ACCUEIL

Résonateur acoustique

Frédéric Élie, 27/2/2004

Si vous sifflez dans le goulot d'une bouteille complètement ou partiellement vide, vous entendez clairement un son dont l'intensité et la hauteur (fréquence) dépendent du volume de liquide qui y est présent. Dans cet article une esquisse d'explication est proposée sur la base du résonateur de Helmholtz. Ce phénomène ne présente pas qu'un intérêt académique: il permet d'utiliser le résonateur de Helmholtz tantôt comme réverbérateur, diffuseur, absorbeur ou amplificateur acoustique…

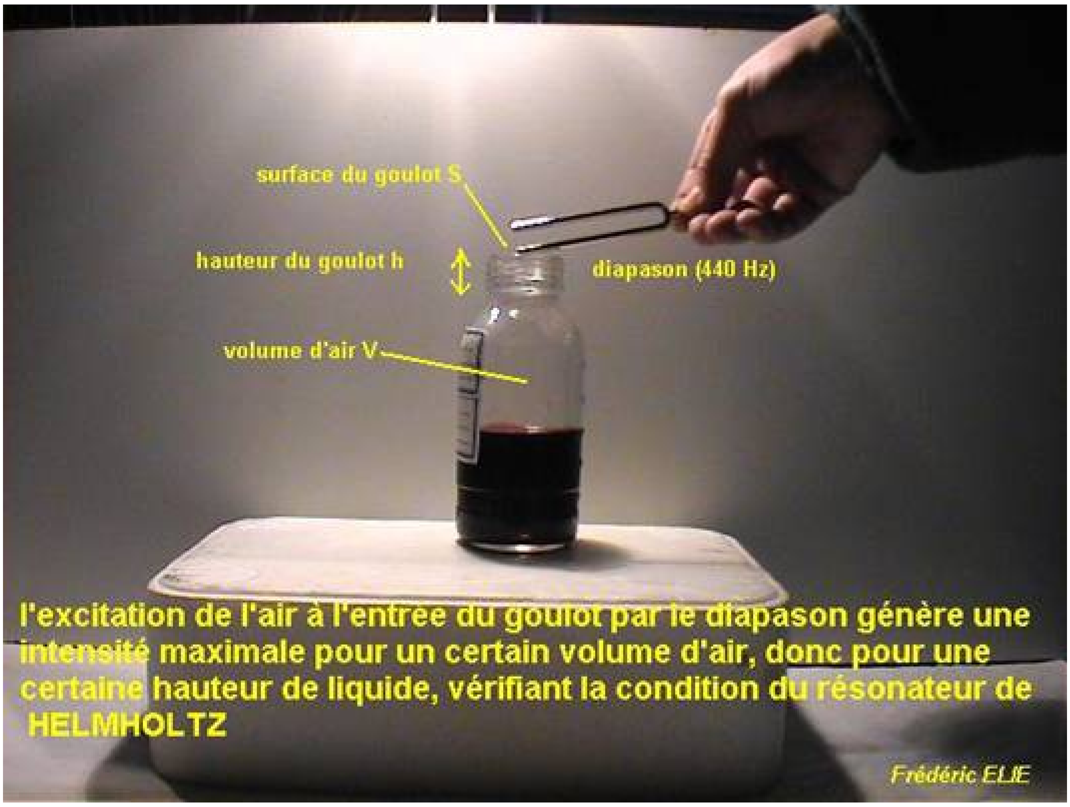
présentation de l'expérience

Plutôt que de siffler dans le goulot d'une bouteille, je vous propose de vous munir d'un diapason et d'un flacon dont le goulot est suffisamment large pour y introduire ce diapason. Nous allons faire la manip inverse: nous imposons une fréquence d'excitation, le la3 (440 Hz) avec le diapason, pour exciter l'entrée du flacon, et nous allons remplir le flacon d'eau en plusieurs fois jusqu'à déceler le volume pour lequel l'intensité du son paraît la plus importante (résonance).
Dans mon expérience j'utilise un flacon dont je détermine d'abord la capacité (volume sans celui du goulot): pour cela je remplis d'eau et la reverse dans une fiole jaugée. Valeur trouvée: V_0 = 32 cl (mais vous pouvez employer un volume différent si vous faites l'expérience avec un autre flacon). Au début, le flacon est vide et, après avoir frappé le diapason d'un coup sec contre un objet rigide, on l'introduit à l'entrée du goulot et on note par référence 0 la sensation acoustique du son entendu. Dans tout le reste de la manip on notera par + ou - l'accroissement ou bien la diminution de l'intensité perçue. Certes, cette approche repose sur une appréciation subjective, mais à défaut de microphone, et pour vouloir rester simple dans la mise en œuvre, c'est le seul moyen. Au besoin confrontez les sensations de plusieurs témoins. Soit dit en passant, au fond, l'esprit d'observation, base de l'esprit scientifique, n'est-il pas de sentir et de noter la subtilité des choses avec d'abord des moyens très accessibles et à notre portée?…
A chaque étape, ajoutons 5 cl d'eau dans le flacon, présentons le diapason et notons l'impression sonore par + ou - : j'obtiens le tableau suivant:

Volume d'eau (cl) (volume d'air V cl)	Intensité acoustique perçue
0 (32)	0
5 (27)	+
10 (22)	++

15 (17)	+++
20 (12)	++
25 (7)	+

La photo ci-dessous illustre le montage: le liquide a été coloré pour mieux le voir (mais ce n'est pas du gros rouge!) L'attention est attirée sur le fait que le diapason ne doit absolument pas toucher le flacon et qu'il doit être tenu correctement (pas de doigt sur l'une des branches).



