibration, rotation) dans les milieux à composantes liquides (eau...) et/ou organiques, et qui donc ont la propriété de l'absorber : c'est ainsi que les aliments ou les liquides sont chauffés ou cuisent dans un four micro-onde. Ce constat est à l'origine de l'idée d'utiliser les micro-ondes pour la cuisson des aliments, due à Percy Spencer, ingénieur chercheur radariste chez RAYTHEON en 1945. La cuisson par micro-ondes a été brevetée en 1950 par RAYTHEON, et le premier four micro-ondes (pour application industrielle) est sorti en 1953.

Lorsque les micro-ondes pénètrent dans un milieu, comme les aliments, elles font tourner les molécules polaires avec une très grande vitesse, et les frottements entre les molécules que cela entraîne sont sources de chaleur, ce qui permet de cuire les aliments. Les molécules polaires sont les molécules qui portent des charges électriques différentes en chacune de leurs extrémités ; c'est le cas de la molécule d'eau, H₂O, qui compose une grande partie des aliments et des milieux biologiques. En effet, la charge positive est portée par les atomes d'hydrogène, et la charge négative par l'atome d'oxygène [9].

Plus exactement, les molécules d'eau d'un aliment présentent une distribution aléatoire de leurs orientations. Mais en présence d'un champ électrique continu les pôles positifs des molécules d'eau s'orientent dans la même direction que le champ (**polarisation de Debye**). Si le champ est une onde électromagnétique, composée d'un champ électrique ondulatoire et d'un champ magnétique ondulatoire, alors les pôles des molécules alternent leur alignement avec le sens du champ électrique ondulatoire, et de ce fait sont en rotation autour de l'axe de symétrie de la molécule (figure 1).

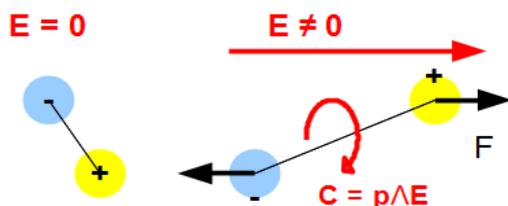


figure 1 : Polarisation d'orientation (Debye): la présence d'un champ électrique local E a pour effet d'imposer une force F d'orientation des charges avec ce champ, et donc un couple de rotation des charges égal à $C = p \wedge E$, où p est le moment dipolaire de la molécule $p = q AB$, où A et B sont les barycentres des charges « - » et des charges « + »

La figure 2 représente le moment dipolaire de la molécule d'eau :

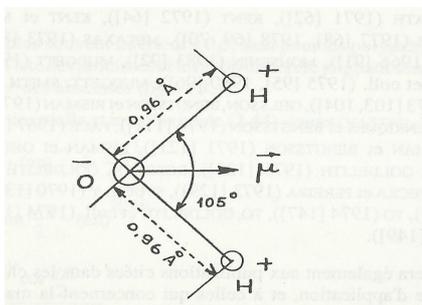


figure 2 : moment dipolaire de la molécule d'eau (d'après Massieu G. : Chimie minérale, éd. Baillière & fils, 1966)

En fait cette synchronisation de l'alignement des molécules suivant le champ électrique ondulatoire qui compose une onde électromagnétique, se produit seulement pour des fréquences de l'onde suffisamment basses : le seuil est de l'ordre de 1 GHz. Aux fréquences

1 Les ondes hyperfréquences ne sont pas absorbées par l'atmosphère pour des fréquences > 12 GHz.

inférieures à 1 GHz, les molécules d'eau tournent mais sans absorber l'énergie de l'onde incidente, et par conséquent il n'y a pas de dégagement de chaleur. Au-dessus de 1 GHz, par contre, un phénomène, dit de « **relaxation moléculaire** », ou **relaxation de Debye**, apparaît : l'oscillation des molécules d'eau s'effectue non pas de manière synchrone avec l'onde incidente, mais avec un déphasage ; à tout moment, l'orientation polaire des molécules d'eau est décalée avec l'orientation du champ électrique de l'onde. Ce déphasage cause des pertes diélectriques, qui sont sources de chaleur. Ce dégagement de chaleur se limite seulement sur une épaisseur superficielle de l'aliment et non pas dans l'ensemble de son volume ; mais il se transmet ensuite vers les couches plus profondes par conduction thermique, et c'est ainsi que la cuisson s'effectue.

Le phénomène physique qu'exploite le processus de cuisson au four micro-ondes est celui de la polarisation par orientation. La fréquence d'excitation du champ électrique incident doit être compatible avec la durée de Debye (temps de relaxation moléculaire) pour provoquer l'alignement alternatif des molécules polaires avec le champ exciteur, lequel change d'orientation à chaque demi-période. Ainsi, pour une substance assimilable à l'eau, la fréquence micro-onde choisie est de 2,45 GHz et résulte d'un compromis entre la fréquence est liée au temps de Debye et celle où l'onde incidente se propage suffisamment dans la substance pour pouvoir réaliser sa cuisson.

1. Rayonnement électromagnétique, son interaction avec un milieu matériel dans le domaine des fréquences micro-ondes

1.1 – Polarisation et aimantation des milieux matériels

1.1.1 - Polarisation

Dans un milieu matériel, toutes les charges électriques qui s'y trouvent, quelles que soient leurs origines, réagissent collectivement sous l'influence d'un champ électrique extérieur \vec{E}_e : le milieu se polarise.

A son tour, le milieu crée lui-même, un champ électrique \vec{E}_m qui s'ajoute au champ extérieur \vec{E}_e . Dans le milieu matériel le champ électrique total (appelé **champ local**) est donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m \quad (1)$$

Dans le milieu matériel, et son environnement, on distingue les charges ρ_e extérieures au milieu matériel, et celles ρ_i qui lui sont intérieures. La densité de charge totale est donc :

$$\rho = \rho_e + \rho_i \quad (2)$$

Dans l'hypothèse d'un matériau électriquement neutre, le bilan des charges est nul :

$$\iiint_V \rho_i dV = 0 \quad (2 \text{ bis})$$

où (V) est le volume du matériau. Cette hypothèse restera adoptée dans tout le raisonnement. A grande distance, cette distribution de charges présente néanmoins un moment dipolaire :

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{r} \rho_i dV \quad (3)$$

Remarque: champ électrique d'un dipôle électrique

Le moment dipolaire \vec{p} d'un dipôle, par exemple calculé par (3), crée un champ électrique à la distance \vec{R} donné par:

$$\vec{E}_D(\vec{R}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

où $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ permittivité absolue du milieu, ϵ_0 permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m), et ϵ_r permittivité relative (nombre sans dimension).

A la distribution de charges internes correspond un champ de polarisation volumique \vec{P} tel que:

$$\text{à l'intérieur: } \operatorname{div} \vec{P} = -\rho_i \quad (4)$$

$$\text{à l'extérieur: } \vec{P} = 0 \quad (5)$$

Unités de \vec{P} : C/m²

A partir de (3), (4), (5), on montre que:

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{P} dV \quad (6)$$

ce qui montre que \vec{P} est bien un moment dipolaire volumique.

Pour un matériau électriquement neutre:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) \quad (7)$$

mais, attention, (7) n'implique pas que $\vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}$

Par ailleurs, le théorème de Gauss, exprimé sous sa forme locale, donne:

$$\operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho \quad (8)$$

où la densité volumique des charges totales est donnée par (2), soit:

$$\operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho_i + \rho_e$$

Or la densité de charge interne est reliée au moment dipolaire volumique par (4):

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_i$$

(8) devient alors:

$$\operatorname{div}(\epsilon \vec{E} + \vec{P}) = \rho_e \quad (9)$$

Par définition, le champ **excitation électrique** ou vecteur **densité de flux électrique** \vec{D} est:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (10)$$

et la relation (9) s'écrit finalement:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (11)$$

Unités de \vec{D} : C/m². L'excitation électrique est uniquement reliée aux charges extérieures

imposées au matériau, ainsi que l'exprime (11). Interprétation physique: le champ électrique total (1), issu du champ extérieur imposé et du champ interne au matériau résultant de la polarisation des charges électriques internes en réponse au champ extérieur, contribue avec le vecteur moment dipolaire volumique (4) (lequel est lié uniquement à la distribution volumique des charges internes) à l'excitation électrique (10). Le flux de l'excitation électrique à travers une surface fermée entourant le matériau est égal au total des charges extérieures. Ceci est la conséquence de la relation (11). En effet, calculons le bilan des charges électriques extérieures dans un volume V contenu dans cette surface fermée (S) entourant le milieu matériel, on a:

$$Q_e = \iiint_V \rho_e dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV$$

mais d'après le théorème de Green-Ostrogradsky (\vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface en un point de celle-ci):

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$$

On a donc (théorème de Gauss):

$$Q_e = \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS \quad (12)$$

On a vu que lorsqu'un matériau est soumis à un champ électrique appliqué \vec{E}_a il se polarise selon le vecteur moment dipolaire \vec{P} qui dépend du champ électrique total $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_m$ (relation (1)).

En approximation linéaire, cette polarisation \vec{P} est directement proportionnelle à \vec{E} :

$$\vec{P}(\vec{E}) = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (13)$$

χ_e est la **susceptibilité diélectrique**, elle ne dépend pas de \vec{E} , c'est une quantité sans dimension.

Remarque: relation non linéaire entre la polarisation et le champ

L'approximation linéaire (13) n'est plus applicable pour les champs intenses, comme ceux générés par les rayonnements laser. (13) doit être remplacé par une expression faisant intervenir les puissances du champ:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\chi_e + AE + BE^2 + \dots) \vec{E}$$

On voit qu'au premier ordre ($A = B = 0$) on retrouve (13). Si, en outre, le milieu n'est pas isotrope, (13) doit être remplacée par une relation tensorielle:

$$\vec{P} = [\chi_e] \varepsilon_0 \vec{E}$$

Remarque: polarisabilité

Dans la relation (13) le champ électrique est le champ électrique local $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m$ où les champs \vec{E}_e et \vec{E}_m sont respectivement le champ imposé de l'extérieur et le champ interne au matériau.

On a vu (relation (6)) que le moment dipolaire en un point M du matériau, généré par l'action du champ électrique externe \vec{E}_e est égal à:

$$\vec{p}(M) = \iiint_V \vec{P} dV = \alpha \vec{E}$$

α est la **polarisabilité** du milieu.

On montre que la polarisabilité est liée à la susceptibilité. Pour un échantillon sphérique constitué d'un nombre n de porteurs de charge par unité de volume (exprimé donc en m^{-3}), elle vaut:

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - \frac{1}{3}n\alpha}$$

Si le matériau contient des atomes de polarisabilités différentes α_k alors la susceptibilité totale du matériau est:

$$\chi_e = \frac{\sum_k n_k \alpha_k}{1 - \frac{1}{3} \sum_k n_k \alpha_k}$$

Compte tenu de (13), (10) se réécrit :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

soit:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \epsilon_r &= 1 + \chi_e \\ \epsilon &= \epsilon_0 \epsilon_r \end{aligned} \quad (14)$$

ϵ_r : permittivité relative; ϵ : permittivité absolue. Quelques valeurs (données en champ stationnaire):

matériau	χ_e
air	$5,7 \cdot 10^{-3}$
hydrogène	0,228
oxygène	0,507
eau	80
titanate de baryum BaTiO ₃	

1.1.2 – Aimantation

Les charges présentes dans le matériau, quelles que soient leurs origines, réagissent aussi de manière collective à une excitation magnétique extérieure: il y a aimantation du milieu.

Le milieu matériel crée alors, à son tour, un champ magnétique qui s'ajoute au champ magnétique appliqué par l'extérieur.

Dans l'ensemble formé par le matériau et son environnement, on distingue les courants situés à l'extérieur du matériau, de densité volumique \vec{J}_e , nul dans le volume V du matériau, et les courants internes au matériau, de densité volumique \vec{J}_i , nul en-dehors de V .

Le courant total est donc:

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_i \quad (15)$$

qui vérifient les conditions de conservation:

$$\operatorname{div} \vec{J}_e = 0 \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \vec{J}_i = 0 \quad (17)$$

pourvu que l'on soit en régime stationnaire et dans l'hypothèse où la frontière séparant le matériau et l'extérieur est infranchissable par les charges électriques.

L'intensité du courant total dans le volume V du matériau, à travers la surface S d'une section du matériau est donc nulle, par application de (17) et du théorème de Green-Ostrogradsky:

$$I = \iint_S \vec{J}_i \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{J}_i dV = 0 \quad (18)$$

Le flux des courants internes est donc conservatif. On en déduit qu'il existe alors un champ \vec{M} , appelé champ **moment magnétique volumique**, tel que, dans V:

$$\vec{J}_i = \operatorname{rot} \vec{M} \quad (19)$$

et nul en-dehors de V:

$$\vec{M} = 0 \quad \text{en-dehors de V} \quad (20)$$

On remarque que l'identité: $\operatorname{div} \vec{J}_i = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{M} = 0$ est bien vérifiée.

La distribution de courant \vec{J}_i crée un moment magnétique à grande distance:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{J}_i dV \quad (21)$$

Il découle de (19) que:

$$\vec{m} = \iiint_V \vec{M} dV \quad (22)$$

donc \vec{M} est aussi le **moment magnétique volumique** de la distribution de courant. Unité de \vec{M} : A/m.

Tout comme il existe le théorème de Gauss, qui exprime la conservation du flux électrique dans le cas de la polarisation, nous allons voir tout de suite qu'il existe un théorème analogue - le théorème d'Ampère - sur la conservation de la circulation du champ magnétique (ou plus exactement de l'excitation magnétique), dans le cas de l'aimantation.

Pour cela, on sait que le champ magnétique total \vec{B} et le courant volumique total \vec{J} sont reliés par:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \quad (23)$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² est la perméabilité du vide (rappel: la vitesse de la lumière dans le vide c, ϵ_0 , et μ_0 sont reliés par $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$). (23) est l'**équation d'Ampère**.

