



Frédéric Elie on
ResearchGate

Le ressaut hydraulique

Frédéric Elie
mars 2009

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

*« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980*

Abstract : Dans cet article, en s'appuyant sur des bases observationnelles simples, est proposée une introduction sur le phénomène du ressaut hydraulique, processus où apparaît une compétition entre les effets linéaires et les effets non linéaires de l'écoulement en surface d'un liquide incompressible. Il est recommandé de lire d'abord les articles « [ondes de surface](#) » et « [onde solitaire](#) ».

SOMMAIRE

- 1 - Une observation de tous les jours
- 2 - Calculs du ressaut hydraulique
 - 2-1 - Effet d'un obstacle complètement immergé sur l'écoulement d'un liquide
 - 2-2 - Etude du ressaut hydraulique
 - 2-3 - Perte de charge dans un ressaut hydraulique
- 3 - Exemple d'application : ouverture d'une vanne de décharge
- 4 - Onde de choc
- Bibliographie

1 - Une observation de tous les jours

Observer ce qui est à portée de nous et se poser des questions à propos de choses dont nous sommes nombreux à ne pas nous étonner, c'est aussi cela l'éducation selon l'esprit de la méthode expérimentale (voir mon article « [méthode expérimentale](#) »).

En voici un excellent exemple, qui se passe dans notre cuisine ou notre salle de bains. Avez-vous remarqué que, chaque fois que vous ouvrez votre robinet, l'eau coule sur le fond de l'évier en formant une zone plus ou moins circulaire à l'intérieur de laquelle l'épaisseur de l'eau est très faible, et que, à la périphérie de cette zone, l'épaisseur de l'eau est subitement plus importante, le domaine de transition étant très souvent un lieu de remous ?

J'ai reproduit cette expérience très simplement, en faisant couler l'eau le plus régulièrement possible à partir d'une pipette verticale munie d'un petit robinet, le récipient étant un bac à fond plat (figure 1). J'observe bien le phénomène.

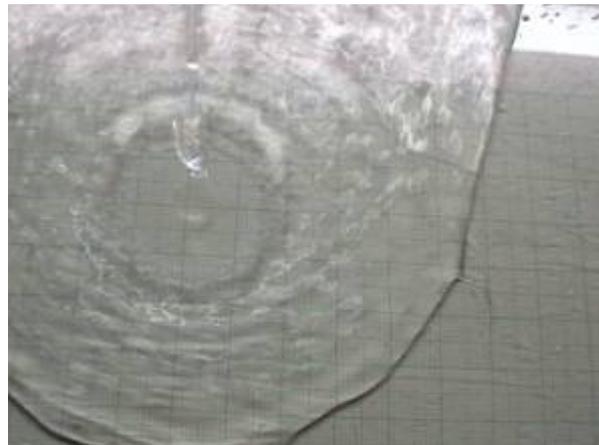
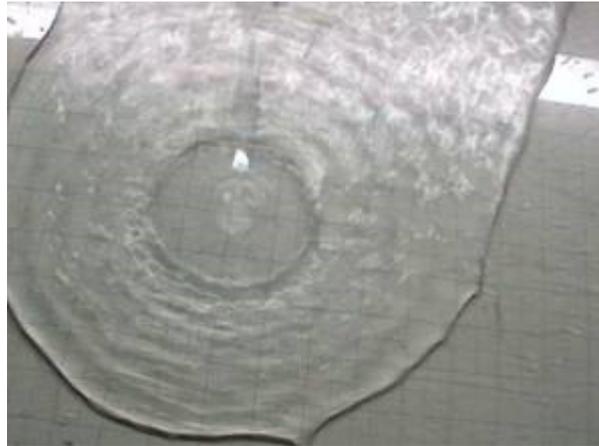
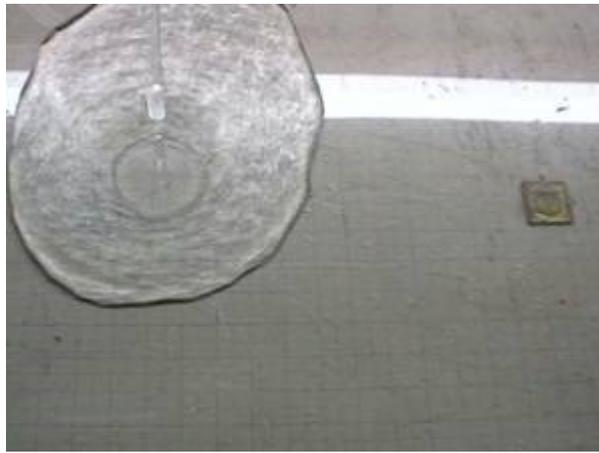


figure 1 – formation d'un ressaut hydraulique dans une cuve recevant de l'eau en provenance d'un robinet vertical : de gauche à droite, l'eau se répand dans la cuve de plus en plus, mais on observe que le diamètre de la zone de faible épaisseur (en amont du ressaut) reste constant quelle que soit l'étendue d'eau formée en aval (photos : F. Élie, février 2009)

Nous avons vu dans l'article « [ondes de surface](#) » que, en eau peu profonde, la célérité « c » des ondes de gravité à la surface de l'eau croît comme la racine carrée de la profondeur H de l'eau :

$$c(x) = \sqrt{gH(x)} \quad (1)$$

où la profondeur dépend de la distance « x » au centre où le jet rencontre la cuve.

Par ailleurs, lorsque la profondeur augmente, la vitesse de l'eau « v(x) » diminue en vertu de la relation de continuité pour un fluide incompressible (conservation du débit) :

$$v(x)H(x) = v(x')H(x')$$

Le ressaut hydraulique se produit lorsqu'il y a une discontinuité dans l'écoulement, c'est-à-dire lorsque la vitesse d'écoulement de l'eau devient différente de la célérité des ondes de surface. On introduit alors le rapport de ces vitesses pour caractériser les conditions de changement de régime : le **nombre de Froude**.

$$Fr = \frac{v(x)}{c(x)} = \frac{v(x)}{\sqrt{gH(x)}} \quad (2)$$

Les zones où $Fr > 1$ sont celles où les ondes se propagent moins vite que l'écoulement (l'écoulement est dit **torrentiel**), la profondeur y est donc très faible : c'est par exemple la zone circulaire de faible épaisseur dans l'expérience de la figure 1. Les zones où $Fr < 1$ sont celles où, à l'inverse, l'eau s'écoule moins rapidement que les ondes de surface (l'écoulement est dit **fluvial**), la profondeur y étant plus importante. La transition a lieu pour $Fr = 1$, c'est-à-dire en un point où la célérité des ondes est égale à la vitesse de l'écoulement $v(x) = c(x)$.

