



Frédéric Elie on
ResearchGate

Spineurs et algèbre vectorielle en physique quantique ; application à l'équation de Dirac

Frédéric Elie

octobre 2017

*« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980*

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

Abstract : L'algèbre vectorielle est un outil mathématique qui permet de traduire sous forme d'opérations algébriques, dans des espaces adaptés, les concepts de la géométrie. A l'origine, les premières approches en ce sens furent données par W. R. Hamilton qui inventa les quaternions (généralisation à l'espace géométrique des propriétés algébriques des nombres complexes), et H. Grassmann (1844) qui définit les produits extérieurs et intérieurs des vecteurs (généralisation des produits vectoriels et des produits scalaires). Ces deux approches furent synthétisées par W. K. Clifford sous forme d'une algèbre qui porte son nom, appelée encore algèbre vectorielle (1878). Les éléments de l'espace vectoriel auquel sont adjointes les opérations qui en font une algèbre (au sens de la théorie des ensembles), généralisent la notion de vecteur et sont appelés nombres de Clifford.

L'intérêt immense de recourir à l'algèbre vectorielle est dans la possibilité qu'elle offre de découvrir et d'interpréter de nouvelles propriétés en géométrie et en physique que la seule application de la géométrie « classique » ne permettait pas. Par exemple : les inversions et rotations en géométrie, les équations de Lorentz en électrodynamique, la relativité restreinte, l'équation de Dirac qui généralise les équations d'onde de la mécanique quantique dans un espace de fonctions d'onde des spineurs (et qui introduit « naturellement » la notion de spin qui, au départ, était introduite « ad hoc » à partir des observations des électrons comme une grandeur physique supplémentaire). Par ailleurs, des études envisagent aussi d'appliquer l'algèbre vectorielle pour un espace-temps courbe tel qu'il existe en relativité générale (ou théorie relativiste de la gravitation), élargissant ainsi l'équation de Dirac dans un espace courbe.

Mais il faut souligner que des propriétés nouvelles, comme celles que l'on rencontre pour les nucléons en présence du champ pionique, sont prédites et interprétées grâce à l'élargissement qu'offre l'algèbre vectorielle, là où l'approche par les spineurs (comme en théorie de Dirac) ne le permettait pas.

De l'algèbre de Clifford, on déduit l'existence des spineurs en tant qu'idéal (au sens de la théorie des ensembles) de la structure d'anneau associé à cette algèbre, et l'on sait l'importance du concept de spineur en physique quantique relativiste (théorie de Dirac). Mais comme on l'a souligné précédemment, elle n'en forme qu'un sous-domaine. Cette définition abstraite des spineurs peut sembler peu parlante. Heureusement, il est possible de les introduire aussi par des opérations très simples dans un espace géométrique, telle que la projection stéréographique, ce qui rend sa compréhension plus concrète. De fait, la théorie des spineurs, sans référence à l'algèbre de Clifford, fut inventée par Élie Cartan (1938), tandis que Wolfgang Pauli fut le premier à poser que la fonction d'onde d'un électron était représentée par un vecteur à deux composantes complexes, c'est-à-dire un spineur dans l'espace 3D (1927).

De sorte que toute la physique moderne peut se comprendre au moyen de l'algèbre vectorielle,

abstraction faite des investigations actuelles qui cherchent de nouveaux outils mathématiques, et, naturellement, abstraction faite aussi de la physique géométrique symplectique (généralisant les concepts lagrangiens) puisque celle-ci conduit, en amont des opérations sur les grandeurs et fonctions dans un espace généralisé, aux équations dont les solutions deviennent les éléments de ces opérations. Dans cet article, seront donc présentés : la définition d'une algèbre, l'algèbre de Clifford, l'algèbre d'espace qui est l'application à l'espace 3D usuel de l'algèbre de Clifford (introduisant ainsi les matrices de Pauli), les quaternions dans cet espace 3D avec leurs interprétations opératoriels (rotations, symétries, inversions), les spineurs avec leurs définitions ensemblistes (idéaux) et aussi leurs constructions géométriques, dans l'espace 3D et plus généralement dans l'espace-temps relativiste (ce qui conduit à la théorie de Dirac), leurs liens avec les représentations de groupe de transformations dans ces espaces (dont un exemple est le groupe de Lorentz généralisé) ; par ailleurs, à partir de l'algèbre de Clifford on présentera aussi son lien avec l'algèbre de Lie (employée pour les transformations infinitésimales dans les groupes), ainsi que son application à la théorie relativiste du nucléon que l'approche spinorielle ne permet pas à elle seule de bâtir. Seront laissés ici de côté les points concernant le lien entre l'algèbre de Clifford, et celle de Dirac, avec la relativité générale.

SOMMAIRE :

- 1 – Algèbre : définition
- 2 – Algèbre de Clifford, ou algèbre vectorielle : définition ensembliste
 - 2-1 : Remarques préliminaires sur les notations
 - 2-2 : Définition axiomatique de l'algèbre vectorielle, ou algèbre de Clifford
 - 2-3 : Produit intérieur et produit extérieur de vecteurs de E_n et de vecteurs de C_n
- 3 – Algèbre de Clifford : définition par les éléments générateurs
- 4 – Exemple n°1 d'algèbre de Clifford : algèbre d'espace C_3 de Pauli
- 5 – Application de l'algèbre d'espace de Pauli C_3 au spin, en mécanique quantique ; équation de Schrödinger-Pauli
- 6 – Exemple n°2 d'algèbre de Clifford : algèbre d'espace-temps C_4 de Dirac
- 7 – Quaternions et biquaternions
 - 7-1 : Quaternions de l'algèbre C_3
 - 7-2 : Biquaternions de l'algèbre C_4
- 8 – Spineurs : définition algébrique
 - 8-1 : Spineurs dans C_3
 - 8-2 : Spineurs dans C_4
- 9 – Équation de Pauli avec les spineurs de C_4
- 10 – Transformation de Lorentz en relativité restreinte : expression avec les d-nombres
- 11 – Équation de Dirac : expression avec les biquaternions de C_4
 - 11-1 : Établissement des équations de Dirac
 - 11-2 : Équivalence entre l'expression matricielle et l'expression avec les p-nombres des équations de Dirac
- 12 – Théorie du nucléon avec l'algèbre vectorielle, en physique quantique
- 13 – Algèbres de Lie : lien avec l'algèbre de Clifford
 - 13-1 : Définition et propriétés de l'algèbre de Lie
 - 13-2 : Algèbre de Lie et algèbre de Clifford
- 14 – Spineurs : définition géométrique

1 – Algèbre : définition

Une algèbre est un espace vectoriel E_n , de dimension n , construit sur le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ ou complexes $\mathbf{C}$, muni d'une loi de composition interne, notée $\circ$, appelée produit satisfaisant la propriété d'être bilinéaire.

A tout couple de vecteurs $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de E_n , le produit associe un autre vecteur $\mathbf{z}$ de E_n :

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y} \quad (1)$$

La propriété de bilinéarité du produit pose que, si a_k et b_m sont des nombres du corps associé à l'espace vectoriel E_n (corps que l'on note $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), on doit avoir :

$$\left(\sum_k a_k \mathbf{x}_k \right) \circ \left(\sum_m b_m \mathbf{y}_m \right) = \sum_k \sum_m a_k b_m (\mathbf{x}_k \circ \mathbf{y}_m) \quad (2)$$

De plus, l'algèbre est dite associative si l'on a pour tout vecteur $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}$ de E_n :

$$\mathbf{x} \circ (\mathbf{y} \circ \mathbf{w}) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) \circ \mathbf{w} \quad (3)$$

Exemples d'algèbre :

- Les matrices carrées $n \times n$ sont un espace vectoriel E_n de dimension n^2 ; muni du produit matriciel classique, cet espace vectoriel forme une algèbre associative.
- L'espace vectoriel construit sur $\mathbf{R}^3$, de dimension $n = 3$, muni du produit vectoriel classique, noté $\mathbf{X}$, est une algèbre associative ; ainsi, pour deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de coordonnées respectives (x_k) et (y_m) avec $k, m = 1, 2, 3$ ⁽¹⁾ :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} =: \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et l'on a bien : } (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{w} = \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{w})$$

- De manière générale, les rotations dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ ne forment pas un groupe. De manière plus restreinte, les rotations autour d'un point fixe de $\mathbf{R}^3$ dont les matrices associées sont de déterminant $+1$, forment un groupe noté $\text{SO}(3)$. C'est le cas des rotations d'angle a_1 autour de l'axe Ox_1 , des rotations d'angle a_2 autour de l'axe Ox_2 , des rotations d'angle a_3 autour de l'axe Ox_3 , de matrices respectives :

$$R_1(a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a_1 & -\sin a_1 \\ 0 & \sin a_1 & \cos a_1 \end{pmatrix} \quad R_2(a_2) = \begin{pmatrix} \cos a_2 & 0 & \sin a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a_2 & 0 & \cos a_2 \end{pmatrix} \quad R_3(a_3) = \begin{pmatrix} \cos a_3 & -\sin a_3 & 0 \\ \sin a_3 & \cos a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les matrices infinitésimales du groupe $\text{SO}(3)$ sont par définition : $L_k = \left(\frac{d R_k(a_k)}{d a_k} \right)_{(a_k=0)}$

ce qui donne :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices L_k forment une base de l'algèbre de Lie du groupe $\text{SO}(3)$; cette algèbre est un espace vectoriel de dimension 3. Le produit de Lie dans cette algèbre est la commutation :

$$L_k \circ L_m =: [L_k, L_m] = L_k L_m - L_m L_k$$

dont le résultat est bien encore un vecteur de l'algèbre de Lie (une matrice de rotation

1 L'écriture $=:$ signifie « égal par définition à », et est différente en cela d'une égalité en tant qu'équation.

infinitésimale) puisque l'on vérifie aisément que $[L_k, L_m] = \varepsilon_{nmk} L_n$, où les ε_{nmk} sont les symboles de Levi-Civita ($\varepsilon_{nmk} = 1$ si $n = 1, m = 2, k = 3$; $= -1$ si $n = 2, m = 1, k = 3$; $= 0$ sinon), ce sont les coefficients de structure de l'algèbre de Lie. De plus, la commutation est bien bilinéaire.

2 – Algèbre de Clifford, ou algèbre vectorielle : définition ensembliste

2-1 : Remarque préliminaire sur les notations

Les vecteurs de l'espace vectoriel E_n sont notés $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$. Leurs produits, $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}, \mathbf{x} \circ \mathbf{y} \circ \mathbf{z}, \dots$, etc. sont notés $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$: ce sont des éléments d'un espace vectoriel noté C_n , algèbre vectorielle de E_n pour l'opération produit $\circ$.

Le corps sur lequel sont construits les espaces vectoriels E_n et C_n est le corps des nombres réels $\mathbf{R}$.

2-2 : Définition axiomatique de l'algèbre vectorielle, ou algèbre de Clifford

L'algèbre de Clifford $(C_n, \circ)$, construit à partir de l'espace vectoriel E_n , est défini par les quatre axiomes suivants :

- Axiome 1 : les produits $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$ sont des vecteurs de C_n , autrement dit, par définition :
 $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$ (commutativité de l'addition)
 $(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z})$ (associativité de l'addition)
il existe un vecteur nul de C_n , noté $\mathbf{0}$, tel que pour tout vecteur $\mathbf{X}$ de C_n : $\mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{X} = \mathbf{X}$
Pour tous nombres réels a, b de $\mathbf{R}$, et pour tout vecteur $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ de C_n :
 $(a + b) \mathbf{X} = a\mathbf{X} + b\mathbf{X}$
 $a(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = a\mathbf{X} + a\mathbf{Y}$
 $a(b\mathbf{X}) = (ab)\mathbf{X}$
- Axiome 2 : le produit $\circ$ est associatif et distributif :
 $(\mathbf{X} \circ \mathbf{Y}) \circ \mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ (\mathbf{Y} \circ \mathbf{Z})$
 $(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \circ \mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \mathbf{Z} + \mathbf{Y} \circ \mathbf{Z}$
 $\mathbf{Z} \circ (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{Z} \circ \mathbf{X} + \mathbf{Z} \circ \mathbf{Y}$
- Axiome 3 : les nombres réels $a, b, \dots$ sont aussi éléments de C_n et commutent avec les vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$: $a\mathbf{X} = \mathbf{X}a$
- Axiome 4 : pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de E_n , leur produit $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, vecteur de C_n , est un nombre scalaire si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires.

Les vecteurs de C_n , $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$ sont appelés c-nombres ou **nombres de Clifford**.

Remarque : étant donné que les matrices carrées, ainsi que leurs produits, vérifient ces quatre axiomes, et donc sont des c-nombres, on cherchera à représenter tout c-nombre à l'aide de matrices : ainsi le produit des vecteurs se ramènera au produit des matrices.

2-3 : Produit intérieur et produit extérieur de vecteurs de E_n et de vecteurs de C_n

Le produit de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E_n se décompose toujours en une partie scalaire symétrique et une partie vectorielle antisymétrique :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \quad (4)$$

où le **produit intérieur**, nombre scalaire, est :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \mathbf{y} \circ \mathbf{x}) \quad (5)$$

et le **produit extérieur**, vecteur antisymétrique, est :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y} - \mathbf{y} \circ \mathbf{x}) \quad (6)$$

puisque l'on a l'identité :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \mathbf{y} \circ \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y} - \mathbf{y} \circ \mathbf{x})$$

On a immédiatement :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \quad (\text{antisymétrie})$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = 0 \quad \text{si et seulement si } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \text{ sont colinéaires}$$

donc $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ donc scalaire, si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires.

On appelle **forme quadratique** du vecteur $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} =: \mathbf{x}^2$

Si pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E_n , la forme quadratique est définie positive (c'est-à-dire $\mathbf{x}^2 > 0$ et $\mathbf{x}^2 = 0$ seulement si $\mathbf{x} = 0$), le produit intérieur s'identifie au **produit scalaire** des vecteurs classiques.