Compte tenu de (15) et (19), il vient:

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) &= \vec{J}_i + \vec{J}_e = \vec{\text{rot}} \vec{M} + \vec{J}_e \\ \rightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) &= \vec{J}_e\end{aligned}$$

qui introduit le champ **excitation magnétique** \vec{H} relié aux courants d'excitation imposés de l'extérieur:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (24)$$

Unités de \vec{H} : A/m. Donc:

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_e \quad (25)$$

(25) montre que \vec{H} dépend uniquement des courants imposés par l'extérieur. On déduit de (25) le théorème d'Ampère: l'intensité des courants externes traversant une surface S' s'appuyant sur un contour fermé C est égale au flux du champ excitation magnétique à travers la surface S' :

$$I_e = \iint_{S'} \vec{J}_e \cdot \vec{n} dS' = \iint_{S'} \vec{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{n} dS' = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

$$I_e = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} \quad (26)$$

Remarque: la relation (19) montre que, dans un matériau d'aimantation \vec{M} , la distribution des courants intérieurs \vec{J}_i vérifie:

$$\vec{J}_i = \vec{\text{rot}} \vec{M}$$

Cette distribution de courant \vec{J}_i crée le potentiel vecteur \vec{A} d'où dérive le champ magnétique:

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad (27)$$

On montre (exercice!) que \vec{A} est alors égal à:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV(\vec{r}')$$

et, après quelques pirouettes calculatoires d'analyse vectorielle:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV(\vec{r}') \quad (28)$$

De même que l'on a introduit l'approximation linéaire pour la polarisation, cette hypothèse s'exprime, pour l'aimantation, par la proportionnalité entre le champ magnétique total \vec{B} et le vecteur aimantation \vec{M} qu'il génère:

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (29)$$

L'hypothèse linéaire n'est valable que pour des champs magnétiques peu intenses. χ_m est la **susceptibilité magnétique**. Elle peut être > 0 ou < 0 :

- $\chi_m > 0$: matériaux **paramagnétiques**;
- $\chi_m < 0$: matériaux **diamagnétiques**

Autre formulation de (29):

Compte tenu de (24), on a aussi:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} (1 - \chi_m) = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (30)$$

et les perméabilités relative μ_r et absolue μ sont définies par:

$$\mu_r = \frac{1}{1 - \chi_m} \quad (31)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Quelques valeurs de χ_m (en champ statique):

<i>matériau</i>		χ_m
diamagnétiques	bismuth	$-16,7 \cdot 10^{-6}$
	cuivre	$-9,4 \cdot 10^{-6}$
	eau	$-9,1 \cdot 10^{-6}$
	alcool	$-7,0 \cdot 10^{-6}$
	hydrogène H	$-2,5 \cdot 10^{-11}$
paramagnétiques	FeCl ₃	$3,26 \cdot 10^{-3}$
	oxygène liquide	$3,06 \cdot 10^{-3}$
	air	$3,70 \cdot 10^{-7}$

1.2 – Dispersion et absorption dans un matériau soumis à un champ électromagnétique

1.2.1 – Équations de Maxwell

1.2.1.1 - En présence d'un champ électromagnétique total (\vec{E}, \vec{B}) , les relations (4), (11), (7), (23), (19) se généralisent en les équations de Maxwell, réparties en plusieurs groupes:

- **structure** du champ électromagnétique (équations de **Maxwell-Faraday**):

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (33)$$

NB: (33) implique $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ où \vec{A} est le potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} , ainsi qu'on l'a vu plus haut.

- **polarisation et aimantation** en tant que réponses des charges et courants dans le matériau à l'action du champ électromagnétique:

$$\rho_i = -\text{div} \vec{P} \quad (34) \text{ qui est (4)}$$

$$\vec{J}_i = \vec{\text{rot}} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (35) \text{ qui généralise (19)}$$

NB: comme $\text{div}(\vec{\text{rot}}) = 0$ on déduit de (34) et (35) l'équation de conservation des charges:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_i = 0$$

- **champs d'excitation:**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (36) \text{ qui est (10)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (37) \text{ qui est (24)}$$

- conservation des charges pour un matériau électriquement neutre (équation de Maxwell-Gauss):

Pour un matériau électriquement neutre (7) est vérifié:

$$\text{div} \vec{P} = -\text{div}(\epsilon \vec{E})$$

(34) donne alors:

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho_i \quad (38)$$

On a vu que la conservation de la charge se traduit par:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_i = 0$$

(38) devient donc:

$$\text{div} \left(\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} + \vec{J}_i \right) = 0 = \text{div} \left(\vec{J}_i + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (38 \text{ bis})$$

le vecteur $\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} + \vec{J}_i$ est donc à flux conservatif. On en déduit que le vecteur

$$\vec{J}_D = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (39)$$

est, comme \vec{J}_i , une source de champ magnétique: c'est le **courant de déplacement de Maxwell**, il n'apparaît qu'en régime variable.

Une antenne transforme un courant de conduction \vec{J}_i en courant de déplacement \vec{J}_D . Dans l'équation d'Ampère (23) le courant \vec{J} qui intervient contient tous les courants qui génèrent le champ magnétique, donc il contient aussi \vec{J}_D : $\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_D$. Par conséquent (23) est remplacé par l'**équation de Maxwell-Ampère**:

$$\vec{\text{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_i + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) \quad (40)$$

autrement dit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_i + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_i + \vec{J}_D \quad (40 \text{ bis})$$

Ce rappel des équations de Maxwell en présence d'un champ électromagnétique (régime variable) étant fait, on peut aborder l'étude des conditions de dispersion et d'absorption par un milieu matériel.

De façon générale, dans un matériau, il existe une durée finie pour que les champs excitation \vec{D} et \vec{H} s'établissent suite à l'action du champ électromagnétique total (\vec{E}, \vec{B}). Si (\vec{E}, \vec{B}) varie relativement lentement, le retard peut être négligé et l'on peut utiliser (14) et (31):

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{aligned} \quad (41)$$

où \vec{B} induction magnétique, en Tesla (T), \vec{E} champ électrique en Vm^{-1} , \vec{D} induction électrique en Cm^2 , \vec{H} champ magnétique en Am^{-1} , $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ en Fm^{-1} , $\mu = \mu_r \mu_0$ perméabilité magnétique du milieu en Hm^{-1} ; et avec ϵ_r et μ_r constants, lorsqu'ils sont indépendants de la fréquence, le milieu est dit parfait.

Dans le cas contraire, on a affaire à un **milieu dispersif**:

$$\epsilon_r = \epsilon_r(\omega), \mu_r = \mu_r(\omega) \quad (42)$$

En présence d'un champ rapidement variable, on n'a plus (41) et on doit tenir compte de (42): le milieu est dispersif.

En régime sinusoïdal (40) et (32) deviennent :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = (\gamma + j\omega\epsilon) \vec{E} \quad (43)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{E} \quad (44)$$

où, par définition, $\vec{J}_i = \gamma \vec{E}$ avec γ conductivité du milieu, en ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) (**loi d'Ohm**).

Dans un milieu, en l'absence de charges internes $\rho_i = 0$ (électriquement neutre), d'après (38), on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Comme $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_i}{\epsilon}$ il vient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \frac{\rho_i}{\epsilon} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (45)$$

Or l'équation de Maxwell-Faraday (32) donne : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, et avec les équations de Maxwell-Ampère (30) et (40), on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \mu \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J}_i + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (46)$$

suite à la loi d'Ohm et à (41).

La combinaison des équations (45) et (46) conduit à l'équation d'onde du champ électrique :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (47)$$

De même, pour l'équation d'onde du champ magnétique :

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (48)$$

Remarque : en l'absence de courant de conduction, $\gamma = 0$, (47) et (48) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

ce qui montre que la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu, sans conduction, est $c = \sqrt{\varepsilon \mu}$, et les champs électrique et magnétique se propagent avec la même vitesse.

En régime sinusoïdal $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0(x) e^{-j\omega t}$, de même pour \vec{H} , on introduit :

- la permittivité complexe :

$$\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon'' \quad \text{avec: } \varepsilon' = \varepsilon'_r \varepsilon_0 \quad \text{et: } \varepsilon'' = \varepsilon''_r \varepsilon_0$$

- la conductivité complexe : $\gamma = \gamma' + j\gamma''$;

(47) et (48) deviennent alors:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu(\gamma' + j\omega\varepsilon') \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - j\omega\mu(\gamma' + j\omega\varepsilon') \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Suite à (13), le courant de déplacement est égal à $\vec{J}_D = -j\omega\vec{P} = -j\omega\chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \gamma \vec{E}$; on introduit alors la susceptibilité complexe :

$$\chi_e = \chi_e' + j\chi_e''$$

ce qui donne la relation entre la susceptibilité complexe et la conductivité complexe :

$$\begin{aligned} \gamma'(\omega) &= \omega \varepsilon'' = \omega \varepsilon_0 \varepsilon''_r = \omega \varepsilon_0 \chi_e'' \\ \gamma''(\omega) &= -\omega \varepsilon_0 \chi_e' \end{aligned}$$

puisque l'on verra en (83) que $\varepsilon''_r = \chi_e''$.

En introduisant le nombre d'onde complexe K tel que :

$$K^2 = \mu \varepsilon' \omega^2 + j \mu \gamma' \omega \quad (51)$$

les équations (50) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + K^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + K^2 \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans (51) on arrive à l'équation de dispersion :

$$\begin{aligned} K^2 &= k^2 + j \omega \mu \gamma' \\ k &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (53)$$

d'où (52) s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} + j \omega \mu \gamma' \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} + j \omega \mu \gamma' \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Dans la permittivité complexe la partie imaginaire ε'' est donc le facteur de pertes par conduction:

$$\varepsilon'' = \frac{\gamma'}{\omega} \quad (55)$$

donc $\varepsilon'_r = 1 + \chi_e'$ et $\varepsilon_r = \varepsilon'_r + j \varepsilon''_r = 1 + \chi_e' + j \gamma' / \omega$) la relation (53) devient :

$$K^2 = \omega^2 \mu (\varepsilon' + j \varepsilon'') = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (56)$$

et l'angle de pertes δ tel que :

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\gamma'}{\omega \varepsilon'} \quad (57)$$

on a donc :

$$K^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega \mu \varepsilon' (1 + j \tan \delta) \quad (58)$$

ce qui entraîne que les parties réelle et imaginaire du nombre complexe K, $K = \alpha + j \beta$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1)} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1)} \end{aligned} \quad (59)$$

α : coefficient d'atténuation ; il intervient dans l'absorption de l'onde dans le milieu,
 β : coefficient de propagation (ou constante de phase), il intervient dans la propagation dans le milieu.

Les champs \vec{E}, \vec{H} ont une amplitude qui varie comme : $\exp(-\alpha z)\exp(-j\beta z)$ suivant une direction spatiale z du milieu, donc cette amplitude s'atténue comme $\exp(-\alpha z)$ avec l'épaisseur du milieu que traverse l'onde électromagnétique.

L'atténuation de l'onde d'un facteur 1/e est atteinte pour une profondeur dans le matériau qui est de l'ordre de l'inverse du coefficient d'atténuation, appelée « épaisseur de peau » :

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1)}} \quad (60)$$

Selon leurs propriétés physiques, les milieux de propagation présentent différents types de comportements :

- Le milieu est un **conducteur parfait** : sa conductivité est infini ($\gamma' = \infty$) donc $\tan \delta$ est aussi infinie. D'après la loi d'Ohm, puisque le courant reste fini, cela implique que le champ électrique E, et par suite l'induction magnétique H sont nuls, et donc J est nul dans le volume du matériau : en conséquence, pour un conducteur parfait, seul un courant superficiel se propagerait et ne pourrait pas circuler dans le volume : c'est l'effet de la **cage de Faraday** (une enceinte parfaitement conductrice, soumise à un champ électrique même intense, ne transmettrait aucun courant au volume intérieur qu'elle délimite).

- Le milieu est un **conducteur réel** qui présente une conductivité élevée mais finie, relativement au diélectrique ; le courant de déplacement est alors négligeable devant le courant de conduction : $|\gamma \vec{E}| \gg |\partial \vec{D} / \partial t|$ donc $\tan \delta = \gamma' / \omega \varepsilon' \gg 1$: (60) se simplifie alors en :

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\mu \gamma' \omega}{2}} \quad (61)$$

et l'épaisseur de peau :

$$d \approx \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma' \omega}} \quad (62)$$

et la vitesse de propagation du champ dans le milieu devient :

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \gamma'}} \quad (63)$$

Donc, pour un conducteur réel, les pertes par conduction augmentent comme la racine carrée de la fréquence et l'épaisseur où l'onde se propage est très faible aux fréquences élevées. L'épaisseur de peau, pour un bon conducteur, est de l'ordre de quelques microns : l'onde se propage pratiquement à sa surface (2).

- Le milieu est un **diélectrique parfait** : aucune conduction n'y est possible ($\gamma = 0$ et $\tan \delta = 0$), donc le facteur de perte par conduction est nul $\varepsilon'' = 0$, donc $\alpha = 0$, $\varepsilon = \varepsilon'$, et $\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$ et la vitesse de propagation est

2 En pratique, dans la conception de câbles ou de fibres conducteurs, ce résultat justifie l'emploi de câble constitué de nombreuses fibres ou brins plutôt que l'emploi d'un seul gros conducteur : pour chacun des brins l'électricité se propage le long de leurs surfaces et peu à l'intérieur (sauf s'il s'agit de brins très fins), et la transmission électrique est favorisée par la démultiplication des brins : si l'on utilisait un câble constitué d'un seul conducteur homogène, le courant emprunterait seulement ses couches superficielles.

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (64)$$

ne dépend pas de la conduction.

- Le milieu est un **diélectrique réel**, sa conductivité est très faible mais pas nulle (très peu de charges en déplacement), et les pertes sont surtout causées par le comportement diélectrique du milieu.

Dans un diélectrique réel, l'additivité des courants (au premier ordre) conduit à poser que la conductivité du matériau résulte de la contribution de la conductivité associée au courant de conduction, notée ici γ_C (et qui correspond à γ auparavant), et de la conductivité associée aux pertes diélectriques notée γ_D (ou « conductivité diélectrique ») :

$$\gamma = \gamma_D + \gamma_C \quad (65)$$

et la définition de l'angle de pertes totales (57) reste valable :

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\gamma'}{\omega \epsilon'} = \frac{\gamma_D}{\omega \epsilon'} + \frac{\gamma_C}{\omega \epsilon'} = \tan \delta_D + \tan \delta_C$$

où les angles de pertes respectivement par conduction et diélectriques sont définis par :

$$\begin{aligned} \tan \delta_C &= \frac{\gamma_C}{\omega \epsilon'} \\ \tan \delta_D &= \frac{\gamma_D}{\omega \epsilon'} \end{aligned} \quad (66)$$

Dans les équations de propagation (52) le nombre d'onde complexe K est toujours donné par (53), et les équations de dispersion (59) s'appliquent encore à condition de remplacer $\tan \delta$ par $\tan \delta_C + \frac{\gamma_D}{\omega \epsilon'}$, puisque :

$$K^2 = j\omega\mu(\gamma' + j\omega\epsilon') = j\omega\mu(\gamma_C + \gamma_D + j\omega\epsilon') = -\omega^2\mu\left(\epsilon' - j\frac{\gamma_C + \gamma_D}{\omega}\right) = -\omega^2\mu(\epsilon' - j(\epsilon_C'' + \epsilon_D''))$$

avec donc : $\epsilon_C'' = \frac{\gamma_C}{\omega}$, $\epsilon_D'' = \frac{\gamma_D}{\omega}$, $\tan \delta = \frac{\epsilon_C'' + \epsilon_D''}{\epsilon'} = \frac{\epsilon_C''}{\epsilon'} + \frac{\epsilon_D''}{\epsilon'} = \tan \delta_C + \tan \delta_D$

et donc :

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \delta} - 1)} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} (\sqrt{1 + \tan^2 \delta} + 1)} \end{aligned} \quad \text{qui est (59)}$$

Si les pertes totales dans le diélectrique réel sont faibles, (59) se simplifie, compte tenu de (66) :

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} \frac{\tan^2 \delta}{2}} = \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu \epsilon'} \tan \delta = \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu \epsilon'} \frac{1}{\omega \epsilon'} (\gamma_C + \gamma_D) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} (\gamma_C + \gamma_D)$$

et :

$$\beta \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \tan^2 \delta \right)} \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$$

finalement :

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} (\gamma_C + \gamma_D) \\ \beta &\approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (67)$$

où la vitesse de propagation est :

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon'}} \quad (68)$$

De plus, toujours sous l'approximation de pertes totales faibles, si les pertes par conduction sont les plus importantes, $\gamma_C \gg \gamma_D$, (67) donne :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \gamma_C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \omega \varepsilon' \tan \delta_C = \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu \varepsilon'} \tan \delta_C$$

Inversement, si les pertes diélectriques dominent, $\gamma_D \gg \gamma_C$, (67) donne :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \gamma_D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \omega \varepsilon' \tan \delta_D = \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu \varepsilon'} \tan \delta_D$$

Dans tous les cas, l'onde transmise dans le matériau a une puissance qui décroît avec la profondeur z comme :

$$W(z) = W_0 \exp(-2\alpha z) \quad (69)$$

L'onde absorbée le long du trajet a sa puissance dissipée sous forme de chaleur.

