



Frédéric Elie on  
ResearchGate

## **Sphère en suspension dans un jet d'air vertical : une occasion de parcourir quelques effets et théorèmes en mécanique des fluides**

Frédéric Elie  
mai 2014

CopyrightFrance.com

**La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.**

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

**Abstract :** Une petite balle légère abandonnée au-dessus d'une buse soufflant un jet d'air vertical se met à tourner sur elle-même, à osciller suivant l'horizontale, et à parcourir une trajectoire qui s'apparente à une spirale.

Que de phénomènes hydrodynamiques sont responsables de telles réactions!

Selon que la viscosité soit négligeable ou non, nous verrons des théories différentes pour modéliser ces réactions, et nous verrons que pour un fluide parfait (non visqueux) les notions introduites sont déjà très riches sur l'aspect mathématique.

Nous verrons aussi que la géométrie du corps placé dans l'écoulement induit un traitement du problème spécifique: ainsi on parle de force de Magnus pour la déviation d'un profil cylindrique (un poteau, une aile d'avion,... d'extension supposée infinie) qui survient déjà pour un fluide parfait, tandis que pour une sphère, comme c'est le thème du titre de l'article, la déviation de l'objet est produite par l'effet Robins dont l'existence est possible seulement en présence de viscosité.

Quant aux effets d'oscillations du solide, pour les profils cylindriques il s'agit des tourbillons de Karman émis avec une certaine fréquence liée au nombre de Strouhal; tandis que pour un objet sphérique, en tous cas, plus généralement, relevant d'une topologie simplement connexe, ce n'est plus le cas: les oscillations sont directement reliées aux effets de sillage donc de viscosité.

Nous avons cherché, dans cet article, à montrer la différence d'analyse entre le cas d'un solide sphérique et celui d'un profil cylindrique placés dans un écoulement, qu'il soit ou non visqueux.

Et cela nous a conduit à présenter des notions d'hydrodynamique, dont l'éventail est déjà large et varié pour des régimes d'écoulement laminaires (donc configuration simple), et dont les outils mathématiques, certes un peu élaborés, seront rappelés au fur et à mesure des besoins dans l'exposé ou dans les nombreuses annexes.

De sorte que l'on s'apercevra que, dans le thème d'article présenté ici, on parcourra peu à peu un vaste domaine de l'hydrodynamique classique.

### SOMMAIRE

1 – Régimes d'écoulement derrière une sphère soumise à un jet d'air, et introduction du nombre de Strouhal

2 – Écoulement autour d'un obstacle en rotation: paradoxe de D'Alembert, effet Magnus (profil cylindrique), effet Robins (sphère)

2.1 – Écoulement d'un fluide parfait sans circulation (cas d'un obstacle 3D de dimensions finies): paradoxe de D'Alembert

2.2 - Écoulement d'un fluide parfait incompressible (écoulement à potentiel) avec circulation autour d'un obstacle (cas d'un obstacle 2D d'extension infinie): effet Magnus

2.3 - Sphère soumise à l'écoulement de fluide visqueux (effet Robins)

3 - Effets conjugués des tourbillons de Karman et de la force de Robins-Magnus sur une sphère soumise à un jet d'air vertical orienté de bas en haut

Annexe 1 - Tourbillons de Karman en aval d'un obstacle soumis à un écoulement amont stationnaire, nombre de Strouhal

A1.1 - Fluide parfait incompressible: fonction de courant

A1.2 - Potentiel complexe (écoulement bidimensionnel)

A1.3 - Exemples de potentiels complexes

A1.3.1 - Écoulement plan uniforme

A1.3.2 - Écoulement tourbillonnaire

A1.3.3 - Source et puits

A1.3.4 - Écoulement créé par un dipôle

A1.4 - Allées de tourbillons et tourbillons de Karman

Annexe 2 - Force exercée par un écoulement de fluide parfait sur une sphère rigide: paradoxe de D'Alembert

A2.1 - Écoulements irrotationnels et conditions pour qu'ils le soient

A2.2 - Circulation pour un écoulement irrotationnel, théorème de Lagrange

A2.3 - Force exercée par un écoulement de fluide parfait irrotationnel, stationnaire et incompressible sur une sphère rigide: paradoxe de D'Alembert

Annexe 3 - Force de Magnus créée sur un profil cylindrique par l'écoulement d'un fluide parfait

Annexe 4 - Force de Robins-Magnus créée sur une sphère rigide en rotation uniforme, par l'écoulement d'un fluide visqueux

A4.1 - Généralités

A4.2 - Coefficient de traînée et coefficient de portance

A4.3 - Équations du mouvement approchées de la sphère

Annexe 5 - Démonstration (heuristique) du théorème de Stokes

Références



## 1 - Régimes d'écoulement derrière une sphère soumise à un jet d'air, et introduction du nombre de Strouhal

Une sphère, initialement fixe, de diamètre  $D$ , est placée dans un écoulement de direction verticale  $Oz$ , de vitesse caractéristique  $U$ .

Le fluide est de l'air, de viscosité cinématique  $\nu = 1,43 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  et de masse volumique  $\rho = 1,29 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

L'analyse dimensionnelle en hydrodynamique conduit à introduire, pour les fluides visqueux, le nombre de Reynolds  $Re$ , sans dimension, qui évalue l'importance relative des effets d'inertie  $\rho U D$  aux effets

de viscosité  $\mu = \rho \nu$  :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} \quad (1)$$

Selon les valeurs de  $Re$ , différents régimes d'écoulement apparaissent en arrière de l'obstacle (ici; la sphère):

- Pour de faibles nombres de Reynolds,  $Re < 1$ , c'est-à-dire pour de faibles vitesses d'écoulement, l'écoulement est laminaire et symétrique entre l'amont et l'aval de l'obstacle: les lignes de courant qui s'écartent lorsqu'on s'approche de la sphère par l'amont, se rejoignent en aval lorsqu'on s'en éloigne.
- Pour des  $Re$  compris entre quelques unités et quelques dizaines ( $1 < Re < 40$ ) les effets de couche-limite deviennent importants et se traduisent par l'apparition d'une zone de recirculation en aval de l'obstacle.  
Cette zone est constituée de deux tourbillons symétriques, fixes, et contrarotatifs juste derrière l'obstacle. Ils résultent du décollement de la couche-limite sur l'arrière de la paroi de l'obstacle. On montre que la longueur de la zone de recirculation est proportionnelle à  $Re$ .
- A partir d'une valeur critique de  $Re$ ,  $Re_c$ , qui vaut environ 47, l'écoulement en aval de l'obstacle devient instationnaire.  
Des tourbillons apparaissent alternativement à l'arrière de l'obstacle, sur une face, puis sur l'autre face opposée, formant ainsi une double rangée de tourbillons qui s'éloignent vers l'aval avec un décalage temporel régulier, tout en grandissant avec l'éloignement. C'est le phénomène des « **allées tourbillonnaires de von Karman** », responsable, par exemple, du bruit émis par des obstacles effilés et symétriques soumis à un écoulement aérien (fils, câbles, piliers...) et aussi sphériques.  
Le phénomène apparaît lorsque les effets instationnaires, caractérisés par une fréquence  $f$ , deviennent comparables aux effets convectifs, c'est-à-dire le transfert des tourbillons par l'écoulement à la vitesse  $U$ . L'analyse dimensionnelle (mais aussi des calculs plus détaillés présentés en **Annexe 1**, pour un fluide parfait), conduisent à introduire le **nombre de Strouhal**  $Sr$  qui évalue l'importance relative de ces deux effets:

$$Sr = \frac{f D}{U} \quad (2)$$

On montre que  $Sr$  est pratiquement constant et de l'ordre de 1:  $Sr \approx 1$ , de sorte que la fréquence des allées de Karman  $f$  est proportionnelle à la vitesse d'écoulement  $U$  et inversement proportionnelle à la taille de l'obstacle  $D$  (les structures émettent un son d'autant plus aigu que l'écoulement est rapide et qu'elles sont petites).

- Pour de grands nombres de Reynolds ( $Re > 1000$ ), le sillage en aval de l'obstacle est pleinement turbulent.

On se limitera ici au cas des  $Re$  correspondant à un écoulement instationnaire en aval de la sphère, tel qu'observé pour une petite bille en plastique placée au-dessus du jet émis par une soufflette ( $Re \sim 200$ ).

## 2 – Écoulement autour d'un obstacle en rotation: paradoxe de D'Alembert, effet Magnus (profil cylindrique), effet Robins (sphère)

Nous allons voir que, selon la géométrie de l'écoulement amont (tri ou bidimensionnel) et la nature du fluide (parfait ou bien visqueux) autour d'un obstacle fixe ou bien en rotation sur lui-même, des forces interviennent ou non sur celui-ci.

### 2.1 – Écoulement d'un fluide parfait sans circulation (cas d'un obstacle 3D de dimensions finies): paradoxe de D'Alembert

Énoncé du **paradoxe de D'Alembert**:

L'écoulement stationnaire et potentiel d'un fluide parfait (non visqueux) incompressible autour d'un obstacle supposé sans circulation <sup>1</sup> (volume du fluide simplement connexe) n'exerce aucune force sur l'obstacle.

En **Annexe 2**, on explique ce que signifient les expressions « écoulement potentiel », « sans circulation » et « volume simplement connexe », et on montre que la force exercée sur l'obstacle par un tel écoulement est donnée par:

$$\vec{F} = -\frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{dU}{dt} \vec{e}_z \quad (3)$$

où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire porté par l'axe de l'écoulement,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $R$  le rayon de la sphère (dans le cas où l'obstacle est une sphère),  $U$  la vitesse d'écoulement potentiel (éventuellement dépendante du temps si l'écoulement est instationnaire ou si, ce qui revient au même, l'obstacle est accéléré dans le fluide).

**Remarques:**

2.1.1 - Dans (3) la quantité  $\frac{2\pi}{3} \rho R^3$  équivaut à une masse, appelée masse ajoutée: si l'on exerce une force sur la sphère, celle-ci réagit comme si sa masse était augmentée de cette quantité (qui est la moitié de la masse du fluide déplacé).

2.1.2 – (3) montre que si  $U$  est constante (écoulement stationnaire) alors la force est nulle  $F = 0$ . Cette conclusion est paradoxale (paradoxe de D'Alembert) car, dans le cas d'un fluide non visqueux en écoulement stationnaire, le corps ne serait soumis qu'à son seul poids et à la poussée d'Archimède, ce qui est contradictoire avec toutes les observations: tout solide placé dans un écoulement, stationnaire ou non, est entraîné par l'écoulement lorsqu'on le laisse libre.

Le paradoxe est levé si l'on considère que l'écoulement présente une circulation le long de l'obstacle, ce qui arrive quand l'écoulement est à 2 dimensions et/ou lorsque les effets de viscosité interviennent en géométrie quelconque.

**2.2 - Écoulement d'un fluide parfait incompressible (écoulement à potentiel) avec circulation autour d'un obstacle (cas d'un obstacle 2D d'extension infinie): effet Magnus**

Nous avons vu dans un autre article du site <sup>2</sup> une démonstration de l'effet Magnus pour le cas d'un profil infini de section constante (profil cylindrique), en tous cas modélisé comme tel.

Si l'on note  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$  est le vecteur circulation, porté par l'axe  $\vec{e}_y$  perpendiculaire à l'axe  $\vec{e}_z$  de l'écoulement sur l'obstacle, on a vu que la force exercée par l'écoulement sur l'obstacle (**force de Magnus**) est, par unité de longueur:

$$\vec{F}_M = -\rho \vec{\Gamma} \wedge \vec{U} \quad (4)$$

avec  $\vec{U} = U \vec{e}_z$ . Cette force est donc dirigée suivant l'axe  $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$  perpendiculaire à  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ :  $\vec{F}_M = F_M \vec{e}_x$ : la force de Magnus tend donc à déplacer le solide suivant la direction verticale  $\vec{e}_x$  (figure 1).

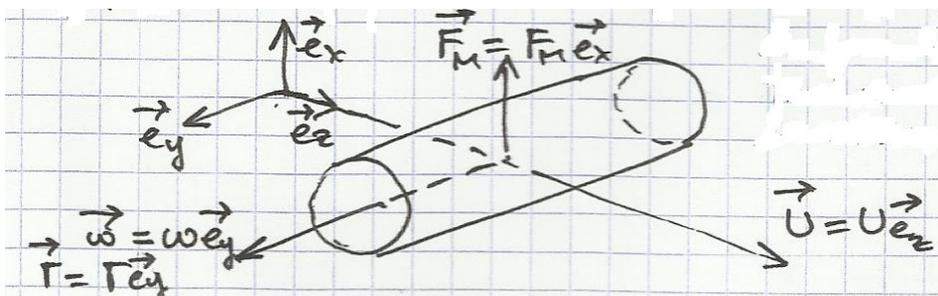


figure 1 – force de Magnus (par unité de longueur) sur un profil cylindrique infini

1 On se contentera pour le moment de comprendre que « sans circulation » signifie que l'obstacle ne tourne pas sur lui-même (et, par ailleurs, il n'a pas d'accélération propre)

2 Frédéric Élie: *Propulsion d'un navire par Turbovoile et contrôle de la couche limite* – site <http://fred.elie.free.fr>, juillet 2010

Supposons le cylindre animé d'une rotation, de vitesse angulaire  $\omega$ , autour de l'axe  $\vec{e}_y$  : c'est la présence de cette rotation qui est responsable de l'existence de la circulation  $\vec{\Gamma}$ , comme on va le voir. Du fait de cette rotation, une couche fluide près de la paroi du cylindre est entraînée localement avec une vitesse relative, par rapport à l'écoulement amont, égale à:  $v_+ = U + R\omega$  ou bien  $v_- = U - R\omega$  selon que l'on est respectivement sur l'extrados « + » ou sur l'intrados « - ».

Employons le théorème de Bernoulli entre un point voisin de l'extrados et un point voisin de l'intrados, et appartenant à la même ligne de courant:

$$\frac{1}{2} \rho U + P = \frac{1}{2} \rho v_+^2 + P_+ = \frac{1}{2} \rho v_-^2 + P_-$$

où P est la pression dans l'écoulement libre. D'où:  $P_+ - P_- = \frac{1}{2} \rho (v_-^2 - v_+^2)$  et en remplaçant les vitesses à l'extrados et à l'intrados par leurs expressions ci-dessus, il vient:  $P_+ - P_- = -\rho U R \omega$ , d'où la force par unité de longueur due à la différence de pressions entre l'extrados et l'intrados:

$$F_M = -(P_+ - P_-)S/L = -2\pi R(P_+ - P_-) = 2\pi R(\rho U R \omega)$$

soit:

$$F_M = \rho 2\pi R^2 \omega U \quad (4 \text{ bis})$$

On en déduit la circulation  $\Gamma$ :  $F_M = \rho \Gamma U \rightarrow \Gamma = 2\pi R^2 \omega$

L'annexe 3 donne une démonstration de (4) ainsi qu'une expression explicite de la circulation  $\vec{\Gamma}$  lorsque le profil cylindrique est en rotation autour de l'axe  $\vec{e}_y$ , que l'on obtient aussi par (4bis):

$$\vec{\Gamma} = 2\pi R \omega \vec{e}_y \quad (5)$$

où  $\omega$  est le module de la vitesse angulaire de rotation.

Suivant le sens de la circulation, lié au sens de rotation de l'obstacle,  $\omega < 0$  ou  $\omega > 0$ , et à la forme de l'obstacle, la force de Magnus est dirigée soit vers le haut ( $F_{Mx} > 0$ ) soit vers le bas ( $F_{Mx} < 0$ )<sup>3</sup>.

C'est cette force qui est exploitée, par exemple, dans le cas du profil cylindrique, pour créer une portance qui permet la propulsion d'un navire par « turbovoile® » (La Calypso, voir article: *Frédéric Élie: Propulsion d'un navire par Turbovoile et contrôle de la couche limite – site <http://fred.elie.free.fr>, juillet 2010*).

La viscosité n'intervient pas explicitement dans l'expression de la force de Magnus, ni dans les équations du mouvement du solide, puisque, par hypothèse, le fluide a été supposé parfait, et que l'on se place dans un plan de l'écoulement perpendiculaire au profil cylindrique: on dit que l'on est dans une topologie doublement connexe, cf. Annexe 3.

Par contre la viscosité influence la valeur de  $\omega$  par les effets de force de frottement qu'elle induit sur le solide.

### 2.3 – Sphère soumise à l'écoulement d'un fluide visqueux (effet Robins)

On a vu que, dans un écoulement stationnaire de fluide parfait, en configuration 3D, comme c'est le cas pour un obstacle sphérique, aucune force n'est exercée par l'écoulement sur lui (paradoxe de D'Alembert). Ceci ne correspond pas à la réalité physique observée: le solide est toujours soumis à des forces de frottement générées par les effets de viscosité, et de plus, il peut être animé de mouvements propres qui sont responsables de l'apparition d'une force qui tend à le dévier: la force de Magnus pour un profil dont l'extension perpendiculaire à l'écoulement est infinie, ou la force de Robins lorsque le solide a ses trois dimensions finies, tel une sphère.

Dans le cas qui nous intéresse ici, la sphère, une rotation initiale de la boule entraîne, par effets de

<sup>3</sup> Les expressions « vers le haut » et « vers le bas » sont à prendre au sens où la force de Magnus s'exerce dans le sens intrados → extrados ou extrados → intrados, donc par rapport au sens de l'écoulement et de l'orientation de l'obstacle; l'écoulement peut avoir une direction horizontale, verticale ou suivant un axe d'inclinaisons quelconques.

frottement (viscosité et état de surface) l'air qui est au voisinage immédiat de sa surface. La vitesse d'écoulement  $U$  s'ajoute vectoriellement à la vitesse de tout point de la surface de la boule en rotation. En particulier, si la sphère est en rotation, de vitesse angulaire  $\omega$ , autour d'un axe horizontal  $\vec{e}_Y$ , perpendiculaire à l'axe horizontal  $\vec{e}_Z$  de l'écoulement, la vitesse de l'air au-dessus (extrados) s'ajoute scalairement à celle due à la rotation:

$$v_+ = U + R\omega$$

et se retranche scalairement au-dessous (intrados):

$$v_- = U - R\omega$$

Cette différence de vitesse entraîne une surpression à l'intrados et une dépression à l'extrados,  $P_+ - P_-$ , responsable d'une force de portance qui tend à faire élever la sphère (lorsque le sens de rotation est le même que celui de l'écoulement, à faire descendre la sphère dans le cas contraire): c'est l'**effet Robins** (ou Robins-Magnus) pour la sphère. Cet effet est responsable de la déviation des trajectoires des balles brossées, comme en football, golf, tennis, ping-pong, volley-ball...