Les résultats des produits intérieurs et des produits extérieurs sont eux aussi des vecteurs de C_n : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in C_n$ et $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \in C_n$

Interprétation géométrique du produit extérieur : $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ représente l'aire orientée du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

On définit maintenant les produits intérieur et extérieur des éléments de C_n , ou c-nombres. D'abord, lorsqu'un vecteur de C_n est le produit par $\circ$ de p vecteurs de E_n , on l'appelle p -vecteur :

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \circ \dots \circ \mathbf{x}_p$$

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition :

Soit $\mathbf{X}_p$ un p -vecteur de C_n et $\mathbf{x}$ un vecteur de E_n . Les produits intérieur et extérieur dans C_n sont définis respectivement par les récurrences suivantes :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{X}_p - (-1)^p \mathbf{X}_p \circ \mathbf{x}) \quad (7)$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{X}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \circ \mathbf{X}_p + (-1)^p \mathbf{X}_p \circ \mathbf{x}) \quad (8)$$

PREUVE de (7) et (8): - Considérons en particulier le p -vecteur comme le produit extérieur de p vecteurs de E_n : $\mathbf{X}_p = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p$. Du fait du caractère antisymétrique du produit extérieur, le produit intérieur de $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{X}_p$ prend la forme :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{X}_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_k) \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{k-1} \wedge \mathbf{x}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p$$

on en déduit, toujours suite à l'antisymétrie : $\mathbf{X}_p \cdot \mathbf{x} = (-1)^{p-1} \mathbf{x} \cdot \mathbf{X}_p$.

Comme les c-nombres $\mathbf{x} \circ \mathbf{X}_p$ et $\mathbf{X}_p \circ \mathbf{x}$ vérifient toujours la décomposition (4), on a, compte tenu

de ce qui précède :

$$\begin{aligned}x \circ X_p &= x \cdot X_p + a \wedge X_p \\X_p \circ x &= X_p \cdot x + X_p \wedge x\end{aligned}$$

où $X_p \wedge x = (-1)^p x \wedge X_p$, par conséquent : $(-1)^p X_p \circ x = -x \cdot X_p + x \wedge X_p$, ce qui conduit aux résultats (7) et (8) – CQFD.

On vérifie aisément aussi (exercice!):

- associativité du produit extérieur des c-nombres (ou p-vecteurs) :

$$X_p \wedge (X_q \wedge X_r) = (X_p \wedge X_q) \wedge X_r \quad (9)$$

- alternance du produit extérieur des p-vecteurs :

$$X_{p+1} = -(x_1 \wedge x) \wedge X_{p-1} = x \wedge (x_1 \wedge X_{p-1}) \quad (10)$$

Ces propriétés font de $\mathbf{X}_p$ une forme p-linéaire alternée, dont l'interprétation géométrique est la suivante : le p-vecteur $\mathbf{X}_p$ représente le volume algébrique du p-parallélépipède orienté dont les côtés sont définis par les p vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ de l'espace E_n .

Soit le p-vecteur $X_p = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ et le q-vecteur Y_q ; leur produit intérieur est alors défini par :

$$X_p \cdot Y_q = (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{p-1}) \cdot (x_p \cdot Y_q) \quad (11)$$

Proposition :

De ces considérations on déduit la dimension de l'espace de Clifford C_n . On a :

$$\dim C_n = 2^n \quad (12)$$

PREUVE de (12) : - L'espace C_n est construit de telle sorte qu'il comprend tous les produits, par $\circ$, des vecteurs de l'espace vectoriel E_n : donc tous les produits intérieurs et extérieurs jusqu'au rang $p = n$ des p-vecteurs : $p = 0, 1, 2, \dots, n$, avec par hypothèse que les p-nombres sont nuls pour $p > n$: $\mathbf{X}_p = \mathbf{0}$ si $p > n$.

Par la décomposition (4), tout c-nombre $\mathbf{X}$ est somme d'un produit intérieur (isomorphe à un scalaire) et d'un produit extérieur ; le produit extérieur se décompose à son tour comme la somme de termes égaux au produit d'un scalaire a_k par le produit extérieur de k éléments générateurs $\mathbf{e}_k$, on a donc :

$$X = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n + a_{11} \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 + \dots + a_{1k} \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_k + \dots + a_{ijklm\dots n} \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j \circ \dots \circ \mathbf{e}_n + \dots$$

or, il y a C_n^0 façons de construire les scalaires, C_n^1 façons de construire les $a_k \mathbf{e}_k$, ... C_n^p façons de construire les produits $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 \circ \dots \circ \mathbf{e}_p$, et C_n^n façons de construire les produits $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 \circ \dots \circ \mathbf{e}_n$, l'espace C_n est donc la somme directe ensembliste (+) des sous-espaces engendrés par les produits $\circ \mathbf{e}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, (sachant que pour $k = 0$ on a des scalaires) ce que l'on écrit :

$$C_n = (\circ E_n)^0 (+) (\circ E_n)^1 (+) \dots (+) (\circ E_n)^n$$

Or pour $p > 0$ les produits des éléments générateurs $\circ \mathbf{e}_n$ sont des produits extérieurs, on a donc de manière équivalente :

$$C_n = (\wedge E_n)^0 (+) (\wedge E_n)^1 (+) \dots (+) (\wedge E_n)^n$$

où pour $p = 0$ on a par définition des produits intérieurs donc des scalaires.

Il s'ensuit que le nombre total de combinaisons possibles de p -vecteurs de C_n est :

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$$

Exemple pour fixer les idées, avec $n = 2$: l'algèbre C_2 a pour c -nombres

$$X = a_0 \mathbf{1} + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{12} e_1 \wedge e_2$$

ce qui donne bien 4 composantes de X sur la base $\mathbf{1}, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2$, donc $\dim C_2 = 2^2 = 4$.
CQFD.

Remarques :

- lorsque $n = 4$, C_4 est appelée **algèbre de Dirac**, sous l'hypothèse que la forme quadratique $\mathbf{x}^2$ est définie dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la Relativité Restreinte. C'est dans cet espace que seront construits les spineurs de Dirac qui vérifieront l'équation de Dirac généralisant dans E_4 l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique. L'algèbre de Dirac est de dimension $2^4 = 16$ d'après (12).
- lorsque $n = 3$, le sous-algèbre de Dirac, C_3 , est l'algèbre d'espace construit sur l'espace euclidien 3D habituel, ou **algèbre de Pauli**
- l'algèbre des **quaternions** est une sous-algèbre de Pauli.
- Les nombres complexes dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ est elle-même une sous-algèbre des quaternions.
- L'algèbre des nombres réels dans $\mathbf{R}$ est à son tour une sous-algèbre de l'algèbre des nombres complexes.

Tout ceci suggère que le choix des espaces n'est pas innocent pour la représentation des grandeurs physiques : une représentation englobe une autre et offre, par rapport à celle-ci, des propriétés que l'ancienne représentation ne pouvait pas mettre en évidence. On est dans une démarche inductive.

3 – Algèbre de Clifford : définition par les éléments générateurs

Soient n vecteurs de l'espace vectoriel E_n : e_k , $k = 1, 2, \dots, n$, qui vérifient, par définition, les conditions ⁽²⁾:

$$\{e_k, e_m\} = e_k \circ e_m + e_m \circ e_k = 2\delta_{km} \quad (13)$$

ces vecteurs sont appelés « éléments générateurs » ; ils peuvent être, par exemple, des matrices ou des opérateurs fonctionnels. Leurs 2^n produits (par $\circ$) possibles engendrent un espace vectoriel de dimension 2^n , qui avec l'opération $\circ$, forme une algèbre : l'algèbre de Clifford C_n .

Lorsque les vecteurs X de C_n se décomposent sur la base de ces éléments générateurs, on retrouve toutes les propriétés des éléments de C_n et de leurs produits présentées au point 2 ci-dessus.

4 – Exemple n°1 d'algèbre de Clifford : algèbre d'espace C_3 de Pauli

Cette algèbre est construite sur l'espace vectoriel euclidien E_3 (isomorphe à $\mathbf{R}^3$). Ses éléments générateurs sont les matrices carrées 2×2 de Pauli : $e_k = : \sigma_k$ définies par :

² δ_{kj} est le symbole de Kronecker : il vaut 1 si $k = j$, et 0 autrement.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

où j est le nombre imaginaire : $j^2 = -1$. Elles vérifient (13) pour $\circ$, que l'on note tout simplement par juxtaposition des matrices :

$$\sigma_k \sigma_m + \sigma_m \sigma_k = 2\delta_{km} \mathbf{1} \quad (15)$$

On note $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité 2 x 2, qui est l'élément neutre vis-à-vis de l'opération produit matriciel. (15) entraîne, pour $k = m$: $\sigma_k^2 = \mathbf{1}$.

Alors, d'après la proposition (12), pour $n = 3$, on peut former $2^3 = 8$ matrices suivantes :

$$\mathbf{1}; \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; \sigma_1 \sigma_2; \sigma_1 \sigma_3; \sigma_2 \sigma_3; \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (16)$$

Ces 8 matrices sont linéairement indépendantes sur le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ (exercice!). Par conséquent, avec (15), elles forment une base d'un espace vectoriel C_3 de dimension 8, qui est donc une algèbre de Clifford pour le produit matriciel.

Remarque : les matrices de Pauli vérifient aussi les relations :

$$\sigma_1 \sigma_2 = j \sigma_3; \sigma_2 \sigma_3 = j \sigma_1; \sigma_3 \sigma_1 = j \sigma_2; \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = j \mathbf{1} \quad (17)$$

ainsi une base de l'algèbre C_3 de Pauli, d'après (16) et (17), est encore donnée par :

$$\mathbf{1}; \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; j \sigma_3; j \sigma_1; j \sigma_2; j \mathbf{1} \quad (18)$$

Remarque : les matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont linéairement indépendantes (on peut le vérifier aisément en exercice!); par conséquent elles peuvent constituer une base d'un espace vectoriel E'_3 de dimension 3. On montre que cet espace vectoriel E'_3 est isomorphe à l'espace vectoriel euclidien $E_3 = \mathbf{R}_3$, de base $(\mathbf{u}_k)$ $k = 1, 2, 3$, autrement dit que chaque vecteur de l'un est en relation bijective avec un vecteur de l'autre (exercice!).

Ainsi à tout vecteur de E_3 , $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$ correspond de manière bi-univoque un vecteur de E'_3 encore noté $\mathbf{x} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$. Ainsi l'espace vectoriel E'_3 est un sous-espace vectoriel de C_3 , lequel, avec l'opération produit des matrices, est l'algèbre d'espace sur E_3 .

D'après (16), tout c-nombre $\mathbf{X}$ de C_3 admet une décomposition en 8 composantes qui se répartissent en 4 sortes :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_S + \mathbf{X}_V + \mathbf{X}_B + \mathbf{X}_P \quad (19)$$

où :

- $\mathbf{X}_S$ est un scalaire (ou isomorphe à un scalaire x_0) : $\mathbf{X}_S = x_0 \mathbf{1}$ (19a) ⁽³⁾
- $\mathbf{X}_V$ est un vecteur de E_3 (à l'isomorphisme près signalé précédemment) :
 $\mathbf{X}_V = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$ (19b)
- $\mathbf{X}_B$ est un bivecteur : $\mathbf{X}_B = x_4 \sigma_1 \sigma_2 + x_5 \sigma_2 \sigma_3 + x_6 \sigma_3 \sigma_1$ (19c)
- $\mathbf{X}_P$ est un pseudo-scalaire : $\mathbf{X}_P = x_7 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ (19d)

³ Certains auteurs écrivent directement $\mathbf{X}_S = x_0$ scalaire, ce qui n'engendre pas de confusion dès lors que l'on se souvient qu'il y a équivalence, au sens d'isomorphisme, entre x_0 et $x_0 \mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la matrice unité.

A partir de cette décomposition (19), on définit trois opérations sur les c-nombres :

- Le changement de sens des vecteurs composants de $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^\circ = \mathbf{X}_S - \mathbf{X}_V + \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_P \quad (20)$$

- Le renversement de l'ordre dans les produits matriciels :

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^* = \mathbf{X}_S + \mathbf{X}_V - \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_P \quad (21)$$

- La transformation de $\mathbf{X}$ en son dual, c'est-à-dire la multiplication par $j\mathbf{1}$ de $\mathbf{X}$, qui compte tenu de (17) donne :

$$j\mathbf{1}\mathbf{X} = j\mathbf{X} = \mathbf{X}j = \mathbf{X}\mathbf{1}j \quad (22)$$

On vérifie alors aisément, à partir de (17), que le dual d'un scalaire est un pseudo-scalaire, et réciproquement, et que le dual d'un vecteur est un bivecteur et réciproquement :

$$j\mathbf{1}\mathbf{X}_S = j\mathbf{1}x_0\mathbf{1} = x_0j\mathbf{1} = x_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbf{X}_P$$

$$\begin{aligned} j\mathbf{1}\mathbf{X}_B &= j\mathbf{1}(x_4\sigma_1\sigma_2 + x_5\sigma_2\sigma_3 + x_6\sigma_3\sigma_1) = x_4\sigma_1\sigma_2j + x_5\sigma_2\sigma_3j + x_6\sigma_3\sigma_1j \\ &= x_4j\sigma_3j + x_5j\sigma_1j + x_6j\sigma_2j = -(x_5\sigma_1 + x_6\sigma_2 + x_4\sigma_3) = \mathbf{X}'_V \end{aligned}$$

qui est bien un vecteur.