1.2.1.2 – **Transmission et réflexion d'une onde électromagnétique dans un milieu :**

On considère deux milieux (1) et (2) supposés sans pertes. Une onde électromagnétique qui se propage dans le milieu (1) rencontre le milieu (2) avec une onde incidente (\vec{E}_i, \vec{H}_i) dont une partie (\vec{E}_t, \vec{H}_t) est transmise au milieu (2) et une autre (\vec{E}_r, \vec{H}_r) est réfléchi vers le milieu (1). Si l'angle d'incidence, par rapport à la normale de la surface, est θ_i , et l'angle de réfraction (ou de transmission) est θ_t , et l'angle de réflexion θ_r , on montre qu'ils sont reliés par la **loi de Snell-Descartes** (cf. [1]) :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \\ \theta_r &= \theta_i \end{aligned} \quad (70)$$

Deux cas particuliers se présentent :

a) Polarisation horizontale du champ incident : \vec{E}_i est parallèle à la surface de séparation entre (1) et (2). On montre alors (cf. [1]) que le rapport entre les amplitudes des champs est :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (71a)$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (71b)$$

b) Polarisation verticale du champ incident : \vec{H}_i est parallèle à la surface de séparation entre (1) et (2), on montre de même que :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (72a)$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (72b)$$

Il existe un angle d'incidence pour lequel l'onde réfléchi est nulle (pas de réflexion) : c'est **l'angle d'incidence de Brewster** tel que, en polarisation verticale, (72) est nulle :

$$\tan \theta_{i, \text{Brewster}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (73)$$

On montre aussi que la réflexion peut être réduite (et donc la transmission augmentée), en incidence normale ($\theta_i = 0$) par l'adaptation d'une lame quart d'onde, dont l'impédance est par définition égale à $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ et d'épaisseur $h = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4 f \sqrt{\mu \epsilon}}$.

1.2.2 – Milieu dispersif : théorie de Drude-Lorentz

Dans le modèle de Drude-Lorentz, on assimile le matériau à un ensemble de porteurs de charges qui interagissent par des forces d'amortissement (dues aux collisions), des forces de rappel (dues aux interactions coulombiennes) et la force de Lorentz due à la présence du champ électromagnétique.

Soit \vec{r} le vecteur position d'un porteur de charges par rapport à sa position de repos. Le principe de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_L + \vec{F}_R + \vec{F}_A$$

où:

$m, q, \vec{v} = d\vec{r}/dt$: masse, charge et vitesse du porteur de charge,

force de Lorentz: $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

force de rappel: $\vec{F}_R = -K \vec{r}$

force de frottement: $\vec{F}_A = -\alpha \vec{v}$

En introduisant le **temps de relaxation** ou **durée de collision** τ tel que:

$$\tau = m/\alpha \quad (74)$$

qui est la durée au bout de laquelle les charges reprennent une distribution uniforme des vitesses après l'excitation électromagnétique, ainsi que la pulsation propre de l'oscillation ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{K/m} \quad (75)$$

l'équation du mouvement se réécrit :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \quad (76)$$

Pour un milieu para ou dia-magnétique, la contribution du champ magnétique \vec{B} est souvent négligeable devant celle du champ électrique \vec{E} dans la force de Lorentz.

On a donc en première approximation $\vec{F}_L \approx q \vec{E}$, et (76) se simplifie en:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (77)$$

Remarque: Pour un milieu **diélectrique**, le champ \vec{E} doit être remplacé par la **correction de Lorentz**:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Le champ étant sinusoïdal de pulsation ω , on a:

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}_0(\vec{R}) e^{-j\omega t}$$

On cherche alors des solutions harmoniques:

$$\vec{r}(\vec{R}, t) = \vec{r}_0(\vec{R}) e^{-j\omega t}$$

en l'injectant dans (77), il vient, pour les amplitudes des déplacements:

$$\vec{r}_0(\vec{R}) = \frac{q}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega/\tau]} \vec{E}_0(\vec{R}) \quad (78)$$

Soit n le nombre de porteurs de charges par unité de volume, la densité de charge volumique est donc: nq .

Les charges engendrent donc un moment dipolaire volumique:

$$\vec{P} = nq \vec{r}$$

soit, d'après (78):

$$\vec{P}_0(\vec{R}) = \frac{nq^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega/\tau]} \vec{E}_0(\vec{R}) \quad (79)$$

Or, d'après (13):

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

La susceptibilité χ_e est donc, d'après (79), une susceptibilité électrique complexe qui dépend de ω :

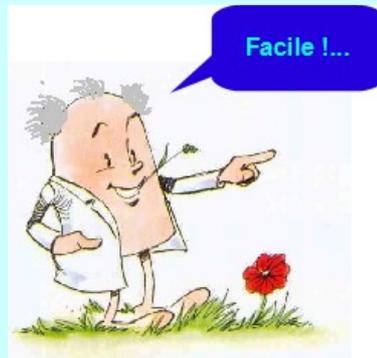
$$\chi_e(\omega) = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega/\tau} \quad (80)$$

avec : $\chi_0 = \frac{nq^2}{m\omega_0^2\varepsilon_0}$

Du fait de la présence du terme $j\omega/\tau$ dans (80), il y a un déphasage entre la réponse \vec{P} (polarisation) et le champ exciteur (champ \vec{E}).

Exercice:

(80) a été obtenu sans tenir compte de la correction de Lorentz.
Reprendre le calcul en appliquant celle-ci.



On a: $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{P}/3\varepsilon_0 = \vec{E} + nq\vec{r}/3\varepsilon_0$
donc en remplaçant \vec{E} par \vec{E}' dans (77), il vient:

$$\vec{r}_0 = \frac{q}{m \left[\left(\omega_0^2 - \frac{nq^2}{3m\varepsilon_0} - \omega^2 \right) - j \frac{\omega}{\tau} \right]} \vec{E}_0 \quad (81)$$

il suffit donc de remplacer dans (78) ω_0^2 par $(\omega_0^2 - nq^2/3m\varepsilon_0)$, ainsi que dans (79) et (80).

Les relations (80) ou (81) amènent à traiter la susceptibilité χ_e comme une quantité complexe qui dépend de ω :

$$\chi_e = \chi'_e + j\chi''_e$$

$$\chi'_e(\omega) = \chi_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2/\tau^2} \quad (82)$$

$$\chi''_e(\omega) = \chi_0 \frac{\omega_0^2\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2/\tau^2}$$

ce qui entraîne que ε_r est aussi une quantité complexe :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \varepsilon'_r + j\varepsilon''_r \\ \varepsilon'_r(\omega) &= 1 + \chi'_e(\omega) \\ \varepsilon''_r(\omega) &= \chi''_e(\omega)\end{aligned}\quad (83)$$

Remarque: absorption ou atténuation

Le fait que ε_r ou χ_r dépendent de la fréquence correspond bien à la propriété d'un milieu dispersif au sens habituel où la longueur d'onde est aussi une fonction de la fréquence, et cette dépendance est une fonction complexe. La nature complexe de ces quantités entraîne, de plus, des phénomènes d'absorption dans le milieu: un milieu dispersif est nécessairement absorbant. Pour le comprendre, on se souvient que nous n'avons traité que la partie temporelle de l'équation de propagation des ondes (équation (77)). Mais le comportement spatial, laissé ici de côté, est lui aussi harmonique et fait intervenir, dans les amplitudes $\vec{r}(\vec{R})$, ou $\vec{P}(\vec{R})$, ou $\vec{E}(\vec{R})$, une fonction du type: $\exp(j\vec{K}\cdot\vec{R})$ où \vec{K} est le vecteur d'onde, et \vec{R} le vecteur position de l'onde dans un repère cartésien, $\vec{K}\cdot\vec{R}$ est le produit scalaire de ces deux vecteurs. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas d'une propagation unidirectionnelle, on a alors, si l'axe de propagation est par exemple Oz, $R = z$ et $K = k_z$. On montre pour un milieu diélectrique (voir **Annexe**) que le vecteur d'onde et la pulsation sont reliés par la **relation de dispersion**:

$$k_z^2(\omega) - \varepsilon_r(\omega) \omega^2/c^2 = 0$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu; $\varepsilon_r(\omega)$ est complexe, donnée par (82) et (83). Il s'ensuit que $k_z(\omega)$ est complexe aussi:

$$k_z(\omega) = k'_z(\omega) + jk''_z(\omega)$$

L'amplitude de l'onde dans le matériau est donc elle aussi complexe, à cause du terme introduit plus haut: $e^{j\vec{K}\cdot\vec{R}} = \exp(jk_z(\omega)\cdot z)$.

Introduisons l'indice complexe du milieu n^* , qui se décompose en parties réelle et imaginaire selon:

$$n^*(\omega) = k_z/k_0 = \varepsilon_r^{1/2} = n(\omega) + j\kappa(\omega) \quad (84)$$

où $n(\omega)$ est l'**indice de réfraction** optique, $k_0 = \omega/c_0$ est le nombre d'onde dans le vide $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $\kappa(\omega)$ est l'**indice d'extinction** (terme qui se justifie parce que c'est la partie imaginaire du nombre d'onde, jk'' , qui est liée à l'absorption de l'onde dans le milieu $\exp-jk''z$):

$$e^{j\vec{K}\cdot\vec{R}} = e^{-k''z} e^{jk'z} = e^{-\alpha(\omega)z} e^{jk'z}$$

où le terme $\alpha(\omega) = k''$ est le **coefficient d'atténuation**. Le nombre d'onde complexe s'écrit alors:

$$k_z(\omega) = k_0 \varepsilon_r^{1/2} = k_0 n^* = k_0 n + jk_0 \kappa$$

où donc:

$$k'_z = nk_0 = n\omega/c \quad (85)$$

$$k''_z = \kappa k_0 = \kappa\omega/c \quad (86)$$

Les k'_z et k''_z sont reliées aux composantes réelle et imaginaire de χ_e données par (82) et (80), puisque l'on a (83):

$$n^{*2} = \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi'_e(\omega) + j\chi''_e(\omega)$$

par conséquent:

$$k_x'^2 = (\omega/c)^2(1 + \chi_e'(\omega)) \quad (87)$$

$$k_x''^2 = (\omega/c)^2 k^2 = (\omega/c)^2 \chi_e''(\omega) = \alpha^2(\omega) \quad (88)$$

Ces composantes se calculent grâce aux relations (82). Pour certains domaines de fréquence extrêmes elles se simplifient considérablement:

a) $\omega\tau \ll 1$ (basses fréquences relativement au temps de relaxation):

$$\chi_e(\omega) = j \frac{nq^2 \tau}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega} = j \chi_e'' \quad (89)$$

le coefficient d'atténuation varie alors comme la racine carrée de la fréquence:

$$\alpha(\omega) = A \sqrt{\omega}$$

$$\text{où: } A = \sqrt{\frac{nq^2 \tau}{mc^2 \epsilon_0}} \quad (90)$$

tandis que $\chi_e' \approx 0$: il n'y a pas de propagation de l'onde dans le matériau, l'onde subit seulement une évanescence due à l'atténuation.

b) $\omega\tau \gg 1$ (hautes fréquences relativement au temps de relaxation):

$$\chi_e(\omega) \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \chi_e' \quad (91)$$

où ω_p est la **pulsation plasma** du matériau:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m \epsilon_0}} \quad (92)$$

tandis que $\chi_e'' \approx 0$: il n'y a pas d'atténuation de l'onde.

De ce qui précède on énonce que:

- il y a **propagation** si $k_z' \neq 0$: en effet, dans le cas contraire la déformation de l'amplitude de l'onde est seulement temporelle. Dans le cas de la propagation, la vitesse de propagation de l'onde, ou vitesse de phase, est définie: elle est égale à:

$$c(\omega) = \omega/k_z'(\omega) = c_0/n(\omega) \quad (93)$$

autrement dit, l'indice optique est égal au rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse de l'onde dans le matériau.

- il y a **évanescence** si $k_z' = 0$: en effet, seule subsiste la partie imaginaire k_z'' , associée à l'atténuation sans propagation de l'onde dans le matériau.

- il y a **atténuation avec propagation** si l'absorption augmente lorsque l'onde avance dans le matériau, donc si k_z' et k_z'' sont de même signe, ce qui se traduit par: $k_z' k_z'' > 0$, donc: $knk_0^2 > 0$. Cette condition tient à la forme de l'amplitude $\exp(-k_z'' z) \cdot \exp(jk_z' z)$ vue plus haut. La condition ci-dessus est vérifiée pour la grande majorité des matériaux, on notera cependant qu'en amplification laser elle s'inverse, $knk_0^2 < 0$, obtenue par le pompage optique.

La figure 3 donne l'allure des variations de χ_e' et χ_e'' en fonction de la pulsation ω , calculées à partir de (85). On constate que le maximum de χ_e'' correspond à l'annulation de χ_e' et que les extremums de χ_e' sont atteints pour les pulsations ω_1 et ω_2 tels que:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega_0/\tau \text{ et } \omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega_0/\tau$$

Pour des hautes fréquences (ou des amortissements faibles), la largeur du pic de χ_e'' est approximativement égale à l'inverse du temps de relaxation τ : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 1/\tau$.