On montre en annexe 4 que la force de Robins induit un effet de **portance** et qu'elle a pour expression:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L A V^2 \quad (6)$$

( $\rho$  masse volumique du fluide,  $A$  surface du maître-couple de la sphère donc  $A = \pi R^2$ ,  $V$  vitesse de l'écoulement).  $C_L$  est un coefficient de portance qui dépend du paramètre de rotation (« **spin parameter** »)  $S = R\omega/U$  (où  $\omega$  vitesse angulaire propre de la sphère):

$$C_L = \frac{1}{2 + \frac{1}{S}} \quad (7)$$

Les effets de viscosité induisent aussi une force de **traînée**  $F_D$ , responsable du sillage, ayant pour effet de freiner le corps dans le fluide.

Pour une sphère en rotation, on montre en annexe 4 qu'elle dépend aussi du « spin parameter » par l'intermédiaire de son coefficient de traînée  $C_D$ :

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A V^2 \quad (8)$$

$$C_D(S) = C_0 + \frac{1}{\left[ A_0 + \left( \frac{B_0}{S} \right)^{5/2} \right]^{2/5}} \quad (9)$$

où  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  sont des constantes empiriques.

L'effet conjugué de ces deux forces sur une sphère en rotation placée dans un écoulement uniforme et stationnaire est d'induire une déviation de sa trajectoire, celle-ci pouvant prendre l'allure d'une spirale qui s'enroule. Les équations de la trajectoire sont calculées en annexe 4 pour une sphère se mouvant dans un jet d'air vertical, de bas en haut, ce qui est la configuration de la petite expérience objet du thème de l'article.

### 3 – Effets conjugués des tourbillons de Karman et de la force de Robins-Magnus sur une sphère soumise à un jet d'air vertical orienté de bas en haut

Bien que l'on ait affaire à un obstacle sphérique (donc écoulement 3D) les effets de viscosité entraînent encore l'apparition d'émissions alternées de tourbillons à l'aval de l'obstacle, du type des allées tourbillonnaires de Karman: le nombre de Strouhal  $Sr = fD/U$  est encore une constante.

Ces émissions, par réaction, créent chaque fois une impulsion mécanique alternée sur la sphère qui oscille alors latéralement avec la même fréquence  $f$  de lâcher des tourbillons.

Mais par frottement, ces déplacements introduisent un couple qui tend à faire tourner la sphère sur elle-même, et le « spin parameter »  $S = R\omega/U$  intervient.

La force devient alors soumise aux forces de Robins et de traînée,  $F_L$  et  $F_D$ , la première tend à la dévier, la seconde tend à la freiner dans le sens de l'écoulement.

On obtient alors le comportement compliqué que l'on observe, où prédominent les effets d'alternance des allées tourbillonnaires (à la Karman). Leur fréquence, aisément mesurable en vidéo, renseigne directement sur la valeur de  $U$ , connaissant par ailleurs le diamètre  $D$ . Le résultat donne un bon ordre de grandeur de la vitesse d'écoulement du jet d'air, comme on pourra le constater par cette expérience que vous pouvez facilement réaliser, mais dont les faits d'observation reçoivent une explication théorique mathématiquement étoffée, comme on l'a présenté dans le texte, et détaillé dans les différentes annexes.

[cliquer ici pour voir la vidéo](#)

*observations: diamètre de la balle 5 cm dans le jet vertical d'un sèche-cheveux; on voit la balle osciller longitudinalement avec une période d'environ 1 seconde, sous l'effet des tourbillons de Karman, et tourner sur elle-même (effet du spin parameter S)*

## ANNEXE 1 – Tourbillons de Karman en aval d'un obstacle soumis à un écoulement amont stationnaire, nombre de Strouhal

La démonstration de la relation (2) nécessite d'abord quelques définitions et résultats préliminaires.

Les tourbillons de Karman, développés sur un profil cylindrique infini, par l'écoulement laminaire d'un fluide parfait (non visqueux) et incompressible, sont un exemple de création de lignes de tourbillons suite à l'existence d'une vorticité  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$ . Ce qui suit ne s'applique donc pas aux écoulements irrotationnels.

Pour un écoulement dans un espace simplement connexe, autour d'une sphère par exemple, l'écoulement est assurément irrotationnel, d'après le théorème de Lagrange (A2.6).

Pour un écoulement 2D autour d'un profil infini (espace doublement connexe) en revanche, on peut avoir affaire à des écoulements pouvant être rotationnels ou irrotationnels (Annexe 2), mais dans tous les cas la circulation de la vitesse de l'écoulement autour du profil de l'obstacle n'est pas nul (théorème A2.7).

### A1.1 – Fluide parfait incompressible: fonction de courant

Pour un fluide parfait incompressible, la conservation de la masse est traduite par l'équation de continuité:

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

où  $\vec{V}(M)$  est le champ de vitesse en tout point  $M$  de l'espace. Or si  $\vec{A}$  est un vecteur, on a toujours l'identité:  $\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$ . Cela suggère de définir un potentiel vecteur  $\vec{A}$  des vitesses tel que:

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{A} \quad (\text{A1.2})$$

$\vec{A}$  est la fonction vectorielle de courant. C'est un vecteur qui se réduit à un scalaire  $\psi$  lorsque l'écoulement est 2D:

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

ce qui donne, par identification:  $V_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$  et  $V_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$ . Posant  $\psi = A_z$  on a donc:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A1.3})$$

$\psi$  est appelée **fonction de courant** (scalaire) et (A1.1) est bien vérifié.

Remarquons que:  $V_x V_y - V_y V_x = 0$  (trivial !) et en utilisant (A1.3) l'identité précédente se réécrit:

$$-V_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ soit:}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad (\text{A1.4})$$

Or les lignes d'écoulement où  $\psi = \text{constante}$  (**lignes de courant**) vérifient:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{M} = 0$$

donc pour ces lignes,  $\vec{\nabla} \psi$  est perpendiculaire aux tangentes  $d\vec{M}$  donc au champ de vitesse  $\vec{V}(M)$  d'après (A1.4): figure A1.1

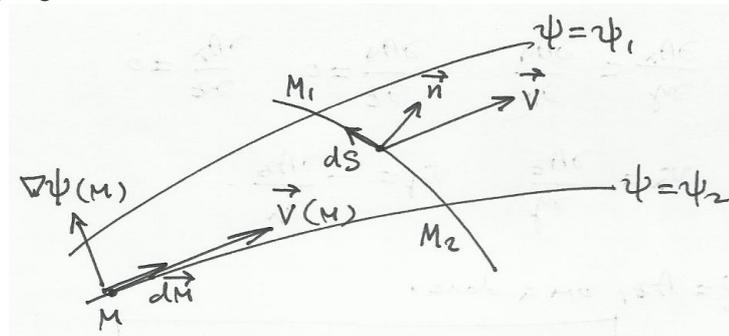


figure A1.1 – lignes de courant:  $\vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{M} = 0$

### Remarque: interprétation physique de la fonction de courant (A1.1):

Relation entre le débit volumique et la fonction de courant:  $\psi$  est directement relié au débit volumique  $Q$  à travers la surface linéique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  où les fonctions de courant sont respectivement  $\psi_1$  et  $\psi_2$ :

$$Q = \psi_2 - \psi_1 \quad (\text{A1.5})$$

PREUVE – A travers la surface linéique  $dS$  dont la normale en un point  $M$  est  $\vec{n}(M)$  le débit est donné par:

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} \vec{V}(M) \cdot \vec{n} dS$$

Si la tangente en  $M$  à la surface linéique  $dS$  est  $d\vec{M} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$  alors sa normale vérifie:

$$\vec{n} dS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\vec{M} = dy \vec{e}_x - dx \vec{e}_y \text{ et avec } \vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y \text{ le débit s'écrit:}$$

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} (V_x dy - V_y dx)$$

d'après (A1.3):

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_{M_1}^{M_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad - \text{CQFD}$$

### A1.2 – Potentiel complexe (écoulement bidimensionnel)

Pour un écoulement irrotationnel ( $\text{rot } \vec{V} = 0$ ) la vitesse dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$  ( $\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi$ ) et si le fluide est incompressible, elle dérive d'une fonction de courant vectorielle  $\vec{A}$  ( $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$ ). pour un fluide incompressible, l'équation de continuité  $\text{div } \vec{V} = 0$  se traduit par l'équation de Laplace sur  $\Phi$ :  $\nabla^2 \Phi = 0$ .

Considérons un écoulement 2D (tel que celui autour d'un profil cylindrique infini, définissant la topologie

d'un espace doublement connexe – cf. annexe 2). On a donc:

$$\vec{A} = \psi \vec{e}_z$$

où  $\psi$  est la fonction de courant, et:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi \rightarrow V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, V_z = 0$$

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{A} \rightarrow V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, V_z = 0$$

ce qui conduit à:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A1.6})$$

Comme  $\text{div } \vec{V} = 0$  et  $\text{rot } \vec{V} = 0$  les fonctions potentiel et de courant sont toutes deux solutions des équations de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{A1.7})$$

Cela amène, dans le plan complexe  $Z = x + jy$  (4), à introduire une fonction potentiel complexe  $F(Z)$  définie par:

$$F(Z) = \Phi(x, y) + j\psi(x, y) \quad (\text{A1.8})$$

La dérivée de  $F$  par rapport à  $Z$  est:

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dZ} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{dx}{dZ}$$

(NB: ça reviendrait au même d'écrire  $dF/dZ = dF/dy \cdot dy/dZ$ ), comme  $\frac{dx}{dZ} = 1$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_x$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y$  on obtient:

$$\frac{dF}{dZ} = V_x - jV_y \quad (\text{A1.9})$$

Compte tenu de (A1.9) et de  $dZ = dx + jdy$ , la circulation de  $F(Z)$  sur un contour fermé (C) s'écrit:

$$\tilde{\Gamma}(Z) = \oint_{(C)} dF(Z) = \oint_{(C)} \frac{dF(Z)}{dZ} dZ = \oint_{(C)} (V_x - jV_y)(dx + jdy)$$

$$\tilde{\Gamma}(Z) = \oint_{(C)} (V_x dx + V_y dy) + j \oint_{(C)} (V_x dy - V_y dx)$$

Le premier terme est la **circulation de la vitesse** autour du contour fermé (C):

$$\Gamma(Z) = \oint_{(C)} (V_x dx + V_y dy) = \oint_{(C)} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} \quad (\text{A1.10})$$

où  $\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$  et  $d\vec{M} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$  (noter que dans (A1.10) la circulation est notée  $\Gamma$  mais sans le Tilde « ~ »).

Le second terme s'interprète par comparaison avec la remarque (A1.1): on reconnaît le **débit volumique** de l'écoulement à travers la surface linéique délimitée par la courbe fermée (C) dont les sources sont contenues dans le domaine délimité par (C):

$$Q = \oint_{(C)} (V_x dy - V_y dx) = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A1.11})$$

4 attention:  $Z = x + jy$  n'a rien à voir avec la variable « z » (en minuscules) qui désigne l'un des axes du repère Oxyz de l'écoulement et de l'obstacle.

Finalement la circulation de la fonction potentiel complexe est:

$$\tilde{\Gamma}(Z) = \oint_{(C)} dF(Z) = \Gamma(Z) + jQ(Z) \quad (A1.12)$$

La circulation du potentiel complexe des vitesses le long d'une courbe fermée (C), pour un écoulement 2D, a pour composantes la circulation des vitesses et le débit volumique produit par les sources contenues à l'intérieur de ce contour.

En annexe 2 on verra que, pour une configuration d'écoulement correspondant à un écoulement simplement connexe, on a  $\Gamma = 0$ , et en l'absence de source de débit, on a  $Q = 0$ , de sorte que  $\tilde{\Gamma} = 0$  : il s'ensuit que, dans ce cas, le potentiel complexe  $F(z)$  est complètement défini sur le contour.

### A1.3 – Exemples de potentiels complexes

#### A1.3.1 – Écoulement plan uniforme

$$F(Z) = Uz \rightarrow dF/dZ = V_x - jV_y = U = U_x + jU_y$$

Il suffit d'identifier:  $U_x = V_x$  et  $U_y = -V_y$

#### A1.3.2 – Écoulement tourbillonnaire

Un écoulement plan tourbillonnaire est, par définition, un écoulement qui s'effectue autour d'un axe Oz perpendiculaire au plan Oxy. Dans un tel écoulement, seule la composante tangentielle de  $\vec{V}$  est non nulle. En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  (figure A1.2), on a donc:

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad V_r = 0$$

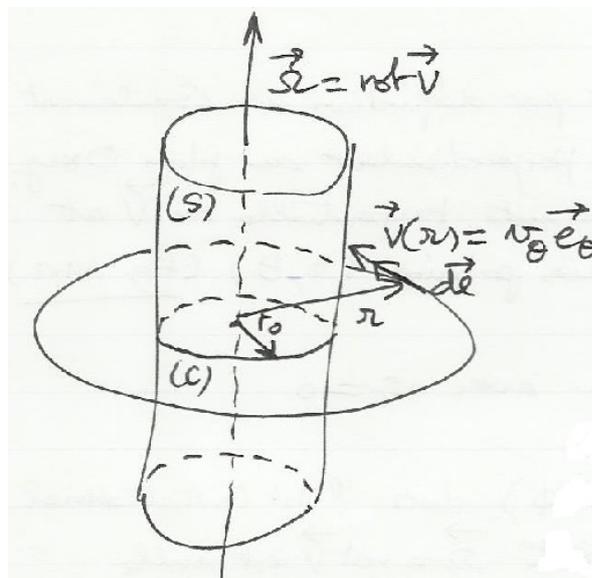


figure A1.2

Si l'écoulement est potentiel ( $\vec{V} = \nabla \phi$ ) alors il est irrotationnel ( $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$ ), autrement dit sa vorticité  $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  est nulle. Compte tenu du fait que seule la composante tangentielle  $V_\theta$  est non nulle, la nullité du rotationnel en coordonnées polaires conduit à:

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = 0 \quad (A1.13)$$

Dans le cas contraire, si la composante radiale de la vitesse  $V_r$  était non nulle, alors l'écoulement ne

pourrait pas être potentiel. La condition (A1.13) montre que  $rV_\theta$  ne dépend pas de  $r$ , et donc que  $rV_\theta =$  constante, c'est-à-dire:

$$V_\theta = \frac{C}{r}$$

Un écoulement plan tourbillonnaire est donc potentiel si son champ de vitesse a pour lignes de courant des cercles et si seule sa composante tangentielle  $V_\theta$  est non nulle et décroît en  $1/r$  depuis le centre tourbillonnaire.

Reste à déterminer la constante  $C$ .

Pour cela on calcule la circulation  $\Gamma$  le long d'une boucle circulaire et on introduit la vorticité par application de la formule de Stokes (figure A1.2):

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

(une démonstration intuitive du **théorème de Stokes** est proposée en Annexe 5). La première intégrale donne:

$$\Gamma = 2\pi r V_\theta(r)$$

Montrons que  $\Gamma$  est une constante par le calcul de la deuxième intégrale: on a dit que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$ , mais ceci a lieu en-dehors d'un tube de rayon  $r_0$  petit devant les dimensions de l'écoulement et à l'intérieur duquel la vorticité est concentrée. Pour  $r > r_0$  l'écoulement est irrotationnel. Ce cœur où la vorticité est concentrée s'appelle le **vortex**.

**NB:** - L'existence d'un vortex est obligatoire même si l'écoulement est irrotationnel dans un domaine très vaste. Cela provient de la transformation des équations de Navier-Stokes en l'équation de Helmholtz de transport de la vorticité et qui leur est équivalente.

On montre en effet que, en présence de forces extérieures dérivant d'un potentiel (par exemple: pesanteur), les équations de Navier-Stokes prennent la forme de Helmholtz:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega} = 0$$

( $\nu$  : viscosité cinématique). Par conséquent, si un écoulement ne contenait aucune zone de vorticité il serait tout simplement impossible. Un écoulement irrotationnel (ou potentiel) contient toujours au moins une zone où la vorticité est concentrée.

Revenant à l'exemple d'un écoulement potentiel tourbillonnaire, on admet donc que le long de la boucle (C) de rayon  $r_0$  on a  $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})_z = \Omega$ , et donc la 2e intégrale devient:

$$\Gamma = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{r_0} 2\pi \Omega r dr = \Omega \pi r_0^2$$

$\Gamma$  est donc bien une constante et l'on a l'égalité:  $\Gamma = 2\pi r V_\theta(r) = \Omega \pi r_0^2$ , d'où:

$$V_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{A1.14})$$

(la constante  $C$  vaut donc  $C = \Gamma/2\pi$ ).

On peut maintenant déterminer le potentiel des vitesses  $\Phi$  et la fonction de courant  $\psi$ , et donc le potentiel complexe  $F(Z)$ . En coordonnées polaires (A1.6) deviennent:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

d'où, par intégration:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \\ \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}\end{aligned}\quad (\text{A1.15})$$

**NB:** - Comme on s'y attendait,  $\Phi$  n'est pas définie de manière univoque (car  $\theta$  est définie à  $2\pi$  près) parce que la topologie de l'écoulement est doublement connexe: la singularité qui empêche toute courbe qui l'entoure de se déformer continûment jusqu'à devenir un point, est précisément celle de la zone de vorticité délimitée par  $r_0$  (cf. Annexe 2 sur le notion de double connexité).

