



Frédéric Elie on
ResearchGate

Sillage d'un canard sur l'eau et sillage de Kelvin

Frédéric Elie
23 mars 2011

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Abstract : Qu'y a-t-il de commun entre le sillage d'un bateau, tel qu'un pétrolier ou un porte-avions, naviguant à une vitesse suffisante sur une eau profonde, et le sillage d'un canard, ou d'une oie, sur la surface placide d'un bassin d'un parc municipal?

Nous allons voir, dans cet article, que le point commun entre les deux sillages est cette étrange propriété « universelle »: le cône du sillage laissé par le canard et celui laissé par un navire de fort tonnage, quelle que soit leur vitesse, a un angle au sommet égal à une valeur identique: 39° !

Si le canard ou le bateau accélèrent ou deviennent plus ou moins massifs, cet angle de sillage, sur une eau profonde, reste invariable: 39° . Voilà qui est étonnant, mais est-ce que cette situation est comparable à celle d'un avion en vol qui avance à la vitesse transsonique? On sait que le cône qui délimite les ondes de choc associées aux perturbations apportées par l'avion, ou cône de Mach, est relié simplement à la vitesse du son dans l'air, c , et à la vitesse de l'avion, v , par la formule: $\sin A = c/v$, où A est le demi-angle au sommet du cône. On voit, dans ce cas, que le sillage se resserre (l'angle A diminue) lorsque la vitesse de l'avion augmente, la vitesse du son étant pratiquement constante aux conditions thermodynamiques considérées.

On a vu également une situation comparable à celle du sillage d'un avion à propos de l'étude du ressaut hydraulique (voir [l'article](#)).

Dans le cas d'un objet qui avance à la surface d'une eau profonde, tel un canard ou un navire, il y a une différence importante avec le cas de l'avion: les perturbations, ou source d'énergie, apportées au milieu (surface de l'eau) se propagent avec une vitesse qui n'est pas constante mais qui dépend de la fréquence avec laquelle le mobile excite le milieu. Il s'ensuit que la longueur d'onde des perturbations et leur période ne sont pas proportionnelles. C'est la propriété de milieu dispersif, que l'on rencontre pour une eau profonde, en régime de gravité (c'est-à-dire lorsque les effets de tension superficielle de l'interface air-eau peuvent être négligés – voir [article sur les ondes de surface d'un liquide](#)).

Nous rappellerons que, à la surface d'une eau profonde, en régime de gravité, la vitesse des ondes est d'autant plus grande que leurs périodes sont élevées (les ondes de faible fréquence, donc de grande période, voyagent plus vite que les ondes de grande fréquence, donc de petite période). Or le navire, ou le canard, avance à la vitesse constante v , et nous devons utiliser la transformation entre référentiels galiléens (l'un lié à l'étendue d'eau, immobile, l'autre lié au navire ou canard, mobile) pour examiner comment les ondes sont « vues » dans le référentiel lié au mobile. On utilise alors le principe de l'onde stationnaire: dans le référentiel lié au mobile (navire ou canard) les ondes émises par la perturbation que crée le mobile à la surface de l'eau sont toujours les mêmes et ne dépendent pas du temps. Cette condition a une conséquence géométrique importante sur la position relative des fronts d'onde, dans le référentiel immobile (la surface de l'eau) par rapport au mobile: nous verrons en effet que la direction de propagation d'une onde émise par le bateau à une date antérieure est perpendiculaire à la droite joignant la position du front d'onde et le bateau dans sa nouvelle position à la date actuelle. Puisque la

position des fronts d'onde diffère selon la fréquence, pour un même laps de temps, conséquence du caractère dispersif des ondes de surface en eau profonde, en faisant varier la fréquence on obtient comme lieu des fronts d'ondes associées à une perturbation antérieure un cercle passant par la position actuelle du navire et sa position antérieure.

Mais jusqu'ici, nous parlons de front d'onde comme le lieu où la phase de l'onde (dans le référentiel fixe) est la même: la distance entre deux fronts d'onde consécutifs est égale à la longueur d'onde, et ces fronts d'onde se propagent à la vitesse de l'onde c , qui est plus exactement la vitesse de phase. En fait, le sillage n'est pas lié à la propagation des fronts d'onde, ou des états de même phase; il est lié à la propagation des paquets d'ondes. Ces paquets d'ondes sont une conséquence du caractère dispersif: une onde principale qui se propage avec la vitesse de phase c est en fait modulée par une quantité théoriquement infinie d'ondes de fréquences différentes, et ce paquet d'ondes, c'est de l'énergie qui se propage, tandis qu'une onde « pure », c'est l'état de phase qui se propage. C'est l'énergie, apportée par la perturbation de la part du navire, qui est à l'origine du sillage.

Or la vitesse à laquelle les paquets d'onde se propagent, appelée vitesse de groupe, diffère de la vitesse de phase pour une onde dispersive. Dans le cas d'une surface en eau profonde, nous verrons que la vitesse de groupe est égale à la moitié de la vitesse de phase: l'énergie voyage deux fois moins vite que les états de phase. En vertu de la propriété géométrique des lieux des fronts d'onde évoquée plus haut (cercle), il s'ensuit que le lieu des pics d'énergie forme un cercle dont le rayon est la moitié du cercle des fronts d'onde. Ceci a pour conséquence géométrique sur la forme du sillage que, sur une même durée t , pendant que le navire a parcouru une distance $D = vt$, le cercle des pics d'énergie, créée par la perturbation à l'instant $t = 0$, a comme rayon $D/4$, et donc le demi-angle du cône de sillage est donné par $\sin A = (D/3)/D = 1/3$, soit un angle du cône de sillage $2A = 39^\circ$, quelles que soient la vitesse et la masse du navire ou du canard !

Cette explication du sillage à la surface d'une eau profonde, pour des ondes de gravité, correspond à la théorie de Kelvin (1885): c'est pourquoi on l'appelle « sillage de Kelvin ».