Interprétation de l'expérience

Elle repose sur le fait que, pour un certain volume de la cavité disponible dans le flacon, V, la colonne d'air entre en résonance avec la fréquence de l'excitation extérieure imposée à l'entrée du flacon: celle-ci coïncide avec les modes de vibration propres de l'air contenu dans le flacon. De quels paramètres dépendent alors ces fréquences propres: le volume d'air bien sûr, mais aussi la forme du flacon, sa constitution, les dimensions de l'entrée? En fait la théorie (confirmée par des expériences plus rigoureuses que la nôtre) montre que la fréquence propre ne dépend que du volume de la cavité et de la longueur et de la surface de la section d'entrée, donc ici du goulot (voir démonstration théorique plus bas). Physiquement, cela signifie que l'air qui vibre à l'intérieur de la cavité (l'intérieur du flacon ici) sous l'action d'une excitation de fréquence f_0, agit sur la colonne d'air située dans le conduit d'entrée par l'effet d'une onde de pression qui la fait vibrer comme un piston qui rayonne alors vers l'extérieur; lorsque cette fréquence correspond à la fréquence propre cette vibration a une intensité maximale: c'est la résonance, et le dispositif s'appelle un résonateur d'**Helmholtz**.
La relation entre la fréquence de résonance, le volume V et la section S de l'entrée (supposée cylindrique) est:

$$f_0 = c\, S^{1/2} / (2\pi\, (V(h + 16S^{1/2}/3\pi^{3/2}))^{1/2})$$

où c est la vitesse du son de l'air et h la longueur du conduit d'entrée. Dans notre expérience, il faut donc aussi déterminer les caractéristiques géométriques du goulot: j'ai obtenu h = 3 cm et un diamètre de 3 cm soit une section S = 7,07. 10^{-4} m². Pour une fréquence d'excitation f_0 = 440 Hz et avec une célérité de 347 m/s le calcul prédit une résonance pour un volume de 200 cl. Mon évaluation expérimentale est proche de cette valeur en ordre de grandeur: 17 cl selon le tableau, à affiner bien sûr par des moyens plus robustes.

Annexe: modélisation du résonateur d'Helmholtz

Considérations préliminaires:

La modélisation des vibrations de l'air dans un résonateur de Helmholtz est un cas particulier de celle des vibrations dans les petites cavités. Il convient donc de les rappeler ici.
Définition: une "petite cavité" est un volume fermé dont les dimensions caractéristiques sont plus petites que les longueurs d'onde qui peuvent s'y développer; on peut ainsi négliger les phénomènes de diffraction, et traiter un problème plus simple.
Dans tout ce qui suit, la surface (S) de cette cavité est délimitée par:

- une surface active (S_a) animée d'une vitesse acoustique v = du/dt (u: fluctuation des déplacements)
- une surface passive (S_b) immobile, d'impédance acoustique Z_b.