Le phénomène de ressaut hydraulique s'observe aussi dans les embouchures des fleuves, lorsque l'eau en provenance de l'océan s'y engouffre lors de la marée montante : l'eau du fleuve a une profondeur plus faible que l'eau de l'océan, par conséquent lorsque l'eau du fleuve rencontre le courant de marée qui vient en sens inverse, un déferlement de l'onde de marée se produit parce que sa base ralentit tandis que sa crête conserve sa vitesse, et ce déferlement se déplace avec l'avancement de l'onde de marée.

Très souvent ce ressaut hydraulique comobile avec l'onde de marée finit par se transformer en une onde solitaire, comme expliqué dans l'article « [onde solitaire](#) ».



*figure 2 – Ressaut hydraulique du mascaret à l'embouchure du Severn (Grande Bretagne)
(les abords du fleuve ayant été aménagés, ce phénomène n'est plus visible de nos jours)*

Nous verrons plus loin que le phénomène de ressaut hydraulique peut être comparé, dans une certaine mesure, avec celui de la discontinuité des ondes sonores responsable du « bang » transsonique : en acoustique, on sait que ce phénomène se produit lorsque la vitesse du mobile devient égale à la célérité du son. En hydraulique, le rôle de la célérité du son est joué par la célérité des ondes de surface $c(x)$, et l'équivalent du nombre de Mach est le nombre de Froude. Je proposerai même une expérience très facile permettant de visualiser avec le ressaut hydraulique l'équivalent du « cône de Mach ».

Cependant, disons tout de suite que l'analogie entre l'hydraulique et l'acoustique trouve ses limites :

- en hydraulique les ondes de gravité sont bidimensionnelles (elles évoluent suivant la verticale Oy et l'horizontale Ox), ceci est dû à l'incompressibilité de l'eau, hypothèse adaptée aux phénomènes d'écoulement qui nous intéressent (or une onde acoustique

est liée, par définition, à la compressibilité d'un gaz).

- en hydraulique, comme on l'a vu dans l'article « [ondes de surface](#) », les ondes sont dispersives, tandis qu'elles ne le sont pas en acoustique linéaire : la célérité des ondes dépend de la longueur d'onde, il en résulte que la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont différentes, l'égalité n'étant obtenue que pour de grandes longueurs d'onde.
- la dispersion des ondes peut être responsable de la formation d'une onde solitaire en hydraulique (voir article « [onde solitaire](#) »), et en acoustique il n'y a pas d'ondes solitaires.

2 - Calculs du ressaut hydraulique

Nous allons d'abord écrire les relations générales entre les conditions dynamiques du liquide de part et d'autre d'un obstacle (variation du profil du fond $H(x)$). Ces relations se fondent sur la conservation du débit (fluide incompressible) et le bilan des quantités de mouvement en aval et en amont de l'obstacle. Nous verrons l'importance du nombre de Froude dans ce modèle.

Puis nous considérerons le cas où il y a changement de profondeur (une sorte de « marche d'escalier ») où nous expliciterons le rapport entre les profondeurs amont et aval.

Un exemple pratique sur le comportement du fluide de part et d'autre d'une vanne de décharge, comme on peut en rencontrer au pied des barrages hydroélectriques, sera détaillé.

2-1 - Effet d'un obstacle complètement immergé sur l'écoulement d'un liquide

Considérons un obstacle immergé, sur un fond supposé plat, et dont le profil varie avec la position horizontale x : $h(x)$ (voir figure 3). Nous allons examiner les cas où l'écoulement possède un nombre de Froude inférieur à l'unité, et celui où il est supérieur à l'unité, auquel dernier cas nous verrons que, en aval de l'obstacle, le phénomène de ressaut hydraulique se produit.

L'origine des ordonnées Oy est prise au niveau du fond, de sorte que, en chaque position horizontale x , la profondeur du liquide est fonction de x : $H(x)$.

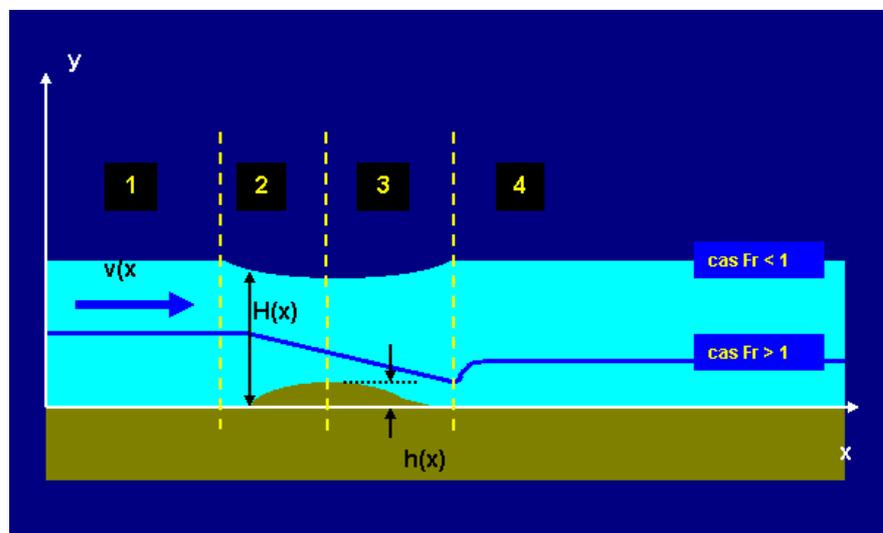


figure 3 – écoulement d'un liquide incompressible au-dessus d'un obstacle immergé :
pour le cas $Fr > 1$, on montre que la zone 1 de faible vitesse $v(x)$ est suivie, au niveau de l'obstacle d'une zone 2 d'accélération, l'épaisseur $H(x)$ du liquide diminue, puis d'une zone 3 de vitesse élevée, suivie d'une zone 4, en aval du ressaut, où la vitesse est plus faible (voir calculs dans le texte)

Comme dit plus haut, l'évolution du niveau du liquide peut être déterminée par, d'une part la conservation du débit volumique (fluide incompressible) et, d'autre part, le bilan de la quantité de mouvement de part et d'autre de l'obstacle, ce que nous allons exploiter tout de suite.