On définit encore d'autres opérations sur les c-nombres de type vecteurs, qui se rattachent aux opérations vectorielles ordinaires dans E_3 :

- produit vectoriel : dans C_3 il correspond au produit extérieur de deux vecteurs, en effet : soient deux vecteurs de C_3 : $\mathbf{x} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ et $\mathbf{y} = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + y_3\sigma_3$. D'après (6), et compte tenu de (17), leur produit extérieur est alors donné par :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = j\mathbf{1}[(x_2y_3 - x_3y_2)\sigma_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\sigma_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\sigma_3]$$

le terme entre crochets [...] est un vecteur dont les coordonnées sont celles du produit vectoriel ordinaire dans E_3 et qui se note $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ (lorsque l'on considère $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ comme vecteurs dans E_3 , isomorphe à E'_3 sous-espace vectoriel de C_3)⁽⁴⁾. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= j\mathbf{1}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= -j\mathbf{1}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (23)$$

Si, d'un point de vue calculatoire cela ne change pas grand chose, en revanche, du point de vue signification des grandeurs dans leurs espaces, il faut souligner cette différence : le produit extérieur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est un bivecteur tandis que $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ est son dual dans C_3 . Cette différence n'est pas innocente : tandis que $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ change de sens lorsque le sens de la base de E_3 change, le bivecteur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ reste invariant dans ce changement de base : c'est un tenseur.

- Double produit vectoriel : on montre facilement à partir de (23) que l'on a :

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x})\mathbf{y} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (24)$$

4 Dans beaucoup d'ouvrages, le produit vectoriel ordinaire dans un espace euclidien $E_3 = \mathbf{R}^3$ est noté $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$; du point de vue de l'algèbre de Clifford, c'est un abus d'écriture qu'il faudrait remplacer, en toute rigueur, par $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ tandis que l'écriture $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ doit être réservée au produit extérieur.

- produit mixte : on montre de même

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = -j(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \quad (25)$$

qui est un pseudo-scalaire.

- opérateur gradient dans C_3 :
décomposé sur la base des matrices de Pauli, c'est l'opérateur :

$$\nabla = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (26)$$

son « produit » avec un vecteur $\mathbf{u}$ de C_3 se décompose alors, suite à la décomposition (4), en une partie scalaire et une partie bivecteur :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \wedge \mathbf{u} \quad (27)$$

la composante scalaire $\nabla \cdot \mathbf{u}$ est la divergence du vecteur $\mathbf{u}$: elle représente la déformation élémentaire du volume formé par le parallélépipède dont les côtés sont les projections de $\mathbf{u}$ sur les axes de base. La composante bivecteur $\nabla \wedge \mathbf{u}$ est le rotationnel généralisé du vecteur $\mathbf{u}$: il est relié au rotationnel dans E_3 $\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$ par :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{u} &= j(\nabla \times \mathbf{u}) \\ \nabla \times \mathbf{u} &= -j(\nabla \wedge \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (28)$$

5 – Application de l'algèbre d'espace de Pauli C_3 au spin, en mécanique quantique ; équation de Schrödinger-Pauli

Le spin d'une particule est le moment cinétique intrinsèque de cette particule, ce qu'il faut distinguer du moment cinétique orbital (associé à la rotation de la particule autour d'un point fixe qui lui est extérieur).

Pour comprendre le concept de spin, il faut d'abord se rappeler ce qu'est un moment cinétique en mécanique quantique (puisque le spin en est un).

En mécanique classique un moment cinétique $\mathbf{L}$ est défini par le produit vectoriel du rayon-vecteur $\mathbf{r}$ par rapport au point fixe O (centre de rotation) et de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

En mécanique quantique, le moment cinétique est un opérateur vectoriel, encore noté $\mathbf{L}$, défini à partir de l'application du principe de correspondance à $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r} \\ \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} = -j\hbar \nabla \end{aligned} \quad (29)$$

où $\hbar = h/2\pi$ et h constante de Planck ($h = 6,626.10^{-34}$ J.s). Ainsi :

$$\mathbf{L} = -j\hbar \mathbf{r} \times \nabla \quad (30)$$

dont les composantes dans une base orthonormée de E_3 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) sont :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3 \\
\text{avec: } L_1 &= \hbar (x_3 \partial / \partial x_2 - x_2 \partial / \partial x_3) \\
L_2 &= \hbar (x_1 \partial / \partial x_3 - x_3 \partial / \partial x_1) \\
L_3 &= \hbar (x_2 \partial / \partial x_1 - x_1 \partial / \partial x_2)
\end{aligned} \quad (31)$$

avec $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$. Le module de $\mathbf{L}$ est un opérateur et vérifie : $\mathbf{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ où les opérateurs L_k sont donnés par (31).

Les composants de $\mathbf{r}$ et ceux de $\mathbf{p}$ vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned}
[x_k, x_j] &= x_k x_j - x_j x_k = 0 \\
[p_k, p_j] &= p_k p_j - p_j p_k = 0 \\
[x_k, p_j] &= x_k p_j - p_k x_j = -j \hbar (x_k \partial / \partial x_j - \partial / \partial x_k (x_j)) = -j \hbar (x_k \partial / \partial x_j - x_j \partial / \partial x_k) = j \hbar \delta_{kj}
\end{aligned} \quad (32)$$

d'où l'on obtient :

$$\begin{aligned}
[L_1, L_2] &= L_1 L_2 - L_2 L_1 = j \hbar L_3 \\
[L_2, L_3] &= L_2 L_3 - L_3 L_2 = j \hbar L_1 \\
[L_3, L_1] &= L_3 L_1 - L_1 L_3 = j \hbar L_2
\end{aligned}$$

que l'on regroupe sous la relation vectorielle :

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = j \hbar \mathbf{L} \quad (33)$$

Remarque (rappel) : dans (33), $\mathbf{L}$ est un opérateur vectoriel, et non un vecteur classique euclidien ; c'est pourquoi, le produit vectoriel de deux opérateurs vectoriels identiques n'est pas nul (tandis que dans E_3 , on a toujours, pour deux vecteurs classiques : $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$). D'ailleurs (33) a pour composantes, dans la base de E_3 :

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = [L_2, L_3] \mathbf{e}_1 + [L_3, L_1] \mathbf{e}_2 + [L_1, L_2] \mathbf{e}_3$$

On montre aisément (exercice) que le carré du module $\mathbf{L}^2$ commute avec l'opérateur vectoriel moment cinétique :

$$[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}] = 0 \quad (34)$$

Seront donc appelés moments cinétiques tous opérateurs vectoriels, construits sur E_3 , qui vérifient les deux relations (33) et (34). Si le spin est un opérateur qui vérifie ces définitions, alors il sera un moment cinétique (en l'occurrence intrinsèque). C'est ce qui va être vérifié par la suite.

L'expérience (Stern et Gerlach, effet Zeeman anormal), et les analyses théoriques qui ont fait suite pour l'interpréter (Uhlenbeck et Goudsmit, 1925, Pauli, 1927) ont montré l'existence du spin, c'est-à-dire moment cinétique intrinsèque de l'électron, et que l'opérateur vectoriel associé sur E_3 est :

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \mathbf{1} \quad (35)$$

Soit ψ la fonction d'onde à deux composantes de l'électron. Prenant par exemple le spin de l'électron dans la direction $\mathbf{e}_3$, avec ses deux sens +/- possibles $\mathbf{S}_3 = \frac{\pm \hbar}{2} \mathbf{1} \mathbf{e}_3$, ses valeurs propres s_3 sont définies par l'équation aux valeurs propres : $\mathbf{S}_3 \psi = s_3 \psi$ qui s'explicite en :

$\begin{pmatrix} \pm\hbar/2 - s_3 & 0 \\ 0 & \pm\hbar/2 - s_3 \end{pmatrix} \psi = 0$ dont les solutions existent toujours si et seulement si le

déterminant de la matrice est nul, soit : $(\frac{\pm\hbar}{2} - s_3)^2 = 0$ d'où les valeurs propres $s_3 = \frac{\pm 1}{2} \hbar$.

Quant à l'opérateur $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \mathbf{S}_3^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbf{1}$ son équation aux valeurs propres $\mathbf{S}^2 \psi = \lambda \psi$

s'écrit : $\begin{pmatrix} 3/4 \hbar^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 3/4 \hbar^2 - \lambda \end{pmatrix} \psi = 0$ dont la solution existe si $(3/4 \hbar^2 - \lambda)^2 = 0$ d'où la valeur propre de $\mathbf{S}^2$: $\lambda = 3/4 \hbar^2$.

$\mathbf{S}$ est bien un moment cinétique : on montre sans difficulté qu'il vérifie les relations de commutations (33) et (34) où $\mathbf{S}$ joue le rôle de $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = j \hbar \mathbf{S} \quad \text{et} \quad [\mathbf{S}^2, \mathbf{S}] = 0 \quad (36)$$

Compte tenu de (36) et des valeurs propres de $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}_k$ ($k = 1, 2, 3$) obtenues précédemment, on obtient :

– les valeurs des opérateurs $\mathbf{S}_k^2$: $\mathbf{S}_1^2 = \mathbf{S}_2^2 = \mathbf{S}_3^2 = \frac{\hbar^2}{4} \mathbf{1}$ (37)

– les relations d'anticommutation entre composantes $\mathbf{S}_k$: $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 = 0$ (38) et relations analogues

– les relations de commutation entre composantes $\mathbf{S}_k$: $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 = j \hbar \mathbf{S}_3$ (39) et relations analogues.

D'où l'on déduit :

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 = j \frac{\hbar}{2} \mathbf{S}_3 \quad (40)$$

$\mathbf{S}_3$ ayant comme valeurs propres $s_3 = \pm \hbar/2$, la prise en compte des deux directions possibles du spin suivant $\mathbf{Oe}_3$ peut être rassemblée en une seule matrice : il existe une matrice dont les valeurs propres sont les mêmes que $\mathbf{S}_3$, elle est égale à :

$$\mathbf{S}_3 = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

en effet l'équation des valeurs propres $(\hbar/2 - s_3)(-\hbar/2 - s_3) = 0$ a bien pour solutions $s_3 = \pm \hbar/2$.

Lorsque le spin est fixé pour la direction $\mathbf{Oe}_3$, pour les autres directions il est nul donc leurs valeurs propres aussi :

$\mathbf{S}_2$ a comme valeur propre $s_2 = 0$, $\mathbf{S}_1$ a comme valeur propre $s_1 = 0$.

On cherche donc 2 matrices pour représenter $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ avec les conditions précédentes, lorsque $\mathbf{S}_3$ n'est pas nulle. Pour cela on utilise :

– la relation :

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \mathbf{S}_3^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbf{1} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \frac{1}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \frac{1}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

compte tenu de $\mathbf{S}_3$ donné par (41), ce qui donne : $\mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 = \frac{1}{2} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– on cherche deux matrices $\mathbf{S}_+$ et $\mathbf{S}_-$ telles que par définition :

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$

$$S_2 = \frac{1}{2j}(S_+ - S_-)$$

– en utilisant les propriétés de commutation suivantes (que l'on démontre sans difficulté) :

$$[S_3, S_+] = S_+ ; [S_3, S_-] = -S_- ; [S_+, S_-] = 2S_3 ; [S^2, S_+] = [S^2, S_-] = [S^2, S_3] = 0$$

on identifie les matrices S_+ et S_- : $S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; d'où il vient :

$$S_1 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S_2 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

dont les valeurs propres sont évidemment nulles.

On s'aperçoit alors, avec (41) et (42), que les matrices associées aux composantes du spin S_3 , S_1 , S_2 sont les matrices de Pauli : $S_1 = \hbar/2 \sigma_1$; $S_2 = \hbar/2 \sigma_2$; $S_3 = \hbar/2 \sigma_3$ ce que l'on regroupe par l'identité vectorielle :

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad (43)$$

Ainsi, l'algèbre d'espace de Pauli s'introduit-elle naturellement dans la théorie du spin des électrons, et plus généralement des leptons.

Soit un opérateur vectoriel A sur E_3 : par application de (19b), il se décompose sur la base des matrices de Pauli suivant :

$$\sigma \cdot A = A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3$$

de même pour un autre opérateur vectoriel B . Alors, d'après (4), compte tenu de (23), appliqués à l'algèbre de Pauli, on a :

$$A B = (\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = (A \cdot B)1 + j \sigma \cdot (A \times B) \quad (44)$$

où l'on reconnaît le premier terme comme la composante scalaire, et le second comme le bivecteur. (44) est le produit de Clifford de l'algèbre de Pauli.

Une conséquence immédiate de (44) est que : $(\sigma \cdot A)^2 = A \cdot A = A^2$

Soit une particule de masse m et de charge électrique q (un électron par exemple), de quantité de mouvement p , placé dans un champ électromagnétique de potentiel vecteur A . Alors, en électromagnétisme classique, le moment de cette particule est égal au moment cinématique :

$$P = p - \frac{q}{c} A$$

la transcription quantique de cette relation consiste à remplacer p par son opérateur vectoriel correspondant, encore noté p : $p \rightarrow P = -j\hbar \nabla$ comme indiqué en (29). On a donc :

$$P \rightarrow P = -j\hbar \nabla - \frac{q}{c} A \quad (45)$$

L'hamiltonien qui intervient dans l'équation de l'énergie $H = p^2/2m + qV$ (où V est le potentiel électrique) correspond alors à l'opérateur hamiltonien qui intervient dans l'équation de

Schrödinger : $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - qV$ où $\mathbf{P}$ vérifie, d'après (44) :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 = \mathbf{P}^2 + j \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{P})$$

où $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ n'est pas nul puisque $\mathbf{P}$ est un opérateur vectoriel, comme rappelé à la remarque de la page 10. D'ailleurs, si $\mathbf{B}$ est le champ magnétique, égal à $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, on a en tant qu'opérateur vectoriel $\mathbf{P} \times \mathbf{P} = j \hbar \frac{q}{c} \mathbf{B}$, d'où :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 = \mathbf{P}^2 - \hbar \frac{q}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (46)$$

Cette relation (46) est importante dans la réécriture de l'équation de Schrödinger d'un lepton en présence d'un champ électromagnétique puisqu'elle fait apparaître le moment magnétique du lepton (électron par exemple).