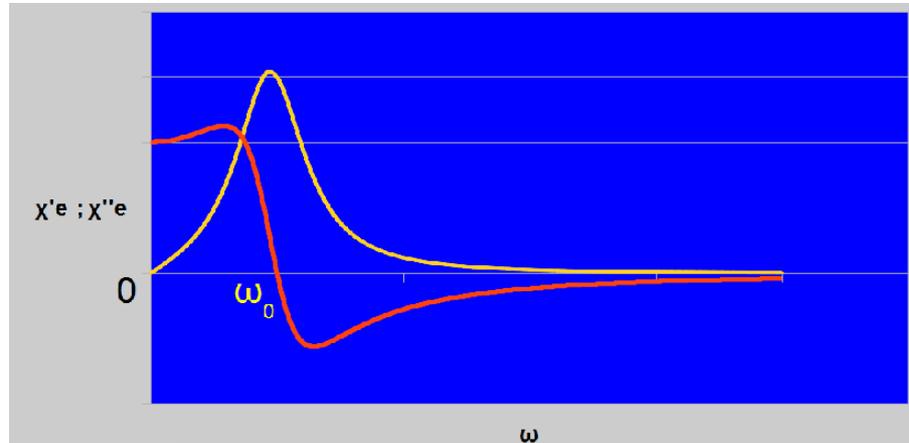


Figure 3: allure des courbes de variation des parties réelle χ_e' (en rouge) et imaginaire χ_e'' (en jaune) de la susceptibilité complexe en fonction de la pulsation ω , pour un matériau satisfaisant aux conditions de Drude-Lorentz

La variation du coefficient d'atténuation α , calculée avec (88) est donnée à la figure 4:

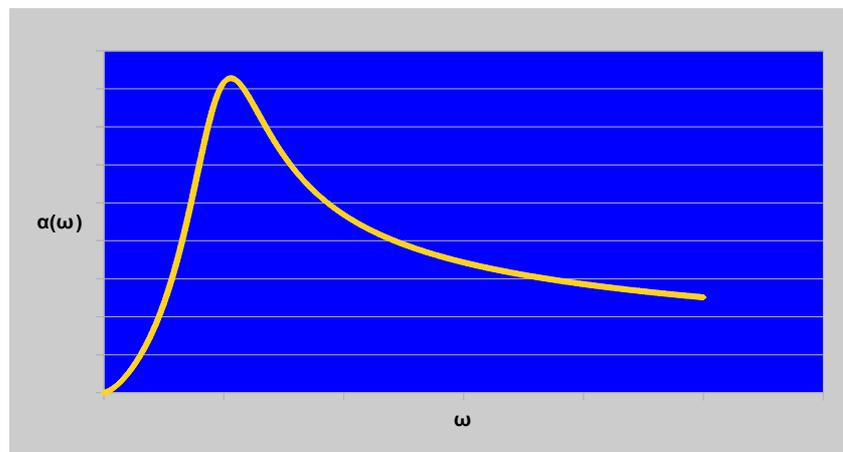


Figure 4 - Variation du coefficient d'atténuation α avec la pulsation ω (formule (88)): elle montre, de part et d'autre du pic atteint pour ω_0 un domaine basses fréquences où il varie comme $\sqrt{\omega}$ (formule (90)) et un domaine hautes fréquences où il tend vers zéro, ne laissant subsister de plus en plus que la composante propagative k'_z .

Le tableau suivant donne, pour quelques diélectriques, des valeurs de permittivité relative à certaines fréquences:

matériau	fréquence (MHz)	ϵ_r à cette fréquence
oxyde d'aluminium Al_2O_3	1	10
chlorure d'ammonium NH_4Cl	100	7,0
asphalte	< 1	2,68

matériau	fréquence (MHz)	ϵ_r à cette fréquence
calcite CaCO_3	0,01	8,5
acide acétique $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	400	4,1
carbonate de calcium (calcaire) CaCO_3	1	6,14
sulfate de calcium CaSO_4	0,01	5,66
oxyde de cuivre Cu_2O	100	18,1
sulfate de cuivre CuSO_4	60	10,3
diamant C	100	5,5
oxyde de fer Fe_3O_4	100	14,2
acétate de plomb $\text{Pb}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$	1	2,6
carbonate de plomb PbCO_3	100	18,6
chlorure de plomb PbCl_2	1	4,2
monoxyde de plomb PbO	100	25,9
nitrate de plomb $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$	60	37,7
sulfate de plomb PbSO_4	1	14,3
sulfure de plomb PbS	1	17,9
phénol $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}$	400	4,3
chlorate de potassium KClO_3	60	5,1
chlorure de potassium KCl	0,01	5,03
nitrate de potassium KNO_3	60	5,0
sulfate de potassium K_2SO_4	60	5,9
quartz SiO_2	30	4,34
bromure d'argent AgBr	1	12,2
chlorure d'argent AgCl	1	11,2
chlorure de sodium NaCl	0,01	6,12
sucre	300	3,32
soufre S	300	4,0
tourmaline	0,01	6,3

Remarque: théorème de Kramers-Krönig

Le comportement de $\chi'_e(\omega)$ et $\chi''_e(\omega)$ tel que figuré à la figure 3 est la conséquence du théorème de Kramers-Krönig: la dispersion (représentée par $\chi'_e(\omega)$) et l'absorption (représentée par $\chi''_e(\omega)$) ont une origine commune: un milieu dispersif est nécessairement absorbant. Ce lien sous-jacent est décrit par les relations de Kramers-Krönig:

Cette relation est liée au problème de la causalité: la réponse, c'est-à-dire \vec{D} , à l'excitation extérieure \vec{E} ne doit pas s'effectuer avant le démarrage de l'excitation (c'est une question de flèche du temps!). Autrement dit, si le champ \vec{E} démarre à $t = 0$ alors \vec{D} est nul seulement pour $t < 0$. Cette causalité se traduit par les propriétés analytiques complexes de $\chi_e(\omega)$ dont on peut alors montrer qu'elle est analytique dans le demi-plan supérieur du plan complexe des ω . On montre alors que les parties réelle et imaginaire de $\chi_e(\omega)$ obéissent aux relations de Kramers-Krönig:

$$\begin{aligned}\chi_e'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_e''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi_e''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_e'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'\end{aligned}\quad (94)$$

où "vp" signifie "valeur principale de Cauchy". Voir références [10] et [11].

1.2.3 – Milieu conducteur ou isolant selon la théorie de Drude-Lorentz

De (35) on tire que le courant volumique intérieur au matériau généré par la polarisation est:

$$\vec{J}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

D'après (13) on a donc:

$$\vec{J}_i = \chi_e \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et comme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-j\omega t)$, on obtient la loi d'Ohm en régime sinusoïdal:

$$\vec{J}_i = -j\omega \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad (95)$$

où γ est la conductivité complexe, liée à la susceptibilité complexe (unités : $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) par:

$$\gamma(\omega) = -j\omega \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \quad (96)$$

où γ se décompose en parties réelle et imaginaire selon $\gamma = \gamma'(\omega) + j\gamma''(\omega)$, donc d'après (96):

$$\begin{aligned}\gamma'(\omega) &= \omega \varepsilon_0 \chi_e''(\omega) \\ \gamma''(\omega) &= -\omega \varepsilon_0 \chi_e'(\omega)\end{aligned}\quad (97)$$

où l'on rappelle que $\chi_e = \chi_e' + j\chi_e''$.

Avec (97) on réécrit (95) par:

$$\vec{J}_i = \gamma'(\omega) \vec{E} + \chi_e \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \gamma'(\omega) \vec{E} + j\gamma''(\omega) \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} - j\omega \varepsilon_0 \chi_e'(\omega) \vec{E}$$

La relation de Maxwell-Ampère (40):

$$\vec{\text{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_i + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E})$$

devient alors:

$$\vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \gamma'(\omega) \vec{E} + (1 + \chi_e) \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E})$$

où l'on reconnaît le courant de déplacement (39):

$$\vec{J}_D = (1 + \chi_e(\omega)) \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (98)$$



et le **courant de conduction**:

$$\vec{J}_C = \gamma'(\omega) \vec{E} \quad (99)$$

$$\vec{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_C + \vec{J}_D \quad (100)$$

Le classement d'un milieu en conducteur ou isolant est lié au rapport des effets de conduction et déplacement; (99) et (100) donnent:

$$\frac{\|\vec{J}_C\|}{\|\vec{J}_D\|} = \frac{J_C}{J_D} = \frac{\gamma'(\omega)}{\omega \epsilon'(\omega)} \quad (101)$$

Le rapport (101) dépend de la fréquence: un milieu peut donc être conducteur pour une fréquence et isolant pour une autre. ϵ' est la partie réelle de la constante diélectrique complexe absolue (voir relations (14)).

Comportement conducteur:

les effets de conduction sont largement dominants $\|\vec{J}_C\| \gg \|\vec{J}_D\|$, donc d'après (101) $\gamma' / \omega \epsilon' \gg 1$. Il s'ensuit que:

$$\vec{rot}(\vec{B} / \mu_0) \approx \gamma' \vec{E}$$

le milieu se comporte comme un conducteur caractérisé par sa conductivité réelle γ' .

Comportement isolant:

les effets du courant de déplacement sont prépondérants $\|\vec{J}_D\| \gg \|\vec{J}_C\|$, donc on a $\gamma' / \omega \epsilon' \ll 1$, par suite:

$$\vec{rot}(\vec{B} / \mu_0) \approx \epsilon' \partial \vec{E} / \partial t$$

le milieu se comporte comme un isolant caractérisé par sa constante diélectrique ϵ' .

Entre ces deux comportements extrêmes, (100) contient tous les termes: on a affaire à des **semi-conducteurs**.

Remarque: milieux conducteurs

Dans un milieu conducteur pour une certaine pulsation ω (condition $\gamma'/\omega\varepsilon \gg 1$), les charges se déplacent librement et ne sont donc pas soumises aux forces de rappel qui tendraient à les confiner autour de leurs positions de repos. Par conséquent on peut poser $K = 0$, donc $\omega_0 = 0$ et l'équation (96) devient:

$$\begin{aligned} \gamma'(\omega) &= \gamma_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \gamma''(\omega) &= \gamma_0 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{aligned} \quad (102)$$

avec:

$$\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$$

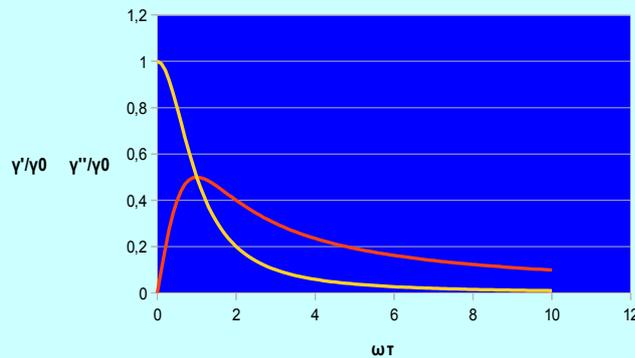


Figure 5 - Conductivité d'un milieu conducteur:
partie réelle, courbe en jaune - partie imaginaire, courbe en rouge

La conductivité d'un conducteur varie avec ω selon les courbes de la figure 5 calculées par (102). Le maximum de la conductivité complexe γ'' est atteint pour une pulsation égale à l'inverse du temps de relaxation $\omega = 1/\tau$.

1.2.4 - Différents types de polarisation du milieu en présence d'un champ électromagnétique

On a vu que les propriétés diélectriques des différents matériaux satisfaisant les hypothèses de la théorie de Drude-Lorentz (linéaires, homogènes, isotropes, non magnétiques), ainsi que leurs propriétés de propagation et d'atténuation, sont reliées à la permittivité complexe $\varepsilon(\omega)$ ou à la susceptibilité diélectrique complexe $\chi(\omega)$.

Dans un matériau, il existe divers types de liaisons responsables de la cohésion des charges: liaisons ioniques, liaisons covalentes, liaisons métalliques. Chacune de ces liaisons apporte une réponse différente à l'action d'un champ électromagnétique: en réaction à l'influence d'un champ électrique \vec{E}_e , les molécules polaires d'un milieu matériel présentent une polarisation qui se traduit par une séparation des charges (figure 6).

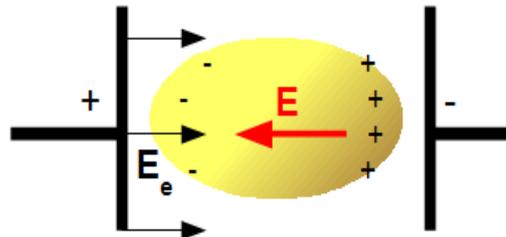


Figure 6 - Polarisation électrique

A ces réponses correspondent trois types de polarisation (on rappelle que l'on néglige l'aimantation dans le cadre de la théorie de Drude-Lorentz):

- polarisation électronique: elle existe pour tous types de liaison;
- polarisation ionique: elle est propre aux liaisons ioniques;
- polarisation d'orientation: elle apparaît pour des molécules possédant un moment dipolaire (molécules polaires, telles que l'eau).

Bien entendu, ces polarisations peuvent coexister et donner une polarisation totale.

Nous détaillons dans la suite ces trois formes de polarisation, comme réponses du milieu à une sollicitation électrique.

1.2.4.1 – Polarisation électronique

La polarisation électronique est due au déplacement des électrons du cortège par rapport aux noyaux atomiques (figure 7).

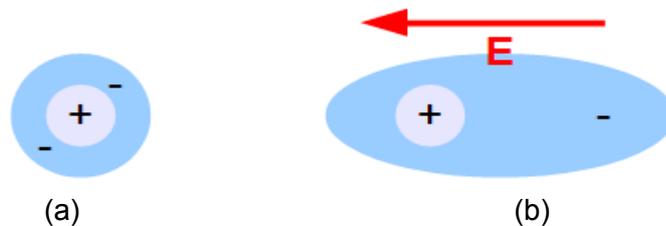


Figure 7 - Polarisation électronique dans un champ électrique local E
 (a) - Distribution des charges d'un atome en l'absence de champ E_e
 (b) - Distribution des charges en présence de E_e

Pour qu'il y ait transition électronique entre deux niveaux d'énergie, la physique quantique montre que l'énergie correspondante aux pulsations propres des électrons, $\hbar\omega_0$, doit être au moins égale à l'énergie du gap du matériau E_G ($\hbar = h/2\pi$ où $h = 6,62606876 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck). Si E_G est élevée, les électrons pourront difficilement changer de niveaux d'énergie et se déplacer. C'est le cas des matériaux très isolants (pour le verre $E_G = 10$ eV, la pulsation propre doit donc être au moins égale à $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{16}$ rad/s, soit une fréquence $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 2,39 \cdot 10^{15}$ Hz).

Par ailleurs, le temps de relaxation est très court pour les électrons. Pour autant, la condition $\omega_0 \tau \gg 1$ est satisfaite parce que ω_0 est très grande. (82) prend alors la forme approchée:

$$\chi_e''(\omega) \approx \chi_0 \frac{\omega_0}{2(\omega_0 - \omega)^2 \tau^2 + 1}$$

La pulsation du champ extérieur ω est généralement plus faible que la fréquence propre des électrons, la quantité $(\omega_0 - \omega)\tau$ reste donc très grande: $(\omega_0 - \omega)\tau \gg 1$. Il s'ensuit que l'expression précédente de χ_e'' est pratiquement nulle: $\chi_e'' \approx 0$. Seule subsiste alors la partie réelle $\chi_e'(\omega)$ dans (82):

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e'(\omega) = \chi_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

Deux cas se présentent alors:

- Domaine du visible: $\omega \ll \omega_0$ avec $\omega_0\tau \gg 1$ ("basses" fréquences du champ et fréquences propres électroniques très grandes). L'expression précédente se simplifie en:

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 0 \quad (103)$$

La susceptibilité est réelle et positive.