Si l'on suppose que le champ de vitesse est uniforme dans chaque section verticale ($x =$ constante), chose justifiée si nous négligeons la viscosité et les frottements sur le fond, et que, à la surface libre la pression est égale à la pression atmosphérique p_0 , alors la conservation du débit et le bilan de la quantité de mouvement se traduisent respectivement par :

$$vH = v(x)H(x) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gH + p_0 = \frac{1}{2}\rho v(x)^2 + \rho g(h(x) + H(x)) + p_0 \quad (4)$$

où v et H sont la vitesse et la profondeur lorsque l'on est loin de l'obstacle, et donc supposées constantes. La dérivation par rapport à x des relations (3) et (4) conduit immédiatement à :

$$g \frac{\partial h(x)}{\partial x} - \frac{1}{v(x)} \frac{\partial v(x)}{\partial x} gH(x)(1 - Fr(x)^2) = 0 \quad (5)$$

où $Fr(x)$ est le nombre de Froude qui varie avec la distance x . La relation (5) se réarrange encore comme suit, ce qui permet de regarder comment évolue la vitesse de l'écoulement en fonction du profil du fond :

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{v(x)}{H(x)} \frac{1}{1 - Fr(x)^2} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (6)$$

Considérons un écoulement dont le nombre de Froude en amont est inférieur à l'unité (écoulement sous-critique) : $Fr = v/(gH)^{1/2} < 1$. Que se passe-t-il lorsque l'écoulement passe au-dessus de la hauteur maximale de l'obstacle, définie par $\partial h(x)/\partial x = 0$? Dans ce cas l'équation (5) est vérifiée :

- (a) soit avec $\partial v(x)/\partial x = 0$
- (b) soit avec $Fr(x) = 1$

Dans le premier cas (a), la dérivation de (3) montre que l'on a aussi $\partial H(x)/\partial x = 0$: la profondeur devient minimale au niveau de la bosse (zones 2 et 3 de la figure 3), puis augmente après franchissement de l'obstacle (zone 4). La conservation du débit (3) entraîne alors que la vitesse diminue, donc $Fr(x)$ diminue. Dans le cas (a), par conséquent, si le nombre de Froude en amont $Fr = v/(gH)^{1/2}$ est inférieur à l'unité, il le reste tout au long de l'écoulement : $Fr(x) < 1$.

Dans le deuxième cas (b), en revanche, $Fr(x)$ prend la valeur 1 au point x où le profil de l'obstacle est maximal. Avant ce point on a $\partial h(x)/\partial x > 0$ (car l'épaisseur de l'obstacle augmente (zone 2)). Comme initialement $Fr < 1$ en amont, on a aussi $Fr(x) < 1$ avant franchissement du sommet de l'obstacle. Avant le sommet de l'obstacle on a donc :

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{v(x)}{H(x)} \frac{1}{1 - Fr(x)^2} \frac{\partial h(x)}{\partial x} > 0 \quad (6)$$

Conclusion : la vitesse augmente avec x avant le sommet où $Fr(x) = 1$ (zone 2 d'accélération). Après passage du sommet de l'obstacle, son épaisseur diminue donc $\partial h(x)/\partial x < 0$. Mais le fluide ayant accéléré, sa vitesse $v(x)$ est plus grande qu'en amont, donc $Fr(x) > 1$: le régime devient sur-critique, et la condition (6) reste valide, l'écoulement a une vitesse élevée (zone 3). Dans cette zone le liquide a une faible épaisseur puisque, par conservation du débit, sa vitesse est élevée : sa profondeur $H(x)$ diminue et est plus petite que la profondeur en amont H : $H(x) < H$ après le col. Le liquide « suit » en quelque sorte le profil de l'obstacle à son aval. L'écoulement ne peut pas accélérer indéfiniment du fait de son incompressibilité ($H(x)$ ne peut

pas devenir aussi petit que l'on veut). Il s'ensuit que, plus loin vers l'aval, l'écoulement décélère, donc la profondeur $H(x)$ augmente de nouveau : il retrouve alors un comportement comparable à celui de l'amont après un ressaut à partir duquel l'épaisseur du liquide redevient grande.

Expérimentalement, on peut obtenir les configurations (a) et (b) de la figure 3 en faisant varier progressivement la vitesse d'écoulement amont dans un tunnel de font plat où est aménagé un obstacle sur le fond.

Des cas (a) et (b) qui précèdent, il résulte que, pour un même obstacle de hauteur maximale h (au col), pour un débit amont fixé $Q = vH$, il existe deux nombres de Froude, l'un Fr en amont, l'autre Fr' en aval, tels que :

$$Fr' = Fr \left(\frac{\sqrt{1+8Fr^2}-1}{2} \right)^{-3/2} \quad (7)$$

Cette relation (7) entre les nombres de Froude loin en amont et loin en aval montre que si l'un est > 1 alors l'autre est nécessairement < 1 .

Démonstration de (7) :

Le débit constant (fluide incompressible) est $Q = vH = v(x)H(x) = v'H'$, où v' et H' sont la vitesse et la profondeur en aval. En faisant apparaître Q dans (5), et en utilisant (2), on obtient immédiatement :

$$g \frac{\partial h(x)}{\partial x} + v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} - g Q \frac{1}{v(x)^2} \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

Comme la hauteur $h(x)$ de l'obstacle s'annule à l'infini, en amont et en aval, l'intégration de l'équation précédente entre les bornes situées loin en amont et loin en aval donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g dh(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dv(x) - g Q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv(x)}{v(x)^2} = 0 = g [h(x)]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \frac{1}{2} [v(x)^2]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + g Q \left[\frac{1}{v(x)} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

avec $h(x) = 0$ à l'infini, et $v(x) = v$ pour $x = -\infty$ (amont) et $v(x) = v'$ pour $x = +\infty$ (aval), les intégrations précédentes donnent :

$$g Q \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) + \frac{1}{2} (v'^2 - v^2) = 0 \quad (8)$$

La relation (8) s'écrit encore :

$$(v - v') \left(\frac{v + v'}{2} - \frac{g Q}{w'} \right) = 0$$

qui est satisfaite par la solution triviale $v = v'$ ou bien par :

$$g Q = \frac{1}{2} w' (v + v')$$

En faisant apparaître Fr et Fr' , et compte tenu de $Q = vH = v'H'$, cette expression devient :

$$Fr^{1/3} Fr'^{1/3} (Fr^{1/3} + Fr'^{1/3}) = 2$$

qui n'est autre que la relation (7).

On remarquera que les caractéristiques géométriques de l'obstacle sur le fond n'apparaissent pas dans la relation (7) qui lie le régime en amont et le régime en aval.

2-2 - Etude du ressaut hydraulique

Nous nous plaçons dans le cas (b) où le ressaut hydraulique apparaît en aval après le passage de l'obstacle immergé. Nous avons vu que l'écoulement, en zone (3) (figure 3) est caractérisé par un nombre de Froude supérieur à un (régime supercritique) : si v' est la vitesse en amont du ressaut, où la profondeur est H' , et si v'' est la vitesse en aval du ressaut où la profondeur est H'' , on peut déterminer une relation entre ces grandeurs de part et d'autre du ressaut, et montrer que si $Fr' > 1$ (nombre de Froude avant le ressaut) alors $Fr'' < 1$ (nombre de Froude après le ressaut), où $Fr'' = v''/(gH'')^{1/2}$.