En effet, l'hamiltonien $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - qV$ se développe en :

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - qV = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2 + \hbar(q/c) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2m} - qV = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2}{2m} + \hbar \frac{q}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - qV$$

Pour la charge $q = -e$ de l'électron, l'hamiltonien, appelé « hamiltonien de Pauli » s'écrit :

$$H = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})^2}{2m} - \frac{e \hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eV \quad (47)$$

il remplace l'hamiltonien de Schrödinger désormais noté $H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - qV$ auquel il ajoute le terme d'interaction du champ magnétique $\mathbf{B}$ avec le spin de l'électron $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$, traduite par le moment magnétique de l'électron :

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e \hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} =: \frac{\mu_B}{c} \boldsymbol{\sigma} \quad (48)$$

où le magnéton de Bohr est $\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$. Ainsi l'hamiltonien de Pauli est :

$$H = H_0 - \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (49)$$

Valeur numérique : $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T.

L'équation de Schrödinger $H_0 \psi = j \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ doit être remplacée par l'équation de Schrödinger-Pauli : $H \psi = j \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ où H est donnée par (49) ou (47). La forme matricielle qui intervient dans cette équation impose que la fonction d'onde doit être un vecteur à deux composantes puisque les matrices de Pauli σ_k sont des matrices 2x2 :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (50)$$

on dit que ψ est un spineur à deux composantes, l'une ψ_1 étant liée à la probabilité d'observer le

spin $\frac{1}{2}\hbar$ suivant $O\mathbf{e}_3$, l'autre ψ_2 étant liée à la probabilité d'observer le spin $-\frac{1}{2}\hbar$ suivant $O\mathbf{e}_3$. Et ces composantes vérifient bien sûr la condition de normalisation qui confère à l'amplitude de la fonction d'onde le rôle de densité de probabilité :

$$\iiint (|\psi_1(\mathbf{x}, t)|^2 + |\psi_2(\mathbf{x}, t)|^2) d^3\mathbf{x} = 1 \quad (51)$$

Cela sera justifié lorsque nous introduirons les spineurs de Pauli.

6 – Exemple n°2 d'algèbre de Clifford : algèbre d'espace-temps C_4 de Dirac

Cette algèbre se construit à partir des vecteurs que sont les matrices carrées suivantes 4x4, formées à partir des matrices 2x2 de Pauli définies en (14) :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \text{ avec: } k=1, 2, 3 \quad (52)$$

ces matrices (52) sont les matrices de Dirac. Le vecteur temporel γ_0 est de carré 1 tandis que les 3 vecteurs d'espace γ_k sont de carré -1 puisque $\sigma_k^2 = \mathbf{1}$:

$$\gamma_0^2 = \mathbf{1} ; \quad \gamma_k^2 = -\mathbf{1} \quad (53)$$

où cette fois la matrice $\mathbf{1}$ désigne la matrice 4x4 unité formée avec la matrice 2x2 unité :

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il aurait fallu en toute rigueur distinguer la première par $\mathbf{1}_4$ et la seconde par $\mathbf{1}_2$, mais cette question d'écriture de la matrice unité sera à placer dans le contexte de l'algèbre vectorielle que l'on traite.

Soulignons que (52) *ne vérifie pas* la condition (13) qui caractérise les éléments générateurs de l'algèbre de Clifford, donc les γ_0 et γ_k ne sont pas éléments générateurs, puisque l'on a plutôt :

$$\{\gamma_k, \gamma_m\} = \gamma_k \gamma_m + \gamma_m \gamma_k = 2g_{km} \mathbf{1} \quad k, m = 0, 1, 2, 3 \quad (54)$$

où g_{km} est un tenseur de même signature que le tenseur métrique de Minkowski, utilisé en Relativité Restreinte, à savoir :

$$g_{km} = 0 \text{ si } k \neq m ; \quad g_{00} = 1 ; \quad g_{kk} = -1 \text{ pour } k=1, 2, 3 \quad (55)$$

que l'on représente aussi par (+ - - -) ou encore : $(g_{km}) = (g^{km}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour retrouver la condition (13) il suffit de remplacer les γ_0 et γ_k par les matrices α_0 et α_k telles que :

$$\gamma_0 = \alpha_0 ; \quad \gamma_k = j\alpha_k, \quad k=1, 2, 3 \quad (56)$$

puisque de (54) on obtient :

$$\{\alpha_k, \alpha_m\} = \alpha_k \alpha_m + \alpha_m \alpha_k = 2\delta_{km} \mathbf{1} \quad k, m = 0, 1, 2, 3 \quad (57)$$

Comme pour le cas de l'algèbre d'espace de Pauli à 8 dimensions, les matrices α_k de (56) permettent construire une base d'algèbre de Clifford constituée des $2^4 = 16$ produits $\mathbf{X}$ de vecteurs $x^k \alpha_k$; l'espace vectoriel de base étant l'espace à 4 dimensions, $E_4 = E_{1,3}$ muni de la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski donnée par (55), dont les vecteurs de la base orthonormée $\mathbf{e}_k$ sont isomorphes aux vecteurs γ_k ($k = 0, 1, 2, 3$), l'algèbre de Clifford d'espace-temps (ou algèbre de Dirac), d'éléments générateurs α_k , est l'algèbre de $E_{1,3}$ pour le produit des matrices 4×4 : on la note $C(E_{1,3})$ ou encore C_4 . On a :

$$\dim C_4 = 16 \quad (58)$$

Par la correspondance bi-univoque (56) entre les matrices de Dirac et les éléments générateurs α_k , les matrices de Dirac vérifient les axiomes de la structure d'une algèbre vectorielle de Clifford (cf. point 2.2). On peut donc continuer d'utiliser les γ_k pour déterminer les propriétés de l'algèbre C_4 d'espace-temps :

Les vecteurs suivants forment une base de C_4 sur le corps des nombres réels (16 produits possibles des vecteurs γ_k) :

$$\mathbf{1}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1\gamma_0, \gamma_2\gamma_0, \gamma_3\gamma_0, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_0\gamma_1\gamma_2, \gamma_0\gamma_2\gamma_3, \gamma_0\gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \\ \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \text{ avec } \gamma_5^2 = -\mathbf{1}$$

Tout c-nombre $\mathbf{X}$ de C_4 est décomposé alors en :

$$\mathbf{X} = X_S + X_V + X_B + X_T + X_P \quad (59)$$

où chacun des composants est :

- un scalaire : $X_S = X^0 \mathbf{1}$ où $X^0 \in \mathbb{R}$
- un vecteur (ou quadrivecteur en relativité restreinte): $X_V = x^0 \gamma_0 + x^1 \gamma_1 + x^2 \gamma_2 + x^3 \gamma_3$ où l'on a employé les coordonnées contravariantes x^k , au lieu des covariantes x_k . La relation entre ces deux types de vecteurs est : $x_k = g_{mk} x^m$; $x^k = g^{km} x_m$ où g_{km} est donné par (55) avec, dans ce cas précis, $g^{km} = g_{km}$. Par conséquent : $x^0 = x_0$; $x^k = -x_k$ pour $k = 1, 2, 3$ (5). On voit alors que, avec la métrique g_{km} , le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{X}_V$ et $\mathbf{Y}_V$ est égal à :

$$\mathbf{X}_V \cdot \mathbf{Y}_V = x^k y_k = g_{km} x^k y^m = g^{km} x_k y_m = x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 \quad (60)$$

On dit que $\mathbf{X}_V \cdot \mathbf{Y}_V$ est un quadriscalaire : il est invariant dans les rotations du système de coordonnées à 4 dimensions. Et pour $\mathbf{X}_V = \mathbf{Y}_V$, (60) donne la forme quadratique du quadrivecteur :

$$X_V^2 = \mathbf{X}_V \cdot \mathbf{X}_V = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (61)$$

En posant $x^0 = x_0 = ct$, où t est le temps, c la vitesse de la lumière, et avec $\mathbf{x} = (x^k)$ $k=1, 2, 3$ le vecteur d'espace, (61) donne la forme quadratique, ou élément s^2 , de la relativité restreinte : $s^2 = X_V^2 = c^2 t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Les transformations de coordonnées

5 Attention : ne pas confondre X^0 et x^0 , le premier étant la composante scalaire $\mathbf{X}_S$ de $\mathbf{X}$, le second la composante sur γ_0 de la partie vectorielle $\mathbf{X}_V$ de $\mathbf{X}$.

de l'espace-temps qui laissent s^2 inchangée forment un groupe appelé groupe de Lorentz-Poincaré. De la même manière, on a aussi pour les matrices de Dirac :

$$\gamma^0 = \gamma_0 ; \gamma^k = -\gamma_k , k=1,2,3 \quad (62)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad k=1,2,3 \quad (62\text{bis})$$

- un bivecteur : $X_B = x^{10} \gamma_1 \gamma_0 + x^{20} \gamma_2 \gamma_0 + x^{30} \gamma_3 \gamma_0 + x^{12} \gamma_1 \gamma_2 + x^{23} \gamma_2 \gamma_3 + x^{31} \gamma_3 \gamma_1$
- un trivecteur : $X_T = x^{012} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 + x^{013} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 + x^{023} \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 + x^{123} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$
- un pseudo-scalaire : $X_P = x^5 \gamma_5$

tous les x^m sont des nombres réels, X est appelé un d-nombre (« d » comme Dirac, en lieu et place de c-nombre « c » comme Clifford).

NB : certains auteurs introduisent les matrices de Dirac par (62bis), c'est-à-dire l'expression contravariante, au lieu de (52), mais cela ne change rien quant aux propriétés de C_4 .

Trois opérations sur les d-nombres sont définies :

- changement de sens des vecteurs : $X \rightarrow X^\circ = X_S - X_V + X_B - X_T + X_P$; si $X^\circ = X$ alors X est pair et si $X^\circ = -X$, il est impair.
- Renversement de l'ordre dans les produits : $X \rightarrow X^* = X_S + X_V - X_B - X_T + X_P$
- transformation en dual : $X \rightarrow \gamma_5 X$ où $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ avec $\gamma_5^2 = -1$. Il s'ensuit que le dual d'un scalaire est un pseudo-scalaire, le dual d'un vecteur est un trivecteur, le dual d'un bivecteur est un bivecteur.

Tout d-nombre de C_4 , X , se décompose en un d-nombre pair, X' , et un d-nombre impair X'' :

$$X = X' + X'' \quad (63)$$

En effet, de la décomposition générale (59) et de la définition de l'opération « changement de sens des vecteurs », il ressort que :

$$\begin{aligned} X' &= X_S + X_B + X_P = X^0 \mathbf{1} + x^{10} \gamma_1 \gamma_0 + x^{20} \gamma_2 \gamma_0 + x^{30} \gamma_3 \gamma_0 + x^{12} \gamma_1 \gamma_2 + x^{23} \gamma_2 \gamma_3 + x^{31} \gamma_3 \gamma_1 + x^5 \gamma_5 \\ X'' &= X_V + X_T = x^0 \gamma_0 + x^1 \gamma_1 + x^2 \gamma_2 + x^3 \gamma_3 + x^{012} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 + x^{013} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 + x^{023} \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 + x^{123} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{aligned} \quad (63\text{bis})$$

Or pour tout vecteur temporel γ_0 , on peut générer une famille de vecteurs, notés σ'_k , définis par :

$$\sigma'_k = \gamma_k \gamma_0 \quad (64)$$

Comme ces vecteurs vérifient (15), ils sont les éléments générateurs d'une algèbre vectorielle :

$$\sigma'_k \sigma'_m + \sigma'_m \sigma'_k = 2\delta_{km} \mathbf{1}$$

et (64) montre que ce sont des vecteurs de C_4 ; donc l'algèbre vectorielle qu'ils engendrent est une sous-algèbre de C_4 . On a aussi évidemment : $\sigma'^2_k = \mathbf{1}$ ainsi que, suite à (54) :

$$\sigma'_k \sigma'_m = \gamma_k \gamma_0 \gamma_m \gamma_0 = \gamma_k \gamma_0 (-\gamma_0 \gamma_m) = -\gamma_k \gamma_m \quad \text{pour } m \neq k$$

par conséquent, et puisque $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$, la composante paire $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{X}$ se développe sur une base de la sous-algèbre engendrée par les σ'_k :

$$\mathbf{X}' = X^0 \mathbf{1} + x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3 - x^{12} \sigma'_1 \sigma'_2 - x^{23} \sigma'_2 \sigma'_3 - x^{31} \sigma'_3 \sigma'_1 + x^5 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 \quad (65)$$

La sous-algèbre de C_4 engendrée par les générateurs σ'_k est donc celle des d-nombres pairs. De plus, (64) montre qu'il y a isomorphisme entre les générateurs de l'algèbre d'espace de Pauli C_3 , σ_k , et les générateurs σ'_k de la sous-algèbre des d-nombres pairs de C_4 puisque :

$$\sigma'_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (65\text{bis})$$

on peut donc assimiler les d-nombres pairs à des vecteurs de l'algèbre d'espace C_3 , et énoncer que les d-nombres pairs de C_4 sont les vecteurs d'une algèbre d'espace de γ_0 , et que l'on appelle algèbre des p-nombres de C_4 . ⁽⁶⁾

Cette correspondance entre p-nombres de C_4 et c-nombres de C_3 est intéressante parce qu'elle offre la perspective de décrire dans C_4 des propriétés observées dans l'espace physique E_3 qui ne peuvent pas être décrites uniquement dans C_3 : ainsi, par exemple, les p-nombres générés par les vecteurs de base σ_k (donc associés à C_3) correspondent de manière biunivoque aux spineurs dans C_4 , ce qui va permettre d'inscrire les descriptions quantiques opératoriels de C_3 dans un ensemble plus vaste, celui des spineurs dans C_4 , dont elles deviennent des cas limites. De plus, comme les spineurs dans C_4 (ou spineurs de Dirac) en sont une sous-algèbre de structure plus pauvre que la sous-algèbre des p-nombres dans C_4 , la théorie de Dirac exprimée avec les spineurs de C_4 peut s'enrichir par leur expression élargie aux p-nombres, et donc avec des propriétés nouvelles (comme celles qui permettent la classification des particules élémentaires). Cette démarche introduit quasi-naturellement la théorie de Dirac, et est une illustration épistémologique, parmi d'autres, du processus théorique qui va du cas particulier vers des cas plus élargis – donc forcément plus abstraits – qui font apparaître de nouvelles propriétés.