(A1.15) montrent que les lignes équipotentielles sont des droites passant par le centre de vorticité, définies par  $\theta = \text{constante}$ , et que les lignes de courant ( $\psi = \text{constante}$ ) sont des cercles concentriques de rayon  $r = \text{constante}$  centrés sur le centre de vorticité (figure A1.3).

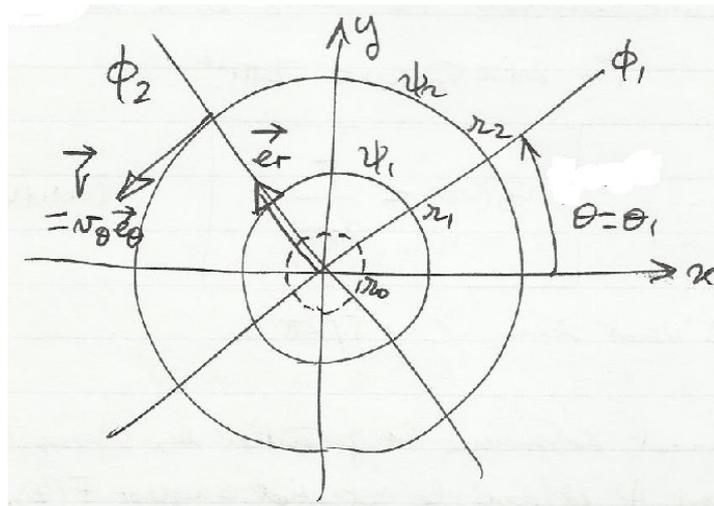


figure A1.3 –  quipotentielles et lignes de courant d'un écoulement 2D tourbillonnaire

La fonction potentiel complexe (A1.8) s'écrit, à partir de (A1.15):

$$F(Z) = \Phi + j\psi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} - j \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

or:  $Z = x + jy = r e^{j\theta}$  d'où  $\log Z = j\theta + \ln r$ , par suite:

$$F(Z) = -j \frac{\Gamma}{2\pi} (j\theta + \ln r) + j \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_0$$

donc, à une constante additive près:

$$\begin{aligned}F(Z) &= a \log Z \\ a &= -j \frac{\Gamma}{2\pi}\end{aligned}\quad (\text{A1.16})$$

### A1.3.3 – Source et puits

Les sources et les puits sont des écoulements qui s'effectuent respectivement:

- depuis un point d'origine O avec un débit volumique Q conventionnellement positif car le point O apporte une quantité constante de fluide par unité de temps:  $Q > 0$ ;
- vers un point de convergence O avec un débit volumique Q conventionnellement négatif car le point O absorbe une quantité constante de fluide par unité de temps:  $Q < 0$ .

Si l'écoulement est plan (bidimensionnel) les mêmes arguments que ceux présentés au paragraphe A1.3.2 pour l'écoulement tourbillonnaire, amènent à exprimer la vitesse radiale  $V_r$  selon une décroissance en  $1/r$ :

$$V_r(r) = \frac{C}{r}$$

tandis que, cette fois, c'est la vitesse tangentielle qui est nulle:  $V_\theta = 0$ .

La constante C est directement liée au débit volumique. En effet:

Le flux de vitesse à travers une « surface » (réduite au cercle de rayon r et de centre O) est égal au débit volumique Q:

$$\oint_{(C)} \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \int_0^{2\pi} r V_r d\theta = 2\pi C = Q$$

donc  $C = Q/2\pi$ , et:

$$V_r(r) = \frac{Q}{2\pi r} \quad (\text{A1.17})$$

On en déduit la fonction de courant  $\psi$  et le potentiel de vitesse  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \\ \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \end{cases} \quad (\text{A1.18})$$

(A1.18) montrent que, pour une source ou un puits, les lignes de courant  $\psi = \text{constante}$  sont des droites passant par O et que les équipotentielles  $\Phi = \text{constante}$  sont des cercles concentriques de centre O (figure A1.4).

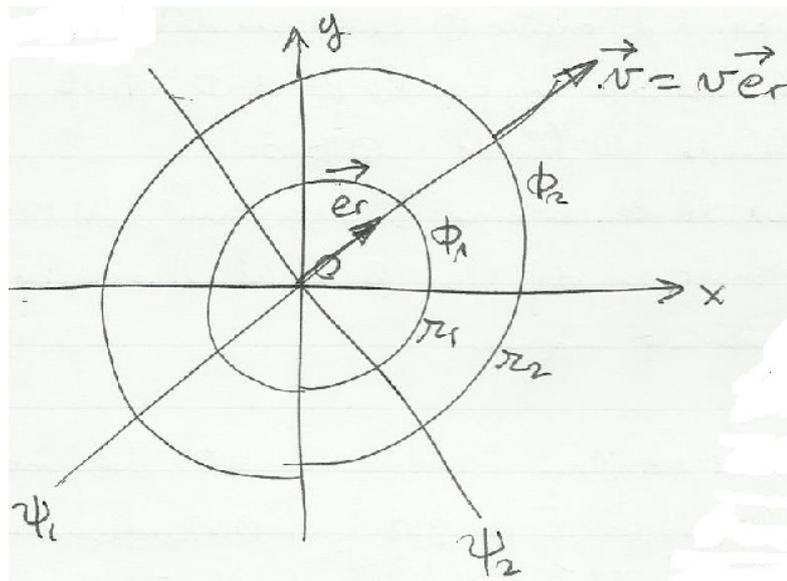


figure A1.4 – équipotentielles et lignes de courant d'un écoulement source (ou puits, dans ce cas  $\vec{V}$  est dirigée vers le centre O)

La fonction potentiel complexe  $F(Z)$  s'écrit alors:

$$F(Z) = \Phi + j\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} + j \frac{Q}{2\pi} \theta$$

et comme  $Z = x + jy = r e^{j\theta}$  on a, comme pour le tourbillon:

$$F(Z) = b \log Z$$

$$b = \frac{Q}{2\pi} \quad (\text{A1.19})$$

**Remarque A1.1** – Des relations (A1.16) et (A1.19) on constate que le même formalisme peut être utilisé pour décrire les écoulements bidimensionnels du type tourbillon, source et puits:

$$F(Z) = a_0 \log Z \quad (\text{A1.20})$$

avec:  $a_0 = \frac{Q}{2\pi} = b$  pour une source ( $Q > 0$ ) ou un puits ( $Q < 0$ )

$$a_0 = -j \frac{\Gamma}{2\pi} = a \quad \text{pour un tourbillon.}$$

**Remarque A1.2** – La ressemblance, dans le formalisme 2D, entre les tourbillons et les sources / puits, ne doit pas faire oublier une des différences fondamentales: à savoir, les écoulements source / puits peuvent aussi être modélisés en 3D. Dans ce cas, la vitesse radiale, en coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ), suit une loi de décroissance en  $1/r^2$  (et non en  $1/r$  comme dans le cas 2D) <sup>5</sup>:

$$V_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$V_\varphi = V_\theta = 0$$

En coordonnées sphériques le potentiel et le fonction de courant obéissent aux équations:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$V_\varphi = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

qui s'intègrent en:

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} \quad (\text{A1.21})$$

$$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \varphi$$

Les équipotentielles  $\Phi = \text{constante}$  sont des sphères concentriques de centre O, et les lignes de courant  $\Psi = \text{constante}$  sont des droites passant par O orientées par un  $\varphi$  constant.

#### A1.3.4 – Écoulement créé par un dipôle

Un dipôle est un couple générateur d'écoulement constitué d'une source et d'un puits. La source est situé au point  $O_2$  et le puits est le point de convergence  $O_1$ .

Soit D la distance entre la source et le puits:  $D = O_1O_2$ . On appelle **moment du dipôle** la quantité vectorielle (figure A1.5) <sup>6</sup> :

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{O_1O_2}$$

où Q est la valeur absolue du débit. Le milieu de  $O_1$  et  $O_2$  est le point origine des coordonnées O. Les potentiels de vitesse pour la source et le puits sont respectivement (relations A1.18)):

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|r-r_2|}{r_0} \quad \Phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|r-r_1|}{r_0}$$

<sup>5</sup> On peut s'en convaincre de manière intuitive en écrivant que la même quantité de matière, se propageant radialement depuis la source ou vers le puits O, traverse un élément de surface sphérique, centré sur O, distant de r de O:

$$\iint_S V_r(r) dS = Q = \text{constante} = 4\pi r^2 V_r(r)$$

<sup>6</sup> Remarquer l'analogie avec le dipôle électrique.

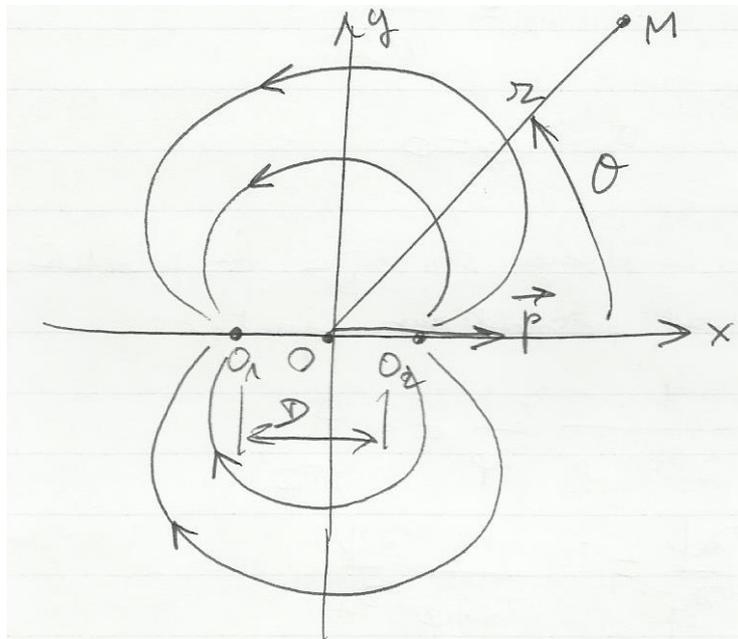


figure A1.5 – dipôle à deux dimensions:  $O_2$  source,  $O_1$  puits

Pour le dipôle, le potentiel est donc la somme des deux potentiels source et puits:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} (\ln|r-r_2| - \ln|r-r_1|)$$

En un point M loin de la source et du puits, on a  $r \gg r_1, r_2$ , et l'expression précédente devient au premier ordre d'approximation:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \approx \frac{Q}{2\pi} \left( -\frac{\partial \ln r}{\partial r} (|r-r_1| - |r|) + \dots + \frac{\partial \ln r}{\partial r} (|r-r_2| - |r|) + \dots \right)$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} (|r-r_2| - |r-r_1|) = -\frac{QD \cos \theta}{2\pi r} = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r}$$

que l'on écrit encore:

$$\Phi = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (\text{A1.22})$$

d'où les composantes de la vitesse en coordonnées polaires:

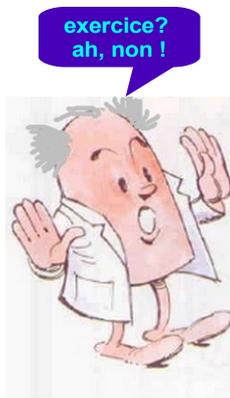
$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \\ V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \end{aligned} \quad (\text{A1.23})$$

La fonction de courant  $\psi$  se déduit de (A1.23) en intégrant:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

soit:

$$\psi = \frac{p \sin \theta}{2\pi r} = \frac{|\vec{p} \wedge \vec{r}|}{2\pi r^2} \quad (\text{A1.24})$$



**Remarque A1.3** – En écoulement 3D (en coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ ) on obtient, à la place de (A1.22) et (A1.24) (exercice !...):

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{p \cos \varphi}{4 \pi r^2} = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \pi r^3} \\ V_r &= \frac{p \cos \varphi}{2 \pi r^3} \\ V_\varphi &= \frac{p \sin \varphi}{4 \pi r^3} \\ \psi &= \frac{p \sin^2 \varphi}{4 \pi r}\end{aligned}$$

La fonction potentiel complexe  $F(Z)$  d'un dipôle se déduit aisément de (A1.22) et (A1.24) par:

$$F(Z) = \Phi + j \psi = -\frac{p \cos \theta}{2 \pi r} + j \frac{p \sin \theta}{2 \pi r}$$

en remplaçant les sinus et les cosinus par les relations d'Euler,  $F(Z)$  devient:

$$F(Z) = \frac{p}{2 \pi r} \left( -\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} + \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} \right) = -\frac{p}{2 \pi r e^{j\theta}}$$

or  $Z = r e^{j\theta}$  donc:

$$F(Z) = -\frac{p}{2 \pi Z} \quad (\text{A1.25})$$

La représentation d'un écoulement 2D par un plan complexe, avec son potentiel complexe  $F(Z)$ , permet de décrire plus aisément des configurations d'écoulement comme celles que l'on va voir ci-après à propos des allées de Karman et de la fréquence de Strouhal.

#### A1.4 – Allées de tourbillons et tourbillons de Karman

Dans un écoulement plan considérons un ensemble de tourbillons centrés sur des points de coordonnées complexes  $Z_k = x_k + jy_k$ . En un point  $M$  du plan, de coordonnées  $Z = x + jy$ , le potentiel complexe est la somme des potentiels complexes  $F_k$  de chaque tourbillon associé à  $Z_k$ :

$$F(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k(Z)$$

où chaque  $F_k(Z)$  est donné par (A1.16):

$$F_k(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log(Z - Z_k)$$

on a donc:

$$F(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \log(Z - Z_k) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (Z - Z_k)$$

On suppose maintenant que les centres tourbillonnaires sont situés sur l'axe  $Ox$  et sont équidistants, l'écart entre deux centres consécutifs étant  $L$ , on a alors:  $Z_k = kL$ ; l'expression précédente devient alors:

$$F(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (Z - kL)$$

qui est aussi égale à:  $F(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log Z \prod_{k=1}^{+\infty} (Z - kL)(Z + kL)$  où le terme  $k = 0$  a été isolé et où l'on s'est ramené aux indices uniquement positifs; après quelques manipulations, on ramène l'expression

précédente à:

$$F(Z) = -\frac{j\Gamma}{2\pi} \log \left[ Z \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{Z^2}{k^2 L^2} \right) \right] - \frac{j\Gamma}{2\pi} \log \left[ \prod_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k^2 L^2 \right]$$

Le premier terme de F(Z) est l'identité bien connue:  $Z \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{Z^2}{k^2 L^2} \right) = \frac{L}{\pi} \sin \left( \frac{\pi Z}{L} \right)$

F(Z) est donc la somme d'un terme fonction de Z et d'un terme constant:

$$F(Z) = -\frac{j\Gamma}{2\pi} \log \left( \sin \frac{\pi Z}{L} \right) + \text{termes constants}$$

Sa dérivée fournit la vitesse complexe:

$$V(Z) = \frac{dF}{dZ}(Z) = -\frac{j\Gamma}{2L} \cotan \frac{\pi Z}{L} \quad (\text{A1.26})$$

Sur un tourbillon n°k, la vitesse complexe d'une particule fluide est égale à V(Z) retranchée de la contribution du tourbillon n°k sur lui-même donnée par (A1.16):

$$V_k(Z) = \frac{dF_k}{dZ} - V(Z) \quad \text{où: } F_k(Z) = a \log(Z - kL) \quad \text{et } a = -\frac{j\Gamma}{2\pi} \quad \text{par conséquent}$$

$$\frac{dF_k}{dZ} = -\frac{j\Gamma}{2\pi} \frac{1}{Z - kL}$$

La vitesse sur le tourbillon n°k est finalement:

$$V_k(Z) = \frac{j\Gamma}{2L} \left( \cotan \frac{\pi Z}{L} - \frac{1}{\pi} \frac{L}{Z - kL} \right) \quad (\text{A1.27})$$

Le développement limité de (A1.27) autour du centre tourbillonnaire  $Z_k = kL$  montre que pour  $Z = kL$  (c'est-à-dire au centre du tourbillon n°k) la vitesse  $V_k$  s'annule: les centres des vortex sur Ox sont immobiles dans le repère qui leur est lié.

On considère maintenant deux allées de tourbillons, alignées chacune sur une droite parallèle à Ox. Ces droites sont symétriques par rapport à Ox et distantes de H. Sur chacune de ces droites, les centres de vortex sont équidistants, de pas L (figure A1.6).

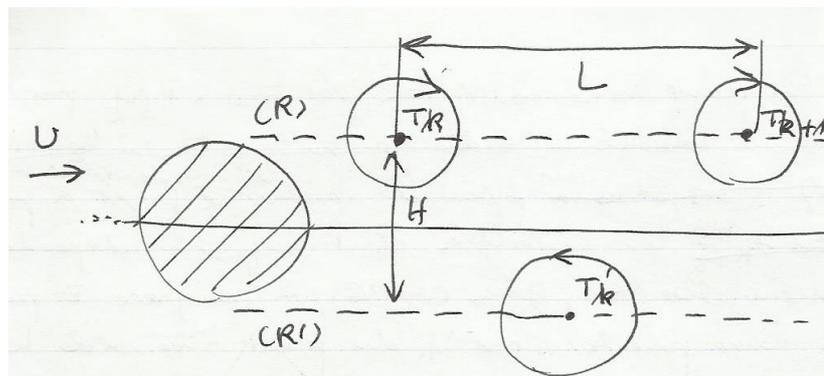


figure A1.6 – double allée de tourbillons en aval d'un profil cylindrique infini (tourbillons de Karman)

On admettra ici que les tourbillons des deux lignes sont décalés spatialement, selon un rapport indépendant de la vitesse U et qui vaut:

$$\frac{H}{L} \approx 0,3 \quad (\text{A1.28})$$

(la démonstration de (A1.28) utilise des critères de stabilité).