SOMMAIRE

1 – Introduction

2 - Rappels sur les différents régimes de propagation des ondes de surface d'un liquide

3 - Vitesse de phase et vitesse de groupe d'une onde

4 - Vitesse de phase et vitesse de groupe à la surface d'une eau profonde

5 - Le principe de la phase stationnaire

Annexe : Tout point P vérifiant $OP \cdot PO' = 0$ appartient à un cercle de diamètre OO'

Bibliographie sommaire

1 - Introduction

Tous les pratiquants du ski nautique (dont je ne fais pas partie!) le savent : le sillage en forme de V qui se forme derrière le bateau qui les tracte ne change pas lorsque l'allure du bateau change: son angle au sommet reste sensiblement le même, 39° , pourvu que la vitesse soit suffisamment grande et que l'eau soit profonde.

Pourtant tous les pratiquants du pilotage d'un avion supersonique (dont je ne fais également pas partie) le savent : le sillage d'un avion supersonique, en forme de V également, a un angle au sommet qui dépend de la vitesse; cet angle diminue (le V se resserre) lorsque la vitesse augmente. On rappelle en effet que, si l'on désigne par c la célérité du son dans l'air et par v la vitesse de l'avion, cet angle au sommet, A , vérifie (figure 1):

$$\sin (A/2) = c/v$$

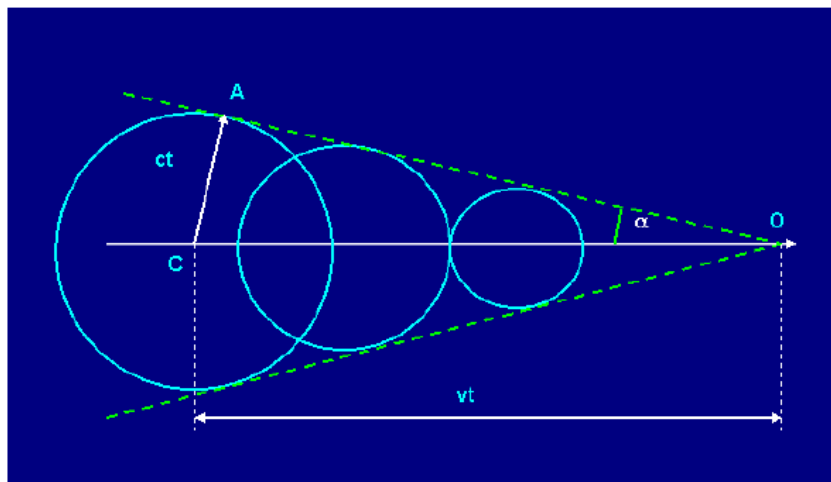
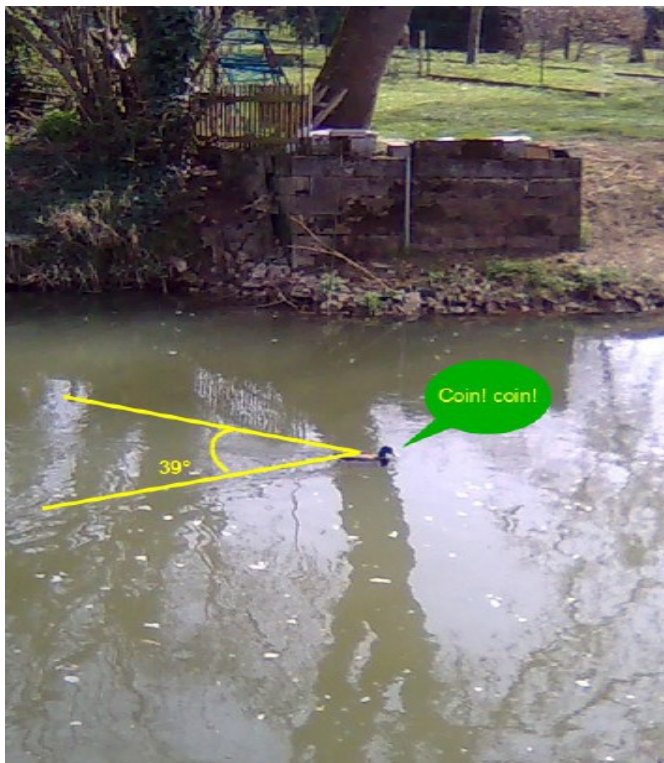


Figure 1: cône de Mach d'un avion supersonique $\sin \alpha = c/v$
(c : vitesse du son dans l'air standard = 340 m/s; v : vitesse de l'avion)

Eh bien, cette relation n'est pas vraie pour le sillage à la surface d'une eau profonde laissé par un canard, une barque à moteur ou un porte-avions (photos 1 et 2). Pourquoi?



Photo 1: le porte-avions Clémenceau et ses navires escorteurs créent un sillage identique d'ouverture 39° (photo Marine Nationale)



photos 2: à gauche, sillage d'un canard, au Val d'Auron, Bourges; à droite, sillage d'un canard, parc du Pré Fichaux, Bourges (photos: F. Élie, mars 2011)

2 - Rappels sur les différents régimes de propagation des ondes de surface d'un liquide

Selon, d'une part l'importance relative des effets de tension superficielle de l'interface air-eau, et d'autre part la profondeur du liquide sous la surface où se produit une perturbation (apport d'énergie), différents modes de propagation des ondes de surface sont observables (article [ondes de surface d'un liquide](#)) :

L'étude des effets de tension superficielle à l'interface air-eau sur la propagation des ondes de surface a conduit à introduire une longueur caractéristique, appelée longueur capillaire donnée par:

$$\lambda_T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

où pour l'interface air-eau, la tension superficielle vaut $\gamma = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2$, ce qui correspond à une longueur capillaire pour l'interface air-eau $\lambda_T = 1,7 \text{ cm}$. On montre que pour des modes de propagation pour lesquels la longueur d'onde est plus petite que la longueur capillaire, la propagation des ondes est dispersive et dépend de la profondeur H de l'eau:

$$\omega^2 = \left(g k + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh kH$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde (fréquence spatiale), $\omega = 2\pi/T$ la pulsation, ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur. La célérité d'une telle onde (vitesse de phase) est définie par: $c = \omega/k$, soit

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k \right) \tanh kH}$$

Dans ces conditions on est en régime capillaire en fond fini.