Cette correspondance repose sur le théorème suivant :

Théorème :

Tout p-nombre $\mathbf{X}'$ (ou d-nombre pair de C_4), en tant que vecteur de l'algèbre d'espace générée par les vecteurs σ_k de C_3 (ou leurs correspondants σ'_k dans C_4), est en relation bijective avec un vecteur unicolonne à 4 composants complexes Ψ appelé spineur de Dirac dans C_4 . Cette relation est :

$$\Psi = T(\mathbf{X}') = : \text{Mat}(\mathbf{X}') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

où $\text{Mat}(\mathbf{X}')$ est le p-nombre $\mathbf{X}'$ écrit sous sa forme matricielle développée 4x4.

PREUVE de (66) :

Il s'agit de démontrer que l'application linéaire $\mathbf{X}' \rightarrow T(\mathbf{X}')$ est bijective. Pour cela il faut démontrer qu'elle est injective, ce qui revient à montrer que son noyau est nul $\text{Ker}(T) = \{0\}$, et qu'elle est surjective.

⁶ Le choix de la notation σ'_k était donc volontaire car lié à la correspondance avec les générateurs σ_k de C_3 . Cependant, des auteurs écrivent directement (65) avec les σ_k du fait de cette correspondance ; mais cela peut prêter à confusion : σ_k sont des matrices 2x2 dans E_3 , tandis que σ'_k sont des matrices 4x4 dans $E_{3,1}$. Abus d'écriture à éviter donc.

A partir de (63bis) ou (65), après quelque calcul de multiplication et d'addition matricielles qui nécessitent un peu d'attention, on s'aperçoit que tous les composants de la matrice représentative de $\mathbf{X}'$, $\text{Mat}(\mathbf{X}')$, sont présents dans la première colonne de cette matrice ; on écrit donc, sans besoin d'explicitier les trois autres colonnes :

$$\text{Mat}(\mathbf{X}') = \begin{pmatrix} X^0 + jx^{12} & \dots & \dots & \dots \\ x^{31} + jx^{23} & \dots & \dots & \dots \\ x^{30} + jx^5 & \dots & \dots & \dots \\ x^{10} + jx^{20} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

et sa multiplication avec le vecteur unicolonne (1 0 0 0) donne :

$$T(\mathbf{X}') = \text{Mat}(\mathbf{X}') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 + jx^{12} \\ x^{31} + jx^{23} \\ x^{30} + jx^5 \\ x^{10} + jx^{20} \end{pmatrix}$$

L'application T est injective puisque $T(\mathbf{X}') = 0$ si chaque ligne est nulle, et donc si l'on a simultanément $X^0 = x^{12} = x^{31} = x^{23} = x^{30} = x^5 = x^{10} = x^{20} = 0$, donc $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

L'application T est aussi surjective puisque les lignes de $T(\mathbf{X}')$ déterminent les éléments de la matrice $\text{Mat}(\mathbf{X}')$ et donc les coordonnées de $\mathbf{X}'$.

T est donc une application linéaire bijective entre la sous-algèbre des p-nombres et l'ensemble des spineurs de Dirac, ce qui établit le théorème.

CQFD.

Comme pour l'algèbre d'espace C_3 de Pauli (point 4), on définit dans C_4 les opérateurs différentiels :

- Gradient : soit X un d-nombre de C_4 , son gradient est par définition :

$$\square X = \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} X \quad ; k = 0, 1, 2, 3 \quad (67)$$

Attention : les matrices de Dirac apparaissent dans (67) sous leurs formes contravariantes définies par (62) et (62bis).

Le gradient étant un d-nombre, il se décompose, comme tout nombre de Clifford, en une partie symétrique et une partie antisymétrique (cf. (4)) :

$$\square A = \square \cdot A + \square \wedge A \quad (68)$$

le terme scalaire symétrique $\square \cdot A$ est appelé divergence (généralise à C_4 la divergence dans l'espace euclidien E_3) et le terme antisymétrique $\square \wedge A$ est appelé rotationnel (généralise à C_4 le rotationnel dans l'espace euclidien E_3).

Proposition : - le gradient d'un d-nombre dans C_4 est relié au gradient d'espace ∇ dans E_3 par :

$$\nabla = \gamma_0 \wedge \square \quad (69)$$

PREUVE de (69) : - On écrit, compte tenu de $\gamma_0 = \gamma^0$, $g^{nm} = -1$ si $n = m$, 0 autrement, et de (54) :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \wedge \square &= \gamma_0 \wedge \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \gamma_0 \wedge \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \text{ avec } m = 1, 2, 3 \\
&= \gamma_0 \wedge \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma_0 \wedge \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m} = \gamma_0 \wedge \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma_0 \wedge \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m} = \gamma_0 \wedge \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m} \\
&= \gamma_0 \wedge \gamma_n g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^m} \text{ (avec } n, m = 1, 2, 3) = -\gamma_n \wedge \gamma_0 g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^m} = -\gamma_m \wedge \gamma_0 (-1) \frac{\partial}{\partial x^m} = \gamma_m \wedge \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^m} \\
&= \frac{1}{2} (\gamma_m \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^m} - \gamma_0 \gamma_m \frac{\partial}{\partial x^m}) = \frac{1}{2} (\gamma_m \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^m} + \gamma_m \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^m}) = \gamma_m \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^m} = \sigma'_m \frac{\partial}{\partial x^m} = \nabla
\end{aligned}$$

puisque les vecteurs de C_4 qui se décomposent sur σ'_m définis par (64) sont isomorphes aux vecteurs de E_3 . D'où le résultat (69). - CQFD

On a aussi : $\gamma_0 \cdot \square = \gamma_0 \cdot (\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m}) = \gamma^2_0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma_0 \cdot \gamma_n g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^0}$
 puisque $\gamma^2_0 = 1$ et γ_0 et γ_n sont orthogonaux ; ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \gamma_0 \cdot \square \quad (70)$$

Il résulte de (69) et (70) que :

$$\gamma_0 \square = \frac{\partial}{\partial x^0} + \nabla \quad (71)$$

– Opérateur D'Alembertien : c'est le carré du gradient dans C_4

$$\square^2 = (\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \cdot (\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = (\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k})^2$$

compte tenu des propriétés des γ^k et de la métrique g^{km} , on a dans C_4 :

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3^2} \quad (72)$$

Remarque : bivecteur :

On a vu qu'un bivecteur de C_4 s'écrit :

$$X_B = x^{10} \gamma_1 \gamma_0 + x^{20} \gamma_2 \gamma_0 + x^{30} \gamma_3 \gamma_0 + x^{12} \gamma_1 \gamma_2 + x^{23} \gamma_2 \gamma_3 + x^{31} \gamma_3 \gamma_1$$

or compte tenu de (64), et de $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$ qui conduit à

$$-\gamma_5 \sigma'_1 = \gamma_2 \gamma_3 ; -\gamma_5 \sigma'_2 = \gamma_3 \gamma_1 ; -\gamma_5 \sigma'_3 = \gamma_1 \gamma_2$$

un bivecteur s'exprime avec deux vecteurs d'espace isomorphes à ceux de C_3 , de la sorte :

$$X_B = x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3 - \gamma_5 (x^{23} \sigma'_1 + x^{31} \sigma'_2 + x^{12} \sigma'_3)$$

en posant comme vecteurs d'espace composants de X_B : $X_{BV} = x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3$ et

$X'_{BV} = -(x^{23} \sigma'_1 + x^{31} \sigma'_2 + x^{12} \sigma'_3)$ le bivecteur s'écrit encore :

$$X_B = X_{BV} + \gamma_5 X'_{BV} \quad (73)$$

Le carré de X_B , est d'après (73) :

$$X^2_B = X^2_{BV} - X'^2_{BV} + 2\gamma_5 X_{BV} \cdot X'_{BV}$$

Plusieurs cas se présentent alors :

- Si $X_{BV} \cdot X'_{BV} = 0$ alors X^2_B est un nombre réel, et on dit que le bivecteur X_B est « élémentaire ». Sous ces conditions, trois cas de figure :
 - a) si $X^2_{BV} > X'^2_{BV}$, alors X_B est dit bivecteur temporel ⁽⁷⁾
 - b) si $X^2_{BV} = X'^2_{BV}$ donc si $X^2_B = 0$, alors X_B est un bivecteur isotrope
 - c) si $X^2_{BV} < X'^2_{BV}$, alors X_B est dit bivecteur spatial.
- Si $X_{BV} \cdot X'_{BV} \neq 0$ alors le bivecteur X_B est dit composé. On montre alors que X_B est la somme de deux bivecteurs, le premier dit « spatial », le second dit « temporel » :

$$X_B = A_1 X''_{BV} + A_2 \gamma_5 X''_{BV} \quad (74)$$

où il existe un argument ϕ tel que : $A_1 = \cos \phi$, $A_2 = -\sin \phi$, $X''_{BV} = (\exp \gamma_5 \phi) X_B$

Une autre conséquence de (73) est la proposition suivante :

Pour tout d-nombre pair A , le d-nombre défini par $R = A(\rho \exp \gamma_5 \beta)^{-1/2}$ vérifie les propriétés de rotation de Lorentz dans l'espace-temps pseudo-euclidien :

$$R^\circ = R ; R R^* = 1 \quad (75)$$

PREUVE de (75) : - Comme A est pair, on a : $A = X_S + X_B + X_P$, d'où :

$$A A^\circ = (X_S + X_B + X_P)(X_S - X_B + X_P) = (X_S + X_P)^2 - X^2_B$$

or $(X_S + X_P)^2$ est somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire, il en est de même pour X^2_B d'après (73) ; il existe donc deux scalaires a et a' tels que $A A^\circ = a + \gamma_5 a' = \rho(\exp \gamma_5 \beta)$ avec $a = \rho \cos \beta$ et $a' = \rho \sin \beta$ qui déterminent ρ et β à 2π près. Par conséquent, posant $R = A(\rho \exp \gamma_5 \beta)^{-1/2}$ il vient : $R^\circ = R ; R R^* = 1$ - CQFD.

7 – Quaternions et biquaternions

7-1 : Quaternions de l'algèbre C_3

Revenons à l'algèbre d'espace C_3 de Pauli, où nous avons défini en (20) l'opération changement de sens des vecteurs : $X \rightarrow X^\circ = X_S - X_V + X_B - X_P$.

Par définition, un quaternion est un c-nombre de C_3 , Q , qui se conserve par changement de sens des vecteurs :

$$Q = Q^\circ = Q_S + Q_B \quad (76)$$

Proposition : - Tout quaternion se décompose ainsi :

$$Q = Q_S + j1 Q_V^\alpha \quad (77)$$

⁷ Cette dénomination provient de la Relativité restreinte : le carré de X_B élémentaire correspond, avec les matrices de Dirac, à l'élément de distance dans une métrique pseudo-euclidienne (espace-temps de Minkowski) :

$X^2_B = x^2_0 - x^2_1 - x^2_2 - x^2_3 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ Si cet élément est positif, alors il est du genre temps, s'il est négatif il est du genre espace, et s'il est nul il est isotrope, auquel cas on considère ce qui se propage à la vitesse de la lumière.

où $\mathbf{Q}_v$ est un vecteur de carré 1 ($\mathbf{Q}_v^2 = 1$) et α un nombre réel.

PREUVE de (77) – On développe le bivecteur $\mathbf{Q}_B$ selon (19c) :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_B &= x_4 \sigma_1 \sigma_2 + x_5 \sigma_2 \sigma_3 + x_6 \sigma_3 \sigma_1 = x_4 \mathbf{1} \sigma_1 \sigma_2 + x_5 \mathbf{1} \sigma_2 \sigma_3 + x_6 \mathbf{1} \sigma_3 \sigma_1 \\ &= -j x_4 (j \mathbf{1}) \sigma_1 \sigma_2 - j x_5 (j \mathbf{1}) \sigma_2 \sigma_3 - j x_6 (j \mathbf{1}) \sigma_3 \sigma_1 \\ &= -j x_4 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 - j x_5 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_2 \sigma_3 - j x_6 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_3 \sigma_1 \quad \text{où l'on a utilisé (17)} \\ &= -j x_4 (\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_1) + j x_5 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2) - j x_6 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_1) \\ &= -j x_4 (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_1) + j x_5 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2) - j x_6 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) \quad \text{puisque } \sigma_k^2 = \mathbf{1} \\ &= j x_4 (\sigma_1^2 \sigma_3) + j x_5 (\sigma_1 \sigma_2^2) + j x_6 (\sigma_1^2 \sigma_2) = \mathbf{1} (j x_4 \sigma_3 + j x_5 \sigma_1 + j x_6 \sigma_2) = j \mathbf{1} (x_4 \sigma_3 + x_5 \sigma_1 + x_6 \sigma_2) \\ &= j \mathbf{1} (x'_5 \sigma_1 + x'_6 \sigma_2 + x'_4 \sigma_3) \alpha\end{aligned}$$

où les $x'_k = x_k / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sont les coordonnées d'un vecteur unitaire $\mathbf{Q}_v$ (donc $\mathbf{Q}_v^2 = 1$) et le nombre réel $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, ce qui démontre (77).
CQFD.