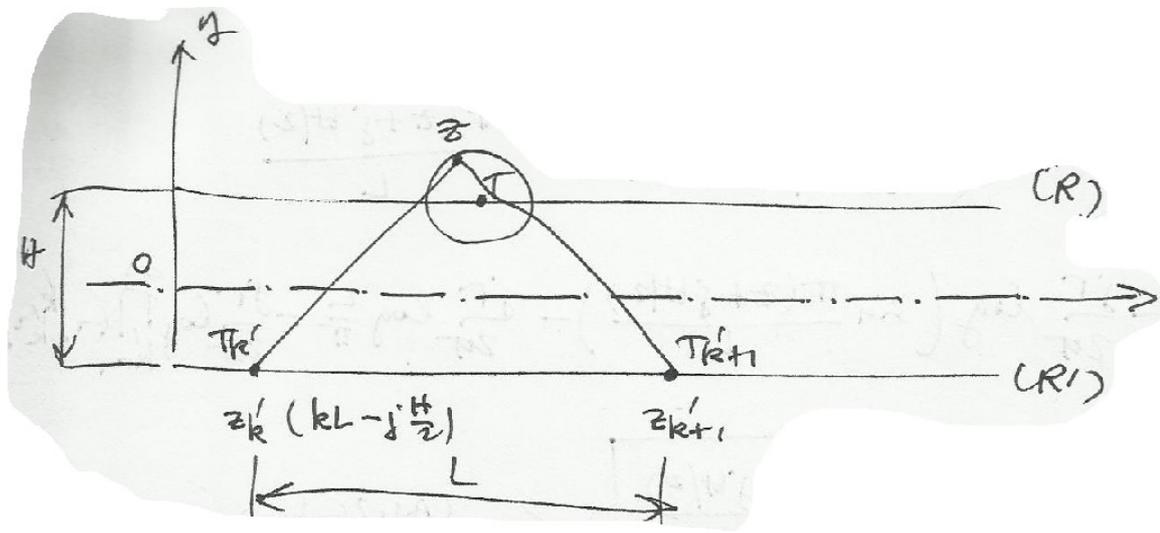


figure A1.17

Soit (R) la rangée supérieure des tourbillons; sur cette rangée, on considère un des centres tourbillonnaires, de rang quelconque, tel que sa projection perpendiculaire sur la rangée inférieure (R') soit au milieu de deux tourbillons consécutifs sur cette rangée de centres  $T_k$  et  $T_{k+1}$ . En prenant pour origine  $T_k$  les coordonnées de T dans le plan complexe  $T_kxy$  sont:  $Z_T = \frac{L}{2} + j\frac{H}{2}$ . Par rapport à l'origine O des coordonnées, placée sur l'obstacle, les coordonnées des centres tourbillonnaires  $T_k$  de la rangée (R') sont:  $Z_k = k'L - j\frac{H}{2}$  (figure A1.17).

On admet aussi qu'un tourbillon quelconque n'est pas influencé par les autres tourbillons situés sur sa rangée, donc peut être considéré seul sur celle-ci. En revanche, il est influencé par les tourbillons de l'autre rangée. Par conséquent, le tourbillon de centre T de la rangée (R) est uniquement influencé par les tourbillons de centres  $T_k$ , de coordonnées  $Z_k$ , de la rangée (R'). Donc en un point Z du tourbillon de centre T, le potentiel complexe est la somme des potentiels des tourbillons n°k':  $F_k(Z)$ :

$$F(Z) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} F_{k'}(Z)$$

où chaque  $F_{k'}$  est donné par (A1.16):  $F_{k'}(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log(Z - Z_{k'})$  d'où:

$$F(Z) = \frac{j\Gamma}{2\pi} \log \prod_{k'=-\infty}^{+\infty} (Z - Z_{k'})$$

Comme  $Z_{k'} = k'L - j\frac{H}{2}$ , en remplaçant dans l'expression précédente, et après quelques manipulations calculatoires, il vient:

$$F(Z) = -j \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left[ (Z + j\frac{H}{2}) \prod_{k'=1}^{+\infty} \left( 1 - \left( \frac{Z + jH/2}{kL} \right)^2 \right) \right] - j \frac{\Gamma}{2\pi} \log \prod_{k'=1}^{+\infty} (-1)^{k'} k'^2 L^2$$

Or le premier terme entre crochets est l'identité:

$$(Z + j\frac{H}{2}) \prod_{k'=1}^{+\infty} \left( 1 - \left( \frac{Z + jH/2}{kL} \right)^2 \right) = \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi(Z + jH/2)}{L}$$

$F(Z)$  est alors la somme d'une fonction de Z et d'un terme constant:

$$F(Z) = -j \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left( \sin \frac{\pi(Z + jH/2)}{L} \right) + \text{constante}$$

Sa dérivée est la vitesse complexe:

$$V(Z) = \frac{dF}{dZ} = -j \frac{\Gamma}{2L} \cotan \frac{\pi(Z + jH/2)}{L} \quad (\text{A1.26bis})$$

qui remplace (A1.26) pour un tourbillon influencé par une rangée de tourbillons (R') décalée suivant Oy de la distance H.

Au centre tourbillonnaire T sur la rangée (R) on a:

$$Z = \frac{L}{2} + j \frac{H}{2} \rightarrow V(T) = -j \frac{\Gamma}{2L} \cotan \frac{\pi}{L} \left( \frac{L}{2} + jH \right)$$

soit:

$$V(T) = - \frac{\Gamma}{2L} \tanh \frac{\pi H}{L} \quad (\text{A1.29})$$

(où l'on a utilisé:  $j \tan jx = \tanh x$ ). Par symétrie (A1.29) exprime également la vitesse induite par le tourbillon de la rangée (R) sur chaque tourbillon de la rangée (R').

En conclusion: V est la vitesse, uniforme, avec laquelle les tourbillons s'éloignent du profil le long de leurs rangées respectives (R) et (R') (**Rappel**: ceci est vrai seulement pour la condition de stabilité (A1.28)  $H/L \sim 0,3$ ).

La vitesse des centres tourbillonnaires relativement à l'écoulement est, d'après (A1.29), de l'ordre de:

$$V \approx \frac{\Gamma}{2L}$$

La vitesse absolue avec laquelle les centres tourbillonnaires s'éloignent du profil est donc la somme de V et de U, où U est la vitesse de l'écoulement (supposée stationnaire et uniforme):  $V+U$ .

Avec cette vitesse, la distance L entre deux tourbillons consécutifs est parcourue pendant la durée:

$$t = \frac{L}{U+V}$$

Or, comme  $\Gamma$  est proportionnelle à U et au diamètre D de l'obstacle,  $\Gamma = KD U$  (?), et que d'après (A1.28) en ordre de grandeur on a:

$$V \approx \frac{\Gamma}{2L} = \frac{KD}{2L} U$$

il vient:  $U+V \approx \left(1 + \frac{KD}{2L}\right) U$ . Or la distance H entre les allées tourbillonnaires est pratiquement égale au diamètre de l'obstacle D:  $H \sim D$ . Par ailleurs la condition de stabilité (A1.28) entraîne  $H \sim 0,3 L$ .

On a donc:

$$U+V \approx \left(1 + \frac{KD}{2L}\right) U = \left(1 + \frac{0,3K}{2}\right) U$$

d'où la fréquence d'émission des tourbillons:

$$f = \frac{1}{t} = \frac{U+V}{L} = 0,3 \frac{U+V}{D} = 0,3 \left(1 + \frac{0,3K}{2}\right) \frac{U}{D} = \alpha \frac{U}{D}$$

---

7 On a vu que  $V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$  (A1.14) ce qui, en ordre de grandeur, donne au voisinage immédiat de l'obstacle:

$$V_\theta \approx U = \frac{\Gamma}{\pi D} \text{ soit } \Gamma = \pi U D \text{ donc } K \approx \pi$$

où  $\alpha = 0,3 \left( 1 + \frac{0,3 K}{2} \right)$ . On définit le **nombre de Strouhal**  $Sr$  par:

$$Sr = \frac{f D}{U} \approx \alpha \quad (\text{A1.30})$$

Il est pratiquement constant. La relation (A1.30) montre que la fréquence d'émission des allées tourbillonnaires est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement  $U$  et inversement proportionnelle au diamètre du profil  $D$ .

Des petits obstacles soumis à du vent génèrent des fréquences élevées qui deviennent audibles lorsque les tourbillons deviennent à leur tour des sources acoustiques.

Lorsque la fréquence coïncide avec les fréquences propres d'une structure mécanique, celle-ci entre en résonance mécanique et les amplitudes d'oscillations s'amplifient jusqu'à un point où la structure se détériore (exemple du pont suspendu de Tacoma, 1940, pont de Niagara-Clifton, 1889, pont de La Roche-Bernard, 1852, etc.)<sup>8</sup>.

## ANNEXE 2 – Force exercée par un écoulement de fluide parfait sur une sphère rigide: paradoxe de D'Alembert

### A2.1 – Écoulements irrotationnels et conditions pour qu'ils le soient

Les équations du mouvement des fluides parfaits sont obtenues en négligeant les termes de viscosité dans les équations de Navier-Stokes. En notant:  $\rho$  masse volumique du fluide,  $\vec{V}$  le champ de vitesse,  $P$  la pression,  $s$  l'entropie volumique, on obtient donc:

- Conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A2.1})$$

- Conservation de la quantité de mouvement (ou équations d'Euler):

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \vec{f} \quad (\text{A2.2})$$

où  $\vec{f} = -\rho \vec{\nabla} \phi$  est la force (par unité de volume) exercée sur le fluide, dérivant du potentiel  $\phi$  (force conservative);

- Conservation de l'énergie (ou écoulement isentropique):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) s = 0 \quad (\text{A2.3})$$

où l'entropie volumique  $s$  est reliée à l'enthalpie massique  $h$  par:  $dh = T ds + \frac{1}{\rho} dP$

Or d'après l'identité:  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = (\text{rot } \vec{V}) \wedge \vec{V} + \vec{\nabla} \frac{1}{2} V^2$  l'équation d'Euler (A2.2) prend la forme de l'**équation de Crocco**:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} + T \vec{\nabla} s - \vec{\nabla} \left( h + \frac{1}{2} V^2 \right) - \vec{\nabla} \phi \quad (\text{A2.4})$$

**Remarque A2.1:** - Cas de l'écoulement stationnaire: **théorème de Bernoulli**

La stationnarité se traduit par l'annulation des termes en  $\partial/\partial t$ :  $\partial \rho / \partial t = 0$ ,  $\partial \vec{V} / \partial t = 0$ ,  $\partial s / \partial t = 0$ . De (A2.3) il suit que:

<sup>8</sup> Y. Rocard: L'instabilité en mécanique – Masson, 1954

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})_s = 0 \quad (\text{A2.5})$$

autrement dit: l'entropie est constante le long d'une même ligne de courant. L'équation de Crocco (A2.4) se simplifie en:

$$\vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} + T \vec{\nabla} s - \vec{\nabla} \left( h + \frac{1}{2} V^2 \right) - \vec{\nabla} \phi = 0$$

En faisant le produit scalaire avec  $\vec{V}$  il vient:

$$\vec{V} \cdot (\vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V}) + T \vec{V} \cdot \vec{\nabla} s - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \left( h + \frac{1}{2} V^2 \right) - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$$

Le premier terme est identiquement nul. Le deuxième l'est aussi à cause de (A2.5). Il reste le dernier:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \left( h + \frac{1}{2} V^2 + \phi \right) = 0$$

ce qui signifie que sur une même ligne de courant il y a conservation de l'enthalpie massique totale:

$$h + \frac{1}{2} V^2 + \phi = \text{constante} \quad (\text{A2.6})$$

(A2.6) est le théorème de Bernoulli.

### Remarque A2.2: - Théorème de Kelvin, circulation

On considère un contour fermé (C) entourant un corps indéformable et ne coupant aucune surface de discontinuité.

Si le fluide est barotrope (i.e. la pression est fonction seulement de la masse volumique:  $P = f(\rho)$ ), et si les forces qui s'exercent sur lui dérivent d'un potentiel, alors la circulation le long de ce contour est constant (théorème de Kelvin).

*PREUVE* – On définit d'abord la circulation  $\Gamma$  de la vitesse le long du contour (C) entraîné par le fluide:

$$\Gamma(t) = \oint_{(C)} \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \quad (\text{A2.7})$$

Il s'agit de vérifier que  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$

Or:  $\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{(C)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l}$  d'où, si  $\phi$  est le potentiel des forces de volume appliquées au fluide, et compte tenu des équations d'Euler (A2.2):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{(C)} \left( \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \phi \right) \cdot d\vec{l}$$

Or la quantité suivante est identiquement nulle:  $\oint_{(C)} \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l} = 0$  (c'est ce qui traduit la propriété de force conservative  $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$ ), il reste donc:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{(C)} \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \cdot d\vec{l}$$

Le fluide étant barotrope,  $P = f(\rho)$  on a aussi:  $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \int \frac{dP}{\rho} = \vec{\nabla} \xi$  (puisque P ne dépend pas de l'espace  $\vec{r}$  mais uniquement de  $\rho$ ), où la quantité scalaire est:  $\xi = \int \frac{dP}{\rho}$ .

Il s'ensuit que:  $\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{(C)} \vec{\nabla} \xi \cdot d\vec{l} = 0$  par identité. Donc  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  entraîne que  $\Gamma = \text{constante}$  le long du contour fermé (C). - CQFD

D'après le théorème de Stokes, (A2.7) s'écrit aussi:

$$\Gamma(t) = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \text{constante}$$

où (S) est la surface s'appuyant sur le contour fermé (C) entraîné par le fluide.

Or le moment cinétique d'une particule fluide parcourant le chemin (C) est proportionnel à  $\text{rot } \vec{V}$ . Le théorème de Kelvin exprime donc aussi la conservation du moment cinétique d'une particule de fluide barotrope qui parcourt le chemin fermé (C) autour de l'obstacle.

**Remarque A2.3: - Seconde forme du théorème de Bernoulli pour les écoulements irrotationnels; Écoulements irrotationnels incompressibles: équation de Laplace**

Tout ce qui précède concerne aussi bien les écoulements rotationnels que les écoulements irrotationnels. On se restreint maintenant au cas des écoulements irrotationnels.

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si:

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad (\text{A2.8})$$

Comme on a l'identité  $\text{rot } \vec{\nabla} \Phi = 0$  il existe une fonction potentiel scalaire  $\Phi$  d'où dérive le champ de vitesse  $\vec{V}$ :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi \quad (\text{A2.9})$$

Un écoulement irrotationnel est donc aussi un écoulement potentiel:  $\Phi$  est le potentiel de vitesse<sup>9</sup>.

Pour un fluide parfait en écoulement potentiel, soumis à l'action d'une force extérieure  $\vec{f}$  dérivant d'un potentiel  $\phi$ , les équations d'Euler (A2.2) deviennent:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \phi$$

et en appliquant l'identité exprimant  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$  vue précédemment, et compte tenu de (A2.9), on a:

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \phi$$

Comme le terme de gauche est le gradient d'une fonction scalaire, le terme de droite doit l'être aussi. En conséquence, l'expression  $(1/\rho) \vec{\nabla} P$  doit pouvoir satisfaire à:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) = 0$$

puisque l'on a les identités:  $\text{rot } \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 \right) = 0$  et  $\text{rot } \vec{\nabla} \phi = 0$

En conséquence, on doit avoir  $P = P(\rho)$ : le fluide doit être barotrope.

Il vient donc, dans le cas d'un écoulement potentiel (irrotationnel), qu'il est barotrope et qu'il vérifie la deuxième forme de la relation de Bernoulli:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + P + \rho \phi = \text{constante} \quad (\text{A2.10})^{(10)}$$

<sup>9</sup> On a vu également ces définitions en Annexe 1 pour un écoulement 2D

<sup>10</sup> Attention aux notations: ne pas confondre  $\Phi$  (potentiel des vitesses) avec  $\phi$  (potentiel des forces de volume conservatives) !

Cette relation (A2.10), contrairement à (A2.6), n'a pas été obtenue par projection sur une ligne de courant (terme  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ ), elle est donc valable pour *tout le volume de l'écoulement*: la constante dans (A2.10) est la même pour tout le volume de l'écoulement et non plus pour une ligne de courant.

Pour un écoulement irrotationnel incompressible, l'équation de conservation de la masse (A2.1) devient, compte tenu de (A2.9):

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div} \vec{V} = \rho \text{div} \vec{\nabla} \Phi = \rho \nabla^2 \Phi = 0$$

Le potentiel de vitesse d'un écoulement incompressible vérifie donc l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{A2.11})$$

En résumé, on a vu qu'un écoulement irrotationnel est nécessairement isentropique (relation (A2.3)) et barotrope. On a aussi vu que, pour un écoulement irrotationnel, la seconde expression du théorème de Bernoulli (A2.10) s'applique, et que dans ce cas, contrairement à l'écoulement rotationnel d'un fluide parfait, elle s'applique dans tout le volume de l'écoulement, et non pas seulement le long d'une ligne de courant. D'après (A2.10) on voit que, si le potentiel de vitesse  $\Phi$  est connu à un instant initial (par exemple  $\Phi = 0$ : fluide au repos à  $t = 0$ ), il est possible de déterminer  $\Phi(t)$  à tout instant ultérieur  $t$ :

$$P_0 + \rho \Phi_0 = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + P + \rho \Phi$$

Si, en outre, le fluide est incompressible, le potentiel de vitesse  $\Phi$  est solution de l'équation de Laplace (A2.11).

Le théorème de Kelvin, sur la constance de la circulation  $\Gamma$ , s'applique si le fluide est barotrope, qu'il soit ou non irrotationnel. Nous allons voir ci-après ce qu'il devient dans le cas d'un écoulement irrotationnel.

## A2.2 – Circulation pour un écoulement irrotationnel, théorème de Lagrange

Pour un écoulement irrotationnel, donc à potentiel de vitesse  $\Phi$ , la topologie de l'espace constitué du fluide et de l'obstacle qui y est immergé, joue un rôle important sur les propriétés de la circulation  $\Gamma$  définie par (A2.7).

Le théorème de Kelvin exprime que, pour un fluide barotrope, mais pas nécessairement irrotationnel,  $\Gamma$  est une constante.

Mais si le fluide barotrope est irrotationnel, nous allons voir que la valeur constante de  $\Gamma$  est nulle pour une topologie d'espace simplement connexe, et non nulle (et finie) pour une topologie d'espace doublement connexe. De plus, pour un espace doublement connexe, cette constante peut prendre une valeur définie à un facteur entier près, ce qui entraîne que le potentiel de vitesse  $\Phi$  est multivalué.