Si la profondeur devient très grande (devant la longueur d'onde: $kH \gg 1$), le terme $\tanh kH$ tend vers 1 et les relations précédentes se simplifient:

$$\omega^2 = g k + \frac{\gamma}{\rho} k^3$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}$$

A l'inverse, pour de faibles fonds ($kH \ll 1$), on a $\tanh kH \sim kH$, et le régime capillaire faible fond s'écrit:

$$c = \sqrt{gH + \frac{\gamma}{\rho} k^2 H} = \sqrt{gH} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{4\pi^2}{\lambda^2}}$$

Dans ce régime, les ondes les plus rapides sont celles qui sont de courtes longueurs d'onde. Considérons maintenant la cas où les effets capillaires sont négligeables: $\lambda > \lambda_T$. Il ne reste plus que l'effet de pesanteur sur la propagation des perturbations de la surface libre (influence de g): le mode devient celui des ondes de gravité. Là aussi le rôle de la profondeur conduit à deux types de comportements:

- Ondes de gravité en profondeur finie (faible fond): on montre que l'on a:

$$c = \sqrt{gH}$$

Cette fois-ci, dans ce régime onde de gravité à fond fini, la célérité est indépendante de la

longueur d'onde (ou de la fréquence): l'onde n'est pas dispersive. On est dans une situation comparable à celle du vol supersonique ou du ressaut hydraulique (partie mince du film de l'écoulement). Tout sillage y vérifie la loi $\sin(A/2) = c/v$ avec c constante.

- Ondes de gravité en profondeur infinie (relativement aux longueurs d'onde): la célérité et la relation de dispersion deviennent:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

Les ondes les plus rapides sont cette fois celles qui ont une grande longueur d'onde. Le problème du sillage d'un canard ou d'un navire à la surface d'une eau profonde correspond à ce cas.

Mais avant d'aller plus loin, nous avons besoin d'une digression sur les notions de vitesse de phase (célérité de l'onde) et de vitesse de groupe (célérité de l'énergie transportée par l'onde).

3 - Vitesse de phase et vitesse de groupe d'une onde

Considérons une surface de liquide dont l'amplitude de déformation causée par une source de perturbation (par exemple, un caillou que l'on jette à l'eau) est de forme ondulatoire, en particulier sinusoïdale pour simplifier; en un point x de la surface et à un instant t , l'amplitude s'exprime donc par:

$$z(x,t) = z_{\max} \cos(\omega t - kx)$$

Pour le moment on ne suppose rien sur le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ (λ est la longueur d'onde) ni sur la pulsation $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ($f = 1/T$ est la fréquence, T est la période): l'onde est dispersive ou non, peu importe. Comme on le voit sur l'animation du lien ci-dessous, la déformation de la surface de l'eau se propage de manière progressive et périodique dans le temps et dans l'espace:

lien: [propagation d'une onde progressive](#)
(source: Wikipedia)

À une position et une date (x' , t') la phase de l'onde se retrouve à l'identique de celle à une position et une date précédentes (x , t), si l'on a:

$$\omega t' - kx' = \omega t - kx$$

L'ensemble des points de la surface déformée où cette condition est vérifiée est le « front d'onde ». Il se déplace d'un point x à un autre x' avec une certaine vitesse: la vitesse de phase ou célérité de l'onde c . La vitesse avec laquelle une perturbation de la surface retrouve le même état de phase est égale à la vitesse de phase c . Cette vitesse est aisément calculable: si la nouvelle position x' est infiniment voisine de l'ancienne x , on peut noter $x' = x + dx$. Cette nouvelle position sera atteinte au bout d'un temps $t' = t + dt$. La relation précédente devient alors:

$$\omega(t + dt) - k(x + dx) = \omega t - kx$$

soit encore:

$$\omega dt - k dx = 0$$

Or $c = dx/dt$ est précisément la vitesse avec laquelle la perturbation passe d'une position pour une date donnée à une nouvelle position pour une date ultérieure, autrement dit c'est la vitesse de phase. On voit donc qu'elle est égale à:

$$c = dx/dt = \omega/k$$

Ce résultat est toujours vérifié, que l'onde soit dispersive ou non: la célérité de l'onde (ou vitesse de propagation de sa phase) est toujours égale au rapport de sa pulsation et de son nombre d'onde.

Pour une onde non dispersive (comme c'est le cas pour une onde électromagnétique dans le vide – dans un milieu matériel elle devient dispersive car l'indice de réfraction dépend de la fréquence, cf. article sur les [prismes et l'arc-en-ciel](#)), la célérité est une constante.

En milieu dispersif, en revanche, la célérité dépend de la fréquence: ce n'est donc pas une sinusoïde de pulsation et nombre d'onde uniques qui progresse, mais plusieurs, à des pulsations et nombres d'ondes différents. Chacune d'entre elles contribue à l'énergie de la perturbation qui se propage à la surface. Considérons l'exemple de deux ondes de pulsations et nombres d'onde (ω, k) et (ω', k') , pour simplifier, ou l'on a $k = k(\omega)$ et $k' = k'(\omega')$. L'énergie maximale correspond au maximum d'amplitude de l'ensemble de ces deux ondes. Ce maximum se déplace avec une vitesse qui est, par définition, la vitesse de groupe v_G des deux ondes qui se propagent avec des célérités différentes pour une onde dispersive $c = \omega/k$ et $c' = \omega'/k'$: la vitesse de groupe est donc généralement différente des vitesses de phase des ondes qui composent ce groupe.

Comme exemple concret, mentionnons l'onde générée par un caillou lancé dans l'eau: en y regardant de plus près, les vagues circulaires concentriques qui s'écartent de la source de perturbation sont en fait une superposition d'ondes qui se propagent à des vitesses de phase différentes et cette superposition, ou paquet d'ondes, correspond à un maximum d'énergie qui se déplace d'un point x à l'autre x' entre deux dates t et t' . C'est du moins vrai lorsque le caillou est lancé dans une eau profonde où le régime d'ondes de gravité est valide (ondes dispersives). Calculons alors ce que donne le paquet d'ondes pour deux ondes et déterminons à quelle vitesse son maximum d'amplitude (et donc d'énergie) se déplace (vitesse de groupe). Pour simplifier le calcul, sans pour autant restreindre le raisonnement, nous nous limitons à un paquet d'ondes constitué de deux ondes se propageant à des vitesses de phase différentes, donc avec des pulsations ω_1 et ω_2 différentes:

$$z_1(x,t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$z_2(x,t) = \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

où nous avons posé les amplitudes égales à l'unité, et où l'on a, du fait de la dispersion:

$$k_j = \omega_j / c_j(\omega_j) = F(\omega_j) \text{ avec } j = 1, 2$$

(ce qui signifie que les nombres d'ondes sont fonction des pulsations).