On suppose en outre que le champ des fluctuations de pression p est uniforme dans toute la cavité (et donc ne dépend pas des coordonnées). Cette condition est justifiée dans le cas des grandes longueurs d'onde par rapport aux dimensions, adopté ici.
La conservation de la masse d'air dans le volume V de la cavité et à travers sa surface (S) s'exprime par l'équation de continuité:

$$\partial / \partial t \left(\iiint_V \rho \, dV + \rho_0 \iint_S u.dS \right) = 0$$

où ρ et ρ 0 sont respectivement la fluctuation de masse volumique lors des déplacements acoustiques de l'air, et la masse volumique au repos. Or la deuxième intégrale de surface représente la fluctuation de volume δ V dans la cavité, et comme la fluctuation de densité est nulle lorsque celle du volume l'est aussi ($\rho = 0$ si $\delta V = 0$), l'expression ci-dessus se ramène à:

$$\iiint_V \rho \, dV + \rho_0 \, \delta V = 0$$

La variation de volume est la contribution de celle du volume due au déplacement de la surface active, δV_a, et de celle due à l'impédance acoustique de la surface passive, δV_b. Or la variation du volume due à la surface passive est directement reliée au débit volumique q_b à travers la surface S_b:

$$q_b = d \, \delta V_b / dt = j\omega \, \delta V_b$$

si on se place en régime harmonique, c'est-à-dire si on admet que les fluctuations suivent une variation temporelle sinusoïdales: $\propto e^{j\omega t}$, de fréquence $f = \omega / 2\pi$. D'autre part le débit acoustique est relié à la pression acoustique via l'impédance acoustique Z_b/S_b supposée ici uniforme:

$$q_b = pS_b / Z_b$$

pour la variation volumique due à la surface passive on a donc finalement:

$$\delta V_b = pS_b / j\omega Z_b$$

Compte tenu de $\delta V = \delta Va + \delta Vb$, l'équation de continuité ci-dessus devient:

$$1/\rho_0 \iiint_V \rho \, dV = -\delta V_a - pS_b/j\omega Z_b$$

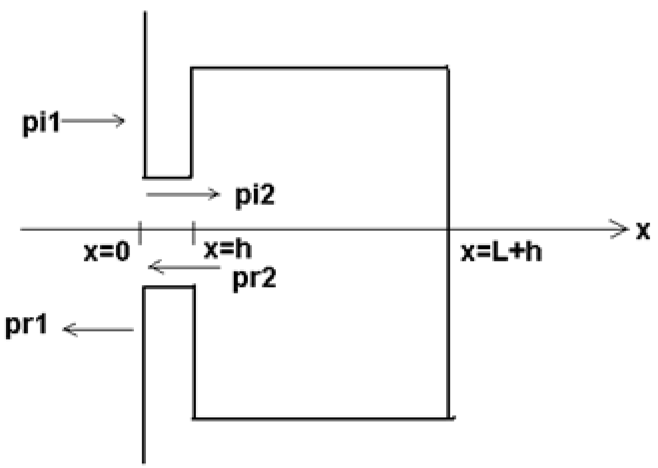
Dans le cas très simple où l'air suit la loi des gaz parfaits et n'est soumis à aucun phénomène thermique (rayonnement, convection, etc), la variation de densité est reliée à la pression acoustique par $\rho = p/c^2$, où c est la vitesse du son donnée par l'équation de **Laplace** (variations adiabatiques):

$$c^2 = \gamma p_0/\rho_0$$

(avec γ exposant adiabatique, vaut 1,4 pour les gaz parfaits). On obtient donc:

$$p = -(\gamma p_0 \delta V_a / V) / (1 + \gamma p_0 S_b/j\omega VZ_b)$$

avec V volume total de la cavité. Mais nous devons prendre en compte que les parois de la cavité ne sont pas parfaitement réfléchissantes, et donc présentent une impédance acoustique non infinie: $Z_p = p/q_p = -p/S_p v_p$. La relation ci-dessus doit être modifiée avec des termes correctifs que je vais expliciter ci-après, dans le cas d'une cavité de volume V munie d'une ouverture de section constante S_0 ouverte vers l'extérieur:



le calcul de la pression p_h au niveau de l'orifice côté cavité (x=h), basé sur la théorie modale d'une cavité (voir références ci-dessous), donne une correction de l'expression de la pression dans la cavité (la pression étant supposée uniforme dans la cavité, et donc n particulier en x=h, on a $p = p_h$):

$$p = p_h = - (\gamma p_0 \delta V_a/V)/(1 + \gamma p_0/j\omega Z_p V) + jk\rho_0 c v_h \delta_h$$

expression dans laquelle $k = 2\pi /\lambda = \omega /c$ est le nombre d'onde, v_h la vitesse acoustique au niveau du col (côté cavité), et δ_h un terme de correction d'extrémité pour un tube relativement allongé débouchant sur un domaine de grande dimension vis-à-vis du diamètre du tube. Avec S_0 surface de la section du tube, la théorie montre que la correction d'extrémité est pratiquement indépendante de la forme du tube et s'écrit:

$$\delta_h = 8S_0^{1/2}/3\pi^{3/2}$$

Faisons apparaître dans la pression au col p_h les composantes réelles (termes résistifs), en $j\omega$ (termes de masse) et en $1/j\omega$ (termes élastiques) de l'impédance. En effet, pour des impédances de paroi grandes mais finies, dans l'expression donnant p_h ci-dessus on a au premier ordre:

$$1/(1 + \gamma p_0/j\omega Z_pV) \approx 1 - \gamma p_0/j\omega Z_pV$$

En remarquant que: $\gamma p_0 = \rho_0 c^2$, $k = \omega/c$, $\delta V_a = -v_hS_0dt = -v_hS_0/j\omega$ (le débit acoustique dû à la paroi active est supposé résulter de celui au col x = h), et en admettant que $S_p \approx S_0$ (la paroi partiellement réfléchissante est celle de la section du col qui agit comme un piston), et que $v_p \approx v_h$ (la vitesse due aux parois partiellement réfléchissantes est supposée localisée au niveau du col), l'expression donnant p_h plus haut, s'écrit, compte tenu du développement au premier ordre ci-dessus:

$$p_h = \rho_0 cv_h (\rho_0 cS_0/V^2k^2Z_p + jk\delta_h + S_0/jkV)$$

si, de plus on considère que l'impédance de paroi Z_p est assimilable à une résistance acoustique R_p (ce qui revient à supposer que la paroi introduit un amortissement important), alors la pression au col et dans la cavité se décompose bien en une composante de raideur (terme en K_h), une autre de masse (terme en δ_h) et d'amortissement (terme en R_h):

$$p_h = \rho_0 cv_h (K_h/jk + R_h + jk\delta_h)$$

avec: $K_h = S_0/V$, et $R_h = \rho_0 cS_0/V^2k^2R_p$.

Résonance de la cavité de Helmholtz:

Il reste à déterminer la vitesse en sortie du col vers la cavité, v_h, laquelle est liée à la vitesse d'entrée v_0 due à l'excitation imposée à l'entrée du col. Pour cela (cf. figure ci-dessus) faisons le bilan des ondes de pression à l'entrée x = 0: en ce lieu la pression est la somme de la pression due aux oscillations du piston représentant la colonne d'air dans le conduit d'entrée, et des pressions incidente et réfléchie:

- onde incidente: $p_{i1} = A_1 e^{j(\omega t - kx)}$

- onde réfléchie sur la paroi supposée infiniment rigide entourant l'entrée du conduit (bafflage): $p_{r1} = B_1 e^{j(\omega t + kz)}$. En réalité, dans le cas d'une cavité comme une bouteille cette hypothèse est mise en défaut, sauf pour le pourtour du goulot
- onde émise par les vibrations du piston colonne d'air à l'entrée du conduit: si R est le rayon de ce piston (donc du conduit d'entrée), la théorie montre que l'onde s'exprime, en symétrie cylindrique, par une fonction de **Bessel** d'ordre un $J_1(X)$:

$$p'(r,\theta) = -v_0 jk\rho cS_0 (e^{j(\omega t - kr)}/\pi r) J_1(kR\sin\theta)/(kR\sin\theta)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires du point dans l'espace libre où l'on considère cette pression. Ce champ de pression ne concerne que le rayonnement acoustique du piston en champ lointain, donc n'entre pas en ligne de compte dans la détermination de la résonance de la cavité; par contre son rôle est déterminant dans les effets diffuseurs du résonateur de Helmholtz, comme on le verra plus loin.