En conséquence, dans une topologie doublement connexe, il faut fixer une des valeurs possibles de  $\Gamma$  pour obtenir un potentiel unique, et donc un champ de vitesse  $\vec{V}$  unique.

On rappelle alors d'abord les notions d'espaces simplement et doublement connexes.

### Définition A2.4 – Espace simplement connexe

Dans un volume de fluide simplement connexe, par définition, une courbe fermée quelconque (C) entourant le solide peut être déformée, jusqu'à ce que la surface qu'elle délimite se réduise à un point, par déformation continue, sans couper la surface du solide (figure A2.1).

Tout obstacle indéformable de dimensions finies dans un espace de dimension 3 définit avec le fluide dans lequel il est immergé un volume de topologie simplement connexe. C'est le cas d'une sphère, immobile ou mobile, dans un écoulement irrotationnel.

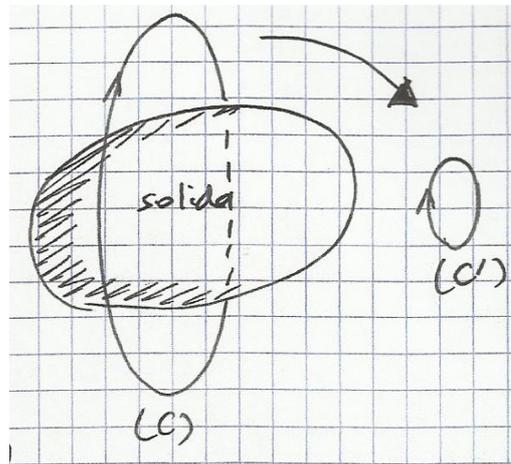


figure A2.1 – volume fluide de topologie simplement connexe: le cercle (C) entourant l'obstacle solide peut, par déformation continue, se réduire à un cercle (C') plus petit n'entourant pas le solide

### Définition A2.5 – Espace doublement connexe

Dans un volume de fluide doublement connexe, par définition, une courbe fermée quelconque entourant un domaine indéformable (obstacle solide) ne peut pas devenir arbitrairement petite par déformation continue de la courbe. L'obstacle solide représente une discontinuité vis-à-vis de cette déformation. Ce cas se rencontre pour les obstacles dont l'une des dimensions est infinie ou bien rebouclée sur elle-même (comme un tore) (figure A2.2).

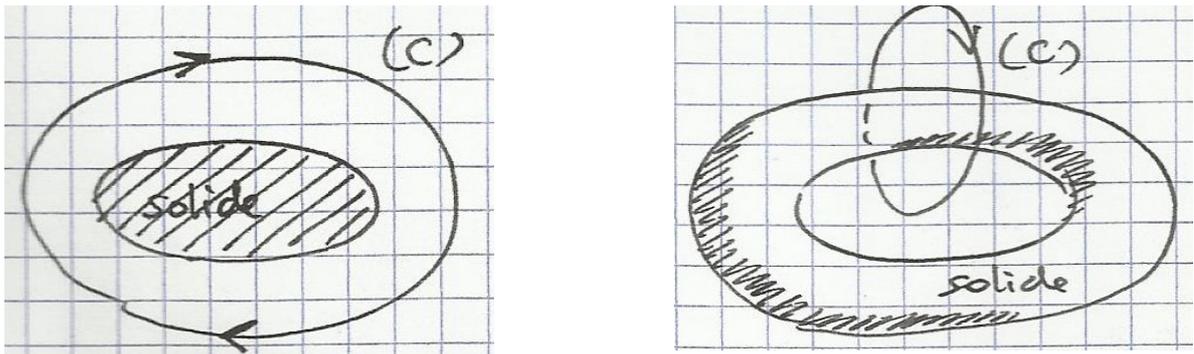


figure A2.2 – Volumes fluides doublement connexes: à gauche, un fluide 2D entourant un profil cylindrique (dimension infinie de l'un de ses axes); à droite: un tore dans un fluide 3D

En particulier, un écoulement autour d'un obstacle qui, du fait de l'une de ses dimensions infinies, est décrit dans le plan 2D et est toujours doublement connexe (exemple: profil cylindrique, profil d'aile assimilé à un profil d'extension infinie, etc.).

### Théorème A2.6 – Circulation d'un écoulement irrotationnel dans un volume simplement connexe (théorème de Lagrange)

Dans un volume simplement connexe, si l'écoulement d'un fluide barotrope soumis à des forces conservatives (dérivant d'un potentiel) est irrotationnel à un instant initial quelconque  $t = 0$ , alors il reste irrotationnel à tout autre instant  $t$ .

Pour un tel écoulement, la circulation est nulle:

$$\Gamma = 0 \quad (\text{A2.12})$$

**PREUVE** – D'après le théorème de Kelvin (A2.2) applicable à un écoulement de fluide barotrope, irrotationnel ou non, on a pour tout instant  $t$ :

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

Or, à  $t = 0$ , par hypothèse, l'écoulement est irrotationnel:  $\text{rot } \vec{V} = 0$ . Comme, d'après le théorème de Stokes:

$$\oint_{(C)} \vec{V}(0) \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V}(0) \cdot d\vec{S} = 0$$

il vient  $\Gamma = 0$  quel que soit le contour fermé (C) et à tout instant  $t$ . Il s'ensuit que  $\text{rot } \vec{V}(t) = 0$  à tout instant  $t$ , et donc que  $\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi$  à tout instant  $t$ .

Dans un volume simplement connexe, il y a donc équivalence entre les propriétés « écoulement irrotationnel » et « circulation nulle ». Si un fluide est initialement au repos ( $\vec{V}(0) = 0$ ) donc a fortiori irrotationnel, et est mis en mouvement sous l'action d'une force conservative (exemple: pesanteur), alors l'écoulement sera toujours irrotationnel. - CQFD

### **Théorème A2.7 – Circulation d'un écoulement irrotationnel dans un volume doublement connexe**

La circulation  $\Gamma$  le long d'un contour fermé (C) entourant un obstacle solide dans un volume doublement connexe prend une valeur finie quelconque. Il s'ensuit que l'on ne peut pas définir le potentiel de vitesse  $\Phi$  de manière univoque:  $\Phi$  est multivalué.

Pour lever l'ambiguïté il faut que la circulation  $\Gamma$  ait une valeur préalablement définie. Dans ce cas il lui correspond un seul champ de vitesse.

**PREUVE** – Considérons un profil cylindrique dans un espace tridimensionnel (Oxyz), d'extension infinie suivant Oz et d'extensions finies suivant Ox et Oy (figure A2.3). Ce profil est placé dans un fluide s'écoulant depuis l'amont suivant l'axe Ox. Le fluide occupe tout le volume de l'espace, sauf bien sûr le volume infini du profil cylindrique.

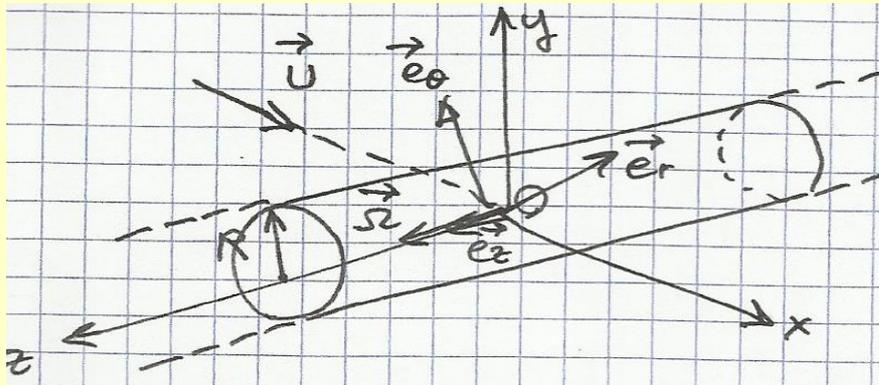


figure A2.3

Le champ de vitesse du fluide autour du cylindre infini est:

$$\vec{V}(r) = \vec{\Omega} \wedge \frac{R^2}{r} \vec{e}_r = \frac{\Omega R^2}{r} \vec{e}_\theta$$

où  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  vitesse angulaire relative fluide-cylindre, et  $r$  distance radiale dans le plan de symétrie Oxy, entre O et une particule fluide.

Il apparaît immédiatement que  $\vec{V}$  dérive du potentiel  $\Phi(\theta) = R^2 \Omega \theta$  (en effet, en coordonnées cylindriques on a:

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

et comme  $\Phi = \Phi(\theta)$  il reste  $\vec{\nabla} \Phi = \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \Omega R^2 \vec{e}_\theta$  d'où:  $\Phi(\theta) = R^2 \Omega \theta$ ).

Or  $\theta$  est défini à  $2n\pi$  près donc  $\Phi$  n'est pas univalué: en un point quelconque,  $\theta$  peut prendre une infinité de valeurs  $\theta + 2n\pi$ , et il en est de même pour  $\Phi$  qui lui est proportionnel.

Il s'ensuit que la circulation  $\Gamma$  de la vitesse le long d'un contour fermé entourant une section droite du cylindre peut prendre une infinité de valeurs selon le contour considéré. On a en effet:

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} \frac{\Omega R^2}{r} \vec{e}_\theta \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = \int_0^{2n\pi} \Omega R^2 d\theta = 2n\pi R^2 \Omega$$

donc  $\Gamma$  est défini modulo un entier  $n$ . Cette indétermination est la conséquence de la topologie doublement connexe du volume de l'écoulement: deux points de ce volume peuvent être reliés par deux chemins différents, irréductibles l'un à l'autre (irréductibles: les chemins ne peuvent pas coïncider par une déformation continue dans le volume occupé dans le fluide).

Dans le cas d'un volume doublement connexe, et pour un fluide incompressible, les solutions de l'équation de Laplace (A2.11) sont définies seulement si la circulation  $\Gamma$  autour du profil est définie.

On voit donc que, malgré le caractère irrotationnel de l'écoulement dans le volume libre ( $\text{rot } \vec{V} = 0$ ) on peut avoir, dans un volume doublement connexe, une circulation non nulle. - CQFD

Conclusion:

- Dans un volume simplement connexe (exemple: sphère dans un écoulement), la circulation  $\Gamma$  est nulle. Or on verra que pour un fluide parfait  $\Gamma$  intervient dans l'effet de portance (force de Magnus) lorsque le solide est animé d'un mouvement de rotation propre. Il ne peut donc pas y avoir de force de Magnus pour une sphère en mouvement dans un fluide parfait. La force de portance sur une sphère, qui est une donnée observable, fait donc intervenir autre chose: les forces de frottement, on parle alors d'effet Robins-Magnus. Sans ces forces de frottement, on démontre (§ A2.3) que la sphère n'est soumise à aucune force dans un écoulement de fluide parfait alors que l'observation montre le contraire (paradoxe de D'Alembert).
- Dans un volume doublement connexe (exemple: profil cylindrique infini dans un écoulement) la circulation  $\Gamma$  n'est pas nulle. Elle peut donc suffire à l'apparition d'une force de portance (effet Magnus) lorsque le profil est animé d'un mouvement de rotation propre. C'est cet effet qui est exploité par exemple dans la propulsion par Turbovoile®.

En réalité l'effet Magnus attribué au seul caractère du fluide parfait, s'ajoutent les effets dus aux forces de frottement pour un fluide réel visqueux. De sorte que le coefficient de portance est fonction du paramètre de rotation (« spin factor ») dû à l'effet Magnus seul.

### A2.3 – Force exercée par un écoulement de fluide parfait irrotationnel, stationnaire et incompressible sur une sphère rigide: paradoxe de D'Alembert

Nous arrivons maintenant au cas d'une sphère indéformable placée dans un écoulement amont incompressible, irrotationnel d'un fluide parfait. Le volume est simplement connexe donc  $\Gamma = 0$  (théorème de Lagrange (A2.12)). Mais, malgré une circulation de vitesse nulle autour de l'obstacle, il apparaît une force due à l'écoulement sur l'obstacle. Mais, paradoxalement, cette force existe seulement si l'écoulement est instationnaire, alors que, dans la réalité expérimentale, un écoulement de fluide réel (visqueux) applique une force non nulle sur un obstacle rigide, même si cet écoulement est stationnaire: c'est le **paradoxe de D'Alembert**. Pour le lever, il faut introduire les effets de viscosité (frottement) qui sont alors à l'origine, entre autres, des forces de sillage et des forces de portance (lesquelles prennent le nom de forces de Robins-Magnus) lorsque l'obstacle est animé d'une vitesse de rotation propre.

Dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle tridimensionnel, le volume est simplement connexe. l'écoulement est supposé en amont de vitesse constante en amplitude et en direction suivant Ox:

$$\vec{U} = \text{constante}$$

Le fluide étant supposé irrotationnel et incompressible, il a un potentiel de vitesse et celui-ci vérifie l'équation de Laplace:  $\nabla^2 \Phi = 0$  avec pour conditions aux limites:

- Sur la surface (S) indéformable de l'obstacle:  $\vec{n} \cdot \vec{V} = \vec{n} \cdot \vec{U}$  (vitesse sur la surface = vitesse découlement). Dans un volume doublement connexe le seul chemin fermé autour d'un obstacle est donné par la figure A2.4 où une discontinuité est présente en A (théorème de Stokes):

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{S'} \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

où le premier terme est nul parce que l'écoulement est irrotationnel dans le volume libre du fluide, et où le second terme n'est pas nécessairement nul parce que l'écoulement n'est pas irrotationnel le long de la surface (S') du solide et à cause de la discontinuité en A, ce qui est une conséquence de la double connexité de l'espace (présence d'une singularité en A). Le théorème de Stokes est démontré de manière heuristique en Annexe 5: sa validité nécessite un espace simplement connexe. Dans le cas contraire  $\Gamma$  n'est pas nul car le champ de vitesse  $\vec{V}$  n'est pas irrotationnel en A. la condition à la surface solide s'écrit encore, avec le potentiel:  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \vec{n} \cdot \vec{U}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface (S').

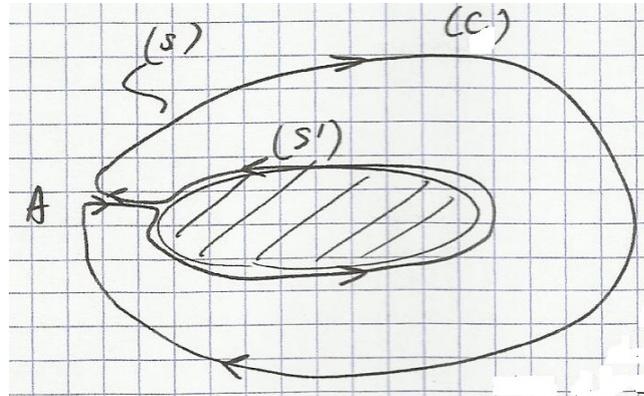


figure A2.4

- Comportement loin de l'obstacle ( $r \rightarrow \infty$ ):  $\Phi(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{r^2}$  (le champ de vitesse présente loin de la surface de l'obstacle un comportement parfaitement sphérique). Cette propriété, non démontrée ici, exploite les solutions de l'équation de Laplace, en coordonnées sphériques, pour ( $r \rightarrow \infty$ ).

Force exercée sur l'obstacle par l'écoulement:

$$\vec{F} = - \iint_S P \vec{dS}$$

où P pression. Or d'après (A2.10):

$$P = P_\infty - \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

où  $P_\infty$  pression à l'infini puisque (A2.10) est valable pour tout le volume (et non seulement une ligne de courant).

Calculons  $\partial \Phi / \partial t$  dans le repère lié au solide, donc entraîné par  $\vec{U}$  :

$$\begin{aligned} x' &= x - Ut \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

d'où:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x', y', z') = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} = -U \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

donc:

$$\vec{F} = - \iint_S P_\infty \vec{dS} + \iint_S \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{dS} - \rho \iint_S \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Phi \vec{dS}$$

Comme à l'infini  $\Phi$  et donc V tendent vers zéro, alors la première intégrale est nulle à cause de  $P_\infty \rightarrow 0$ .

Pour la deuxième intégrale  $\frac{1}{2} \rho \iint_S V^2 \vec{dS}$ , c'est un vecteur de composantes (i):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \rho \iint_S V^2 dS_i = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \frac{\partial V^2}{\partial x_i} dV \quad (\text{théorème de Green-Ostrogradski}) \\
& = \rho \iiint_V (-\text{rot } \vec{V} \wedge \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V})_i dV = \rho \iiint_V V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dV \quad (\text{car } \text{rot } \vec{V} = 0) \\
& = \rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j V_i) dV = \rho \iint_S V_j V_i dS_j \quad (\text{théorème de Green-Ostrogradski}) \\
& = \rho \iint_S V_i U_j dS_j \quad (\text{puisque } \vec{V} = \vec{U} \text{ sur } (S)) \\
& = \rho U_j \iint_S V_i dS_j \quad (\text{puisque } \vec{U} = \text{constante}) \\
& = \rho \iint_S \vec{U} \cdot \vec{V} d\vec{S} = \rho \iint_S \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Phi d\vec{S}
\end{aligned}$$

$$\text{donc: } \vec{F} = \iint_S \frac{1}{2} \rho V^2 d\vec{S} - \rho \iint_S \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Phi d\vec{S} = 0$$

On a donc le résultat:

La force exercée par un fluide en écoulement de vitesse amont constante, sur un obstacle 3D (espace simplement connexe) indéformable, est nulle.

Ce résultat est compatible avec la proposition suivante:

**Proposition A2.8** – Un obstacle indéformable soumis à l'écoulement accéléré d'un fluide parfait est soumis à une force directement proportionnelle à son accélération:

$$\vec{F} = -m_a \frac{d\vec{U}}{dt} \quad (\text{A2.13})$$

donc si  $\vec{U} = \text{constante}$  on a  $\vec{F} = 0$  comme dans le cas précédent.