L'amplitude résultante de la déformation en un point x et à une date t est la somme des deux ondes précédentes:

$$z(x,t) = z_1(x,t) + z_2(x,t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

Cette somme est égale au produit (relation trigonométrique):

$$z(x,t) = 2\cos((\omega_2 + \omega_1)t/2 - (k_2 + k_1)x/2)\cos((\omega_2 - \omega_1)t/2 - (k_2 - k_1)x/2)$$

L'onde résultante est donc un battement, ou si l'on préfère, une onde modulée en amplitude par une autre de fréquence différente. Le lien ci-après donne une simulation de ce battement:

lien: [propagation d'un groupe de deux ondes](#)

(source: Wikipedia)

L'onde modulatrice a une fréquence $(\omega_2 - \omega_1)$ plus petite que celle de l'onde modulée $(\omega_2 + \omega_1)$. Sa vitesse de phase est égale à:

$$v_G = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$$

C'est la vitesse de déplacement du groupe des deux ondes. La vitesse de phase de l'onde modulée est, quant à elle:

$$c = (\omega_2 + \omega_1) / (k_2 + k_1)$$

Généralisons au cas où un nombre théoriquement infini d'ondes sont superposées, provenant d'une perturbation: deux ondes de fréquences ou de nombres d'onde infiniment voisins sont telles que leurs différences sont arbitrairement petites:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 + d\omega \\ k_2 &= k_1 + dk\end{aligned}$$

Les relations précédentes donnant les vitesses de groupe et de phase se généralisent donc, puisque $d\omega/\omega \ll 1$ et $dk/k \ll 1$:

$$v_G = \frac{\omega_1 + d\omega - \omega_1}{k_1 + dk - k_1} = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{et} \quad c = \frac{\omega_1 + d\omega + \omega_1}{k_1 + dk + k_1} \approx \frac{2\omega_1}{2k_1} = \frac{\omega}{k}$$

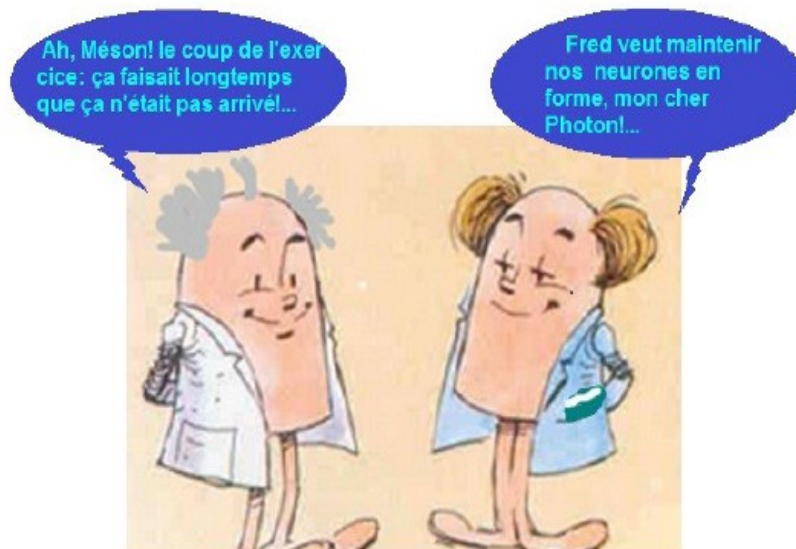
La vitesse de groupe et la vitesse de phase sont différentes pour une onde dispersive. Elles se confondent dans le cas d'une onde non dispersive (comme dans le cas d'un avion en vol transsonique) car la pulsation et le nombre d'onde sont reliées par $\omega = ck$, où c est une constante: $v_G = c$.

Pour une onde dispersive on peut soit exprimer le nombre d'onde en fonction de la pulsation, auquel cas la célérité (ou vitesse de phase) est une fonction de la pulsation, soit exprimer la pulsation en fonction du nombre d'onde, auquel cas la célérité est une fonction du nombre d'onde:

$$\begin{aligned}k &= k(\omega) \quad \text{et} \quad c = c(\omega) = \omega/k(\omega) \\ \omega &= \omega(k) \quad \text{et} \quad c = c(k) = \omega(k)/k\end{aligned}$$

Selon la variable choisie, il y a une relation très simple entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase (on propose la démonstration en exercice !):

$$v_G(k) = k \frac{dc(k)}{dk} + c(k) \quad \text{et} \quad v_G(\omega) = \frac{c(\omega)}{1 - \frac{\omega}{c(\omega)} \frac{dc(\omega)}{d\omega}}$$



4 - Vitesse de phase et vitesse de groupe à la surface d'une eau profonde

Revenons maintenant à notre problème: la propagation ondulatoire d'une déformation de la surface d'un plan d'eau en profondeur « infinie » (infinie signifie, rappelons-le: longueur d'onde très petite en comparaison de la profondeur de l'eau, et en outre on est en régime d'ondes de gravité, ce qui signifie que ces longueurs d'onde sont grandes en comparaison de la longueur capillaire vue plus haut). La déformation est engendrée par exemple par l'entrée d'un caillou jeté à l'eau.

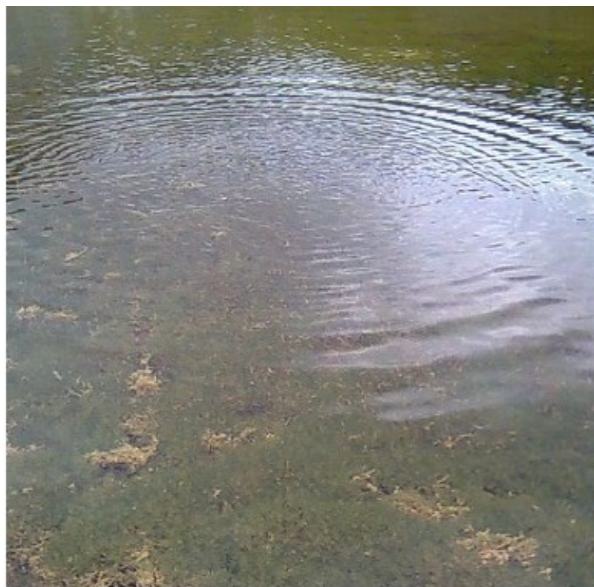


Photo 3: ondes circulaires concentriques engendrées par un caillou jeté à l'eau

Tout le monde a observé au moins une fois dans sa vie qu'un caillou jeté à l'eau produit une série de « vagues » en forme de cercles concentriques, centrées sur le point d'impact, et s'éloignant de celui-ci avec une certaine vitesse (voir photo 3).