Les quaternions forment un espace vectoriel Q_4 de dimension 4, sous-espace vectoriel de C_3 (le vérifier en exercice).

Norme d'un quaternion :

Une norme des quaternions peut être définie pour l'espace vectoriel (Q_4) des quaternions sur le corps des réels $\mathbf{R}$, c'est :

$$\|\mathbf{Q}\| = (\mathbf{Q}^2_S + \alpha^2)^{1/2} \quad (78)$$

On montre (exercice!) que la norme (78) est euclidienne, et qu'elle confère à Q_4 d'être un espace vectoriel complet (ou espace de Banach) ⁽⁸⁾.

Soit le renversement des produits d'un c-nombre de C_3 donné par (21) :

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^* = \mathbf{X}_S + \mathbf{X}_V - \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_P$$

Alors, pour un quaternion, on vérifie aisément que sa norme s'écrit aussi :

$$\|\mathbf{Q}\| = (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^*)^{1/2} \quad (79)$$

Produit scalaire de deux quaternions $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}'$:

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}'^* + \mathbf{Q}' \mathbf{Q}^*) \quad (80)$$

Si $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ on retrouve évidemment le carré de (79).

Proposition : - Les quaternions ont une structure de corps non commutatif formé sur le corps des nombres réels. C'est le seul corps non-commutatif qui existe sur le corps des réels.

PREUVE : - Pour démontrer qu'il s'agit d'un corps, il faut montrer que pour l'addition Q_4 est un

⁸ Un espace vectoriel, muni d'une norme, est dit complet, ou de Banach, si toute suite de Cauchy a pour limite un nombre réel (cf. article: Suites de Cauchy et théorème du point fixe de Banach - par Frédéric Élie, novembre 2012, site <http://fred.elie.free.fr>)

groupe et qu'il est un groupe non commutatif pour la multiplication des c-nombres de Q_4 . Or, le fait qu'il s'agisse d'un groupe additif est immédiat du fait que Q_4 est un espace vectoriel et qu'il y a distributivité du produit avec l'addition du fait que Q_4 est aussi une sous-algèbre de Clifford.

Reste donc à montrer que tout quaternion a un inverse pour la multiplication et que la multiplication est non commutative.

Il est facile de vérifier que le quaternion Q a pour inverse Q^{-1} tel que $QQ^{-1} = 1$ si cet inverse est :

$$Q^{-1} = \frac{Q_S - j1Q_V\alpha}{\|Q\|^2} \quad (81)$$

Pour démontrer la non commutativité de la multiplication, soient deux quaternions :

$$Q = Q_S + j1Q_V\alpha \quad \text{et} \quad Q' = Q'_S + j1Q'_V\alpha'$$

Leur produit est :

$$QQ' = Q_SQ'_S + j1Q_V\alpha Q'_S + j1Q'_V\alpha' Q_S - Q_VQ'_V\alpha\alpha'$$

et

$$Q'Q = Q'_SQ_S + j1Q'_V\alpha' Q_S + j1Q_V\alpha Q'_S - Q'_VQ_V\alpha'\alpha$$

Comme $Q_SQ'_S = Q'_SQ_S$ (puisque ce sont des scalaires) et que :

$Q_VQ'_V = Q_V \cdot Q'_V + Q_V \wedge Q'_V$, l'égalité $QQ' = Q'Q$ n'a lieu que si $Q_V \wedge Q'_V = Q'_V \wedge Q_V$ or par antisymétrie du produit extérieur : $Q'_V \wedge Q_V = -Q_V \wedge Q'_V$ par conséquent $Q_V \wedge Q'_V = 0$ c'est-à-dire si Q_V et Q'_V sont colinéaires.

Donc, en général le produit dans Q_4 n'est pas commutatif.

CQFD.

Quaternions de C_3 et rotations planes :

La proposition suivante montre le rôle que jouent les quaternions dans les rotations vectorielles planes :

Proposition : - Tout quaternion unitaire est égal à $Q = \exp(j1Q_V\theta) = \cos\theta + j1Q_V\sin\theta$; alors la transformation qui fait passer un vecteur de E_3 , v , à un autre vecteur de E_3 , v' , tel que

$$v' = (\exp - \frac{1}{2}(j1Q_V\theta))v(\exp \frac{1}{2}(j1Q_V\theta)) \quad (82)$$

est une rotation autour de l'axe Q_V d'angle θ (figure 1).

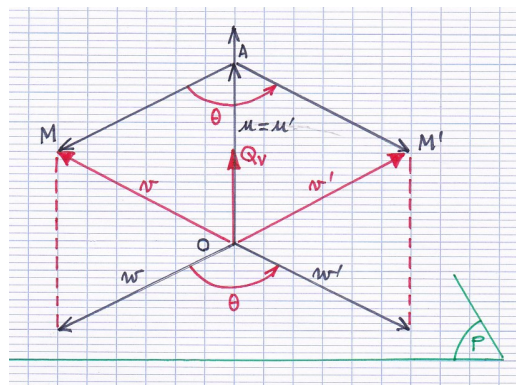


figure 1 – rotation plane

PREUVE de (82) : - Les vecteurs $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ se décomposent en :

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{w}' + \mathbf{u}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'$$

et où $\mathbf{u} \wedge \mathbf{Q}_V = 0$; $\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}_V = 0$; $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{Q}_V = 0$; autrement dit, les vecteurs $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ sont les projections de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sur le plan (P) et les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont les projections sur l'axe OQ_V de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$.

La transformation (82) se projette alors en les deux composantes $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{w}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= (\cos \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \mathbf{u} (\cos \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \\ \mathbf{w}' &= (\cos \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \mathbf{w} (\cos \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{u}'$, comme $\mathbf{u} \wedge \mathbf{Q}_V = \mathbf{Q}_V \wedge \mathbf{u} = 0$ et donc $\mathbf{Q}_V \mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{Q}_V$ ($\mathbf{u}$ commute avec $\mathbf{Q}_V$), le développement donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= (\mathbf{u} \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= \mathbf{u} (\cos^2 \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{Q}_V^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) = \mathbf{u} \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{Q}_V^2 = 1$ (vecteur unitaire). Il vient alors : $\mathbf{u} \wedge \mathbf{Q}_V = 0 \rightarrow \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \mathbf{Q}_V$ par conséquent :

$$(\mathbf{Q}_V \cdot \mathbf{v}) \mathbf{Q}_V = \|\mathbf{u}\| (\mathbf{Q}_V \cdot \mathbf{Q}_V) \mathbf{Q}_V = \|\mathbf{u}\| \mathbf{Q}_V = \mathbf{u}$$

donc la transformée de la composante $\mathbf{u}$ est :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} = (\mathbf{Q}_V \cdot \mathbf{v}) \mathbf{Q}_V \quad (83a)$$

Pour la composante $\mathbf{w}'$, comme $\mathbf{w}$ anticommute avec $\mathbf{Q}_V$ ($\mathbf{Q}_V \mathbf{w} = \mathbf{Q}_V \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{Q}_V = -\mathbf{w} \mathbf{Q}_V$ puisque $\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}_V = 0$), la transformation devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= (\mathbf{w} \cos \frac{\theta}{2} - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \mathbf{w} \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= (\mathbf{w} \cos \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2}) = \mathbf{w} (\cos \frac{\theta}{2} + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \frac{\theta}{2})^2 \\ &= \mathbf{w} (\cos \theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \theta) = (\cos \theta - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \sin \theta) \mathbf{w} = (\exp - j \mathbf{1} \mathbf{Q}_V \theta) \mathbf{w} \end{aligned}$$

comme $\mathbf{Q}_V \mathbf{w} = \mathbf{Q}_V \wedge \mathbf{w} = j \mathbf{Q}_V \times \mathbf{w}$ l'expression précédente donne la transformée de $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} \cos \theta + (\mathbf{Q}_V \times \mathbf{w}) \sin \theta \quad (83b)$$

De (83a) et (83b) on déduit la transformée par rotation de $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \theta + (1 - \cos \theta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_V) \mathbf{Q}_V + (\mathbf{Q}_V \times \mathbf{v}) \sin \theta \quad (83)$$

La relation (83) montre que l'on déduit facilement les coordonnées du vecteur $\mathbf{v}'$ image de $\mathbf{v}$ par rotation d'angle θ et d'axe $\mathbf{Q}_V$, ce qu'on note $(\mathbf{Q}_V, \theta)$, et que l'on déduit les composantes matricielles de la rotation, comme suit :

Les coordonnées des vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sur une base orthonormée sont : $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\mathbf{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$. Les coordonnées de $\mathbf{Q}_v$ sont x'_1, x'_2, x'_3 et vérifient, comme indiqué plus haut : $x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 1$ (puisque $\mathbf{Q}_v$ est de norme unité d'après (77)). Alors, après quelques calculs sans difficulté, (83) devient :

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cos \theta + x'_1 (1 - \cos \theta) (x'_1 v_1 + x'_2 v_2 + x'_3 v_3) + (x'_2 v_3 - x'_3 v_2) \sin \theta \\ v'_2 &= v_2 \cos \theta + x'_2 (1 - \cos \theta) (x'_1 v_1 + x'_2 v_2 + x'_3 v_3) + (x'_3 v_1 - x'_1 v_3) \sin \theta \\ v'_3 &= v_3 \cos \theta + x'_3 (1 - \cos \theta) (x'_1 v_1 + x'_2 v_2 + x'_3 v_3) + (x'_1 v_2 - x'_2 v_1) \sin \theta \end{aligned} \quad (84)$$

qui est l'expression générale d'une matrice de rotation plane autour d'un axe. - CQFD.

Remarque : mise en garde importante : - Il ne faut pas se laisser « abuser » par la notation exponentielle appliquée aux quaternions : notamment, le produit de deux exponentiels représentant deux quaternions *n'est pas* une exponentielle dont l'argument serait la somme des arguments ; cela provient de la non commutativité du produit des quaternions. En effet, on verra un peu plus loin que tout quaternion s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \|\mathbf{Q}\| (\cos \theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \sin \theta) = \|\mathbf{Q}\| \exp j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \theta \quad \text{et} \\ \mathbf{Q}' &= \|\mathbf{Q}'\| (\cos \theta' + j \mathbf{1} \mathbf{Q}'_v \sin \theta') = \|\mathbf{Q}'\| \exp j \mathbf{1} \mathbf{Q}'_v \theta' \end{aligned}$$

leur produit donne donc, toujours en restant vigilant sur l'ordre des termes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{Q}' &= \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}'\| (\cos \theta \cos \theta' + j \mathbf{1} (\mathbf{Q}'_v \sin \theta' \cos \theta + \mathbf{Q}_v \cos \theta' \sin \theta) - \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}'_v \sin \theta \sin \theta') \\ \mathbf{Q}' \mathbf{Q} &= \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}'\| (\cos \theta \cos \theta' + j \mathbf{1} (\mathbf{Q}_v \sin \theta \cos \theta' + \mathbf{Q}'_v \cos \theta \sin \theta') - \mathbf{Q}'_v \mathbf{Q}_v \sin \theta \sin \theta') \end{aligned}$$

qui ne sont généralement pas égaux sauf si $\mathbf{Q}_v$ et $\mathbf{Q}'_v$ sont colinéaires, comme on l'a vu plus haut. On n'a donc *pas le droit d'écrire* : $(\exp j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \theta) (\exp j \mathbf{1} \mathbf{Q}'_v \theta') = \exp j \mathbf{1} (\mathbf{Q}_v \theta + \mathbf{Q}'_v \theta')$!!! Pour éviter ce piège ou cette tentation, il est vivement conseillé de toujours utiliser l'explicitation $\exp(j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \theta) = \cos \theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \sin \theta$

De même, le carré d'un quaternion n'est pas égal au carré de sa norme, sauf s'il s'agit d'un quaternion unitaire :

$$\mathbf{Q}^2 = \|\mathbf{Q}\|^2 (\cos \theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \sin \theta) (\cos \theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \sin \theta) = \|\mathbf{Q}\|^2 (\cos 2\theta + j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \sin 2\theta) = \|\mathbf{Q}\|^2 \exp j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v 2\theta$$

en se souvenant que $\mathbf{Q}_v^2 = 1$.

Proposition : produit de rotations planes : - Le produit de deux rotations planes est complètement décrit par le produit des quaternions qui leur sont associés.

PREUVE – Soit la rotation de $\mathbf{v}$ autour de l'axe $\mathbf{Q}_v$, d'angle θ , donnée par (82)

$$\mathbf{v}' = (\exp -\frac{1}{2}(j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \theta)) \mathbf{v} (\exp \frac{1}{2}(j \mathbf{1} \mathbf{Q}_v \theta))$$

puis la rotation de $\mathbf{v}'$ autour de l'axe $\mathbf{Q}'_v$, d'angle θ'

$$\mathbf{v}'' = (\exp -\frac{1}{2}(j \mathbf{1} \mathbf{Q}'_v \theta')) \mathbf{v}' (\exp \frac{1}{2}(j \mathbf{1} \mathbf{Q}'_v \theta'))$$

en remplaçant dans l'expression de $\mathbf{v}''$, $\mathbf{v}'$ par son expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'' &= (\exp -\frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}'_V\theta'))(\exp -\frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}_V\theta))\mathbf{v}(\exp \frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}_V\theta))(\exp \frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}'_V\theta')) \\
&= (\exp -\frac{1}{2}(j\mathbf{1}(\mathbf{Q}'_V\theta' + \mathbf{Q}_V\theta)))\mathbf{v}(\exp \frac{1}{2}(j\mathbf{1}(\mathbf{Q}_V\theta + \mathbf{Q}'_V\theta'))) \\
&= :(\exp \frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}''_V\theta''))\mathbf{v}(\exp -\frac{1}{2}(j\mathbf{1}\mathbf{Q}''_V\theta''))
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}_V''$ et θ'' sont respectivement l'axe et l'angle du produit des rotations qui amène $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}''$. Par identification des arguments des exponentiels complexes on obtient précisément ces quantités :

$$\begin{aligned}
\cos \frac{1}{2}\theta'' &= \cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta' - (\mathbf{Q}_V \cdot \mathbf{Q}'_V) \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \frac{1}{2}\theta \\
\mathbf{Q}''_V \cos \frac{1}{2}\theta'' &= \mathbf{Q}'_V \sin \frac{1}{2}\theta' \cos \frac{1}{2}\theta + \mathbf{Q}_V \cos \frac{1}{2}\theta' \sin \frac{1}{2}\theta + (\mathbf{Q}_V \times \mathbf{Q}'_V) \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \frac{1}{2}\theta
\end{aligned} \quad (85)$$

CQFD

Ainsi (85) montre qu'il n'est pas nécessaire d'employer des calculs matriciels compliqués pour déterminer le produit des rotations planes.