- onde incidente dans le col: $p_{i2} = A_2\, e^{j(\omega t - k'x)}$, dans laquelle le nombre d'onde k' est une correction du nombre d'onde en milieu libre k par les effets d'amortissements dans le col, k' = k - jq (q amortissement dans le col, ayant pour effet d'introduire une absorption liée à la distance parcourue dans le col, proportionnelle à exp(-qx), due par exemple à des effets moléculaires)
- onde retour dans le col: $p_{r2} = B_2\, e^{j(\omega t + k'x)}$
- onde à la sortie du col dans la cavité (en x = h), obtenue dans les préliminaires précédents:

$$p_h = \rho_0 c v_h (K_h/jk + R_h + jk\delta_h)$$

Traduisons maintenant la conservation de la masse d'air à l'entrée (x = 0) et à la sortie (x = h) du col (équation de continuité):

- en x = 0, sur le baffle rigide, les pressions incidente et réfléchie s'annulent: $p_{i1}(0) = p_{r1}(0)$ soit: $A_1 = B_1$
- en x = 0 la vitesse d'entrée v_0 est égale à la somme des vitesses de l'onde aller et de l'onde retour dans le conduit:

$$v_0\, e^{j\omega t} = v_{i2}(0) + v_{r2}(0) = (A_2 - B_2)/\rho_0 c\, e^{j\omega t}, \text{ donc: } A_2 - B_2 = \rho_0 c v_0$$

- en x = 0 les forces dues aux pressions acoustiques listées ci-dessus s'équilibrent:

$$(p_{i1} + p_{r1} - (p_{i2} + p_{r2}) - Z_0 v_0)\, S_0 = 0$$

où Z_0 est l'impédance du conduit ramenée à son entrée x = 0, supposé émettre vers l'espace libre comme un piston, corrigé des effets de bord, et dont l'expression est donnée ici sans démonstration (cf. références):

$$Z_0 = -p_0/v_0 = \rho_0 c\, (R_0 + jk\delta_0)$$

avec: $R_0 = k^2 S_0/2\pi$ (amortissement dû au rayonnement vers l'espace libre) et $\delta_0 = \delta_h = 8S_0^{1/2}/3\pi^{3/2}$ (correction de longueur du conduit).

A ce stade du calcul on a donc les relations entre amplitudes:

$$A_2 - B_2 = \rho_0 c v_0$$

$$A_2 + B_2 = 2A_1 - Z_0 v_0$$

Les amplitudes indicés par "2" (relatives au conduit) peuvent s'exprimer en fonction de la vitesse d'entrée et de l'amplitude A_1 de l'onde incidente excitatrice. Il restera donc à déduire la vitesse d'entrée en fonction de cette amplitude excitatrice; il faut alors des conditions supplémentaires pour relier v_0 à A_1, ce que l'on fait en considérant maintenant les conditions de continuité en sortie du conduit x = h:

- continuité de la vitesse en x = h: $v_{i2} + v_{r2} = v_h$, donc $A_2 e^{-jk'h} - B_2 e^{jk'h} = \rho_0 c v_h$
- équilibre des forces de pression acoustique en x = h: $(p_{i2} + p_{r2} - Z_h v_h) S_0 = 0$

d'où de nouvelles relations entre les amplitudes dans le col:

$$A_2 - B_2 = (\rho_0 c \cos k'h + jZ_h \sin k'h)\, v_h$$

$$A_2 + B_2 = (j\rho_0 c \sin k'h + Z_h \cos k'h)\, v_h$$

qui permettent d'obtenir la relation entre l'amplitude de pression excitatrice A1 et la vitesse générée à l'entrée du résonateur v_0:

$$v_0 = (2A_1/\rho_0 c)\,(1 + Z_h/\rho_0 c \,.\, \mathrm{tg}\, k'h)/(j\, \mathrm{tg}\, k'h + Z_h/\rho_0 c + Z_0/\rho_0 c\, (1 + j\, Z_h/\rho_0 c \,.\, \mathrm{tg}\, k'h))$$

moyennant les hypothèses de basse fréquence (grande longueur d'onde devant le volume de la cavité) et de conduit de faible section par rapport à la cavité: $\lambda >> V^{1/3}$ et $S_0^{\ 1/2} << V^{1/3}$, l'expression ci-dessus se simplifie comme suit et fait intervenir les paramètres d'amortissement et de correction de bord:

$$v_0 \approx 2j(\omega/c)(A_1/\rho_0 c) / (K_h - (\omega/c)^2 (h + \delta_0 + \delta_h) + j(\omega/c)(R_0 + R_h + R_c))$$

où R_c = qh est l'absorption dans le col. La vitesse générée au col par une pression incidente extérieure est donc proportionnelle à l'amplitude de celle-ci via une admittance qui dépend de la fréquence d'excitation et des caractéristiques physiques et géométriques du milieu et de la cavité. Nous cherchions à quelle fréquence l'amplitude des déplacements u (x,t) de la colonne d'air a lieu. Rappelant que cette amplitude est reliée à la vitesse v par v = du /dt = $j\omega$ u, le maximum de u est donc obtenu quand la dérivée par rapport à la fréquence du dénominateur de l'expression donnant v_0 s'annule. Avec les notations suivantes: $A = (h + \delta_0 + \delta_h)/K_h c^2$, et $B = (R_0 + R_h + R_c)/K_h c$, le calcul donne immédiatement la fréquence de résonance telle que:

$$\omega^2_0 = (2A-B^2)/2A^2$$

qui se simplifie en $\omega^2_0 = 1/A$ si l'on néglige les effets d'amortissement. Après avoir remplacé les différentes quantités par leurs définitions d'origine, la fréquence de résonance s'explicite en:

$$f_0 = (cS_0^{\ 1/2}/2\pi)/(V(h + 16\, S_0^{\ 1/2}/3\pi^{3/2})^{1/2}$$

et cette valeur injectée dans l'expression de l'amplitude de la vitesse fournit le maximum de celle-ci:

$$v_{0\,max} = (2A_1/\rho_0 c) / (R_0 + R_h + R_c)$$

autrement dit à la résonance, il n'y a plus de termes imaginaires dans l'amplitude de vitesse, ce qui, physiquement, signifie que la puissance acoustique se réduit à sa composante active (la puissance réactive, c'est-à-dire dépendante du temps s'annule).

Différents comportements et rôles du résonateur de Helmholtz:

Le résonateur de Helmholtz comme réverbérateur:

Dans ce qui précède je me suis intéressé à la fonction de transfert pression-vitesse en régime harmonique et je n'ai pas cherché à expliciter le comportement des amplitudes de déplacement avec le temps. On va voir immédiatement que l'on retrouve très simplement la fréquence de résonance en assimilant la colonne d'air du conduit à un milieu élastique soumis à des forces de pression et de frottement (modèle d'un oscillateur harmonique amorti). Il va apparaître que la loi d'évolution temporelle est bien sinusoïdale mais modulée par une loi d'extinction. Naturellement, ce modèle très simple n'est valide qu'au voisinage de la résonance.
Les forces qui s'exercent, près de la résonance, dans la colonne d'air du conduit sont:

- les forces de pression qui exercent une déformation du volume par la compressibilité de l'air: $p = - \gamma p_0 \delta V/V$, où la quantité γp_0 est la compressibilité de l'air (en Pascals). Ces forces sur une section de surface S du conduit sont donc:

  $$F = pS = - \gamma p_0 S \delta V/V = - \gamma p_0 S^2 u(t)/V$$

  du type de celui d'une force de rappel $F = - Ku$ avec la raideur $K = \gamma p_0 S^2/V$.
- les forces de frottement $F' = s\, du/dt$ où s rassemble les résistances acoustiques de tour types: rayonnement, paroi du col,… Inutile ici de l'expliciter ici car à la résonance sa contribution disparaît (voir ci-après)
- les forces d'inertie: masse d'air de la colonne en accélération $M\, d^2u/dt^2$, où la masse est ρ 0hS (en fait elle doit être complétée par la prise en compte des longueurs fictives supplémentaires de la colonne apportées par les effets de bord δ_0 et δ_h: $M = \rho_0 S(h + \delta_0 + \delta_h)$)