En fait, comme il s'agit d'ondes dispersives, les renflements que l'on voit ne sont pas les ondes individuelles qui se propagent avec une vitesse de phase, mais ce sont des paquets de ces ondes qui se propagent avec la vitesse de groupe. Ces renflements sont une accumulation des ondes simples et leur amplitude résulte de la contribution constructive des amplitudes des ondes simples qui les constituent. En pratique, les ondes simples sont peu perceptibles: les ronds que l'on voit à la surface de l'eau sont leurs paquets d'ondes.

On a vu que, en eau profonde et en régime gravitaire, la vitesse de phase des ondes individuelles est $c = \sqrt{\frac{g}{k}}$ ou, si l'on préfère $c = \frac{g}{\omega}$ puisque la relation de dispersion est $\omega^2 = gk$.

Les ondes de basse fréquence voyagent plus rapidement que celles de fréquence élevée. Elles finissent alors par rencontrer les plus lentes et la rencontre des ondes lentes et des ondes plus rapides produit leur accumulation suivant une période dans le temps et dans l'espace plus grande que celles des ondes prises individuellement. C'est ainsi que naissent les paquets d'ondes.

Connaissant la relation de dispersion, quelle est donc la vitesse de groupe dans le cas d'une eau profonde et en régime gravitaire?

On a : $v_G = d\omega/dk$, ce qui, compte tenu de la relation de dispersion $\omega^2 = gk$, donne immédiatement :

$$v_G = \frac{g}{2\omega} = \frac{c}{2}$$

On a donc le résultat important : la vitesse de groupe des ondes à la surface d'une eau

profonde est égale à la moitié de leurs vitesses de phase. Les fronts d'onde, c'est-à-dire les plans perpendiculaires aux directions radiales de propagation des ondes individuelles, voyagent deux fois plus vite que les lieux de maximum d'énergie.

Sachant cela, quel rapport avec le problème de la forme du sillage laissé par un bateau ou un canard à la surface d'une eau profonde?

Chaque fois que le mobile avance sur l'eau, c'est autant de perturbations de la surface qu'il engendre, comme si des cailloux identiques étaient jetés successivement le long de l'axe sur lequel il se déplace. Chacune de ces perturbations engendrent des ondes à des dates (et donc des positions) consécutives. Les ondes les plus anciennes ont voyagé plus longtemps que les ondes les plus récentes (celles qui sont au plus près du mobile), elles ont donc un diamètre plus important, proportionnel au temps: $D(t) = 2ct$. Mais on a vu que les perturbations de la surface de l'eau sont principalement liées non pas aux ondes individuelles mais à leur rassemblement en paquets d'ondes, ceux-ci voyageant à la vitesse $c/2$: au bout d'un temps t les paquets d'onde les plus anciens forment donc des cercles de diamètre $D'(t) = 2(c/2)t = ct$. En définissant le sillage comme l'enveloppe des perturbations correspondant aux zones de maximum d'énergie, la forme en V du sillage, dont la pointe correspond au mobile (bateau ou canard) se déduit de ces propriétés comme nous allons le voir.

5 - Le principe de la phase stationnaire

Une dernière étape avant de déterminer la forme d'un sillage créé par un mobile O' (canard ou navire) à la surface d'une eau profonde nécessite de traduire comment se transforme une onde progressive (telle que celle produite par la perturbation de la surface en chaque point de la trajectoire rectiligne du mobile O') entre le référentiel mobile (R') rattaché au mobile et le référentiel fixe (R) rattaché à la Terre.

(R') se déplace par rapport à (R) à vitesse constante $\vec{V}$: (R) et (R') sont donc deux référentiels galiléens et la transformation des coordonnées d'un point M de la surface de l'eau est tout simplement la transformation de Galilée (les caractères en gras représentent des vecteurs):

$$\vec{OM}_{(R)} = \vec{r}(x,y,t) = \vec{O'M}_{(R')} + \vec{V}t = \vec{r}'(x',y',t) + \vec{V}t$$

où (O, x, y, t) définit le repère (R), et (O', x', y', t) le repère mobile (figure 2).

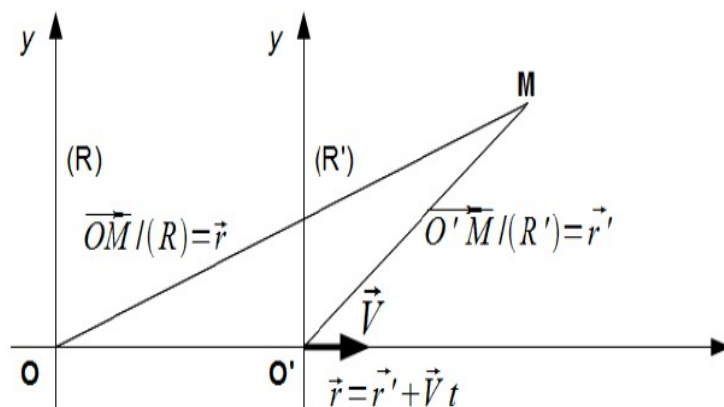


Figure 2: transformation des coordonnées d'un point de la surface libre de l'eau entre deux repères galiléens, l'un fixe (R) l'autre mobile (R') se déplaçant à vitesse uniforme V

Considérons maintenant une déformation de la surface, en un point M , se déplaçant selon une onde progressive:

$$\text{dans } (R): z(M,t) = z(\vec{r}, t) = z_{\text{MAX}} \exp j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

compte tenu de: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$, l'onde progressive s'exprime dans (R'):

$$\text{dans (R') : } z(\mathbf{r}', t) = z_{\text{MAX}} \exp j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}))$$

Dans le référentiel rattaché au mobile O', c'est-à-dire « vu » du bateau ou du canard, l'onde en M oscille avec une pulsation apparente ω' différente de celle observée dans le référentiel fixe (R) (effet Doppler):

$$\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$$

expressions dans lesquelles le vecteur $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde de composantes (k_x , k_y) suivant les axes Ox, Oy.