*PREUVE* – Comme  $\vec{U}$  dépend du temps, mais est uniforme dans le volume, c'est-à-dire indépendante de la position  $\vec{r}$  dans le fluide, on a:  $\vec{U}(t) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t)$  donc son potentiel de vitesse est de la forme:

$$\Phi(\vec{r}, t) = U(t) g(\vec{r}) \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{dU}{dt} g(\vec{r}) \quad (\text{A2.14})$$

la force d'inertie d'entraînement à laquelle l'obstacle est soumis est directement liée à l'accélération de l'écoulement  $\frac{d\vec{U}}{dt}$  et dérive donc du potentiel de force (massique)  $\phi$ :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\nabla} \phi \rightarrow \phi = \frac{dU}{dt} x \quad (\text{A2.15})$$

où  $x = r \cos \theta$ . D'après (A2.10):  $\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho \phi = \text{constante} = P_\infty$  d'où la force de pression exercée sur le solide:

$$\vec{F} = \iint_S P d\vec{S} = - \iint_S \left( \rho \phi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d\vec{S} - \frac{1}{2} \rho \iint_S V^2 d\vec{S}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment la 2e intégrale est nulle:  $\iint_S V^2 d\vec{S} = 0$ , et il reste:

$$\vec{F} = - \iint_S \left( \rho \phi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Compte tenu de (A2.14) et (A2.15):

$$\vec{F} = -\rho \frac{dU}{dt} \iint_S (g(\vec{r}) + x) d\vec{S} \quad (\text{A2.16})$$

La force exercée par un fluide parfait sur un corps solide en mouvement n'est donc pas nulle s'il se meut avec une accélération: ce résultat va dans le sens de l'observation d'un corps qui nage; un corps se propulse dans un liquide s'il accélère par rapport à lui. Les poissons le savent bien, eux qui accélèrent sans arrêt leurs nageoires pour avancer dans l'eau !

Si le solide est une sphère de rayon R, on montre que, en coordonnées sphériques, le potentiel  $\Phi(r,t)$ , en tant que solution de l'équation de Laplace (A2.11), est un développement en polynômes de Legendre  $P_k(\cos \theta)$ :

$$\Phi(r, \theta, t) = -U(t)r \cos \theta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(t)}{r^{k+1}} P_k(\cos \theta)$$

Les conditions aux limites sur la sphère,  $r = R$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{e}_r = 0$  s'expriment par:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 = -U(t) \cos \theta - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{R^{k+2}} A_k(t) P_k(\cos \theta)$$

ce qui donne:  $A_k = 0$  pour  $k > 1$ , et  $A_1 \neq 0$ , donc:  $U(t) \cos \theta + \frac{2}{R^3} A_1 P_1(\cos \theta) = 0$  où  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , finalement:  $A_1 = -\frac{1}{2} R^3 U(t)$  et le potentiel de vitesse est:

$$\Phi(r, \theta, t) = -U(t) \left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta = U(t) g(r, \theta)$$

d'où:

$$\vec{F} = -\rho \frac{dU}{dt} \iint_S (g(r, \theta) + x) d\vec{S}$$

avec  $x = r \cos \theta$  et  $g(r, \theta) = -\left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$ , d'où:

$$\vec{F} = -\rho \frac{dU}{dt} \iint_S \left[ -r \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta + r \cos \theta \right] d\vec{S}$$

En  $r = R$  (surface de la sphère):

$$\vec{F}(R) = \rho \frac{dU}{dt} \iint_S \frac{1}{2} R \cos \theta d\vec{S}$$

Or  $\iint_S \frac{1}{2} R \cos \theta d\vec{S} = \frac{2\pi}{3} R^3 \vec{e}_x$  (exercice !) ce qui donne:

$$\vec{F}(R) = -\rho \frac{2\pi}{3} R^3 \frac{dU}{dt} \vec{e}_x$$

en posant  $m_a = \rho \frac{2\pi}{3} R^3$  masse ajoutée, on a le résultat annoncé (A2.13).

En conclusion: l'effet du fluide sur l'accélération de la sphère est celle induite par la masse  $m_a$  ajoutée à la sphère;  $m_a$  est la moitié de la masse du fluide déplacé. - CQFD

### ANNEXE 3 – Force de Magnus créée sur un profil cylindrique par l'écoulement d'un fluide parfait

Nous avons vu que dans le cas d'un obstacle 3D placé dans un écoulement potentiel de fluide parfait

incompressible, la force exercée sur l'obstacle est donnée par (A2.13), ce qui s'exprime par le paradoxe de D'Alembert. Cela tient à la topologie simplement connexe de l'espace où le problème est modélisé, domaine où le théorème de Lagrange ( $\Gamma = 0$ ) est vérifié.

Qu'en est-il dans un espace doublement connexe, comme c'est le cas pour un profil d'extension infinie (un cylindre de longueur infinie par exemple)?

On sait, avec le théorème (A2.7), que dans ce cas  $\Gamma$  n'est pas nulle et qu'elle peut même être multivaluée.

Nous allons voir le théorème suivant:

**Théorème A3.1** - La force exercée par l'écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible sur un profil cylindrique infini, ou force de Magnus, n'est pas nulle même en vitesse d'écoulement stationnaire, et elle dépend directement de la circulation  $\vec{\Gamma}$  :

$$\vec{F}(R) = -\rho \vec{\Gamma} \wedge \vec{U} \quad (\text{A3.1})$$

PREUVE – (figure A3.1)

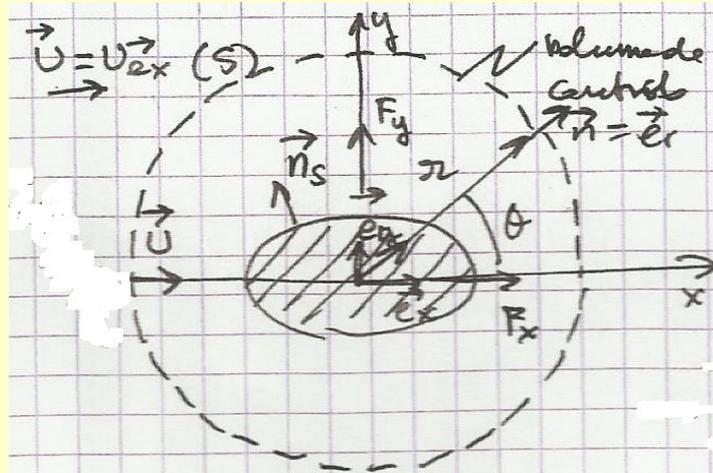


figure A3.1

A l'infini l'écoulement est  $\vec{U} = U \vec{e}_x$ . Le volume de contrôle qui est ici un cercle de rayon  $r$  entourant l'obstacle, est supposé en équilibre. En conséquence, le bilan des forces qui s'appliquent à l'intérieur est nul. Or les forces sont:

- $\vec{F}$  : force de l'obstacle solide sur le fluide
- $\vec{F}_P$  : force de pression
- $\vec{F}_M$  : force liée au flux de quantité de mouvement.

Donc, par hypothèse:  $\vec{F} + \vec{F}_P + \vec{F}_M = 0$

On s'intéresse à la force d'interaction fluide-solide, donc à:  $\vec{F} = -\vec{F}_P - \vec{F}_M$

A la surface (S) délimitant le volume de contrôle, distante de  $r$  à l'origine, nous avons:

- force de pression:  $\vec{F}_P(r) = \iint_S P \vec{n} dS(r)$  avec  $\vec{n} = \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$  puisque nous sommes en 2D. Or en 2D l'aire élémentaire  $dS$  se réduit à un élément d'arc  $r d\theta$  du cercle délimitant la surface de contrôle. Ainsi:  $\vec{F}_P = \int_0^{2\pi} P \vec{e}_r r d\theta$

- flux de quantité de mouvement à travers (S):  $\vec{F}_M = \iint_S (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{e}_r) r d\theta$

Il faut alors calculer  $P$  et  $\vec{V}$ .

$P$  est donnée par la seconde expression du théorème de Bernoulli (A2.10) applicable à l'ensemble du volume puisque l'écoulement est potentiel:

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 = P + \frac{1}{2} \rho V^2$$

où  $\partial\Phi/\partial t=0$  puisque l'écoulement est stationnaire.

Pour calculer  $\vec{V}$  on cherche la fonction potentiel des vitesses  $\Phi(r)$ , solution de l'équation de Laplace, avec pour conditions aux limites:

- vitesse nulle sur la paroi de l'obstacle du solide (indéformable):  $\vec{V} \cdot \vec{n}_S = 0 \rightarrow \vec{n}_S \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$  où  $\vec{n}_S$  normale à la surface du solide;
- vitesse égale à  $\vec{U}$  à l'infini:  $\vec{\nabla} \Phi(r=\infty) = \vec{U} = U \vec{e}_x$

On montre que la solution générale, avec ces conditions aux limites, en symétrie cylindrique, se développe ainsi:

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_1(r, \theta) + \Phi_2(\theta) + \Phi_3(r, \theta)$$

avec:

- $\Phi_1 = U r \cos \theta$  : correspond au champ de vitesse loin de l'obstacle, dans la direction  $\theta$
- $\Phi_2 = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$  : traduit l'influence de la circulation  $\Gamma$  autour de l'obstacle;
- $\Phi_3 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{e^{j k \theta}}{r^k}$  : termes multipolaires qu'il faut ajouter pour tenir compte de la forme du solide.

On peut les négliger puisque par la suite du calcul on fera  $r \rightarrow \infty$

Il s'ensuit:  $\vec{V}(r, \theta) = \vec{\nabla} \Phi(r, \theta) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$  avec  $\Phi = U r \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$ , donc:

$$\vec{V}(r, \theta) = U \cos \theta \vec{e}_r + \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} - U \sin \theta \right) \vec{e}_\theta \quad (\text{A3.2})$$

dont le carré du module  $V^2$ , qui intervient dans la seconde relation de Bernoulli, est:

$$V^2(r, \theta) = U^2 - \frac{\Gamma U}{\pi r} \sin \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2}$$

le dernier terme peut être négligé quand  $r$  devient très grand, il reste:  $V^2(r, \theta) \approx U^2 - \frac{\Gamma U}{\pi r} \sin \theta$

d'où la pression:

$$P = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \left( \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho \frac{\Gamma U}{2\pi r} \sin \theta \right) = P_\infty - \frac{1}{2} \frac{\rho \Gamma U}{\pi r} \sin \theta$$

et la force de pression:  $\vec{F}_p = \int_0^{2\pi} \left( P_\infty - \rho \frac{\Gamma U}{2\pi r} \sin \theta \right) \vec{e}_r r d\theta$

Avec  $\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta$  l'intégration donne:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho \Gamma U \vec{e}_y \quad (\text{A3.3})$$

La force de pression se réduit à une seule composante en  $\vec{e}_y$  perpendiculaire à l'axe de l'écoulement.

Déterminons à présent la force associée au flux de quantité de mouvement  $\vec{F}_M$ . Elle s'écrit:

$$\vec{F}_M = \int_0^{2\pi} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{e}_r) r d\theta$$

où  $\vec{V}$  est donnée par (A3.2). Par conséquent:  $\vec{V} \cdot \vec{e}_r = U \cos \theta$

Pour exprimer  $\vec{F}_M$  dans le repère trirectangle  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  on utilise les relations de

transformation des bases vectorielles: 
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de la vitesse, et après quelques calculs de l'intégrale, on arrive à:

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} \rho \Gamma U \vec{e}_y \quad (\text{A3.4})$$

on s'aperçoit que la force liée au flux de quantité de mouvement est, elle aussi, suivant le direction  $\vec{e}_y$  (A3.3) et (A3.4) fournissent la force totale exercée sur le solide:

$$\vec{F} = -(\vec{F}_P + \vec{F}_M) = -\rho \Gamma U \vec{e}_y \quad (\text{A3.5})$$

Comme  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$  et  $\vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$ , (A3.5) prend la forme classique:

$$\vec{F} = -\rho \vec{\Gamma} \wedge \vec{U} \quad (\text{A3.6})$$

- CQFD

On notera que:

- La composante de  $\vec{F}$  suivant  $\vec{e}_x$ , qui définit une force de traînée, est nulle ici:  $F_x = 0$ , pour un fluide parfait, incompressible, dans un volume doublement connexe.
- La composante de  $\vec{F}$  suivant  $\vec{e}_y$ , qui définit une force de portance, n'est pas nulle ici car on est en géométrie doublement connexe où  $\vec{\Gamma}$  n'est pas nulle comme on l'a vu au théorème (A2.7). En présence d'un profil d'extension infinie suivant  $O\vec{e}_z$ , cette portance prend ici le nom de **force de Magnus**:

$$F_y = -\rho \Gamma U \quad (\text{A3.7})$$

- La force de Magnus *n'existe pas* dans un volume simplement connexe pour un fluide parfait incompressible. Dans ce cas les forces de portance ne peuvent provenir que des effets de frottement (viscosité)! C'est cette condition qui lève le paradoxe de D'Alembert (A2.13).
- Attention: Dans (A3.6) et (A3.7) il s'agit d'une force par unité de longueur du cylindre dans la direction Oz puisque l'on a travaillé dans une section plane de l'obstacle.

## ANNEXE 4 – Force de Robins-Magnus créée sur une sphère rigide en rotation uniforme, par l'écoulement d'un fluide visqueux

### A4.1 – Généralités

La sphère tourne sur elle-même autour d'un axe quelconque portant la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  (figure A4.1):

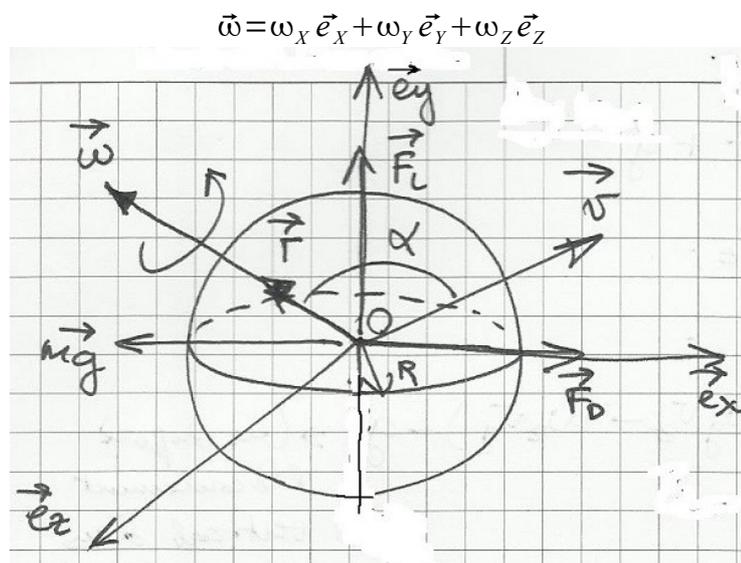


figure A4.1

La force de pesanteur (poids) est choisie portée par l'axe Ox, qui est donc la verticale (sur la figure A4.1 elle est représentée horizontalement). La direction de l'écoulement amont est choisie également suivant Ox, la force de traînée est donc aussi sur cet axe: nous sommes en configuration d'un objet sphérique soumis à un jet d'air vertical, et en rotation sur lui-même.

En 3D et en présence de frottement, la circulation telle que définie pour un fluide parfait potentiel, en espace doublement connexe, n'existe plus, mais on introduit son équivalent:

$$\vec{C} = \sigma \vec{\omega} \quad (\text{A4.0})$$

Cette définition sera justifiée, de manière simplifiée, au NB A4.2 ci-après.

On admet que la sphère est soumise à 3 forces:

- La traînée,  $\vec{F}_D$  (« drag »), de même sens que la vitesse, donc suivant Ox:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} C_D \rho A V \vec{V} = F_D \vec{e}_X \quad (\text{A4.1})$$

où: A aire de la section projetée de la sphère (maître-couple):  $A \sim \pi R^2$   
 $C_D$  coefficient de traînée, qui dépend éventuellement de  $\omega$

- La portance,  $\vec{F}_L$  (« lift »): obéit à une loi de type Magnus mais en présence de frottement:

$$\vec{F}_L = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad (\text{A4.2})$$

Précisons que le vecteur vitesse, dans (A4.1) et (A4.2) désigne cette fois la *vitesse relative* du solide dans le fluide et non plus celle de l'écoulement à l'infini.

Une démonstration simplifiée de (A4.2) et de (A4.0) est proposée en NB A4.2 ci-après.

#### Exemple A4.1: - Balle de golf

En ordre de grandeur:  $\frac{\sigma \omega}{m} \approx 0,25$  et  $\frac{\rho A}{m} = 0,04$  avec  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s$  ( $\rho_s$  masse volumique de la balle) et  $A = \pi R^2$ , donc  $\frac{\rho A}{m} = \frac{3\rho}{4R\rho_s} \approx 0,04$

- Le poids:  $m \vec{g} = -m g \vec{e}_X$

Écrivons les équations du mouvement de la sphère:

La vitesse relative de la sphère acquise sous l'action de ces 3 forces est:

$$\vec{V} = V_X \vec{e}_X + V_Y \vec{e}_Y + V_Z \vec{e}_Z$$

Accélération (principe fondamental de la dynamique):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C_D}{m} \rho A V \vec{V} - \frac{\sigma}{m} \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \vec{g}$$

en projetant sur les axes Ox, Oy, Oz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_X}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} V V_X + \frac{\sigma}{m} (\omega_Y V_Z - \omega_Z V_Y) - g \\ \frac{dV_Y}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} V V_Y + \frac{\sigma}{m} (\omega_Z V_X - \omega_X V_Z) \\ \frac{dV_Z}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} V V_Z + \frac{\sigma}{m} (\omega_X V_Y - \omega_Y V_X) \end{array} \right. \quad (\clubsuit)$$

avec  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

**NB A4.2** – démonstration heuristique de (A4.2)

Choisissons l'axe de rotation propre de la sphère portée par Oz:  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  (tout en simplifiant les calculs, ce choix ne modifie pas le principe du raisonnement).

Bien que le fluide ne soit pas parfait (présence de la viscosité), on peut retrouver de manière heuristique l'expression de  $\vec{F}_L$  par l'emploi du théorème de Bernoulli corrigé ensuite des effets de frottement (figure A4.2).