- Domaine des rayons X: $\omega \gg \omega_0$ avec $\omega_0\tau \gg 1$ ("hautes" fréquences du champ et fréquences propres électroniques très grandes). Il vient alors:

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 0 \quad (104)$$

La susceptibilité est réelle et négative. Comme $\omega \gg \omega_0$, la quantité (104) est très faible, il s'ensuit, d'après (83), que:

$$\varepsilon_r \approx 1$$

donc $\varepsilon \approx \varepsilon_0$: le milieu se comporte comme le vide.

1.2.4.2 – Polarisation ionique

La polarisation ionique résulte du déplacement relatif des charges de signes opposés dans les réseaux cristallins lorsqu'elles sont soumises à l'influence du champ électrique extérieur \vec{E}_e (figure 8).

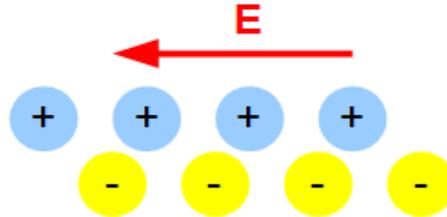


Figure 8 - Polarisation ionique dans un champ électrique local E

Les ions d'un cristal sont organisés en oscillateurs pouvant interagir avec un champ électrique. Leurs pulsations propres ω_0 sont plus petites que les pulsations électroniques définies au point 1.2.4.1. Leur ordre de grandeur est:

$$5.10^{12} \leq \omega_0 \leq 30.10^{12} \text{ rad/s}$$

Les vibrations ioniques correspondent donc au rayonnement infrarouge lointain. Le temps de relaxation τ , caractérisant la durée d'un amortissement des vibrations, est de l'ordre tel que:

$$\omega_0 \tau \approx 0,02 \text{ à } 0,001$$

on a donc cette fois: $\omega_0 \tau \ll 1$. Il en résulte que:

- Pour un champ excitateur du domaine du visible et au-delà, soit $\omega \gg \omega_0$, la susceptibilité électrique est réelle et très petite. En effet (82) devient:

$$\chi_e = \chi'_e \approx -\chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 0 \quad (105)$$

Dans le domaine visible, seuls les effets électroniques sont prépondérants dans la polarisation ionique.

- Pour un champ excitateur du domaine micro-ondes et en-deçà, soit $\omega \gg \omega_0$, les régimes sont quasi stationnaires (domaine des communications hertziennes). (82) donne alors:

$$\chi_e \approx \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx \chi_0 \quad (106)$$

La susceptibilité ionique est réelle et constante.

1.2.4.3 – Polarisation d'orientation : équations de Debye

La polarisation d'orientation résulte du fait que les moments dipolaires présents dans le matériau s'orientent suivant le champ électrique local (figure 1, au début de l'article).

Les dipôles électriques réagissent au champ électrique par une polarisation d'orientation. Ce phénomène se rencontre pour les liquides polaires, comme l'eau (voir article "**polarité de l'eau**", Frédéric Élie, 16 avril 2004), pour le domaine des micro-ondes et des fréquences encore plus faibles.

Ce processus est gouverné par les configurations où les effets de frottement sont prépondérants devant ceux de l'accélération. Dans ce cas la durée de relaxation est de l'ordre de grandeur du temps de Debye τ_D , lequel dépend de la température selon la loi de Curie: la durée τ_D est d'autant plus grande que la température est faible.

Dans (82) on a donc, pour $\omega\tau \ll 1$:

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - j\omega/\tau} = \chi_0 \frac{1}{1 - j\omega\tau_D} \quad (107)$$

avec le **temps de Debye**:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \quad (108)$$

et où l'on montre que la susceptibilité statique vérifie:

$$\chi_0 = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \quad (109)$$

où p_0 est le moment dipolaire moléculaire permanent et $k_B = 1,3806503 \cdot 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann.

De (107) on tire que les parties réelle et imaginaire de $\tilde{\chi}_e(\omega)$ vérifient les **équations de Debye**:

$$\begin{aligned} \chi'_e(\omega) &= \varepsilon'_r - 1 = \chi_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \\ \chi''_e(\omega) &= \varepsilon''_r = \chi_0 \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \end{aligned} \quad (110)$$

L'allure des courbes correspondant à (110) est la même que celles de la figure 5, si ce n'est que le maximum de la partie imaginaire de la susceptibilité $\chi''_e(\omega)$ est atteint pour $\omega = 1/\tau_D$.

Deux types de comportement s'en dégagent:

- basses fréquences $\omega\tau_D \ll 1$:

$$\begin{aligned}\chi'_e(\omega) &\approx \chi_0 \\ \chi''_e(\omega) &\ll \chi_0\end{aligned}$$

La susceptibilité dipolaire est réelle et égale à sa valeur champ statique.

- hautes fréquences $\omega\tau_D \gg 1$:

$$\begin{aligned}\chi'_e(\omega) &\ll \chi_0 \\ \chi''_e(\omega) &\ll \chi_0\end{aligned}$$

La susceptibilité dipolaire est négligeable en haute fréquence: les moments dipolaires n'ont pas le temps de s'aligner sur le sens imposé par les oscillations du champ électrique.

1.2.4.4 – Polarisation totale

Selon que le matériau est isolant ou bien conducteur, pour une fréquence donnée du champ électrique, sa polarisation totale est différente.

1.2.4.4.1 – Pour un matériau isolant à cette fréquence

La constante diélectrique ϵ_r résulte de la contribution des polarisations électronique, ionique et d'orientation:

$$\chi_e = \chi_e(\text{électronique}) + \chi_e(\text{ionique}) + \chi_e(\text{orientation})$$

où les différents χ_e (électronique/ionique/orientation) sont données par les relations (103)-(104) ou (105)-(106) ou (110) selon les cas. Et d'après (83) on a aussi:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e(\text{électronique}) + \chi_e(\text{ionique}) + \chi_e(\text{orientation}) \quad (111)$$

Le tableau suivant donne la contribution des différents types de polarisation en fonction des domaines de fréquences du champ électromagnétique incident:

polarisation	ondes hertziennes $\lambda > 1 \text{ mm}$	rayonnement IR $\lambda \approx 1 \text{ mm}$	visible $0,4\mu < \lambda < 0,8\mu$	UV $\lambda < 0,3\mu$	rayonnement X
orientation	oui	non	non	non	non
ionique	oui	oui	oui	non	non
électronique	non	non	oui	oui	oui

1.2.4.4.2 – Pour un matériau conducteur à cette fréquence

Dans un matériau conducteur les charges électriques mobiles contribuent à la polarisation: comme elles ne sont soumises à aucune force de rappel ($K = 0$), parce qu'elles sont libres de se mouvoir, on a $\omega_0 = 0$ et (82) devient:

$$\chi_e(\omega) = - \frac{nq^2}{m\epsilon_0(\omega^2 + j\omega/\tau)} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{j}{\omega\tau}} \quad (112)$$

où l'on introduit la pulsation propre de l'oscillation collective des charges libres, ou **pulsation plasma**:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}} \quad (113)$$

que l'on a déjà rencontrée en (92).

Deux cas se présentent ici:

- si $\omega\tau \ll 1$, (112) devient, suite à (96):

$$\chi_e = \chi_e''(\omega) \approx j \frac{\gamma_0}{\omega\epsilon_0} \quad (114)$$

la susceptibilité d'un conducteur est imaginaire à basse fréquence.

- si $\omega\tau \gg 1$, (112) devient:

$$\chi_e = \chi_e(\omega) \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (115)$$

la susceptibilité d'un conducteur est réelle et négative à haute fréquence (comme pour la polarisation électronique).

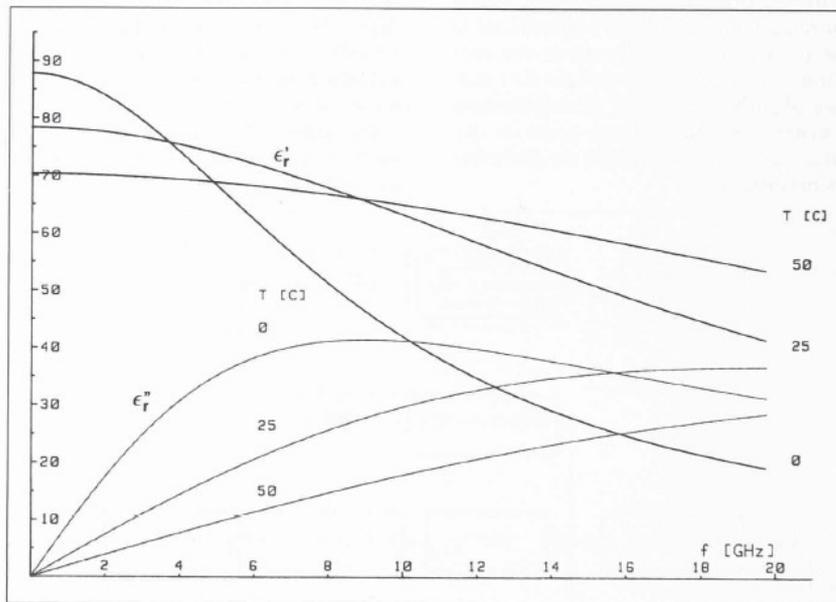
2. Fours micro-ondes

2.1 – Puissance absorbée et chauffage par micro-ondes

Le domaine des processus de cuisson au four micro-ondes correspond à celui de la polarisation par orientation. Pour l'obtenir, la fréquence d'excitation optimale doit être compatible avec la durée de Debye pour provoquer l'alignement alternatif des molécules polaires avec le champ exciteur, lequel change d'orientation à chaque demi-période. Or, $\chi_e''(\omega)$ donnée par (110) est maximale pour $\omega = \omega_D = 1/\tau_D$ avec $\tau_D = 0,8 \cdot 10^{-11}$ s pour l'eau vers 25°C. Ceci correspond à la fréquence $f = \omega_D/2\pi = 20$ GHz, soit une longueur d'onde $\lambda_D = 1,5$ cm.

Ce n'est pourtant pas cette fréquence qui est utilisée pour les fours à micro-ondes domestiques : pour les substances assimilables à l'eau, c'est la fréquence 2,45 GHz qui est choisie. Pourquoi ?

La réponse est que l'épaisseur de peau, donc la profondeur maximale à laquelle l'onde est pratiquement absorbée, varie avec la fréquence comme indiqué en (59) : les permittivités réelle $\epsilon' = \epsilon'_r \epsilon_0$ et complexe $\epsilon'' = \epsilon''_r \epsilon_0$ varient avec la fréquence comme on l'a vu plus haut (relations (82), (83)), ainsi qu'avec la température. Plus la température augmente, plus le maximum de $\epsilon''_r(\omega) = \chi''_r(\omega)$ se décale vers les hautes fréquences. Les courbes, tirées de [14], sont représentées sur la figure ci-après (voir aussi [13] et [12]).



Variation de la permittivité relative de l'eau en fonction de la fréquence (d'après réf. [14])

A la température de référence 25°C, en-dessous de la fréquence de 1 GHz, il n'y a aucune absorption, et donc aucune dissipation thermique (cuisson) à un produit de taille compatible à la cavité du four micro-ondes (20 cm) ; au-delà de la fréquence de Debye, il y a bien résonance mais l'absorption se fait sur une épaisseur bien trop fine (moins de 1 cm). Il y a donc une fréquence intermédiaire où la polarisation de Debye reste encore importante et où l'absorption est encore compatible avec un transfert thermique dans le matériau : le tableau suivant donne les caractéristiques pour les trois fréquences : 1 GHz (limite basse), 2,45 GHz fréquence adoptée pour les fours micro-ondes, 20 GHz résonance de Debye à 25°C où la polarisation par orientation est maximale à cette température.

Il montre que le choix de 2,45 GHz est compatible avec la cuisson d'un matériau aqueux (aliments) dont les dimensions n'excèdent pas 20 ou 25 cm.

À T = 25°C eau	f = 1 GHz	f = 2,45 GHz	f = 20 GHz
ϵ'_r	79	78	42
ϵ''_r	4	7	37
tan δ (relation 57)	0,05	0,09	0,88
α (relation 59)	4,65 (m ⁻¹)	20,4 (m ⁻¹)	1106
d (relation 60)	21 cm	5 cm	0,9 mm
Commentaires : xxx : recommandé xxx : choix non retenu	Épaisseur de peau trop grande : l'onde traverse le matériau sans y être absorbé. De plus, on est loin de la résonance de Debye où X'' est maximale	Épaisseur de peau compatible avec la taille du matériau à cuire. On est cependant encore loin de la résonance de Debye, mais l'énergie thermique est transmise au matériau par absorption	À 25°C on est proche de la résonance de Debye, mais l'épaisseur de peau est beaucoup trop faible : l'absorption, et donc la cuisson, ne se fait qu'en surface

Essayons d'évaluer la puissance absorbée par un corps chauffé par le rayonnement d'un four micro-ondes. La puissance électromagnétique moyenne absorbée par un volume V de l'échantillon de matériau est:

$$\langle \vec{E} | \vec{J}_i \rangle = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \chi_e''(\omega) |E_0|^2 \quad (116)$$

Les pertes d'énergie dues aux mouvements de rotation des molécules pour s'aligner par polarisation avec le champ excitateur, sont source de dégagement de la chaleur qui entraîne la cuisson de l'échantillon.

Cherchons un ordre de grandeur avec un champ électrique intense de $E_0 = 300 \text{ V/m}$ et une conductivité, par exemple de la viande, égale à $\gamma = 1,6 \text{ S/m}$. La puissance moyenne dissipée par unité de volume dans l'aliment est alors égale à :

$$\langle w \rangle = \langle \gamma E^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma E_0^2 = 72 \text{ kW/m}^3$$

On obtient cette formule en remplaçant dans (116) γ par (97).

Sous l'action d'un rayonnement micro-ondes, un matériau diélectrique s'échauffe à cause de la dissipation thermique des pertes dans le matériau. On a vu que cela se produit sur la plage de relaxation et que le maximum de transfert thermique dû aux pertes est atteint à la fréquence pour laquelle ϵ'' est maximal, en l'occurrence $\omega = 1/\tau_D$ (cf. relations (110)).