Pour cela, nous devons exprimer dans un volume de contrôle convenablement choisi, contenant la zone de ressaut, la conservation de la quantité de mouvement (figure 4) : dans ce volume, la différence de flux de quantité de mouvement est compensée par la résultante des forces de pression.

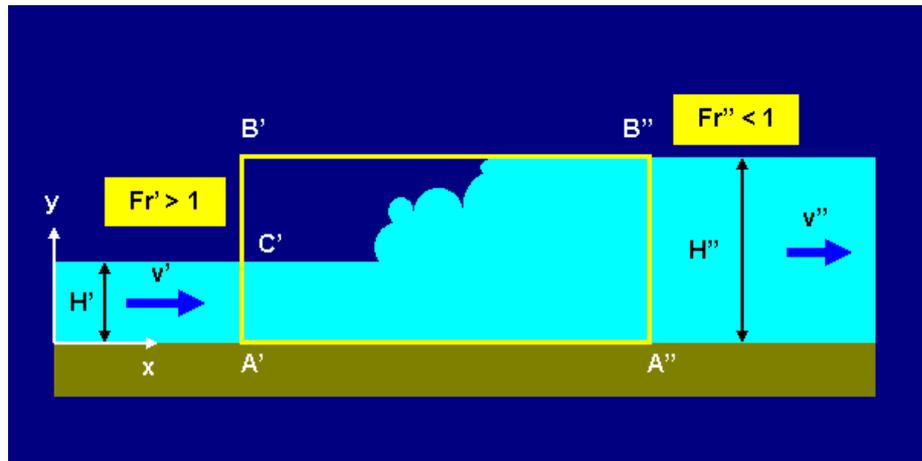


figure 4 – volume de contrôle pour le bilan de quantité de mouvement de part et d'autre d'un ressaut hydraulique

Le volume de contrôle où le bilan de quantité de mouvement sera établi est $A'C'B'B''A''A'$. La variation du flux de quantité de mouvement à travers les surfaces $A'C'B'$ et $A''B''$ est :

$$\iint_{A'C'B'B''A''A'} \rho v(x)v(x) dS = \rho v''^2 H'' - \rho v'^2 H' \quad (9)$$

Ce flux doit être égal à la somme des forces de pression sur ces surfaces, or celle-ci vaut :

$$\iint_{A'C'B'B''A''A'} p dS = \iint_{B''A''} p dS - \iint_{A'C'B'} p dS$$

Or sur la face $B''A''$ les forces de pression sont celles de la pression atmosphérique à la surface libre p_0 et de la pression hydrostatique donnée par $p(y) = \rho g(H'' - y)$, d'où :

$$\iint_{B''A''} p dS = \int_0^{H''} (p_0 + \rho g(H'' - y)) dy$$

et sur la face $A'C'B'$ les forces de pression se décomposent en :

$$\iint_{A'C'B'} p dS = \iint_{A'C'} p dS + \iint_{C'B'} p dS$$

avec :

$$\iint_{A'C'} p dS = \int_0^{H'} (p_0 + \rho g(H' - y)) dy \quad \text{et} \quad \iint_{C'B'} p dS = \int_{H'}^{H''} p_0 dy$$

après intégration immédiate, le bilan des forces de pression donne :

$$\iint_{A'C'B'B''A''A'} p dS = \frac{1}{2} \rho g (H''^2 - H'^2) \quad (10)$$

L'égalité de (8) et de (9) aboutit à :

$$\frac{1}{2} g (H''^2 - H'^2) - (v'^2 H' - v''^2 H'') = 0$$

D'autre part la conservation du débit $v'H' = v''H''$ permet d'éliminer l'une des vitesses dans l'expression précédente, et l'on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} v'' &= \sqrt{\frac{g}{2} \frac{H'}{H''} (H' + H'')} \\ v' &= \sqrt{\frac{g}{2} \frac{H''}{H'} (H' + H'')} \end{aligned} \quad (11)$$

Les expressions (11) montrent que, si $H' < H''$, comme c'est le cas de part et d'autre du ressaut, alors $v'' < (gH'')^{1/2}$, et $v' > (gH')^{1/2}$, autrement dit :

$$H' < H'' \rightarrow Fr' > 1 \quad \text{et} \quad Fr'' < 1 \quad (12)$$

Les inégalités (12) montrent alors que **dans la zone d'épaisseur mince l'écoulement est supercritique (nombre de Froude > 1) et sous-critique dans la zone d'épaisseur plus grande**. Le ressaut se comporte comme un bassin d'attraction de l'énergie hydraulique : si une particule liquide s'échappe du ressaut vers l'amont où le régime est supercritique, sa vitesse de propagation $c' = (gH')^{1/2}$ est inférieure à celle de l'écoulement supercritique v' et elle est donc ramenée vers le ressaut ; réciproquement, si la particule liquide s'échappe du ressaut vers l'aval où le régime est sous-critique, sa vitesse de propagation $c'' = (gH'')^{1/2}$ est supérieure à celle de l'écoulement sous-critique v'' et donc lui permet de revenir en arrière dans le ressaut. Ces considérations qualitatives illustrent que le ressaut tend à se comporter comme un puits d'énergie hydraulique.

Enfin, à partir des relations (11), on peut établir le rapport entre les profondeurs H' et H'' en amont et en aval du ressaut. Pour cela, il suffit de prendre une des variables comme inconnue, H'' par exemple, et de résoudre l'équation du second degré équivalente à (11), où l'on exprime v' à partir du nombre de Froude Fr' et où H' joue le rôle de paramètre :