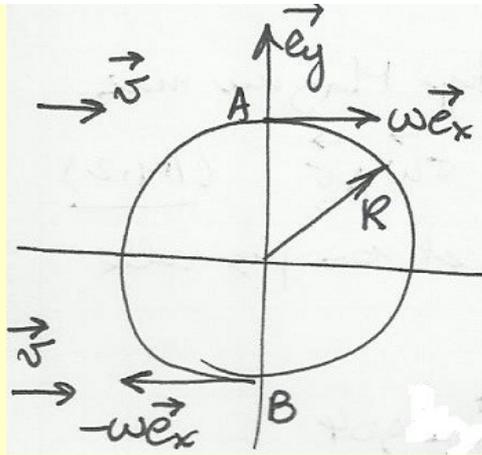


figure A4.2

En A: pression  $P_A$ , vitesse relative par rapport à la rotation du solide:

$$u_{xA} = V + R\omega$$

En B: pression  $P_B$ , vitesse relative par rapport à la rotation du solide:

$$u_{xB} = V - R\omega$$

(attention: rappel,  $V$  vitesse relative du déplacement global de la sphère par rapport à l'écoulement du fluide à l'infini,  $u_x$ : vitesse d'une particule fluide relativement au déplacement global de la sphère et à sa rotation propre, lorsque cette particule est infiniment proche de la sphère).

Relation de Bernoulli entre A et B supposés sur une même ligne de courant:

$$P_A + K_0 \frac{1}{2} \rho u_{xA}^2 = P_B + K_0 \frac{1}{2} \rho u_{xB}^2$$

où  $K_0$  facteur introduit pour tenir compte des effets du frottement. Alors la différence de pression entre A et B s'écrit, en valeur absolue:

$$|P_A - P_B| = 2 K_0 \rho R \omega V$$

Remarquons que, en l'absence de frottement ( $K_0 = 0$ ), en topologie 3D simplement connexe, on aurait cette différence de pression nulle donc pas de portance, comme on l'avait annoncé.

La force exercée sur le solide s'en déduit:

$$F_L = |P_A - P_B| A = 2 K_0 \rho R A \omega V = \sigma \omega V$$

avec  $\sigma = 2 K_0 \rho R A$

$F_L$  est le module d'une force de portance (car liée à une différence de pression entre un extrados A et un intrados B), celle-ci est donc le vecteur  $\vec{F}_L = F_L \vec{e}_y$  et puisque  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  et  $\vec{V} \approx V \vec{e}_x$ , où  $\vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$  il vient:

$$\vec{F}_L = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{V} = \vec{C} \wedge \vec{V}$$

qui est de la forme (A4.2) et l'équivalent de la circulation est  $\vec{C} = \sigma \vec{\omega}$  (A4.0). - CQFD

Dans les cours théoriques sur le jeu de tennis, la formule (A4.2) est souvent présentée sous la forme:

$$F_m = \alpha n V$$

avec  $F_m = F_L$  force dite de Magnus (dans le langage courant),  $\alpha = \sigma$  coefficient relatif à la densité de l'air et aux propriétés de frottement de la balle,  $V$  vitesse de la balle,  $n = \omega/2\pi$  nombre de tours par seconde

de la balle <sup>(11)</sup>.

#### A4.2 – Coefficient de traînée et coefficient de portance

On a introduit le coefficient de traînée « drag coefficient »  $C_D$  avec (A4.1). La force de portance  $\vec{F}_L$  « lift force » a été introduite pour la sphère comme vérifiant une forme semblable à celle de la force de Magnus (A4.2). Or elle ne peut exister qu'en présence des forces de frottement (effets de la viscosité). On sait que pour des nombres de Reynolds élevés les forces exercées sur un solide dues au frottement (qu'il s'agisse de portance ou de traînée) sont toujours de la forme:

$$F_k = \frac{1}{2} \rho C_k A_k V^2$$

où  $A_k$  est la section projetée du solide dans la direction  $\vec{e}_k$  ( $k = X, Y, Z$ ) et  $C_k$  le coefficient de cette force pour cette même direction  $k$ ;  $C_k$  dépend généralement de  $\omega$  et de  $V$ . On doit donc exprimer la force de portance  $\vec{F}_L$  sous cette forme <sup>(12)</sup>:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L A V^2 \quad (\text{A4.3})$$

Sous quelle condition, alors, (A4.3) équivaut-elle à (A4.2)?

Pour cela, nous allons évaluer, de manière heuristique, la relation entre  $C_L$ ,  $\omega$  et  $V$ :

**Proposition A4.3** – Le coefficient de portance  $C_L$ , qui intervient dans (A4.3), est relié à  $\omega$ ,  $V$  et à l'angle  $\alpha = (\vec{\omega}, \vec{V})$  entre les vecteurs vitesse angulaire et vitesse relative du solide (figure A4.1) par:

$$C_L = \frac{1}{2 + \frac{V}{R\omega \sin \alpha}} \quad (\text{A4.4})$$

On a donc  $0 < C_L < 1/2$ .

**PREUVE** (heuristique) – En toute rigueur, pour démontrer (A4.4), il faut calculer (A4.2) en coordonnées sphériques, ou en employant le trièdre de Frénet (repère mobile défini par la normale et la tangente en un point de la sphère) et identifier le résultat avec (A4.3).

On peut aussi retrouver ce résultat de la manière simplifiée suivante. On écrit (A4.3) en un point quelconque de la sphère, situé sur un méridien, à la latitude  $\theta$ , où le champ de vitesse est la combinaison de la vitesse d'écoulement et de la vitesse de rotation de la sphère sur elle-même, exprimé dans le repère galiléen (Oxyz):

$$F_L = 2 K_0 \rho A R V \omega \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho C_L A \vec{V}^2$$

avec:

$$\vec{V}(\theta) = (V + R\omega \sin \alpha \sin \theta) \vec{e}_X + R\omega \sin \alpha \cos \theta \vec{e}_Y$$

donc:

$$\vec{V}^2 = U^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + 2 R U \omega \sin \alpha \sin \theta$$

Le « spin parameter » est défini par:

$$S = \frac{R\omega}{V} \sin \alpha \quad (\text{A4.5})$$

il évalue l'importance relative de la rotation propre de la sphère et de son déplacement dans le fluide. Si l'on se place dans le cas où  $S \ll 1$  (vitesse d'écoulement plus importante que la vitesse de rotation, ce qui donne aussi l'approximation  $V \approx U$ ), on obtient l'expression approchée pour  $F_L$ :

11 Alain Pizzinato: « Préparation épreuve 3 de Tennis – Les effets de balle en fond de court, description, analyse et utilisation »

12 Pour une sphère on a  $A_k = A$  ( $k = X, \text{ ou } Y$ ); pour la traînée  $F_D$  on a  $C_X = C_D$  et pour la portance  $F_L$  on a  $C_Y = C_L$

$$F_L = 2 K_0 \rho A S V^2 \approx \frac{1}{2} \rho C_L A U^2 (1 + 2 S \sin \theta)$$

$F_L$  prend la valeur maximale en  $\theta = \pi/2$ , c'est-à-dire au sommet de l'extrados. On a donc en ordre de grandeur:  $\theta = \pi/2 \rightarrow \sin \theta = 1 \rightarrow C_L = 4 K_0 \frac{S}{1+2S}$

On peut estimer  $K_0$  en écrivant, dans  $F_L = |P_A - P_B| A = 2 K_0 \rho R A \omega V$  que la surface sur laquelle s'exerce la pression est, par symétrie, celle de la demi-sphère:  $A = 2\pi R^2$ . En effet, contrairement à une force de traînée pour laquelle  $A$  est la section projetée, la force de Robins-Magnus s'applique à la surface de l'enveloppe sphérique car celle-ci se déplace avec la rotation autour de son axe. Il s'ensuit:

$$F_L = 4\pi K_0 \rho V \omega R^3$$

pour des  $S$  faibles on a donc l'approximation  $C_L \approx 4 K_0 \frac{R\omega}{V} = 4 K_0 S$  mais on sait aussi que lorsque  $S$  est petit  $C_L$  est pratiquement égal à  $S$ , donc  $4K_0 \rightarrow 1$ . Pour  $S$  quelconque on a donc:

$$C_L = \frac{1}{2 + \frac{1}{S}} \quad (\text{A4.4bis})$$

qui est (A4.4). - CQFD

Les relations (A4.4) ou (A4.4bis) sont valides uniquement pour des nombres de Reynolds grands et des spin parameters petits. Ordres de grandeur:  $100 \leq \omega \leq 300 \text{ rd/s}$   $V \leq 40 \text{ m/s}$

De nombreuses formules expriment  $C_L$  et  $C_D$  en fonction de  $S$  et du nombre de Reynolds. Pour le coefficient de traînée  $C_D$ , citons:

**Proposition A4.4 (formule de Stepanek)** – Le coefficient de traînée  $C_D$  pour une sphère solide en rotation uniforme sur elle-même, en déplacement relatif dans un fluide avec la vitesse  $\vec{V}$  est reliée à  $S$  par:

$$C_D(S) = C_0 + \frac{1}{\left[ A_0 + \left( \frac{B_0}{S} \right)^{5/2} \right]^{2/5}} \quad (\text{A4.6})$$

où  $C_0$ ,  $A_0$  et  $B_0$  sont déterminés expérimentalement.

La démonstration détaillée de (A4.6) est donnée dans [Stepanek, 1988].

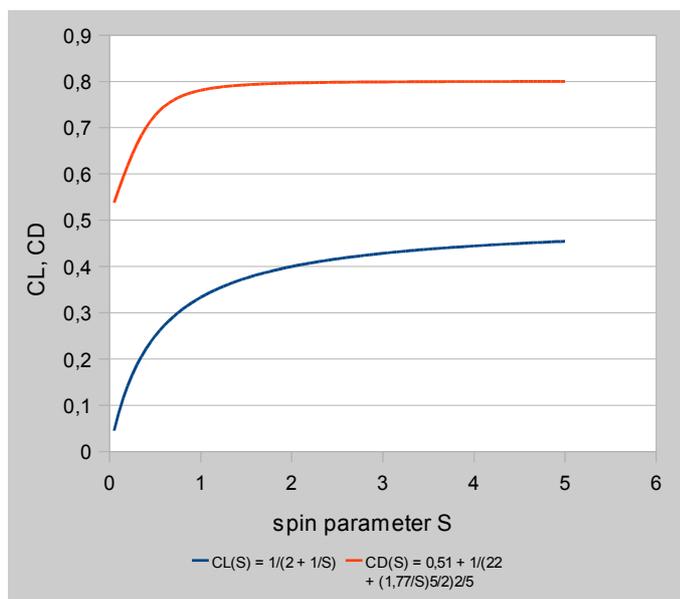


figure A4.3 – coefficients de portance  $C_L$  et de traînée  $C_D$  d'une sphère en rotation (relations (A4.4bis) et (A4.6))

Ordres de grandeur: Balle de tennis:  $C_0 = 0,51$ ,  $A_0 = 22$ ,  $B_0 = 1,77$ . L'allure des courbes  $C_L(S)$  et  $C_D(S)$  est donnée figure A4.3.

(A4.4bis) et (A4.6) prennent les expressions approchées pour  $S$  petit:

$$\begin{aligned} C_L(S) &\approx S \\ C_D(S) &\approx C_0 + \frac{S}{B_0} \quad (\text{A4.7}) \end{aligned}$$

L'expérience montre que la vitesse de la sphère reste quasiment constante en module:  $V \sim U$ , ce qui justifie l'emploi de  $S = R\omega/U$  (pour  $\alpha = \pi/2$ ,  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ ).

Les équations du mouvement ( $\clubsuit$ ) se simplifient alors considérablement, ce que nous allons voir au paragraphe A4.3 ci-après.

### A4.3 – Équations du mouvement approchées de la sphère

Avec les approximations (A4.7), ainsi que  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  ( $\alpha = \pi/2$ ) et  $\vec{U} = U \vec{e}_x$ ,  $V \approx U$  les équations ( $\clubsuit$ ) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{1}{2} C_D \frac{\rho A}{m} U V_x - \frac{\sigma \omega}{m} V_y - g \\ \frac{dV_y}{dt} &= -\frac{1}{2} C_D \frac{\rho A}{m} U V_y + \frac{\sigma \omega}{m} V_x \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\frac{1}{2} C_D \frac{\rho A}{m} U V_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.8})$$

la dernière égalité indique, par hypothèse, que la sphère se déplace dans le plan vertical Oxy.  $\sigma\omega$  est algébrique: si  $\sigma\omega > 0$  la sphère est liftée, si  $\sigma\omega < 0$  la sphère est coupée (en jargon de tennis).

Conditions initiales:  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $V_x(0) = U$ ,  $V_y(0) = 0$

On pose:

$$f = \frac{1}{2} C_D \frac{\rho A}{m} U \quad K = \frac{\sigma \omega}{m} \quad (\text{A4.8bis})$$

(A4.8) se réécrit:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -f V_x - K V_y - g \\ \frac{dV_y}{dt} &= -f V_y + K V_x \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

On cherche une solution de la forme:  $V_x = V_1 + b_1 e^{at}$  que l'on injecte dans (A4.9), et en éliminant les termes exponentiels en  $t$ , on obtient un système de 2 équations linéaires en  $V_x$  et  $V_y$ :

$$\begin{aligned} (a+f) V_x + K V_y &= a V_1 - g \\ -K V_x + (a+f) V_y &= a V_2 \end{aligned}$$

qui doit être vérifié quelles que soient les fonctions  $V_x$  et  $V_y$ , son déterminant doit donc être nul (<sup>13</sup>):

$$\begin{vmatrix} a+f & K \\ -K & a+f \end{vmatrix} = 0 = (a+f)^2 + K^2 = (a+f)^2 - (jK)^2 = 0 \rightarrow ((a+f) - jK)((a+f) + jK) = 0$$

<sup>13</sup> On peut s'en convaincre facilement en exprimant une première relation entre  $V_x$  et  $V_y$  puis en éliminant  $V_x$  par la seconde relation, ce qui donne une relation facteur constant de  $V_y$  égal à une autre constante, valable quel que soit  $V_y$ , ce qui donne le facteur constant égal à zéro (donc déterminant nul).

de solutions:  $a = -f \pm jK$ . On choisit « + » donc:

$$a = -f + jK \quad (\text{A4.10})$$

(A4.9) se réécrit alors:

$$\begin{aligned} e^{at}(b_1 a + f b_1 + K b_2) &= -f V_1 - K V_2 - g \\ e^{at}(b_2 a + f b_2 - K b_1) &= -f V_2 + K V_1 \end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées indépendamment de t, ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} b_1 a + f b_1 + K b_2 &= 0 \quad (A) \\ b_2 a + f b_2 - K b_1 &= 0 \quad (B) \end{aligned}$$

On fait  $b_2(A) - b_1(B) = 0 = K(b_2^2 + b_1^2) = 0$  d'où:

$$b_2 = j b_1 \quad (\text{A4.10 bis})$$

et aussi: 
$$\begin{aligned} f V_1 + K V_2 &= -g \\ K V_1 - f V_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} V_2 &= \frac{K}{f} V_1 \\ \left(\frac{K^2}{f} + f\right) V_1 &= -g \end{aligned}$$

soit:

$$V_1 = -\frac{g f}{K^2 + f^2} \quad V_2 = \frac{K}{f} V_1 = -\frac{K g}{K^2 + f^2} \quad (\text{A4.11})$$

Les conditions initiales  $t = 0 \rightarrow V_x = U$  et  $V_y = 0$  donnent tout calcul fait à partir de (A4.11) et (A4.10bis):

$$\begin{aligned} A_1 &= U - V_1 \\ B_1 &= -V_2 \end{aligned} \quad (\text{A4.12})$$

En intégrant deux fois les équations du mouvement (A4.8), avec les relations précédentes donnant les coefficients, on obtient, tous calculs faits:

$$\begin{aligned} x(t) &= V_1 t - (U - V_1) \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} (f \cos Kt - K \sin Kt) + V_2 \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} (f \sin Kt + K \cos Kt) + x_0 \\ y(t) &= V_2 t - (U - V_1) \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} (f \sin Kt + K \cos Kt) - V_2 \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} (f \cos Kt - K \sin Kt) + y_0 \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration  $x_0$  et  $y_0$  sont déterminées par les conditions initiales:  $t = 0 \rightarrow x = 0$  et  $y = 0$ , d'où l'équation de la trajectoire, paramétrée par le temps t:

$$\begin{aligned} x(t) &= V_1 t + \frac{(U - V_1) f - V_2 K}{K^2 + f^2} + \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} \cos Kt (K V_2 - f(U - V_1)) + \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} \sin Kt (f V_2 + K(U - V_1)) \\ y(t) &= V_2 t + \frac{(U - V_1) f + V_2 K}{K^2 + f^2} - \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} \cos Kt (f V_2 + K(U - V_1)) + \frac{\exp(-ft)}{K^2 + f^2} \sin Kt (K V_2 - f(U - V_1)) \end{aligned} \quad (\text{A4.13})$$

où  $V_1$  et  $V_2$  données par (A4.11), f et K par (A4.8bis): on voit que K dépend directement de la vitesse angulaire, et que f dépend de S:

$$\begin{aligned} K &= \beta \omega \quad f = \frac{\beta}{R} C_D(S) U \\ \beta &= \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s} \end{aligned} \quad (\text{A4.14})$$

où  $\rho_s$  masse volumique de l'obstacle solide. (A4.13) s'exprime en définitive:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{K^2 + f^2} (-fgt + (g + fU)(1 - \exp(-ft) \cos Kt) + KU \exp(-ft) \sin Kt) \\ y(t) &= \frac{1}{K^2 + f^2} (-Kgt + KU(1 - \exp(-ft) \cos Kt) + (g + fU) \exp(-ft) \sin Kt) \end{aligned} \quad (\text{A4.15})$$

La figure A4.4 montre deux exemples de trajectoires parcourues en 1,5 secondes, pour une sphère très légère de masse volumique  $25 \text{ kg/m}^3$  et de diamètre 10 cm, pour deux valeurs de  $S$ , l'une égale à 3, l'autre égale à 0,045.