Introduisons alors le « principe de la phase stationnaire », énoncé pour la première fois par Kelvin en 1885 pour expliquer mathématiquement le phénomène de sillage.

D'après ce principe, qui exprime un sens physique, dans le référentiel du mobile O' les perturbations de la surface produites par l'apport d'énergie de la part du mobile sont stationnaires, c'est-à-dire indépendantes du temps (hypothèse valable uniquement pour un mobile se déplaçant à vitesse uniforme à la surface de l'eau, ce qui est le cas ici). Autrement dit les perturbations de la surface, vues du référentiel lié au mobile, sont entraînées dans son mouvement. Le sillage est l'ensemble des remous, formés par les pics d'énergie qui se propagent à la vitesse de groupe, qui résultent d'une succession incessante de perturbations, comme des jets de cailloux dans l'eau le long de la trajectoire du mobile, depuis le mobile. Du point de vue d'un observateur situé sur le mobile (ou si vous étiez assis sur un canard!) chaque perturbation, à l'instant où elle est créée dans l'eau, reste identique à celle de l'instant immédiatement précédent.

Toutes les ondes ne sont pas compatibles avec cette condition de stationnarité. Celles qui la satisfont contribuent à la formation du sillage. En d'autres termes, les perturbations, et leur propagation ondulatoire depuis la source qu'est le mobile, contribuent au sillage si la déformation, mesurée dans le référentiel (R') lié au mobile, est indépendante du temps (condition d'ondes stationnaires dans (R')). La condition nécessaire et suffisante pour que cela se produise est, d'après l'expression donnant la déformation $z(\mathbf{r}', t)$: $\omega' = 0$ (la pulsation apparente dans (R') est nulle). Elle s'écrit donc:

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$$

Toutes les ondes qui sont contenues dans le sillage vérifient cette condition: le vecteur d'onde $\mathbf{k}$, qui est dans la direction de la propagation du front d'onde (ou plan de phase) a un produit scalaire avec la vitesse du mobile égal à la pulsation.

Si une direction radiale de propagation de l'onde, colinéaire à $\mathbf{k}$, fait un angle B avec la direction de la vitesse du mobile, alors la condition de phase stationnaire s'écrit:

$$\omega = kV \cos B$$

où k est le module (scalaire) de $\mathbf{k}$: $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$.

Or l'onde est dispersive (eau profonde, régime de gravité), V est constante, donc l'angle B dépend aussi de la pulsation ω , puisque:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= \omega/c(\omega) \\ \cos B(\omega) &= c(\omega)/V \end{aligned}$$

Cette relation montre qu'une direction de front d'onde, contribuant au sillage, dépend de la pulsation de cette onde.

La question qui se pose alors maintenant est: que deviennent les positions des fronts d'onde des déformations de la surface d'eau contribuant au sillage lorsque la fréquence (ou ω) prend toutes les valeurs possibles liées aux perturbations apportées par le mobile?

Réponse (voir **figure 3**): soit P la position d'un front d'onde qui s'est déplacé depuis une position initiale I du mobile pendant le temps t (le mobile O' s'est déplacé de la distance Vt et le

front d'onde de ω pendant ce laps de temps t). On vérifie alors immédiatement que l'on a pour tout P :

$$\vec{IP} \cdot \vec{PO'} = 0$$

Autrement dit P , la position des fronts d'onde pour chaque pulsation ω , est située sur un cercle (C) de diamètre $D = Vt$ et de centre C .

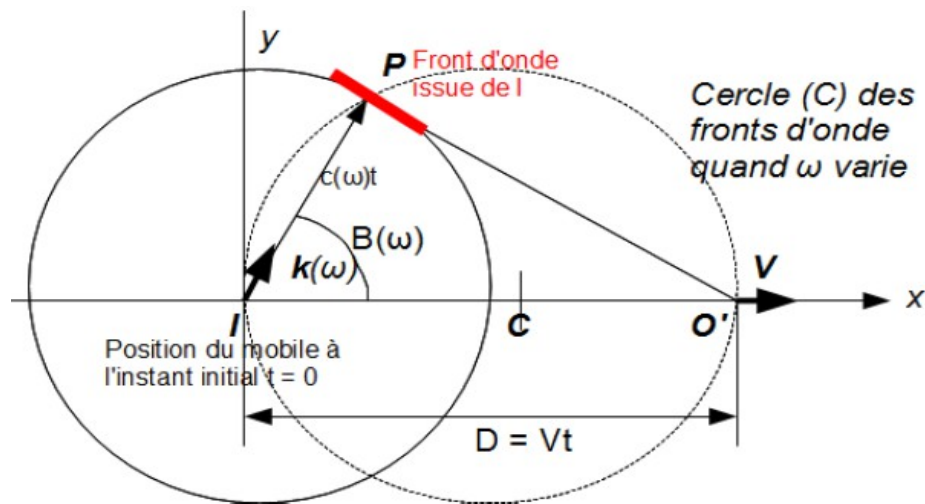


Figure 3: cercle des fronts d'onde correspondant aux ondes de surface contribuant au sillage (condition de la phase stationnaire)

Démonstration:

$$\vec{IP} = ct \vec{k}/k \text{ et } \vec{IO'} = Vt = \vec{IP} + \vec{PO'}$$

donc:

$$\vec{IP} \cdot \vec{IO'} = ct/k \cdot (\vec{k} \cdot \vec{V})t = ct^2 \omega/k = c^2 t^2 = IP^2$$

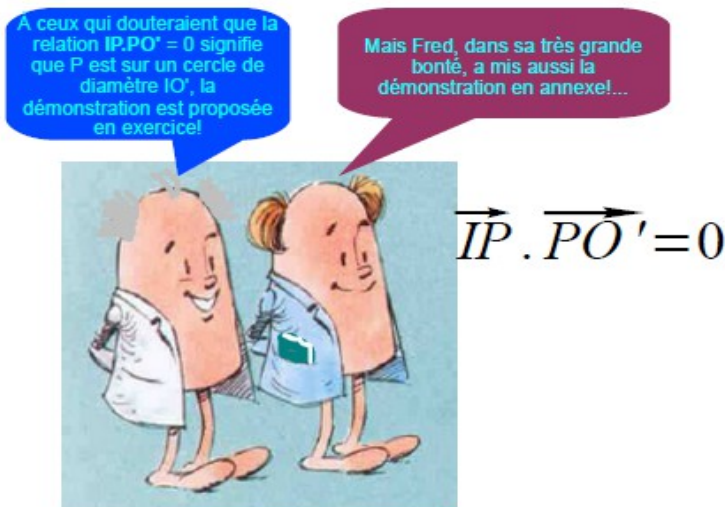
(puisque la vitesse de phase est $c = \omega/k$).