La loi de Newton appliquée à la colonne d'air du conduit aboutit alors à l'équation du mouvement:

$$M\, d^2u/dt^2 + s\, du/dt + K\, u = 0$$

qui est bien celle d'un oscillateur harmonique amorti. Les solutions sont du type:

$$u(t) = u_0\, e^{-(s/2M)t}\, e^{j2\pi\, f0\, t}$$

où f_0 est la fréquence de résonance que l'on trouve facilement égale à:

$$f_0 = 1/2\pi\, .\, (s/M)^{1/2} = (cR/2)/(\pi\, V(h + 16R/3\pi\,)^{1/2}$$

expression proche de celle obtenue plus haut. L'évolution dans le temps de l'amplitude des déplacements montre une modulation des vibrations à la fréquence de résonance par un amortissement associé au terme de frottement s/M: l'onde s'éteint au bout d'une durée caractéristique de l'ordre de M/s, on dit qu'il y a réverbération.

Le résonateur de Helmholtz comme diffuseur:

On a vu plus haut que le piston fictif, représentant la colonne d'air du conduit à son entrée (x = 0) rayonne dans l'espace libre suivant une loi en champ lointain qui introduit une certaine directivité (dépendance avec l'azimut θ de l'observateur par rapport à l'axe du piston): c'est la diffusion.

Le résonateur de Helmholtz comme absorbeur:

Du fait de l'introduction d'un facteur d'amortissement dans le col, k' = k - jq (voir plus haut) le rapport entre la puissance de la pression acoustique re-rayonnée (par l'intermédiaire de la vitesse v_0) et la puissance de la pression acoustique incidente est inférieur à l'unité: le résonateur peut donc absorber une partie d'une excitation acoustique externe.
La théorie montre que ce rapport de puissance est maximal à la résonance et vaut:

$$(W_a/W_i)_{max} = 4(R_c + R_h)/(R_c + R_h + R_0)^2$$

Le résonateur de Helmholtz comme amplificateur:

Si une source acoustique placée dans l'espace libre émet une puissance acoustique W_s, la présence du résonateur a pour effet d'agir sur cette source en lui renvoyant une partie de la puissance reçue par l'intermédiaire du piston fictif rayonnant à l'entrée vers l'espace extérieur. La puissance initiale se trouve donc augmentée, donc amplifiée, par l'apport de la puissance qui lui est retournée du résonateur (effet de contre-réaction du résonateur sur la source): la puissance totale de la source, suite à cette contre-réaction, notée W_A, est donc supérieure à W_s. Un calcul assez compliqué (voir références) montre que le rapport entre la puissance totale W_A et la puissance source initiale W_s, rapport encore appelé gain, dépend de la distance r de la source au résonateur, du rayon du conduit R et des propriétés d'amortissement du résonateur:

$$W_A/W_s = 1 + \pi\, \rho_0 R^4 / 4r^2(R_c + R_h + R_0)$$

Ainsi, le son émis au voisinage d'un résonateur à quelques centimètres peut être entendu amplifié s'il est émis à la fréquence de résonance de ce dernier. Le gain peut être de 10 à 20 dB!

BIBLIOGRAPHIE

Michel BRUNEAU: introduction aux théories de l'acoustique, Université du Maine, le Mans, 1983
M. ROSSI: électro-acoustique, Dunod, Presses polytechniques romandes, 1986
E. SKUDRZYK: the foundations of acoustics, Springer-Verlag, Wien-New York, 1971
M. JUNGER, M. PERULLI: éléments d'acoustique physique, Maloine éd., 1978
H. LEVINE, J. SCHWINGER: on the radiation of sound from an unflanged circular pipe, physical review, vol. 73, n°4 feb. 1948, pp. 383-406
U. INGARD: scattering and absorption by acoustic resonators, JASA, vol. 25, 1953, pp. 1044-1045