A noter que, dans le cas où se forment des tourbillons de Karman, si l'on considère que leur échappement alterné, effectué avec la fréquence de Strouhal, induit un couple de rotation de la sphère avec une vitesse angulaire du même ordre que cette fréquence multipliée par  $2\pi$ , alors il existe une valeur particulière du spin parameter  $S$  pour laquelle la combinaison des deux phénomènes (effet Robins-Magnus et allées de Karman) est maximale:  $S_r$  (nombre de Strouhal) =  $fD/U = R\omega/\pi U = S/\pi \sim \alpha$  (cf. relation (A1.30)) donc une valeur « critique » du spin parameter de l'ordre de  $\alpha\pi$ . Cette combinaison n'est évidemment pas prévue dans le modèle précédent.

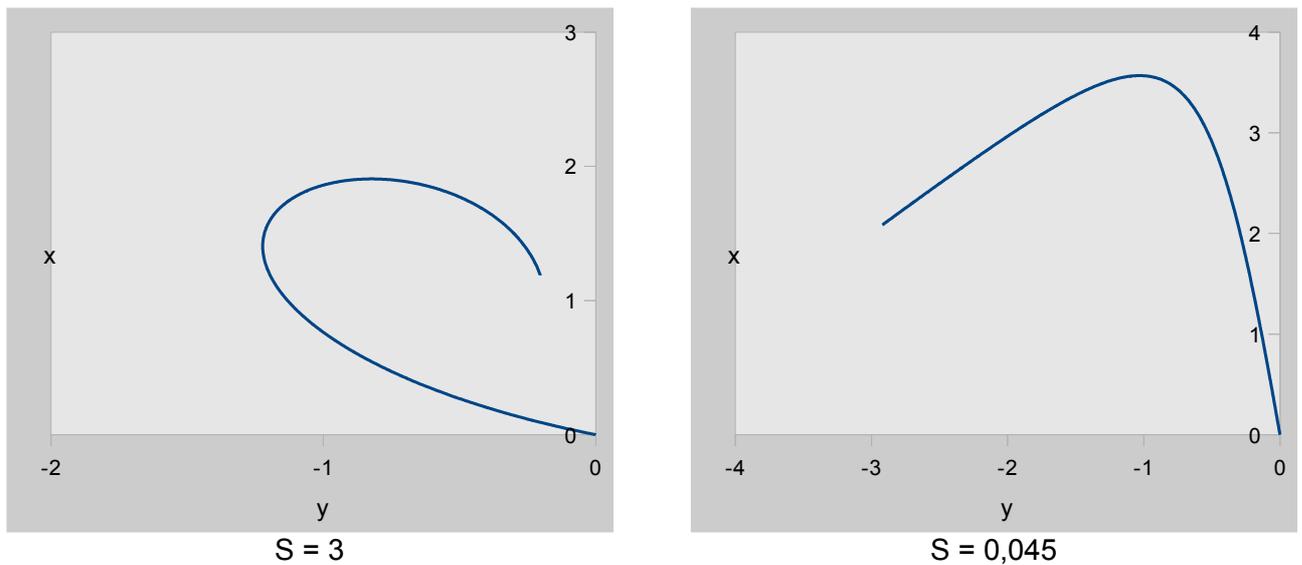


Figure A4.4

## ANNEXE 5 – Démonstration (heuristique) du théorème de Stokes

Nous avons vu dans les annexes l'importance du théorème de Stokes dans les différents calculs. En fait, ce théorème est le cas particulier d'un théorème général sur les formes différentielles, permettant de calculer l'intégration d'une forme différentielle sur une variété [Deheuvels 1993; Marsden et Ratiu 2003]. Mais je propose ici une démonstration simplifiée qui donne l'occasion d'introduire de façon intuitive des notions comme une 2-forme, le produit de Clifford, la dérivée extérieure. Cette « démonstration » est effectuée sur une surface élémentaire dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ , mais sa logique peut s'étendre à des espaces plus généraux.

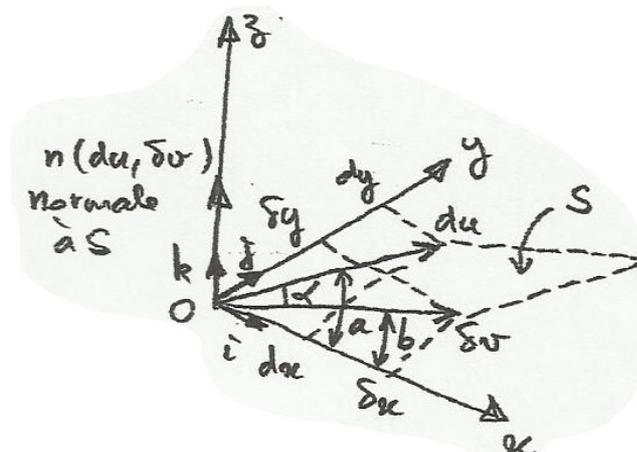


figure A5.1

On part de l'exemple d'une surface plane dans  $\mathbf{R}^2$  générée par deux vecteurs infinitésimaux  $du$  et  $\delta v$  (figure A5.1) de coordonnées:

$$du = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \quad \delta v = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'aire de cette surface élémentaire est notée  $\sigma(du, \delta v)$ . Par construction géométrique, elle vaut:

$$\sigma = \|\delta v\| \|du\| \sin \alpha$$

avec  $\alpha = a - b \rightarrow \sin \alpha = \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ .

Or:

$$\sin a = \frac{dy}{\|du\|} \quad \sin b = \frac{\delta y}{\|\delta v\|} \quad \cos a = \frac{dx}{\|du\|} \quad \cos b = \frac{\delta x}{\|\delta v\|}$$

d'où l'aire élémentaire de la surface engendrée par  $du$  et  $\delta v$ :

$$\sigma(du, \delta v) = dy \delta x - dx \delta y \quad (\text{A5.1})$$

C'est un scalaire. On désigne par  $i, j, k$  les vecteurs unitaires du repère orthonormé (Oxyz). Soit la normale à  $S$  en  $O$ :  $n(du, \delta v) = \sigma(du, \delta v)k = du \times \delta v$  c'est le produit vectoriel de  $du$  et  $\delta v$ , donc un vecteur. La quantité  $\sigma(du, \delta v) = du \wedge \delta v = k \cdot du \times \delta v$  est un scalaire appelé **produit extérieur** des vecteurs  $du$  et  $\delta v$ .

$\sigma$  définit une **2-forme antisymétrique** sur l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^2$ , c'est-à-dire une application bilinéaire non commutative dont les sources sont des vecteurs et les images des scalaires:

$$\begin{aligned} \sigma : (du, \delta v) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \sigma(du, \delta v) &= du \wedge \delta v \\ \sigma(du, \delta v) &= -\sigma(\delta v, du) \end{aligned} \quad (\text{A5.2})$$

### **NB: produit de Clifford**

Un produit de Clifford sur  $\mathbf{R}^2$  est défini par:  $(du, \delta v) \rightarrow du \delta v = du \cdot \delta v + du \wedge \delta v$

C'est un scalaire. Ce produit définit sur  $\mathbf{R}^2$  une algèbre, appelée algèbre de Clifford (ou algèbre vectorielle).

Toute 2-forme sur  $\mathbf{R}^2$  est décomposable en une partie symétrique  $du \cdot \delta v$  appelée **produit intérieur** (c'est le produit scalaire habituel de deux vecteurs) et une partie antisymétrique  $du \wedge \delta v$  appelée **produit extérieur** (c'est le module du produit vectoriel habituel de deux vecteurs).

En particulier:  $du du = du \cdot du = \|du\|^2$  <sup>(14)</sup>

Toute grandeur  $f(x,y,z)$  de densité surfacique  $\rho$  définit une 2-forme antisymétrique:

$$df = \rho dS = \rho du \wedge \delta v = \rho \sigma(du, \delta v)$$

Le bord de  $S$  (frontière délimitant  $S$ ) est noté  $\partial S$ .

Soit un champ de vecteurs traversant  $S$  et s'appuyant sur son bord  $\partial S$ :  $V(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  où  $M$  parcourt  $S$ ,

y compris son bord  $\partial S$ : quelle est la circulation  $C_{\partial S}(V)$  le long de  $\partial S$ :  $C_{\partial S}(V) = \int_{\partial S} V(M) \cdot dl(M)$  ?  
(figure A5.2)

14 Un des grands intérêts de l'algèbre de Clifford réside dans sa puissance à exprimer de manière élégante le formalisme de la physique quantique, notamment parce qu'elle inclut l'algèbre des spineurs et introduit naturellement des invariants (comme par exemple l'hypercharge), qu'une approche classique introduit plus artificiellement [Casanova, 1976]

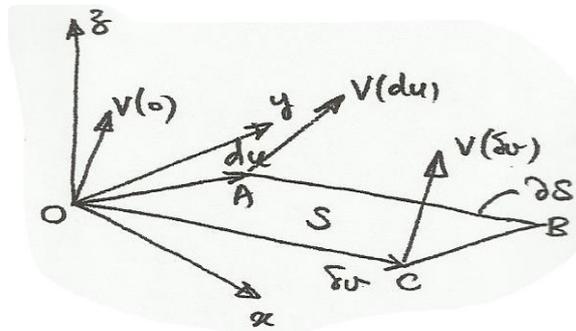


figure A5.2

$V(M) \cdot dl(M)$  est une 1-forme (agissant sur  $dl$ ) notée  $\omega$ :

$$\omega : dl \rightarrow \omega(dl) = V(M) \cdot dl(M)$$

Au premier ordre:  $V(M) \cdot dl(M) = V(0) \cdot du + V(du) \cdot \delta v - V(\delta v) \cdot du - V(0) \cdot \delta v$   
avec:

$$V(du) = \begin{pmatrix} X(du) \\ Y(du) \\ Z(du) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy \\ \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \\ \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \end{pmatrix}$$

d'où:

$$V(du) \cdot \delta v = \left( \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy \right) \delta x + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) \delta y$$

de même:

$$V(\delta v) \cdot du = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \delta x + \frac{\partial X}{\partial y} \delta y \right) dx + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial Y}{\partial y} \delta y \right) dy$$

on obtient alors:

$$V(M) \cdot dl = V(0) \cdot (du - \delta v) + \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dy \delta x + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \delta y dx$$

$$V(M) \cdot dl = V(0) \cdot (du - \delta v) + \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) (dy \delta x - \delta y dx)$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité est une 2-forme égale au produit de  $\left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$

par la 2-forme  $\sigma(du, \delta v) = dy \delta x - \delta y dx = du \wedge \delta v$  : c'est-à-dire  $d\omega(l) = \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) du \wedge \delta v$

Quant au premier terme, son intégrale sur le trajet fermé (OABCO) est nulle:  $\int_{\partial S} V(0) \cdot (du - \delta v) = 0$

L'intégration de  $V(M)$  sur un parcours fermé (ou circulation), se réduit alors à:

$$\int_{\partial S} V(M) \cdot dl(M) = \int_{\partial S} \omega(l) = \int_S \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) du \wedge \delta v$$

C'est le théorème de Stokes: la circulation d'une 1-forme  $\omega$  sur le bord  $\partial S$  d'une variété différentielle  $S$  est égale à l'intégrale sur la variété  $S$  de sa dérivée extérieure  $d\omega$  qui est une 2-forme:

$$\int_{\partial S} \omega(l) = \int_S d\omega(l) \quad (A5.3)$$

$\left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \nabla \wedge V$  est scalaire, auquel est associé le rotationnel du champ  $V$ , qui est vecteur:

$\text{rot } V(M) = \nabla \times V(M)$ , et définit la dérivée extérieure de la 1-forme  $\omega$ :  $\nabla \omega = \nabla \wedge V(M)$  (15).

La formule de Stokes se généralise sans peine à  $\mathbf{R}^3$  (de même que la surface élémentaire  $dS = du \wedge \delta v$  dans  $\mathbf{R}^2$  se généralise en un volume élémentaire  $d\Omega = du \wedge \delta v \wedge \Delta w = d\sigma$  dans  $\mathbf{R}^3$ , engendré par les vecteurs  $du, \delta v, \Delta w$ ):

$$\int_{\partial\Omega} \omega(l) = \int_{\Omega} \nabla \omega(l) du \wedge \delta v \wedge \Delta w = \int_{\Omega} d\omega(l)$$

où  $\nabla \omega = \text{div } V(M) = \nabla \cdot V(M)$

$d\omega(l) = \text{div } V(M) d\sigma(du, \delta v, \Delta w)$  est une forme maximale fermée dans  $\mathbf{R}^3$  car sa dérivée extérieure est nulle:  $d(d\omega) = 0$ . On montre, réciproquement, que toute forme maximale  $\alpha$  dans un espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$ , c'est-à-dire d'expression  $\alpha = \rho d\sigma$ , vérifie  $d\alpha = 0$  (elle est fermée). Dans  $\mathbf{R}^3$  cela se traduit par:  $\nabla \text{div } V(M) = 0$  pour tout vecteur  $V$ .

Une autre conséquence du théorème de Stokes est que si un champ de vecteur définit un flux conservatif (c'est-à-dire de circulation nulle sur un contour fermé, ou un bord  $\partial S$ ,  $C_{\partial S}(V) = 0$ , alors son rotationnel est nul,  $\text{rot } V(M) = 0$ , donc  $V(M)$  dérive d'un potentiel scalaire  $V(M) = \nabla \varphi$ .

## Références

- Alam Firoz, Subic Aleksandar, Naser Jamal, Rasul M.G. and Khan M.M.K.: A Study of Spin Effects on Tennis Ball Aerodynamics - WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, Issue 3, Volume 3, July 2008
- Always Leroy Ward: Aerodynamics of a curve-ball, an investigation of the effects of angular velocity on the baseball trajectories – Thèse, University of California Davis, 1998
- Takeshi Asai<sup>1</sup> and Kazuya Seo: Aerodynamic drag of modern soccer balls - SpringerPlus 2013, 2:171, <http://www.springerplus.com/content/2/1/171>
- T. Asai, K. Seo, O. Kobayashi and R. Sakashita: Fundamental aerodynamics of the soccer ball - ISEA Sports Engineering (2007) 10, 101–110
- Casanova Gaston: L'algèbre vectorielle – Que sais-je? PUF 1976
- Charlier A., Bérard A., Charlier M-F.: Mécanique analytique – Ellipses, éd. Marketing, 1989
- Rod Cross, Crawford Lindsey: Tennis Ball Trajectories, Aerodynamic Drag and Lift in Tennis Shots – Tennis Warehouse University, December 22, 2013 - [http://twu.tenniswarehouse.com/learning\\_center/aerodynamics2.php](http://twu.tenniswarehouse.com/learning_center/aerodynamics2.php)
- Deheuvels René: Tenseurs et spineurs – PUF 1993
- Guillaume Dupeux, Anne Le Goff, David Quéré and Christophe Clanet: The spinning ball spiral - New J. Phys. 12 (2010) 093004
- Dupeux Guillaume, Cohen Caroline, LeGoff Anne, Quéré David, Clanet Christophe: Footballcurves - Journal of Fluids and Structures 27(2011)659–667
- John Eric Goff<sup>1</sup> and Matt J Carré: Soccer ball lift coefficients via trajectory analysis - Eur. J. Phys. 31 (2010) 775–784
- S.R. Goodwill, S.B. Chin, S.J. Haake: Aerodynamics of spinning and non-spinning tennis balls - Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 92 (2004) 935–958
- Guyon E., Hulin J-P., Petit L.: Hydrodynamique physique – EDP Sciences, CNRS éd. 2001

---

15 Noter que, selon nos notations habituelles, le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  était noté dans le reste de l'article par  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , avec les vecteurs indiqués par une flèche, tandis que dans cette annexe 5 le symbole  $\wedge$  désigne le produit extérieur (qui donne un scalaire), et les vecteurs sont représentés sans flèches !

- Kensrud Jeffrey Ryan: Determining Aerodynamic Properties of Sports Balls in situ – Thesis, Master of Science in Mechanical Engineering – Washington State University, Department of Mechanical and Materials Engineering, August 2010
- A. Kharlamov, Z. Chara, P. Vlasak: Magnus and Drag Forces Acting on Golf Ball - Colloquium FLUID DYNAMICS 2007 Institute of Thermomechanics AS CR, v. v. i., Prague, October 24 - 26, 2007
- Landau L., Lifchitz E.: Mécanique des fluides – éd. Mir 1971, 3e éd. Mir-Ellipses 1994
- Lukerchenko N., Piatsevich S., Chara Z., Vlasak P. : 3D Numerical model of the spherical particle saltation in a channel with a rough fixed bed - J. Hydrol. Hydromech., 57, 2009, 2, 100–112
- Nikolay Lukerchenko, Ibrahima Keita, Yury Kvurt, Jiri Miles: Experimental evaluation of the drag torque, drag force and magnus force acting on a rotating prolate spheroid - Colloquium FLUID DYNAMICS 2010 Institute of Thermomechanics AS CR, v.v.i., Prague, October 20 - 22, 2010
- Magnus G. (1853) Über die Abweichung der Geschosse, und: Über eine abfallende Erscheinung bei rotirenden Körpern Annalen der Physik 164 (1) 1–29
- Marsden Jerrold E., Ratiu Tudor S.: Introduction to Mechanics and Symmetry – Springer 2003
- Jason Martin, Lloyd V. Smith\*, Jeffery R. Kensrud: Drag on sports balls using Doppler radar - 9th Conference of the International Sports Engineering Association (ISEA), Procedia Engineering 00 (2011) 000–000, [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
- Alan M. Nathan: The effect of spin on the flight of a baseball - 2008 American Association of Physics Teachers
- Rieutord Michel: Une introduction à la mécanique des fluides – Masson, 1997
- Garry Robinson and Ian Robinson: The motion of an arbitrarily rotating spherical projectile and its application to ball games - Phys. Scr. 88 (2013) 018101 (17pp)
- Rocard Yves: L'instabilité en mécanique – Masson, 1954
- Stepanek A. (1988) The aerodynamics of tennis balls - the topspin lob. Am J Phys 56(2):138-142