Or on a aussi:

$$\vec{IP} \cdot \vec{IO'} = \vec{IP} \cdot (\vec{IP} + \vec{PO'}) = IP^2 + \vec{IP} \cdot \vec{PO'} = IP^2$$

$$\text{d'où: } \vec{IP} \cdot \vec{PO'} = 0$$

CQFD.



Remarque : le principe de la phase stationnaire est, en fait, sous-tendu par un formalisme mathématique assez développé traitant des phénomènes de sillage quels que soient les types

d'ondes (grand fond, ondes de gravité, petits fonds, ondes capillaires) et les régimes hydrodynamiques (laminaire, turbulent). Nous n'irons pas plus loin dans le formalisme mathématique, renvoyant le lecteur à la bibliographie sommaire pour le formalisme mathématique complet (Noblesse et Barnell, 1987 – Thual, 2004).

En complément de la figure 3, nous représentons à la figure 4 l'exemple de la position à l'instant t de deux fronts d'onde P et P' émis à l'instant $t = 0$, correspondant à deux pulsations ω et ω' , donc se propageant avec des vitesses de phase $c(\omega)$ et $c(\omega')$. Évidemment, le mobile ne produit pas qu'un nombre aussi limité de déformations, mais l'ensemble des déformations qu'il engendre à la surface de l'eau couvre un spectre de fréquences étendu. Celles qui contribuent au sillage ont leurs fronts d'onde qui se repartissent sur le cercle (C) de centre C (milieu de OO') et de rayon $Vt/2$ (O joue le rôle de I).

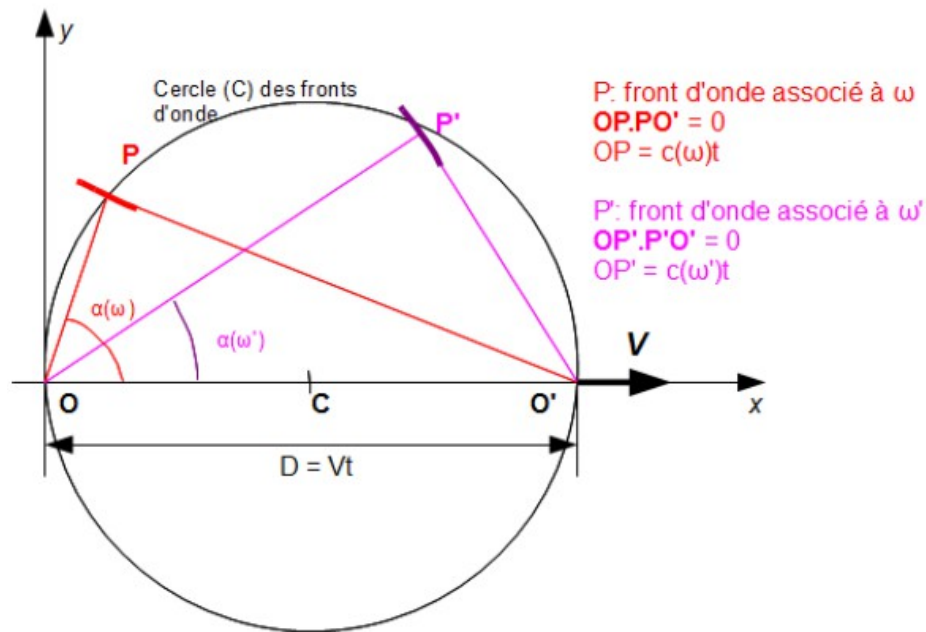


Figure 4: position de deux fronts d'onde contribuant au sillage pour deux fréquences différentes

Mais nous avons vu que les remous sont formés par les zones de maximum d'énergie, donc les pics d'amplitude des paquets d'ondes. Donc dans la formation du sillage, il ne faut pas considérer le cercle des fronts d'onde (C) mais le lieu des points où l'on obtient le maximum d'amplitude des paquets d'ondes compatibles avec la condition de sillage (critère de la phase stationnaire).

Ce n'est donc pas la distance entre le front d'onde P et sa source O qu'il faut considérer :

$$OP = c(\omega)t$$

C'est la distance entre le lieu du pic d'énergie K et sa source O qu'il faut considérer (figure 5):

$$OK = v_G(\omega)t$$

où v_G est la vitesse de groupe calculée plus haut: en eau profonde, régime gravitaire, on a vu que $v_G(\omega) = c(\omega)/2$. Donc le lieu des points de pic d'énergie est donné par $OK = ct/2$. Or on démontre facilement que si l'on a pour les fronts d'onde la condition $OP.PO' = 0$ (ce qui définit le cercle (C)), on a par conséquent :

$$OK.KC = 0$$

pour les lieux K des pics d'énergie. En d'autre terme les pics d'énergie K sont répartis, pour différentes fréquences d'excitation par le mobile, sur un nouveau cercle, de centre C' (milieu de OC) et de rayon $OC' = D/2 = Vt/4$ (figure 5).