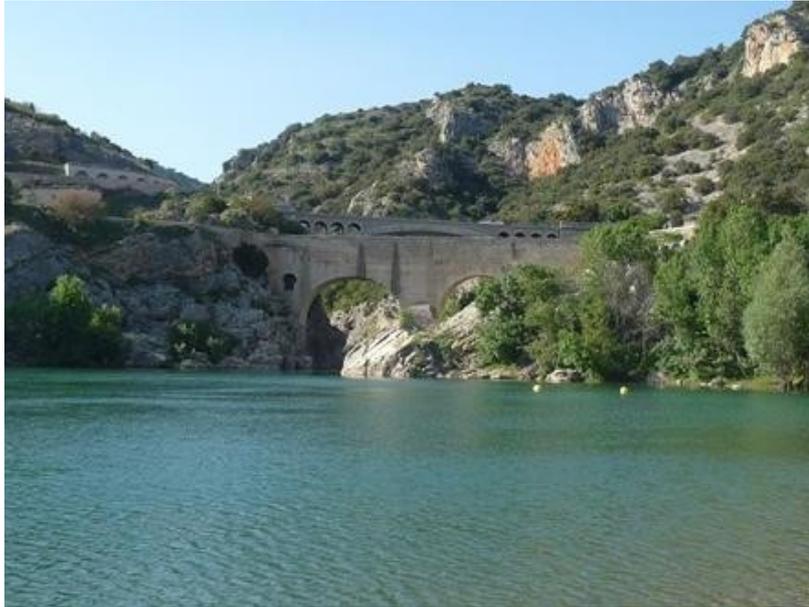
$$\begin{aligned} H''^2 + H'H'' - 2v'^2 H'/g &= 0 \\ \text{avec } v'^2 &= gH'Fr'^2 \end{aligned}$$

de racine :

$$H'' = H' \frac{\sqrt{1 + 8Fr'^2} - 1}{2} \quad (13)$$

A partir de (11) et (13) on montre alors immédiatement la relation entre les nombres de Froude en amont et en aval du ressaut :

$$Fr'' = Fr' \left(\frac{\sqrt{1+8Fr'^2}-1}{2} \right)^{-3/2} \quad (14)$$



*Le Pont du Diable, dans les gorges de l'Hérault, près de Saint-Guilhem le Désert. La rivière montre un phénomène de ressaut hydraulique consécutif à une variation de profondeur
(photos : F. Élie, avril 2009)*

2-3 - Perte de charge dans un ressaut hydraulique

Chaque fois que l'on cherche à caractériser le comportement énergétique dans un écoulement hydraulique (dans un canal, une rivière, une conduite, etc.), il est utile d'utiliser la notion de charge spécifique introduite par Bakhmetev en 1911.

La **charge hydraulique spécifique** représente la hauteur qu'aurait le liquide sous l'action de la pression statique et de la pression cinétique auxquelles il est soumis. Cette hauteur est mesurée par rapport, non pas à un plan horizontal de référence, mais par rapport au fond du canal, ce fond pouvant être incliné.

Par exemple, une masse d'eau s'écoulant à une vitesse de 3 m/s et de hauteur par rapport au fond a une charge hydraulique spécifique égale à : $1 + \frac{3^2}{2 \times 9,81} = 1,46$ mètre (la charge hydraulique spécifique est une hauteur, mesurée en mètre).

Nous avons donc par définition, à une distance du fond « y » et pour une vitesse d'écoulement « v » :

$$H_s(y) = y + \frac{v^2}{2g} \quad (15)$$

Il est clair que la charge hydraulique spécifique est toujours supérieure à la hauteur H(x) de la surface libre du liquide puisque $y \leq H(x)$. Le lieu des valeurs de $H_s(x)$ lorsque l'on longe le canal dans le sens de l'axe Ox forme une courbe appelée ligne de charge : la ligne de charge est donc toujours située au-dessus de la surface libre (figure 5).

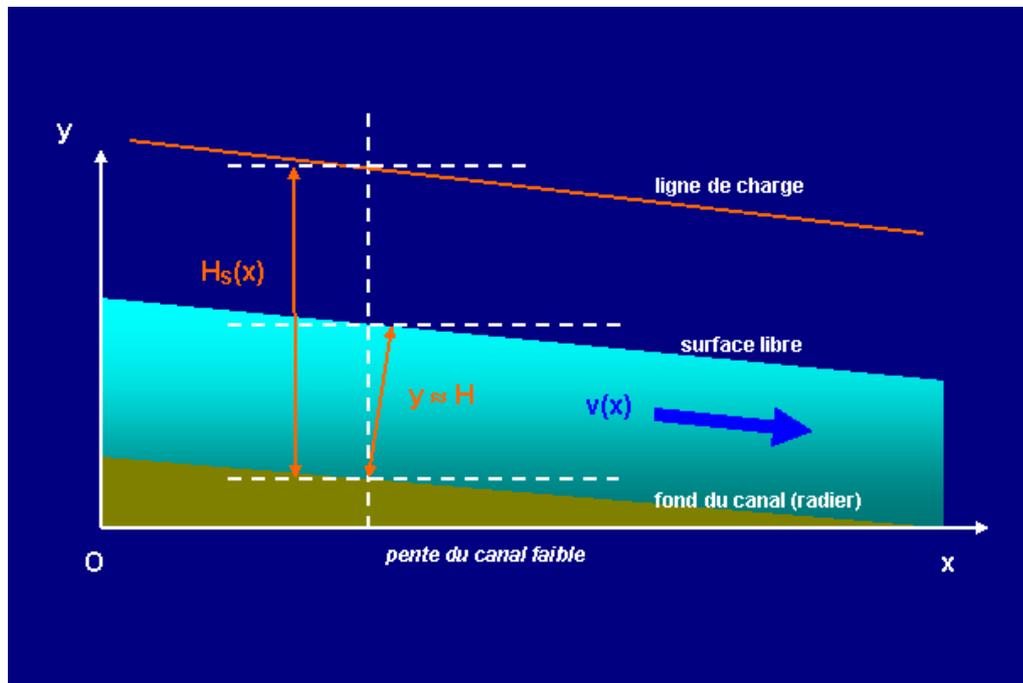


figure 5 – charge hydraulique spécifique dans un canal de faible pente

La dissipation de l'énergie hydraulique le long de l'écoulement, due à diverses causes (ressaut, changement de sections, frottements, etc.) est caractérisée par la variation de H_s : la perte de charge.

Le ressaut hydraulique introduit une perte de charge qui traduit l'irréversibilité du phénomène entre l'amont et l'aval du ressaut. En utilisant les mêmes notations que précédemment, les relations (11) se réécrivent :

$$v''^2 = \frac{1}{2} g \frac{H'}{H''} (H' + H'')$$

Mais nous avons défini le débit volumique *par unité de largeur* du canal par : $Q = v''H'' = v'H'$ supposé constant (incompressibilité). L'expression précédente s'écrit donc encore :

$$\frac{Q^2}{H''^2} = \frac{1}{2} g \frac{H'}{H''} (H' + H'')$$

Pour des raisons qui seront développées dans l'article sur les canaux, dans ce site, la quantité suivante s'appelle la **profondeur critique** du canal :

$$H_c = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (16)$$

et la relation (11) donne finalement une relation entre les profondeurs en amont et en aval du ressaut hydraulique, qui nous permettra ensuite de calculer la perte de charge :

$$2H_c^3 = H' H'' (H' + H'') \quad (17)$$

La perte de charge est :