Puisque les pertes par diélectrique sont dominantes, donc puisque $\gamma_D = \omega \epsilon_D'' = \omega \chi_e''$, (116) montre que la puissance moyenne dissipée par unité de volume est proportionnelle à la moyenne du carré de l'amplitude du champ électrique local dans le matériau :

$$\langle w \rangle = \langle \gamma_D \vec{E}^2 \rangle$$

soit encore : $\langle w \rangle = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' \langle E^2 \rangle = 2\pi f \epsilon_0 \epsilon_r'' \tan \delta \langle E^2 \rangle$ (en W/m^3) , numériquement :

$$\langle w \rangle = 55,6325 \cdot 10^{-12} f \epsilon_r'' \tan \delta \langle E^2 \rangle \quad (117)$$

L'amplitude du champ électrique local dans le matériau varie d'un point à l'autre : en particulier, le long d'une profondeur z , pour une colonne de section unité, elle varie en $E_0(x,y) \exp(-\alpha z)$, où α est le coefficient d'atténuation vu auparavant. Il s'ensuit que E^2 , et donc la puissance moyenne volumique $\langle w \rangle$, varie comme $\exp(-2\alpha z)$ avec la profondeur z dans le matériau. La puissance moyenne dissipée dans un volume délimité par une colonne de section unité et une profondeur z , varie alors selon :

$$\langle w(z) \rangle = \int_0^z \langle w \rangle dz = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' \int_0^z \langle E^2(z) \rangle dz = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' E_0^2 \frac{1}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha z)) \quad (118)$$

soit :

$$\langle w(z) \rangle = 55,6325 \cdot 10^{-12} f \epsilon_r'' \tan \delta E_0^2 \frac{1}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha z)) \quad (\text{en } W/m^2) \quad (119)$$

La chaleur dégagée par les pertes du rayonnement micro-ondes est transmise au matériau sous trois formes (cf. [8]) :

- conduction thermique : associée aux oscillations des molécules ou atomes autour d'une position moyenne, dans les milieux solides ou liquides ;
- rayonnement thermique : émission par la surface du matériau d'un rayonnement électromagnétique qui dépend de la température de surface de ce matériau (théorie de Planck et loi de Stefan) ;
- convection : associée au mouvement d'ensemble de volumes liquides ou gazeux sous l'action des effets de gravité et de gradient de température entre ces volumes et les parois ou l'environnement fluide.

Le matériau chauffé dans le four micro-ondes propage la chaleur reçue à la surface vers

l'intérieur principalement par conduction thermique : on se limitera donc ici au calcul du flux thermique transmis seulement par conduction en interne.

Le flux thermique φ_C transmis par conduction dans le matériau, depuis sa surface, dans une direction z est donné par la loi de Fourier :

$$\varphi_C = -\lambda_C \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{en W/m}^2) \quad (120)$$

où λ_C est la conductivité thermique (en $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) ; pour l'eau elle vaut $0,60 \text{ W/m/K}$, et pour le verre 1 W/m/K .

La puissance Φ_C transmise par conduction à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation z , est alors :

$$\Phi_C = \iint_S \varphi_C dS = -\lambda_C S \frac{dT}{dz} \quad (\text{en W}) \quad (121)$$

La distribution de température dans l'espace (x, y, z) , et son évolution avec le temps, $T(x, y, z, t)$, est solution de l'équation différentielle, ou « équation de la chaleur », en présence du terme de génération interne de chaleur qui correspond, ici, à la puissance volumique transmise par conduction w_C , en W/m^3 (et donc avec $\Phi_C = \iiint_V w_C dV$):

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_C \Delta T + w_C(x, y, z, t) \quad (122)$$

où: c_P chaleur massique du matériau (en J/kg/K), ρ masse volumique, λ_C conductivité thermique. Δ est l'opérateur laplacien: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. On appelle diffusivité thermique la quantité :

$$a = \frac{\lambda_C}{\rho c_P} \quad (\text{en m}^2/\text{s}) \quad (123a)$$

et (122) se réécrit :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{w_C}{\lambda_C} + \Delta T \quad (123b)$$

Quelques valeurs de c_P et ρ :

matériau	ρ (kg/m ³)	c_P (J/kg/K)
verre	2500-5900	730-840
eau	1000	4187
huile	760-950	1180-1970

Dans l'approximation d'un transfert thermique suivant une seule direction z , (123b) se simplifie en :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{w_C(z)}{\lambda_C} + \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

$w_C(z)$ est assimilée à la puissance volumique moyenne transmise par le rayonnement incident

depuis la surface, par pertes diélectriques (117) ; or à une épaisseur z on a pour le champ électrique transmis : $\langle E^2(z) \rangle = E_0^2 \exp(-2\alpha z)$. L'équation précédente s'intègre alors ainsi : soit $T(z_0, 0)$ la température à une profondeur donnée z_0 à l'instant initial $t = 0$, la température à la profondeur z à un instant t se déduit de la précédente par :

$$T(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^H T(z_0, 0) \sqrt{\frac{\pi}{at}} \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{4at}\right) \exp(-2\alpha z) dz_0 \quad (124)$$

où H est l'épaisseur totale du matériau : $0 \leq z \leq H$.

Numériquement (124) se calcule en discrétisant le matériau en couches d'épaisseurs successives $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ et en remplaçant dans le terme de gauche de (124) z par z_n et dans le terme de droite z_0 par z_{n-1} ; le temps est discrétisé en t_1, t_2, \dots, t_m : dans le terme de gauche t est remplacé par t_m , et dans le terme de droite $t = 0$ est remplacé par t_{m-1} . Chaque valeur $T(z_n, t_m)$ contient les constantes qui caractérisent le matériau et qui découlent de (117) et (123) : permittivités, fréquence, diffusivité, conductivité thermique.

La figure 9 représente la logique de ce raisonnement, dans un repère (z, t) .

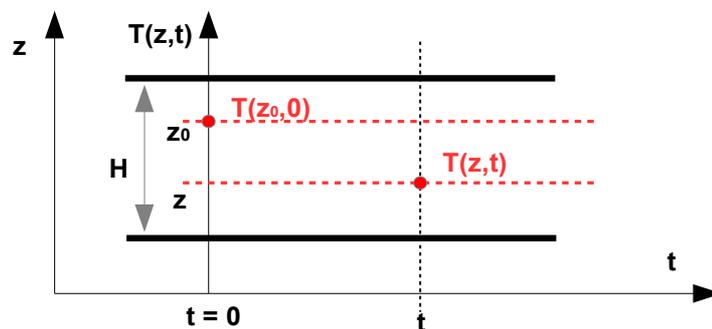


figure 9 - calcul du champ de température

2.2 – Générateurs hyperfréquences : cas du magnétron

L'émission d'un rayonnement micro-ondes nécessite trois choses :

- un générateur hyperfréquence équipé de son alimentation électrique ;
- un applicateur, son rôle est de distribuer l'onde produite pour diverses applications, comme par exemple la cuisson d'un aliment ;
- un guide d'onde qui permet de transmettre la puissance du champ électromagnétique du générateur à l'applicateur.

Les générateurs utilisent des tubes à vide ; il en existe deux familles :

- type O : tubes à faisceau linéaire ; les klystron et les tubes à onde progressive appartiennent à cette famille ;
- type M : tubes à champs croisés, où le flux d'électrons se propage suivant une courbe sous l'action de champs électrique et magnétique continus et perpendiculaires entre eux (champ électromagnétique continu) ; les magnétrons appartiennent à cette famille. Ce sont eux qui équipent les fours micro-ondes domestiques. Ils sont également utilisés dans les radars.

Le magnétron (figures 13 et 14) est alimenté par une source électrique continue obtenue par transformation du courant alternatif du secteur à l'aide d'un transformateur élévateur, d'une diode et d'un condensateur.

L'organe principal du magnétron est une anode cylindrique, dans laquelle des cavités sont aménagées (cavités résonantes). Ces cavités sont sur l'axe d'une cathode chauffante (généralement en tungstène, à chauffage direct ou bien indirect ⁽³⁾). Le rendement augmente

3 En chauffage indirect, un filament est enroulé autour du bloc cathodique.

avec le nombre de cavités. L'anode et la cathode sont séparées par l'espace d'interaction, placé dans un vide très poussé. La distance entre les électrodes est de quelques millimètres, et une tension électrique continue, de l'ordre de plusieurs kilovolts, est appliqué entre elles.

Deux aimants permanents ou des électro-aimants sont fixés perpendiculairement par rapport à l'axe du tube, et créent un champ magnétique parallèle à l'axe du tube.

Les électrons libérés par la cathode sont accélérés par le champ électrique continu. En l'absence des aimants, les électrons suivraient une trajectoire radiale et iraient directement sur l'anode. La présence des aimants, créateurs du champ magnétique, permet d'incurver ces trajectoires sous formes de cycloïdes, créant ainsi un nuage d'électrons tournant entre l'anode et la cathode (figure 10).

Soit V_0 la tension appliquée entre les électrodes. Au-dessus d'une certaine intensité du champ magnétique B_c , appelée valeur critique de l'induction magnétique, la trajectoire des électrons est telle que ceux-ci, émis par la cathode, n'atteignent plus l'anode et demeurent dans les cavités : les électrons restent et tournent dans l'espace d'interaction et forment un nuage d'autant plus confiné au voisinage de la cathode que l'induction magnétique est grande. Ils peuvent alors subir de la part du champ une accélération ou bien un ralentissement. Lors d'une accélération, les électrons prélèvent de l'énergie au champ qui leur permettent de rencontrer cathode ; celle-ci s'échauffe alors et expulse des électrons secondaires. Inversement, lors du ralentissement, les électrons cèdent de l'énergie au champ et se propagent vers l'anode.

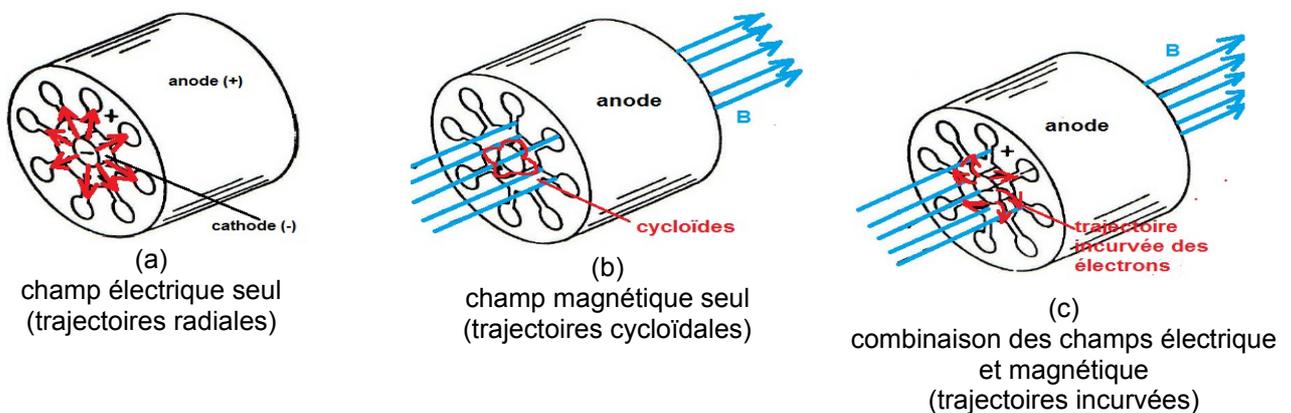


Figure 10 – trajectoires des électrons entre l'anode et la cathode (espace d'interaction) selon application ou non des champs électriques et magnétiques continus (réf. [1])

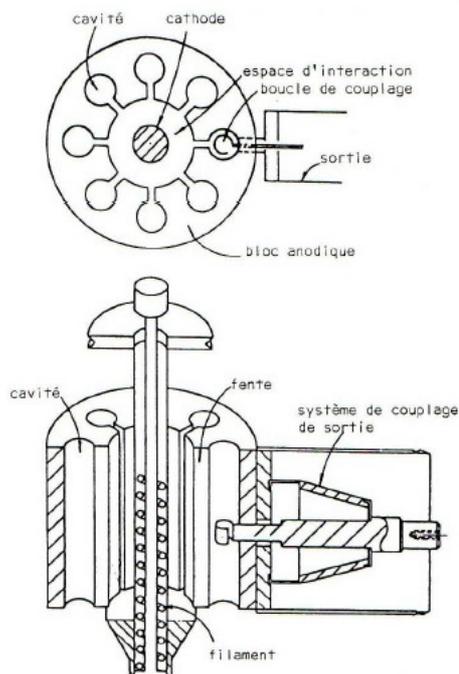


figure 11 – structure du magnétron (réf. [1])

Avec ces processus alternatifs, un phénomène d'oscillations auto-entretenues, relativement stable, apparaît : il se produit lorsque la vitesse angulaire des électrons, ω_e , remplit la condition de coïncidence avec les fréquences propres de résonance des cavités : en présence d'un nombre pair N de cavités, il y a $(N/2 + 1)$ fréquences propres, les oscillations propres étant déphasées de $2k\pi/N$ ($k = 0, 1, 2 \dots N/2$). Les oscillations dues aux électrons se produisent alors à la pulsation ω telle que la coïncidence avec l'un des déphasages ait lieu :

$$\frac{\omega}{\omega_e} \frac{2\pi}{N} = \frac{2k\pi}{N} \quad \text{mod } 2\pi \quad \text{soit : } \omega = k\omega_e \quad \text{mod } 2\pi$$

Comme indiqué, cela n'est possible que si $B > B_c$ (donc $H > B_c/\mu_0$). On montre que la valeur critique B_c est reliée à la tension continue appliquée par (cf. [1]) :

$$V_0 = \frac{1}{8} \frac{e}{m} B_C^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^2$$

où a et b sont respectivement les rayons de la cathode et de l'anode ($a < b$) ; e et m sont la charge et la masse de l'électron ($e = 1,6021 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 1,6748 \cdot 10^{-27}$ kg). Numériquement :

$$V_0 = 1,1957 \cdot 10^7 B_C^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^2 \quad (125)$$

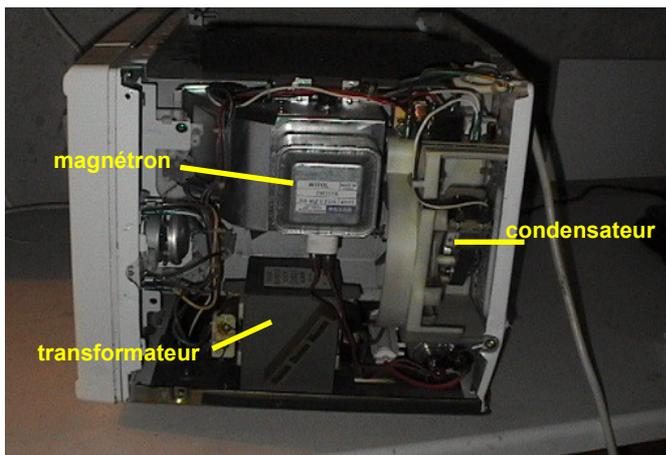


Figure 12 – arrière ouvert du four micro-onde, montrant le magnétron, le transformateur, le condensateur (photo : F. Élie)



Figure 13 – magnétron démonté, avec la lampe interne (photo : F. Élie)

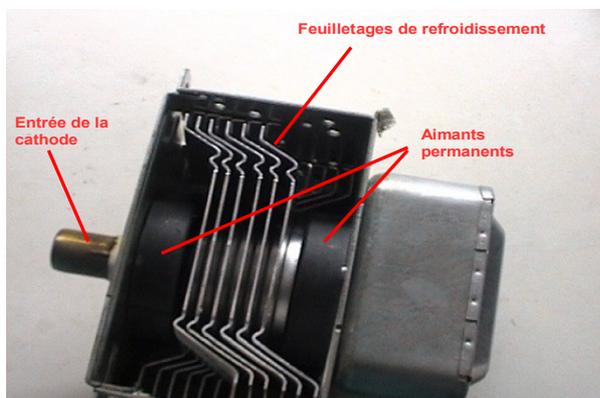


Figure 14 – magnétron (photo : F. Élie)



Figure 15 – guide d'ondes

Pour un four micro-ondes domestique l'anode est constituée de $N = 10$ cavités résonnantes. Le filament de tungstène qui entoure la cathode pour la chauffer est alimenté par 3,2 V, la température de chauffage est alors de 1500°C et permet l'émission des électrons depuis la cathode. Les dimensions des 10 cavités sont calculées pour que les ondes aient une fréquence de 2 450 MHz.