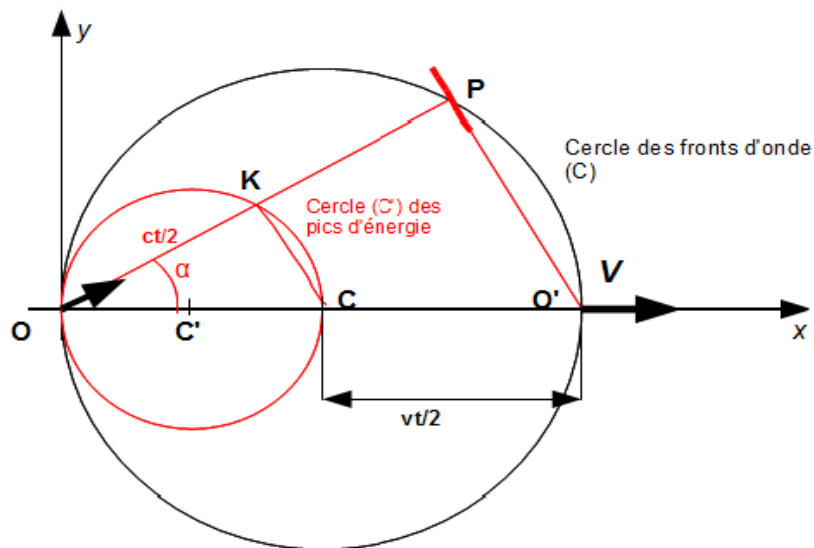


Figure 5: lieu des pics d'énergie par rapport aux positions des fronts d'onde pour une pulsation donnée ω



Démonstration:

On veut vérifier que la condition $\mathbf{OP} \cdot \mathbf{PO}' = 0$ (sur le lieu des fronts d'onde participant au sillage) entraîne la condition $\mathbf{OK} \cdot \mathbf{KC} = 0$ (sur le lieu des pics d'énergie transportés à la vitesse de groupe). Les notations sont celles de la figure 5. On rappelle que l'on a pour les modules:

$$\begin{aligned} OK &= ct/2 = OP/2 \\ OP &= ct \\ KP &= ct/2 \\ OC &= CO' = vt/2 \end{aligned}$$

Décomposons à l'aide des relations de Chasles:

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= \mathbf{OK} + \mathbf{KP} \\ \mathbf{PO}' &= \mathbf{PO} + \mathbf{OC} + \mathbf{CO}' \end{aligned}$$

La condition $\mathbf{OP} \cdot \mathbf{PO}' = 0$ se réécrit donc:

$$(\mathbf{OK} + \mathbf{KP}) \cdot (\mathbf{PO} + \mathbf{OC} + \mathbf{CO}') = 0$$

En développant cette expression:

$$\mathbf{OP.PO'} = \mathbf{OK.PO} + \mathbf{OK.OC} + \mathbf{OK.CO'} + \mathbf{KP.PO} + \mathbf{KP.OC} + \mathbf{KP.CO'} = 0$$

or pour chaque terme les produits scalaires sont:

$$\mathbf{OK.PO} = -c^2t^2/2$$

$$\mathbf{OK.OC} = \mathbf{OK.(OK + KC)} = c^2t^2/2 + \mathbf{OK.KC}$$

$$\mathbf{OK.CO'} = (ct/2)(Vt/2) \cos\alpha$$

$$\mathbf{KP.PO} = -c^2t^2/2$$

$$\mathbf{KP.OC} = (ct/2)(Vt/2) \cos\alpha$$

$$\mathbf{KP.CO'} = (ct/2)(Vt/2) \cos\alpha$$

On déduit donc la valeur du produit scalaire $\mathbf{OK.KC}$:

$$\mathbf{OK.KC} = (3/4)c^2t^2 - (3/4)cVt^2\cos\alpha = (3/4)ct^2(c - v \cos\alpha)$$

Mais la condition de la phase stationnaire est: $\cos\alpha = c/V$, ce qui entraîne $\mathbf{OK.KC} = 0$.

Conclusion: le lieu des points K de maximum d'énergie, vérifiant $\mathbf{OK.KC} = 0$, est un cercle (C') de centre C' et de rayon $KC' = R = OC/2 = D/2 = Vt/4$.
CQFD.

Le sillage est délimité par la frontière du cône de sommet O', à l'intérieur duquel les remous correspondent au maximum d'énergie (paquets d'ondes). Cette frontière est l'enveloppe des cercles (C') de maximum d'énergie pour chaque pulsation ω (figure 6).

En désignant par A le demi-angle au sommet du cône de sillage (en O'), on a donc:

$$C'O' \sin A = C'K$$

Or on a vu par ailleurs que:

$$C'O' = (3/4) Vt$$

ce qui donne:

$$\sin A = C'K/C'O' = C'K/(3/4.Vt)$$

Or on voit que:

$$C'K = C'C$$

avec: $C'C = D/2 = Vt/4$

Il vient donc finalement pour le demi-angle A au sommet du cône de sillage:

$$\sin A = CK/(3/4.Vt) = (Vt/4)/(3/4.Vt) = 1/3$$

dont la solution est: $A = 19,5^\circ$.

L'ouverture du cône de sillage en eau profonde, régime gravitaire, prend donc la valeur « magique » (universelle): $2A = 39^\circ$

On remarquera que la grandeur $OK = ct/2$ n'entre pas en ligne de compte dans cette relation, donc que le sillage a un angle au sommet du V indépendant de la vitesse de phase des ondes.

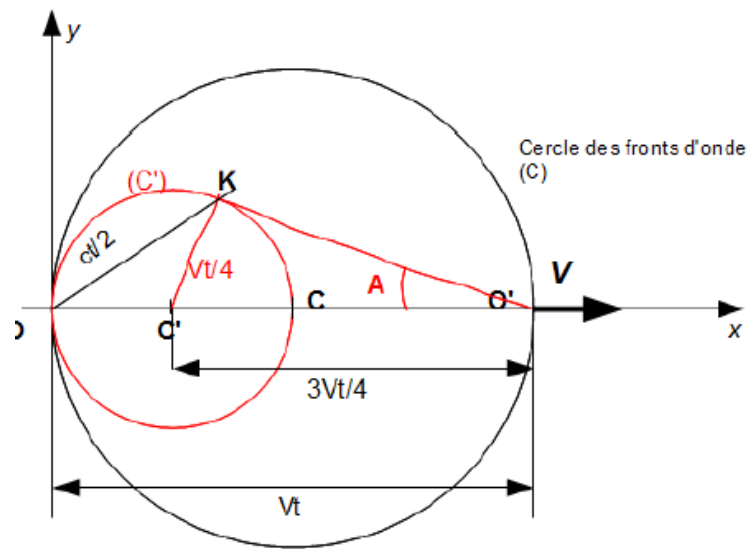


Figure 6: angle d'ouverture du cône de sillage



Oies sur les quais au bord de la Vltava, à Prague
(photo: F. Élie, novembre 2010)