$$\Delta H_s = H_s' - H_s'' = H' + \frac{v'^2}{2g} - H'' - \frac{v''^2}{2g}$$

En remplaçant les vitesses par leurs expressions en fonction du débit volumique par unité de largeur Q : $v' = Q/H'$ et $v'' = Q/H''$, et en faisant apparaître la profondeur critique (16), l'expression précédente devient :

$$\Delta H_s = (H' - H'') \left(1 - \frac{1}{2} H_c^3 \frac{H'' + H'}{H'^2 H''^2} \right)$$

en remplaçant H_c par (17) il ne reste plus que les profondeurs H' et H'' dans l'expression de la perte de charge :

$$\Delta H_s = \frac{(H'' - H')^3}{4 H' H''} \quad (18)$$

Comme l'énergie du liquide ne peut pas augmenter lors de son parcours dans le sens descendant en suivant la pente du canal, (18) montre qu'au ressaut hydraulique on a une perte de charge forcément positive, et donc $H'' > H'$: au niveau du ressaut la hauteur de la surface libre augmente.

(18) montre aussi que, dans des conditions idéales, la mesure des profondeurs juste en amont et en aval du ressaut renseigne directement sur la perte de charge.

3 - Exemple d'application : ouverture d'une vanne de décharge

Sur le cours d'un canal de section rectangulaire et de faible pente, une plaque plane verticale est disposée, initialement au contact du fond (figure 6). Lorsque la plaque est levée verticalement et se trouve à une distance h du fond, et tant que son bord inférieur reste bien au-dessous de la surface libre, on observe juste à l'aval de cette vanne, au niveau de l'ouverture, un niveau d'eau H' inférieur à celui H en amont, ainsi qu'un phénomène de ressaut juste à la sortie de l'ouverture.

On se propose de calculer la force qui s'exerce sur la plaque et le rapport des hauteurs H et H' pour une ouverture de hauteur h . C'est une excellente occasion d'appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement à l'intérieur d'une surface de contrôle convenablement choisie. Soit ABCDEFGA le contour de cette surface (voir figure 6).

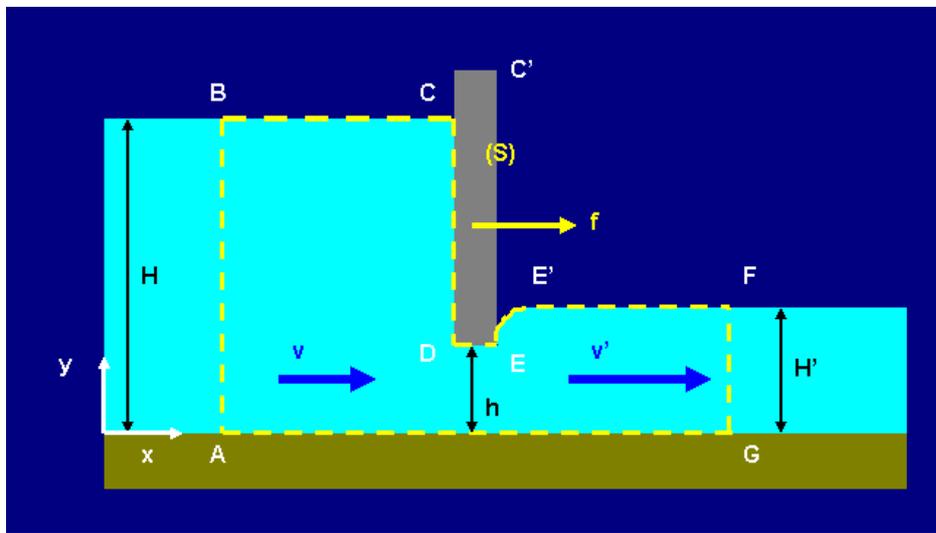


figure 6 – ressaut formé par une vanne de décharge dans un canal

Soit (S) la surface du domaine de contrôle dans lequel nous écrivons le bilan de quantité de mouvement qui s'exprime de manière générale par:

$$\iint_{(S)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{(S)} p \mathbf{n} dS - \iint_{(S)} [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} dS - \iiint_{(V)} \rho \mathbf{g} dV = 0$$

Les forces de frottement visqueux sont négligées (troisième terme), quant aux forces de pesanteur (quatrième terme) elles ont une projection horizontale suivant Ox nulle et donc n'interviennent pas dans la configuration du modèle. Seuls les deux premiers termes sont donc à calculer et nous considérerons les surfaces dS par unité de largeur (donc $dS = Ldy = dy$ avec $L = 1$).

Seule intervient la composante horizontale, suivant Ox, de la quantité de mouvement, que l'on notera ρv (ρ est la masse volumique du liquide). Le flux de quantité de mouvement est nul pour les surfaces horizontales, puisque seule intervient la composante horizontale de la vitesse v , donc seules subsistent les flux à travers les surfaces verticales AB et FG :

$$\iint_{(S)} \rho v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho v (-vH) + \rho v' (v'H') = \rho (v'^2 H' - v^2 H^2)$$

Pour les forces de pression nous avons :

$$\iint_{(S)} p \mathbf{n} dS = \int_{AB} p dy + \int_{CD} p dy + \int_{EF} p dy + \int_{FG} p dy$$

La première intégrale sur (AB) est obtenue par l'équilibre hydrostatique vérifiée pour l'eau à toute profondeur $y < H$:

$$\int_{AB} p dy = - \int_0^H (p_0 + \rho g(H-y)) dy$$

La deuxième intégrale sur (CD) est égale à la force résultante « f » s'exerçant sur la vanne CD et de la force de pression exercée par l'atmosphère sur la face C'E (p_0 est la pression atmosphérique) :

$$\int_{CD} p dy = f + p_0(H-h)$$

La troisième intégrale sur (EF) a pour seule contribution la pression atmosphérique exercée sur la partie renflée EE' du ressaut qui a pour hauteur $(H'-h)$:

$$\int_{EF} p \, dy = -p_0 \int_{EE'} \, dy = -p_0(H' - h)$$

Enfin, la quatrième intégrale sur (FG) se calcule comme sur (AB) :

$$\int_{FG} p \, dy = \int_0^{H'} (p_0 + \rho g(H' - y)) \, dy$$

(attention aux signes des intégrales : ils viennent de ce que l'on tourne dans le même sens en parcourant ABCDEFGA). L'intégrale de pression donne alors :

$$\iint_{(S)} p \mathbf{n} \, dS = \int_{AB} p \, dy + \int_{CD} p \, dy + \int_{EF} p \, dy + \int_{FG} p \, dy = f - \frac{1}{2} \rho g(H^2 - H'^2)$$

et avec le bilan du flux de quantité de mouvement, on tire la résultante des efforts sur la vanne :

$$f = \rho(v^2 H - v'^2 H') + \frac{1}{2} \rho g(H^2 - H'^2) \quad (19)$$

Le rapport des hauteurs H'/H en aval et en amont de la vanne s'obtient en appliquant le théorème de Bernoulli à une ligne de courant très proche du fond :

$$p_0 + \rho gH + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \rho gH' + \frac{1}{2} \rho v'^2$$