Les micro-ondes, qui résultent des oscillations électroniques dans les cavités résonnantes et l'espace d'interaction sont prélevées par une boucle de couplage et transmises par une antenne dans un guide d'ondes par lequel elles sont acheminées jusque dans la cavité du four où l'on place les aliments à chauffer (figure 15).

2.3 – Transformateur et alimentation du magnétron

Pour fonctionner, le magnétron a besoin d'une tension de 4000 V dès que la cathode a atteint sa température de fonctionnement de 800°C . Pour cela on emploie la technique du doubleur de tension à la sortie d'un transformateur d'alimentation haute tension (HT) connecté au secteur. L'intérêt de recourir au doubleur de tension plutôt que d'utiliser une transformation HT directement du secteur (230 V) à la tension du magnétron $U_M = 4200$ V crête est de limiter le besoin en puissance d'utilisation.

Le circuit primaire du transformateur est alimenté par 230 V, 50 Hz de la part du secteur, et deux tensions sont générées aux circuits secondaires :

- 3,2 V pour l'alimentation du chauffage de la cathode, avec une intensité de 10 A (donc le diamètre de l'enroulement est de diamètre important)
- 2100 V pour l'alimentation par tension pulsée entre la cathode et l'anode du magnétron, avec une intensité de 0,6 A (donc enroulement du secondaire de faible diamètre).

Les 2100 V sont élevées (en valeur absolue) à $U_M = 4200$ V crête du magnétron par le doubleur de tension (figure 16) : le magnétron est analogue à une diode Zener de tension de seuil 4200 V, avec à ses bornes des créneaux à -4200V crête.

Le doubleur de tension est constitué d'une diode HT, conçue pour une tension inverse maxi de 6000 V (c'est en fait un empilage de 8 diodes en série), reliée à un condensateur C d'environ 1 μF .

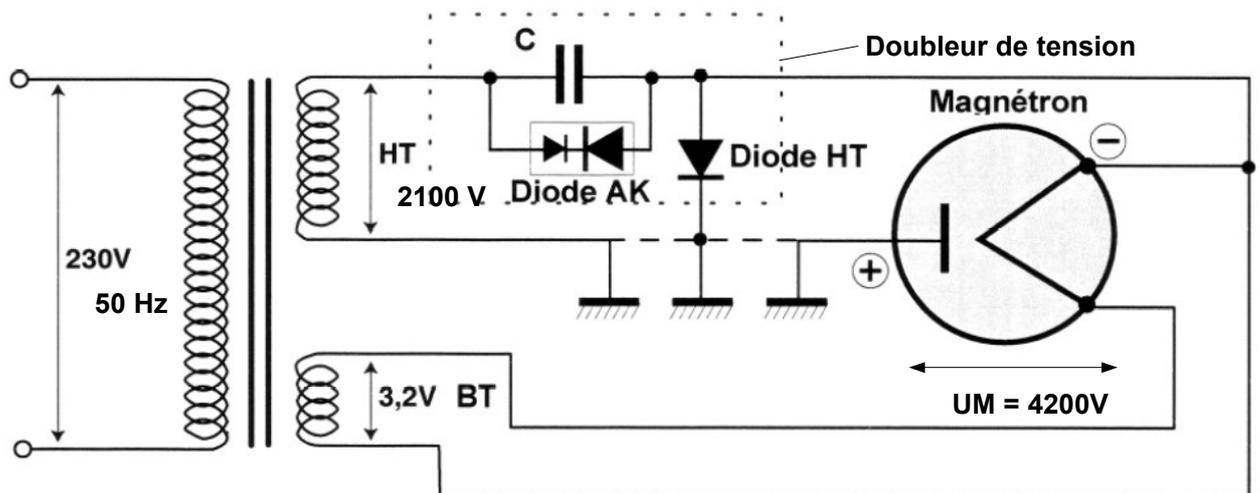


Figure 16 – alimentation du magnétron

Une diode de protection AK est constituée de deux diodes de tensions inverses différentes montées en opposition : en cas de court-circuit de la diode HT, la diode AK provoque un court circuit franc qui fera fondre le circuit de l'enroulement primaire, le transformateur est ainsi protégé.

Fonctionnement du doubleur de tension : le secondaire HT est en régime alternatif ; lors d'une demi-alternance positive la diode HT est passante et charge le condensateur C ; le magnétron n'est donc pas alimenté. Lors de l'alternance négative, la diode HT est bloquée (non passante)

et C se décharge dans le magnétron : elle est source d'une tension qui vient s'ajouter à celle du secondaire HT du condensateur, le total atteignant $U_M = -4200 \text{ V}$ crête.
 Photos du transformateur et du condensateur en figures 17 et 18 :

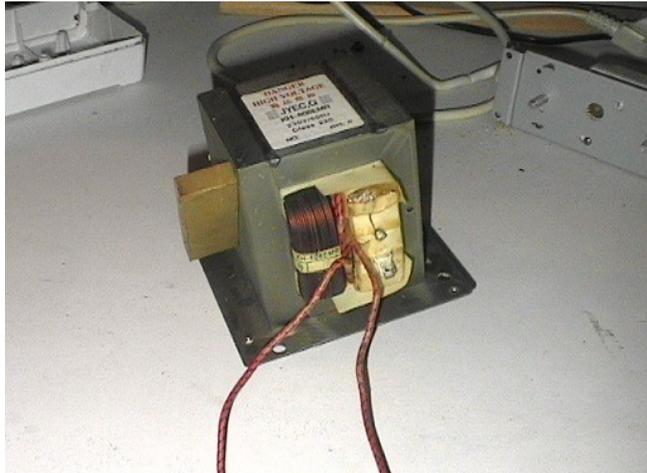


Figure 17 – transformateur
 (photo : F. Élie)



Figure 18 – condensateur
 (photo : F. Élie)

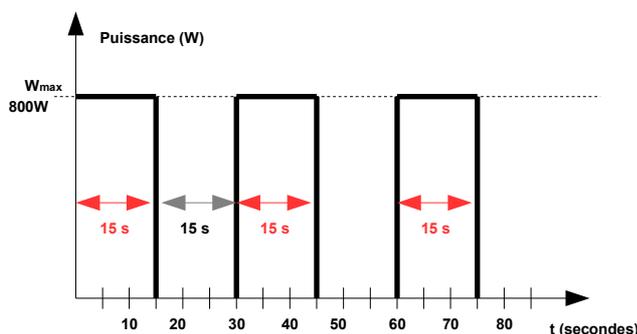
2.4 – Commande de la puissance du four micro-ondes

A cause du dispositif d'alimentation du magnétron, décrit au point 2.3, la puissance du magnétron ne peut pas se régler par une électrode de commande. Le réglage de la puissance s'effectue en « tout ou rien » (technique de la modulation par largeur d'impulsion). Par cette technique, la variation de la puissance de cuisson s'effectue par intermittence, avec un rapport cyclique pouvant varier de 0% à 100%, selon la puissance de cuisson voulue. La puissance moyenne obtenue est directement reliée au rapport entre la durée d'une impulsion T_i et la durée du cycle T :

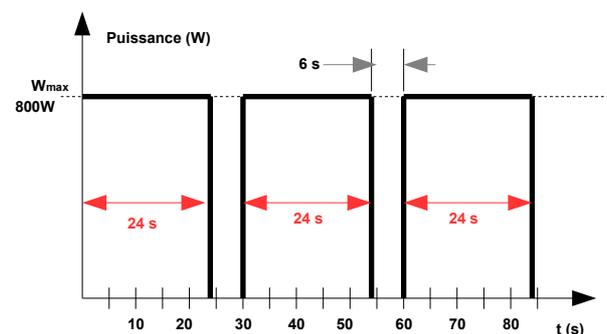
$$W_{moy} = W_{max} \frac{T_i}{T} \quad (126)$$

où W_{max} est la puissance maximale disponible pour le magnétron.

La figure 19 illustre cette situation par deux exemples. Si le bouton est placé sur la puissance maximale, le magnétron est alimenté en permanence.



(a) puissance à 50% : $W_{moy} = 800 \times 15/30 = 400 \text{ W}$



(b) puissance à 80% : $W_{moy} = 800 \times 24/30 = 640 \text{ W}$

Figure 19 : exemples de réglage de puissance par largeur d'impulsion : (a) 50%, (b) 80%

2.5 – Brasseur d'ondes et plateau tournant

Les ondes sont acheminées dans l'enceinte par un guide d'ondes. Sans rien de plus, elles se

répartiraient dans l'enceinte de cuisson en des points d'ondes stationnaires, écartés d'une distance égale à $\lambda/2$, soit $c/2f = 3.10^8/2/2,45.10^9 = 6,12$ cm. Dans ce cas seules certaines parties de l'aliment seraient cuites. Pour rendre la cuisson homogène il faut alors répartir les ondes électromagnétiques sur toute la surface de l'aliment. Pour cela, deux solutions sont employées, isolément ou combinées :

- une hélice tournante métallique (brasseur d'ondes, ou Stirrer), disposée dans la partie supérieure de l'enceinte, diffuse les ondes incidentes vers la cavité : du fait de la rotation, les ondes sont brassées dans la cavité et globalement toutes les zones sont atteintes par les micro-ondes ;
- un plateau tournant, sur lequel est placé l'aliment à cuire, expose successivement toutes les parties de l'aliment aux ondes stationnaires qui se répartissent dans l'enceinte.



Figure 20 – circuit d'alimentation, programmeur, moteur du plateau tournant
(photo : F. Élie)

2.6 – Porte du four et protection

En fonctionnement, un four micro-ondes ne doit présenter aucun risque de brouillage électromagnétique (perturbations affectant les réseaux WiFi ou les transmissions par téléphones portables par exemple), ni aucun risque biologique (effets sur les tissus et organes des êtres vivants) (à ce sujet, voir par exemple [5]). Par conséquent, les fuites éventuelles d'un four micro-ondes doivent être en-dessous du seuil autorisé. Celui-ci est de 5 mW/cm^2 à 5 cm de distance. De fait, les fours présentent une fuite maximale de $1,5 \text{ mW/cm}^2$.

Pour minimiser ces risques, plusieurs dispositifs de sécurité équipent les fours micro-ondes :

a) Arrêt du fonctionnement du four en cas d'ouverture de la porte ;

b) Porte du four conçue de telle manière à piéger les micro-ondes circulant dans la cavité, évitant ainsi leur transmission vers l'extérieur : filtre de barrage selfique, piège quart d'onde, grille formant la continuité avec l'enceinte du four de manière à obtenir une cage de Faraday complètement fermée, joint de la porte en caoutchouc ferrite permettant l'absorption de l'énergie résiduelle des micro-ondes.

Le piège quart d'onde consiste en des structures géométriques où l'on obtient une tension électrique maximum stationnaire en $\lambda/4$ et un courant électrique minimum stationnaire en $\lambda/4$: tension et courant électriques sont en opposition de phase ; dans la structure les ondes réfléchies sont donc déphasées de $\lambda/2$ par rapport aux ondes incidentes, elles s'annulent donc (figure 21).

Le hublot de la porte doit être blindé par du verre armé, des grilles à maillage fin, et des joints en matériaux diélectriques à inclusions métalliques.

Voir photo de la porte en figure 22.

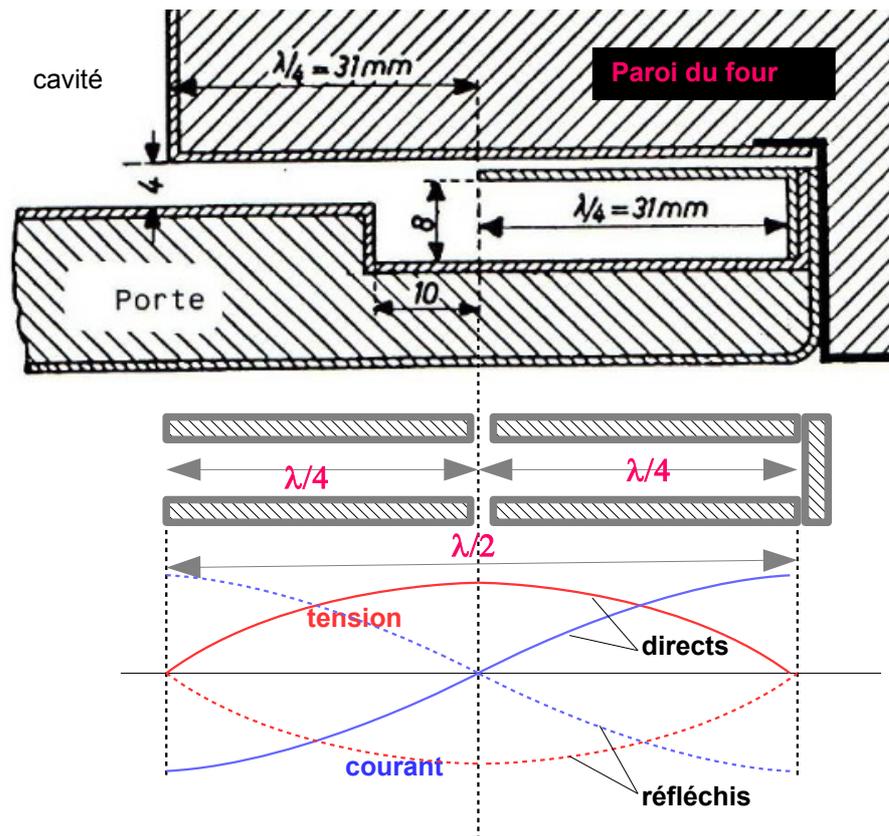


figure 21 – principe de réalisation d'un piège quart d'onde dans la porte du four (d'après [1])

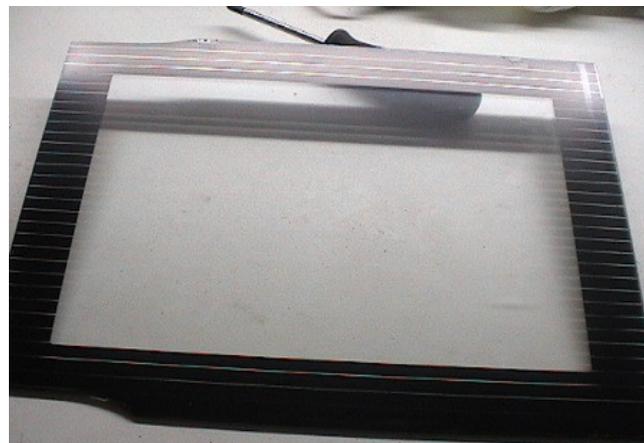


figure 22 – hublot de la porte du four micro-ondes (photo : F. Élie)

L'enceinte du four micro-ondes et le guide d'ondes doivent être en matériaux non magnétiques et bons conducteurs.