Quaternions de C_3 et symétries par rapport à un plan :

Les quaternions de C_3 interviennent aussi dans les symétries par rapport à un plan. On a :

Proposition : - La symétrie d'un vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{v}$ par rapport à un plan (P) dont le vecteur unitaire normal à l'origine O, est $\mathbf{u}$, est un vecteur $\mathbf{OM}' = \mathbf{v}'$ tel que :

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{u} \quad (86)$$

PREUVE de (86) – (voir figure 2) :

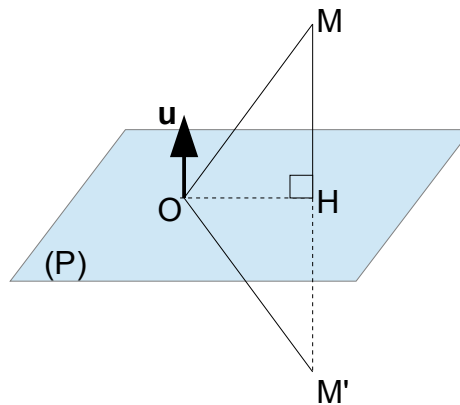


figure 2

Le développement de (86) donne :

$$\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$$

or $\mathbf{u}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$, on en déduit : $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = -2\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$

si cette quantité est perpendiculaire à $\mathbf{OH}$ et si on a $\|\mathbf{OM}\| = \|\mathbf{OM}'\|$, alors on aura prouvé que M' est le symétrique de M par rapport au vecteur du plan (P), $\mathbf{OH}$.

On a : $\mathbf{OH} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}')/2$ puisque H est le milieu de MM', d'où le produit scalaire avec le vecteur unitaire normal au plan (P) en O :

$$\begin{aligned}
u \cdot OH &= \frac{1}{2}(u OH + OH u) \quad (\text{par définition de la composante scalaire d'un produit de Clifford}) \\
&= u(v + v') + (v + v')u \quad \text{or on a: } v' = v - 2u(v \cdot u) \text{ d'où:} \\
u \cdot OH &= uv + uv - 2uu(v \cdot u) + vu + vu - 2u(v \cdot u)u = 2(uv + uv) - 4uu(v \cdot u)
\end{aligned}$$

comme u est unitaire, $uu = u^2 = 1$, d'où : $u \cdot OH = 2(uv + uv) - 4v \cdot u$; or $uv + uv = 2u \cdot v$ donc $u \cdot OH = 0$; il s'ensuit que $v' - v$ est aussi perpendiculaire à OH , puisque :

$$(v - v') \cdot OH = -2u(v \cdot u) \cdot OH = -2u \cdot OH(v \cdot u) = 0$$

Quant aux normes de OM et OM' :

$$OM^2 = (OH + HM)^2 = (OH + HM)(OH + HM) = OH^2 + OH HM + HM OH + HM^2$$

or HM est colinéaire à u , donc $OH HM + HM OH = 2 OH \cdot HM = 0$ donc $OM^2 = OH^2 + HM^2$; il en est de même pour OM'^2 , donc $\|OM\| = \|OM'\|$ - CQFD

Proposition : - La norme d'un produit de deux quaternions quelconques est égale au produit de leurs normes.

PREUVE : - Reprenant la décomposition (77) pour un quaternion, deux quaternions Q et Q' s'écrivent :

$$Q = Q_S + j1Q_V \alpha \quad Q' = Q'_S + j1Q'_V \alpha'$$

que l'on peut encore écrire : $Q = \|Q\|(\frac{Q_S}{\|Q\|} + j1Q_V \frac{\alpha}{\|Q\|})$ et $Q' = \|Q'\|(\frac{Q'_S}{\|Q'\|} + j1Q'_V \frac{\alpha'}{\|Q'\|})$ ce

qui introduit deux angles θ et θ' tels que : $\cos \theta = Q_S / \|Q\|$, $\sin \theta = \alpha / \|Q\|$,
 $\cos \theta' = Q'_S / \|Q'\|$, $\sin \theta' = \alpha' / \|Q'\|$ ceci montre que tout quaternion est égal au produit de sa norme par un quaternion unitaire :

$$Q = \|Q\|(\cos \theta + j1Q_V \sin \theta) = \|Q\| \exp j1Q_V \theta$$

$$Q' = \|Q'\|(\cos \theta' + j1Q'_V \sin \theta') = \|Q'\| \exp j1Q'_V \theta'$$

d'où : $QQ' = \|Q\| \|Q'\| (\exp j1Q_V \theta) (\exp j1Q'_V \theta')$, par conséquent :

$$\|QQ'\| = \|Q\| \|Q'\| \quad (87)$$

CQFD.

Une conséquence de (87) est que le produit de deux symétries est une rotation plane. Pour le montrer, soit les notations de la figure 3 :

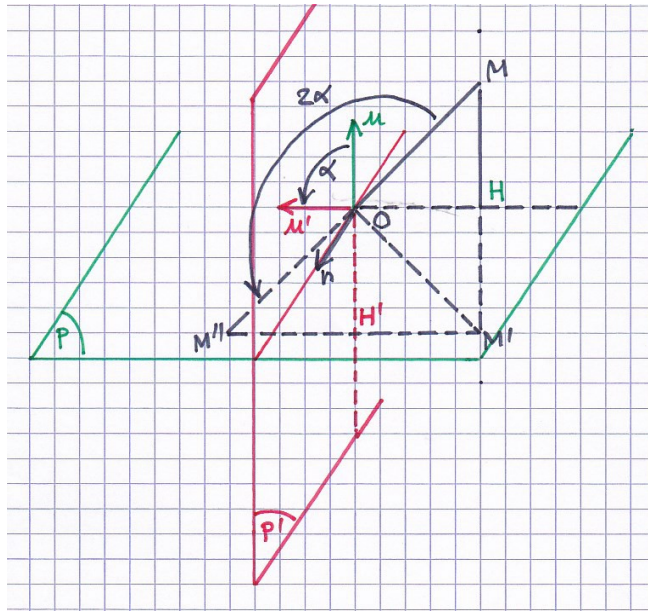


figure 3 : produit de deux symétries qui amènent le point M au point M'' (l'angle α entre les plans de symétrie (P) et (P') est choisi égal à $\pi/2$ pour plus de clarté dans cette représentation)

La première symétrie, qui transforme $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ en $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$, s'effectue par rapport au plan (P) dont le vecteur unitaire normal est $\mathbf{u}$. La deuxième symétrie transforme $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ en $\mathbf{v}'' = \mathbf{OM}''$ par rapport à un plan (P'), passant par O, dont le vecteur normal unitaire $\mathbf{u}'$ fait un angle α avec le vecteur $\mathbf{u}$. On désigne par $\mathbf{n} \sin \alpha = \mathbf{u} \times \mathbf{u}'$ le vecteur normal unitaire obtenu par produit vectoriel des deux vecteurs normaux unitaires $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$. Dans la figure 3, l'angle α est pris égal à $\pi/2$ pour une meilleure visibilité de l'opération, mais il est quelconque dans la démonstration. La symétrie qui transforme M en M' est, comme on l'a vu en (86) : $\mathbf{v}' = -\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{u}$, et la symétrie qui transforme M' en M'' est : $\mathbf{v}'' = -\mathbf{u}' \mathbf{v}' \mathbf{u}' = \mathbf{u}' \mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{u} \mathbf{u}'$. Or on a :

$$\mathbf{u}' \mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} + j \mathbf{1} \mathbf{u}' \times \mathbf{u} = \cos \alpha + j \mathbf{1} \mathbf{n} \sin \alpha$$

de même : $\mathbf{u} \mathbf{u}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + j \mathbf{1} \mathbf{u} \times \mathbf{u}' = \cos \alpha - j \mathbf{1} \mathbf{n} \sin \alpha$ par conséquent le produit des deux symétries devient :

$$\mathbf{v}'' = (\exp j \mathbf{1} \mathbf{n} \alpha) \mathbf{v} (\exp -\mathbf{1} \mathbf{n} \alpha) \quad (88)$$

Ainsi, d'après (88) : $\mathbf{u} \mathbf{u}'$ est un quaternion unitaire et $\mathbf{v}'' = \mathbf{OM}''$ est la transformée de $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ par produit des symétries par rapport aux plans (P) puis (P'), qui est complètement décrit comme une rotation d'angle 2α de $\mathbf{v}$ autour de l'axe $\mathbf{n}$.

Remarque : - De même que le produit de deux symétries planes peut être décrit par une rotation, une symétrie peut aussi être décrite par une rotation plane. On peut le montrer en utilisant les correspondances suivantes entre les figures 1 et 2 :

- Dans la figure 2, les vecteurs $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ jouent le rôle des composantes $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ dans la figure 1 ;
- Le plan (P) de la figure 1, qui contient O, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$, correspond, à la figure 2, au plan contenant O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$;
- Le vecteur unitaire $\mathbf{Q}_v$ à la figure 1 est, pour la figure 2, un vecteur unitaire perpendiculaire en O au plan qui contient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$.

Avec cette correspondance, il est immédiat que $\mathbf{v}$ se transforme par rotation en $\mathbf{v}'$ selon (83b) :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \theta + (\mathbf{Q}_v \times \mathbf{v}) \sin \theta$$

où l'angle de rotation θ est le double de l'angle α que forment $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ avec $\mathbf{OH}$ (figure 2) : $\theta = 2\alpha$

Si la possibilité d'exprimer des symétries par des rotations à l'aide de quaternions offre une grande utilité calculatoire, il reste cependant que, sur un plan structurel, au sens topologique, cette analogie trouve ses limites. En effet, dans une « vraie » rotation, le rayon OM se conserve lorsque M occupe successivement et continûment des coordonnées angulaires qui peuvent être infinitésimalement aussi voisines que l'on veut : dans ce parcours, la norme de $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ reste un invariant de sorte que celle de $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ lui reste égale. Les transformations qui laissent une grandeur géométrique ou métrique invariante forment un groupe qui est associé à cette grandeur ; les rotations font partie des groupes qui conservent les normes (ou groupes isométriques), et les conséquences algébriques sont très larges. Elles diffèrent en de nombreux aspects de celles issues des symétries, puisque celles-ci ne peuvent pas être décrites comme une succession continue de positions où la norme de $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ est conservée : entre l'arrivée $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ et le départ $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$, il y a bien un angle, et les normes sont les mêmes entre ces deux étapes, donc il y a bien description comme une rotation. Mais comme le plan de symétrie est fixé, il n'y a qu'un seul angle, sans angles intermédiaires parcourus dans le processus de passage de $\mathbf{v}$ à $\mathbf{v}'$. Comme si la symétrie était une rotation avec une seule transition autorisée : le point M « n'a pas le droit » de se trouver dans la partie du plan qui est au-delà de $\mathbf{MHM}'$ (figure 2), zone « interdite », pour aller vers M' tout en conservant sa norme.

Quaternions de C_3 et inversions géométriques :

Deux points M et M' sont dits en inversion de pôle O et de puissance k (k nombre réel) si les vecteurs $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ vérifient la relation (figure 4) :

$$\mathbf{v} \mathbf{v}' = k \quad (89)$$

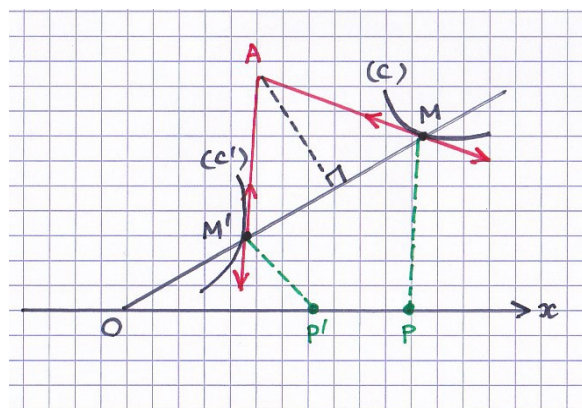


figure 4 : inversion géométrique

Proposition : - Si M et M' sont en inversion (O, k) les vecteurs $\mathbf{v}' = \mathbf{OM}'$ et $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$ sont colinéaires.

PREUVE : - Comme $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont des vecteurs, ils sont égaux à : $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = \|\mathbf{v}'\| \mathbf{u}'$ où les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont unitaires ($\mathbf{u}^2 = 1$, $\mathbf{u}'^2 = 1$). (89) devient alors :

$$\mathbf{v} \mathbf{v}'^2 = k \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v} = k \mathbf{v}' \mathbf{v}'^{-2} = k \mathbf{v}' \|\mathbf{v}'\|^{-2} \mathbf{u}'^{-2} = \frac{k}{\|\mathbf{v}'\|^2} \mathbf{v}' \text{ puisque } \mathbf{u}'^2 = 1$$

donc $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont proportionnels par un scalaire : ils sont donc colinéaires – CQFD.