Or la conservation du débit volumique (fluide incompressible) donne : $v' = vH/H'$, et en remplaçant dans la relation ci-dessus nous avons une équation du second degré en H' , paramétrée par v et H :

$$H'^2 - (v/2g)H' - v^2H/2g = 0$$

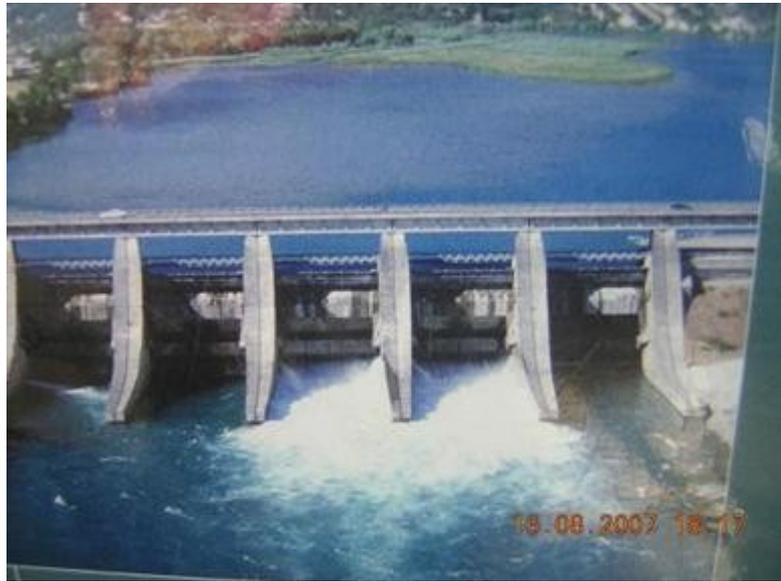
dont la racine positive est :

$$H' = H \frac{v^2}{4gH} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gH}{v^2}} \right)$$

où l'on a fait apparaître le nombre de Froude amont donné par $Fr^2 = v^2/gH$. Finalement :

$$\frac{H'}{H} = \frac{Fr}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{Fr^2}} \right) \quad (20)$$

Comme la profondeur de l'eau est plus grande en amont qu'en aval de la vanne, $H > H'$, (20) montre que l'on a bien $Fr < 1$. On vérifie sans problème que le nombre de Froude aval vérifie alors : $Fr' > 1$. En amont de la vanne l'écoulement est fluvial, en aval il est torrentiel.



*remous à la sortie d'une vanne de décharge d'un barrage
(doc. EDF)*

4 - Onde de choc

Le déplacement relatif de la surface du liquide par rapport à celui des ondes de surface peut conditionner la formation d'ondes de choc, d'une manière comparable à celles que l'on rencontre lorsqu'un avion se déplace dans l'air à la vitesse transsonique.

Si une source de perturbation de la surface de l'eau est fixe, par exemple une pierre que l'on jette dans l'eau, l'énergie mécanique reçue par la masse liquide est transportée à la surface sous forme d'ondes dont la célérité, en eau peu profonde, croît lorsque la profondeur augmente. Les ondes sont alors concentriques, centrées sur leur point commun qui est la source de perturbation.

En revanche, si le fluide se déplace à une vitesse supérieure à celle des ondes de surface, cette masse fluide se comporte comme une source de perturbations qui se propagent par composition de la vitesse de la source et de la vitesse des ondes de surface du cas source fixe. Les ondes émises ne sont alors plus concentriques, elles se recoupent. L'ensemble des lieux où le recoupement s'effectue forme un cône (un triangle à la surface de l'eau) à la frontière duquel se forme une surpression : il y a onde de choc puisque l'énergie mécanique y est localement supérieure à celle des ondes de surface du cas source fixe, il s'y ajoute en effet l'énergie de déplacement de la source.

Dans les zones d'onde de choc, les amplitudes de pression sont relativement importantes : les effets non linéaires, jusqu'alors négligés dans la modélisation des ondes de surface en source fixe, deviennent comparables aux effets linéaires, et ne peuvent plus être négligés. Or dans les équations de Navier-Stokes pour un liquide incompressible, les effets linéaires interviennent dans les fluctuations de pression δp , à travers le terme :

$$- \mathbf{grad} \delta p$$

et les effets non linéaires interviennent dans les termes d'advection des fluctuations de vitesse $\delta \mathbf{v}$:

$$\rho(\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \delta \mathbf{v}$$

La comparaison des deux termes, sur une échelle de longueur qui est celle de la longueur d'onde ($\mathbf{grad} \approx 1/\lambda$) donne :

$$\mathbf{grad} \delta p \approx \delta p / \lambda \approx \rho(\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \delta \mathbf{v} \approx \rho \delta v^2 / \lambda$$

soit :

$$\delta p \approx \rho \delta v^2 \quad (21)$$

(21) montre que, avec les effets non linéaires, l'énergie cinétique devient comparable aux fluctuations de pression. Comme, par ailleurs, en régime ondulatoire et linéaire, les solutions sont du type $\delta v \approx v_0 \exp j(\omega t - kx)$, et $\delta p \approx p_0 \exp j(\omega t - kx)$, les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$(\partial \delta v / \partial t) = -1/\rho (\partial \delta p / \partial x), \text{ donc : } \omega \delta v \approx 1/\rho \cdot k \delta p$$

or : $c = \omega/k \approx (gH)^{1/2}$ est la vitesse de phase de l'onde de surface, donc : $\rho c \delta v \approx \delta p$. La comparaison avec (21) aboutit alors au critère pour que les effets non linéaires doivent être pris en compte, en régime d'onde de choc :

$$\delta v \approx c \approx \sqrt{gH} \quad (22)$$

Autrement dit, les effets non linéaires associés à l'onde de choc doivent intervenir dès que la vitesse de déplacement du liquide est du même ordre que la célérité des ondes de surface. Le rapport de la vitesse de déplacement à la vitesse de l'onde de surface joue le même rôle que le nombre de Mach en aérodynamique, et l'on peut noter :

$$M = \frac{\delta v}{c} = \frac{\delta v}{\sqrt{gH}} = Fr \quad (23)$$

On voit que l'équivalent du nombre de Mach pour l'hydrodynamique des liquides incompressibles à surface libre n'est autre que le nombre de Froude. On est en régime d'onde de choc lorsque ce nombre est supérieur à l'unité : $M = Fr > 1$.