Les éléments diélectriques qui constituent les parois, les portes, les joints, doivent être en matériaux diélectriques à très faible perte. Les matériaux disponibles sont :

- le polyéthylène ;
- les silicones, pour les joints en caoutchouc
- le polytétrafluoréthylène (PTFE) ;

Si des pièces métalliques sont présentes et relativement proches les unes des autres, sous un champ électrique élevé, des décharges dues à la rupture diélectrique de l'air peuvent se produire (claquage), et occasionner des dommages. Avec une fréquence de 2,45 GHz, la tension de claquage est de quelques dizaines de kV/m, or dans la cavité d'un four le champ électrique ne dépasse pas 5,3 kV/m : ceci exclut tout risque de claquage tant que l'on n'introduit

pas d'objet métallique, notamment qui présentent des aspérités ou des pointes. En effet, le champ électrique au voisinage immédiat d'une lame métallique a une amplitude qui varie comme l'inverse de la racine carrée de la distance r à la paroi, puisque la densité de charge induite à sa surface est :

$$\rho_S = \frac{cste \times \epsilon_0}{\sqrt{r}} \quad (\text{en C/m}^2)$$

On démontre que le champ électrique local, au voisinage de la discontinuité, est :

$$E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} = \frac{cste}{\sqrt{r}} \quad (127)$$

Pour éviter ces effets de claquage, il faut éviter les objets présentant des angles vifs (effets de pointe), l'emploi de récipients métalliques, la présence d'aspérités aux points de soudure, la présence de limaille ou de poussière.

Selon les matériaux, les ondes peuvent être :

- absorbées : les matériaux sont alors chauffés et peuvent se déformer ou se ramollir ;
- réfléchies : c'est le cas des métaux (on a vu que leurs pertes diélectriques sont extrêmement faibles). Les ondes risquent d'être renvoyées vers le magnétron et l'endommager. Ces matériaux sont à proscrire absolument ; il existe toutefois des objets métalliques spéciaux avec des coins arrondis, qui ne provoquent pas de décharges électriques. Les emballages de faible hauteur en acier ou en aluminium, avec une large ouverture, permettent un réchauffage efficace et sans production d'arcs dans les fours actuels.
- transmises : ces matériaux laissent passer les micro-ondes sans s'échauffer (verre, céramique, porcelaine, etc.).

Or, dans un four micro-onde, si un rayonnement est réfléchi dans la cavité, une partie rencontre la source qui l'a émis, le magnétron, et finit par le détruire, avec les risques d'incendie ou d'explosion que cela entraîne.

C'est pourquoi il ne faut jamais laisser chauffer un objet métallique dans une cavité de four micro-onde ; il faut toujours entreposer dans cette cavité un récipient avec de l'eau. Dans l'expérience qui est décrite au point 2 (une ampoule placée dans le four), il est impératif de mettre un grand bol d'eau, et il ne faut pas faire durer trop longtemps l'expérience (quelques dizaines de secondes : dès que l'eau bout, on arrête!).

Remarques :

En marge de cette recommandation, signalons trois choses concernant la cuisson dans les fours micro-onde:

- Si l'on place un œuf frais dans la cavité pour le cuire, qu'il soit ou non immergé dans un bol d'eau, il arrive, au bout de quelques dizaines de secondes, qu'il explose si violemment que la porte du four s'ouvre et que des morceaux d'œuf volent dans toute la cuisine (j'en ai fait l'expérience, un soir où j'avais la flemme de faire un œuf dur à la casserole)! Pourquoi donc, alors que la coquille renferme un milieu relativement liquide qui devrait absorber les ondes et convertir les mouvements moléculaires en chaleur ? Réponse : la coquille est très pauvre en composants liquides (pas d'insertion de clusters de molécules d'eau), mais elle renferme un milieu (le « jaune » et le « blanc » d'œuf) très riche en composants liquides ; celui-ci cuit plus vite que la coquille car il absorbe bien plus vite que lui les rayonnements micro-onde, donc sa température, et par suite sa pression (car milieu fermé) augmentent très rapidement, d'où l'explosion. Mais alors, pourquoi cela ne se produit-il pas avec un œuf plongé dans une casserole d'eau chauffée ? Réponse : dans ce cas, la transmission de la chaleur se fait par conduction thermique entre d'une part l'eau et la coquille, puis d'autre part entre la coquille et le « jaune » et le « blanc » d'œuf ; rappelons que la conduction thermique correspond à une vibration des molécules autour d'une position moyenne fixe, et non à un mouvement

d'ensemble tel qu'une rotation ou une translation (cf. [6]). En transmission de la chaleur par conduction thermique, à chaque instant, l'équilibre thermodynamique a le temps de se faire, de sorte que la température interne de l'œuf reste du même ordre que celle de sa coquille, et idem pour les pressions : il n'y a pas d'explosion.

- Souvent, on constate qu'un met placé dans une assiette en terre, argile, grès, céramique,... est moins chaud que l'assiette elle-même après chauffage dans un four micro-onde, au bout d'un temps relativement court. Pourquoi, alors que le met est, comme tout aliment, riche en composants liquides, figés ou non ? Réponse : les matériaux employés dans ces assiettes contiennent des inclusions concentrées en molécules d'eau ; celles-ci, sous l'action du rayonnement micro-onde, réagissent par rotation moléculaire, très dissipative de chaleur, et ceci avant même que le met monte en température. Mais au bout d'un certain temps, les températures s'égalisent. Noter que je n'ai pas parlé d'assiette en porcelaine, et il ne faut jamais en mettre une dans un four micro-onde : en effet, la porcelaine, selon ses diverses variétés, contient des particules métalliques, même infimes, qui réfléchissent les micro-ondes (il fut même un temps où la porcelaine contenait des inclusions de plomb!).

- On a vu l'importance de l'étanchéité du four micro-ondes ; on peut tester la qualité de cette étanchéité : pour cela on peut utiliser un... téléphone portable ! En effet, puisque la fréquence du téléphone portable et du four micro-onde sont du même ordre de grandeur (quelques gigahertz), on ne devrait pas pouvoir faire sonner un téléphone portable dans le four (éteint, bien sûr !) lorsqu'on l'appelle, si le four est étanche... Essayez.

3. Deux expériences avec un four micro-ondes domestique

3.1 - *Expérience 1 : allumer une ampoule, avec même un filament cassé, dans un four micro-onde*

Oui, il est possible d'allumer une ampoule électrique dans un four micro-onde !

Une ampoule à incandescence, lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique, éclaire parce que son filament, continu, est chauffé par effet Joule par le passage des électrons dans le filament. La température, très élevée, provoque la transition des électrons entre leurs couches d'énergie autour des atomes, et cette transition est accompagnée de l'émission des photons (la lumière).

Le même phénomène aurait lieu si le filament était chauffé autrement que par un courant électrique, par exemple une onde électrique suffisamment intense, telle que les micro-ondes ; et dans ce cas, il n'est nullement nécessaire que le filament soit intact et continu puisqu'il suffirait que les électrons qui y sont présents soient excités par la source extérieure.

Or la source extérieure est apportée par les micro-ondes du four dans la cavité dans laquelle on place l'ampoule (avec l'obligation de placer un récipient d'eau dont le rôle est d'empêcher la réflexion des micro-ondes vers le magnétron). L'expérience fonctionne aussi bien avec une ampoule à filament intact qu'avec filament cassé (figure 23), sans rotation du plateau, si l'ampoule est placée dans une zone d'amplitude maximale du champ électrique.



Figure 23 – allumage continu d'une ampoule à incandescence, à filament intact ou bien cassé, dans un four micro-onde, sans plateau tournant (photo : F. Élie)

Si l'ampoule est placée sur le plateau en rotation, son passage successif dans les zones de champ électrique maximal et de champ électrique minimal, provoque l'allumage et l'extinction par intermittence, comme le montre la vidéo : [lien](#).

3.2 - Expérience 2 : mesurer la fréquence avec une tablette de chocolat !

Les ondes stationnaires dans la cavité du four ont leurs creux séparés par une distance égale à $\lambda/2$, de même pour les maximums. En l'absence de brassage ou de rotation du plateau tournant, un aliment, tel qu'une tablette de chocolat, présentera donc des zones qui seront peu fondues et d'autres qui seront beaucoup fondues. La distance entre deux zones fondues (ou, de même, entre deux zones pas fondues) sera égale à $\lambda/2$.

Vérifier ce résultat est l'objet de la présente expérience :

On place une tablette de chocolat, tournée face lisse, sur un plateau d'où l'on a retiré l'entraînement de rotation : sa longueur doit être suffisante pour observer la distance entre les creux ($\lambda/2 = 6,2 \text{ cm}$) ; on met le four en route, et au bout de quelques dizaines de secondes on arrête et observe : la distance attendue « d » est de l'ordre de 6,2 cm soit $\lambda/2$. En pratique on a obtenu 6 cm environ (figure 24). A partir de là, on remonte à la fréquence f par la relation :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2d} = 3 \cdot 10^8 / 2 / 0,06 = 2,4 \text{ GHz.}$$

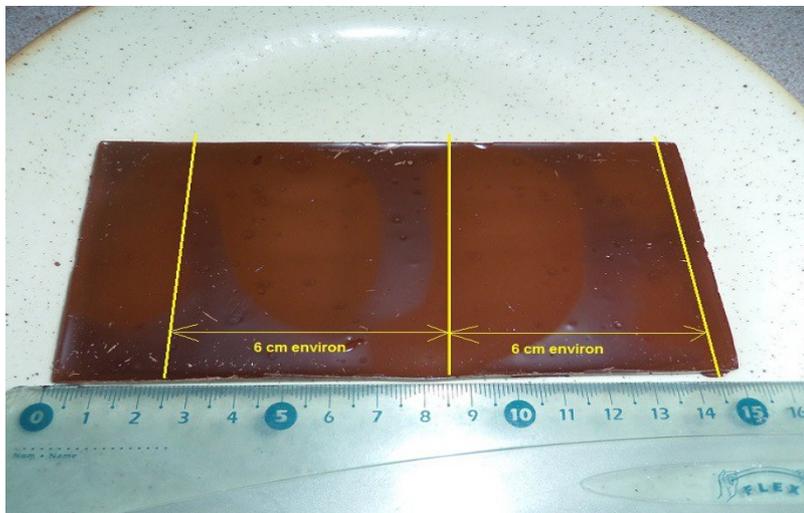


Figure 24 - « mesure » de la fréquence d'un four micro-ondes par l'observation de zones non fondues d'une tablette de chocolat (photo : F. Élie)

ANNEXE

Preuve de la relation de dispersion « $k_z^2 - \epsilon_r(\omega)\omega^2/c^2 = 0$ » en théorie de Drude-Lorentz

(voir par exemple [12]).

Pour les ondes électromagnétiques de la forme (propagation harmonique):

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}_0(\vec{R}) \exp(-j\omega t)$$

on applique les équations de Maxwell (32, 33, 34, 35) qui se traduisent pour les amplitudes de l'onde par:

$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{E}_0 - j\omega \vec{B}_0 &= 0 \\ div \vec{B}_0 &= 0 \\ \vec{rot} \vec{H}_0 + j\omega \vec{D}_0 &= 0 \\ div \vec{D}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

Le milieu est supposé non magnétique, linéaire et isotrope (théorie de Drude-Lorentz), d'où:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \\ \vec{D}_0 &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

L'équation de Maxwell-Ampère (40) donne alors:

$$\vec{rot} \vec{B}_0 + j \frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \vec{E}_0 = 0$$

et l'équation de Maxwell-Gauss (7) donne:

$$\epsilon_r \text{div} \vec{E}_0 = 0$$

Quelques calculs avec les opérateurs *rot*, *grad* et *div* conduisent alors à:

$$\vec{rot} \vec{rot} \vec{E}_0 = \vec{rot} (j \omega \vec{B}_0) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E}_0$$

et comme $\text{div} \vec{E}_0 = 0$, il vient les équations de propagation pour les amplitudes:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r \vec{E}_0 &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r \vec{B}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

dont on cherche des solutions du type:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) &= E_m e^{j\vec{k}\cdot\vec{R}} \rightarrow \nabla^2 \vec{E}_0 = -K^2 \vec{E}_0 \\ &\rightarrow \left(K^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r\right) E_m = 0 \end{aligned}$$

d'où la relation de dispersion:

$$K^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r = 0 \quad (\text{A4})$$

elle montre que les conditions de propagation de l'onde dans un milieu sont entièrement tributaires de la **fonction diélectrique** $\epsilon_r(\omega)$.

Références :

- [1] Jacques Thuéry: Les micro-ondes et leurs effets sur la matière, TECDOC Lavoisier, 1989
- [3] Frosio Audric, Cucherousset Arnaud: Lycée Follereau, Belfort, Olympiades de Physique, 2005-2006, XIIIe édition – site: http://www.odpf.org/images/archives_docs/13eme/memoires/gr-5/memoire.pdf
- [4] Jean-François Lahaeye : La [résonance de l'eau](#): le point sur les fours à micro-onde et les téléphones portables - site <http://fred.elie.free.fr>, 28 décembre 2004

[5] Frédéric Élie : Sur la nocivité des [téléphones portables](http://fred.elie.free.fr) - site <http://fred.elie.free.fr> , 29/01/2003

[6] Jean-François Lahaeye : [Téléphone portable](http://fred.elie.free.fr): ils voient la paille sur le toit du voisin, ils ne voient pas la poutre qu'ils triment dans leurs poches! - site <http://fred.elie.free.fr> , 15 septembre 2013, édité en octobre 2014

[7] Daniel Courivaud : Micro-ondes – SIGTEL - Groupe ESIEE - 2002

[8] Vincent Élie, Clément Marmion, Frédéric Élie : [Convertisseur thermosolaire](http://fred.elie.free.fr): application à la production d'eau chaude sanitaire, ou « chauffe-eau solaire » - site <http://fred.elie.free.fr> , janvier 2015

[9] Frédéric Élie : Polarité de l'eau et modèle quantique des molécules - site <http://fred.elie.free.fr> , 16/04/2004

[10] Walter Appel: Mathématiques pour la physique et les physiciens – H & K editions 2005

[11] Walter Rudin: Analyse réelle et complexe – Masson et Cie 1975

[12] José-Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger : Electromagnétisme – Dunod 2002

[13] Recommandation UIT-R P.527-3 (1992) : Caractéristiques électriques du sol

[14] Freddy Gardiol, Jean-François Zurcher : Les hyperfréquences et la mesure de l'humidité – Ingénieurs et Architectes Suisses n°4, 18 février 1982, Lausanne