C'est le cas du ressaut hydraulique pour la zone d'écoulement torrentiel où $Fr > 1$. Dans cette zone, on doit donc s'attendre à l'existence du cône de discontinuité, tel qu'illustré à la figure 7, lieu des points de recouplement des ondes de surface émises par une source en déplacement plus rapide que la vitesse de ces ondes.

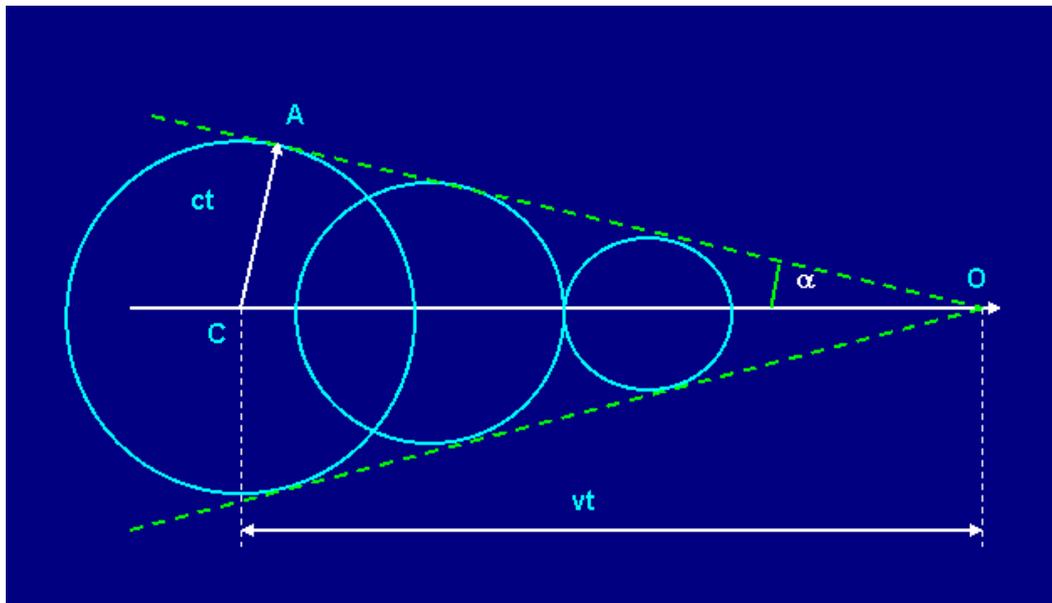


figure 7 – « cône de Mach »

Un calcul géométrique très simple permet de relier le demi-angle au sommet α du « cône de Mach » au nombre de Mach (ou de Froude) : le triangle OAC étant rectangle en A on a immédiatement :

$$OC \sin \alpha = CA, \text{ soit : } vt \sin \alpha = ct$$

donc :

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{Fr} \quad (24)$$

La relation (24) indique un moyen d'estimer expérimentalement le nombre de Froude de la zone torrentielle du ressaut hydraulique. C'est ce que j'ai proposé de faire simplement avec le dispositif suivant (figure 8).

En créant une zone où $Fr > 1$ moyennant l'écoulement de l'eau d'un robinet tombant sur le fond plat d'une cuve, on y place un objet fin et pointu, comme la pointe d'un couteau. On peut alors observer la formation du cône de Mach.

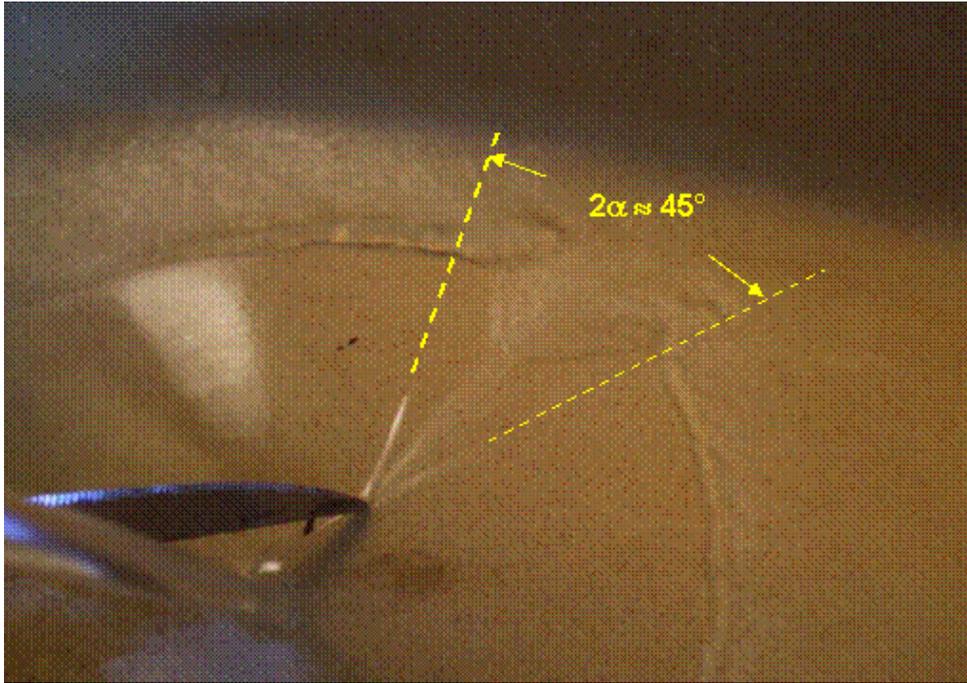


figure 8 – cône de Mach dans la zone « torrentielle » du ressaut hydraulique
(photo : F. Élie)

La valeur estimée du demi angle au sommet est $\alpha = 22,5^\circ$, d'où, d'après (24), un nombre de Froude estimé à $Fr = 2,61$.

Le phénomène du cône de Mach n'est pas propre à l'acoustique, ni au ressaut hydraulique : de manière générale, chaque fois qu'une source se déplace plus vite que l'onde qu'elle émet, quelle que soit la nature de cette onde, ce phénomène se produit.

Bibliographie

- Michel Rieutord : *Une introduction à la dynamique des fluides* – Masson, 1997
- Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit : *Hydrodynamique physique* – Savoirs actuels, CNRS éd., EDP Sciences, 2001
- Pour la science, juin 1981, p. 139-145 : *ressaut hydraulique*
- L. D. Landau, E. M. Lifchitz : *Mécanique des fluides* – éd. Mir, 1989, 1994, traduction éd. Ellipses, 1994
- sous la direction de Michel Hug : *mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétique* – Eyrolles, 1975