Proposition : - Soit un premier couple de points en inversion (O,k), M et M', et un deuxième couple de points P et P' dans la même inversion (O, k). Alors ces deux couples de points sont reliés par (cf. figure 4) :

$$\|\mathbf{MP}\| = |k| \|\mathbf{M}'\mathbf{P}'\| / (\|\mathbf{OM}'\| \|\mathbf{OP}'\|) \quad (90)$$

©Frédéric Élie – <http://fred.elie.free.fr>, octobre 2017, octobre 2019 - page 30/94

PREUVE : - Donnons d'abord une expression de l'équation du plan (P) à l'aide du produit de Clifford, au lieu de l'expression algébrique classique. Pour cela, soit $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire normal au plan (P), et M_0 un point du plan (P). Il s'ensuit qu'un point M appartient au plan (P) si le vecteur $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$: $\mathbf{M}_0\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = 0$. Posant $\mathbf{v}_0 = \mathbf{OM}_0$ et $\mathbf{v} = \mathbf{OM}$, on a $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. En utilisant la définition (5) d'un produit intérieur (c'est-à-dire ici scalaire puisqu'on affaire à des vecteurs), l'orthogonalité $\mathbf{M}_0\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = 0$ s'écrit :

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}((\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)) = 0$$

l'équation du plan est donc :

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = 0 \quad (92)$$

La quantité suivante est un paramètre du plan : $2p = \mathbf{u}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{u}$; (92) devient alors :

$$\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} - 2p = 0$$

Remarque : cette relation s'écrit aussi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = p$, c'est-à-dire le produit intérieur de $\mathbf{v}$ avec $\mathbf{u}$ est une constante.

Soit $\mathbf{v}'$ l'inverse de $\mathbf{v}$ par (O,k), alors : $\mathbf{v} = k\mathbf{v}'\mathbf{v}'^{-2}$ que l'on remplace dans l'expression précédente :

$$\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} - 2p = \mathbf{u}k\mathbf{v}'\mathbf{v}'^{-2} + k\mathbf{v}'\mathbf{v}'^{-2} - 2p = 0$$

donc :

$$k(\mathbf{u}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{u}) - 2p\mathbf{v}'^2 = 0 \quad (93)$$

(93) est l'équation de l'inverse du plan (P) par (O,k), déterminons sa nature géométrique.

- Si $p = 0$, alors $\mathbf{u}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = 0$ donc l'inverse M' de M appartient au plan (P) : l'inverse du plan est lui-même.

- Si $p \neq 0$: le vecteur $\mathbf{v}'$ se décompose sur la base de E_3 , selon (19b):

$$\mathbf{v}' = x'_1\sigma_1 + x'_2\sigma_2 + x'_3\sigma_3$$

les x'_n sont les coordonnées de $\mathbf{v}'$ dans cette base, et les σ_n sont les matrices 2x2 de Pauli. A partir de là, explicitons le carré $\mathbf{v}'^2$ qui intervient dans (93) :

$$\mathbf{v}'^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'_1x'_2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1) + x'_1x'_3(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + x'_2x'_3(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)$$

mais d'après (15) on a $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0$ et relations analogues pour les autres paires d'indices (1,3) et (2,3). Il reste donc que $\mathbf{v}'^2$ est le carré de la norme de $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}'^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3$. Avec (93) il vient donc :

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = \frac{k}{p}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \quad (94)$$

c'est l'équation d'une sphère dont il faut déterminer le centre C, $\mathbf{OC}$ ayant pour coordonnées :

$$OC = X_1 \sigma_1 + X_2 \sigma_2 + X_3 \sigma_3$$

Pour cela on identifie l'équation précédente (94) avec l'équation explicite d'une sphère de rayon $R = OC$, puisqu'il est clair que la sphère passe par O :

$$(x'_1 - X_1)^2 + (x'_2 - X_2)^2 + (x'_3 - X_3)^2 = R^2 = OC^2$$

qui se développe en :

$$(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + (X^2_1 + X^2_2 + X^2_3) - 2(x'_1 X_1 + x'_2 X_2 + x'_3 X_3) = OC^2$$

or on a : $OC^2 = X^2_1 + X^2_2 + X^2_3$ et $x'_1 X_1 + x'_2 X_2 + x'_3 X_3 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{OC}$ d'où :

$\mathbf{v}'^2 + OC^2 - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{OC} = OC^2$ c'est-à-dire : $\mathbf{v}'^2 = 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{OC}$ qui, d'après (94), est aussi égal à : $\frac{k}{p} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}$ soit : $\mathbf{v}' \cdot (2\mathbf{OC} - \frac{k}{p} \mathbf{u}) = 0$ cette relation étant valable quel que soit $\mathbf{v}'$, le centre de la sphère est alors :

$$OC = \frac{k}{2p} \mathbf{u} \quad (95)$$

Soit maintenant O' l'inverse de C par (O, k) , on pose $\mathbf{OO}' = \mathbf{w}$. Il est alors tel que :

$$OC \mathbf{OO}' = \frac{k}{2p} \mathbf{u} \mathbf{w} = k \quad \text{le produit à gauche par } \mathbf{u} \text{ donne, puisque } \mathbf{u}^2 = 1 \quad \frac{k}{2p} \mathbf{u}^2 \mathbf{w} = k \mathbf{u} = \frac{k}{2p} \mathbf{w}$$

d'où O' inverse de C :

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{w} = 2p \mathbf{u} \quad (96)$$

On termine la démonstration en appliquant : si $\mathbf{OO}'$ est son propre symétrique, au signe près, par rapport au plan (P) alors O et O' sont symétriques par rapport à (P) . Or le symétrique de $\mathbf{OO}'$ est : $-\mathbf{u}^{-1} \mathbf{w} \mathbf{u} = -\mathbf{u}^{-1} 2p \mathbf{u} \mathbf{u} = -2p (\mathbf{u}^{-1} \mathbf{u}) = -2p \mathbf{u} = -\mathbf{w}$, donc O et O' sont symétriques, et ils sont inverses : $OC \mathbf{OO}' = k$.
CQFD.

7-2 : Biquaternions de l'algèbre C_4

On a vu au point 6 que, dans l'algèbre d'espace-temps C_4 de Dirac, tout d-nombre pair $\mathbf{A}$, tel que $\mathbf{A} \mathbf{A}^* \neq 0$ ($\mathbf{A}^*$ est l'image de $\mathbf{A}$ par renversement dans les produits), est le produit d'un d-nombre pair $\mathbf{R}$ qui satisfait (75) et du d-nombre qui est la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire :

$$(\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} =: \rho^{1/2} \cos \frac{\beta}{2} + \rho^{1/2} \gamma_5 \sin \frac{\beta}{2}$$

ainsi :

$$\mathbf{A} = (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \mathbf{R} \quad (97)$$

avec $\mathbf{R}^\circ = \mathbf{R}$; $\mathbf{R} \mathbf{R}^* = 1$ qui est la condition (75).

Les d-nombres de C_4 sont appelés biquaternions, car ils s'expriment à l'aide de deux quaternions d'espace C_3 . On a en effet la proposition suivante :

Proposition : - Tout d-nombre pair de C_4 , A , se décompose de manière unique, en :

$$A = Q + \gamma_5 Q' \quad (98)$$

où Q et Q' sont des quaternions d'espace C_3 .

PREUVE de (98) : - On a vu en (63bis) et (65) qu'un d-nombre pair se décompose en un scalaire A_S , un bivecteur A_B , et un pseudo-scalaire A_P :

$$A = A_S + A_B + A_P = X^0 \mathbf{1} + (x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3) - (x^{12} \sigma'_1 \sigma'_2 + x^{23} \sigma'_2 \sigma'_3 + x^{31} \sigma'_3 \sigma'_1) + x^5 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

où l'on rappelle que σ'_k est défini par (65bis) : $\sigma'_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$, et que $\gamma_5 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$ entraîne les identités (puisque $\sigma_k^2 = \mathbf{1}$ et l'antisymétrie du produit) :

$$\begin{aligned} \gamma_5 \sigma'_3 &= \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3{}^2 = \sigma'_1 \sigma'_2 \\ \gamma_5 \sigma'_2 &= \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 \sigma'_2 = -\sigma'_1 \sigma'_3 \sigma'_2{}^2 = -\sigma'_1 \sigma'_3 = \sigma'_3 \sigma'_1 \\ \gamma_5 \sigma'_1 &= \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 \sigma'_1 = \sigma'_1{}^2 \sigma'_2 \sigma'_3 = \sigma'_2 \sigma'_3 \end{aligned}$$

la décomposition de A précédente est donc encore égale à :

$$A = A_S + A_{BV} + \gamma_5 A'_{BV} + A_P$$

où A_{BV} et A'_{BV} sont les vecteurs :

$$\begin{aligned} A_{BV} &= x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3 \\ A'_{BV} &= -(x^{23} \sigma'_1 + x^{31} \sigma'_2 + x^{12} \sigma'_3) \end{aligned}$$

et où : $A_S = X^0 \mathbf{1}$ et $A_P = x^5 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = x^5 \gamma_5$

Cherchons alors deux quaternions Q et Q' , qui s'écrivent selon (77) : $Q = Q_S + j \mathbf{1} Q_V \alpha$ et $Q' = Q'_S + j \mathbf{1} Q'_V \alpha'$ (où Q_S , Q'_S sont des scalaires, et Q_V , Q'_V des vecteurs unitaires), tels que :

$$A = A_S + A_{BV} + \gamma_5 A'_{BV} + A_P = Q + \gamma_5 Q' = Q_S + j \mathbf{1} Q_V \alpha + \gamma_5 Q'_S + \gamma_5 j \mathbf{1} Q'_V \alpha'$$

il s'ensuit déjà que, par identification : $A_S = Q_S$, $A_P = \gamma_5 Q'_S$; quant aux deux autres termes, on sait que dans C_4 , $j \mathbf{1}$ est isomorphe à γ_5 et donc que $\gamma_5 j \mathbf{1} = -\mathbf{1}$. Donc $\gamma_5 j \mathbf{1} Q'_V \alpha'$ est un vecteur, donc $A_{BV} = \gamma_5 j \mathbf{1} Q'_V \alpha' = -Q'_V \alpha'$, et $j \mathbf{1} Q_V \alpha = \gamma_5 A'_{BV}$.

Cette décomposition est unique puisque, au final $A = Q_S + \gamma_5 Q'_S + \gamma_5 Q'_V \alpha' + Q'_V \alpha'$ et que si on avait aussi $A = Q_{S1} + \gamma_5 Q_{V1} \alpha_1 + \gamma_5 Q'_{S1} + Q'_{V1} \alpha'_1$ on aurait l'égalité de chaque terme :

$Q_{S1} = Q_S$, $\alpha_1 = \alpha$ (puisque $Q_{V1}^2 = Q_V^2 = \mathbf{1}$ et $Q_{V1} = Q_V$), $Q'_{S1} = Q'_S$, $Q'_{V1} \alpha'_1 = Q'_V \alpha'$. - CQFD.

On va utiliser la proposition (98) pour montrer la proposition suivante :

Proposition : - L'ensemble des biquaternions de C_4 , muni des opérations addition et produit de Clifford, forme un anneau (le produit est distributif par rapport à l'addition et le produit de deux biquaternions est encore un quaternion). Mais il n'est pas un corps parce que, en général, les biquaternions n'ont pas d'inverse pour le produit, ni à droite, ni à gauche.

PREUVE : - On montre d'abord que le produit de deux biquaternions est un biquaternion. Pour cela, soient A_1 et A_2 deux biquaternions, ils se décomposent selon (98) :

$$A_1 = Q_1 + \gamma_5 Q'_1 \quad \text{et} \quad A_2 = Q_2 + \gamma_5 Q'_2$$

les Q et Q' étant des quaternions de C_3 . Leur produit est donc :

$$A_1 A_2 = Q_1 Q_2 - Q'_1 Q'_2 + \gamma_5 (Q'_1 Q_2 + Q_1 Q'_2)$$

les produits de quaternions étant des quaternions, cette expression est bien de la forme (98). Cherchons maintenant les conditions pour qu'un quaternion A_1 ait un inverse à droite A_2 , c'est-à-dire pour que $A_1 A_2 = 1$. On aurait donc pour cela :

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 - Q'_1 Q'_2 &= 1 \\ Q'_1 Q_2 + Q_1 Q'_2 &= 0 \end{aligned}$$

Comme les quaternions de C_3 forment un corps (ils ont un inverse), la deuxième condition permet d'avoir :

$$Q'_2 = -Q_1^{-1} Q'_1 Q_2$$

que l'on remplace dans la première condition :

$$Q_1 Q_2 + Q'_1 Q_1^{-1} Q'_1 Q_2 = (Q_1 + Q'_1 Q_1^{-1} Q'_1) Q_2 = 1$$

le terme $(Q_1 + Q'_1 Q_1^{-1} Q'_1)$ est un quaternion de C_3 donc Q_2 existe (et par suite l'inverse à droite A_2 existe) si et seulement si :

$$Q_1 + Q'_1 Q_1^{-1} Q'_1 \neq 0 \quad (99)$$

(99) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un biquaternion $A_1 = Q_1 + \gamma_5 Q'_1$ admette un inverse à droite. Elle n'est donc pas générale pour l'ensemble des biquaternions. On montre de la même façon que les biquaternions n'admettent pas tous un inverse à gauche. Par conséquent l'ensemble des biquaternions n'est pas un corps. - CQFD.

Comment sont caractérisés les biquaternions qui *n'admettent pas* d'inverse à droite ? On va montrer :

Proposition : - Les biquaternions qui n'admettent pas d'inverse à droite sont de la forme :

$$A_1 = Q_1 (1 + X_V) \quad (100)$$

où X_V est un vecteur unitaire, et ils satisfont à :

$$A_1 A_1^* = 0 \quad (101)$$

PREUVE de (100) et (101) : - Pour les biquaternions qui n'ont pas d'inverse à droite, on a l'opposé de la condition (99) :

$$Q_1 + Q'_1 Q_1^{-1} Q'_1 = 0$$

On pose : $X = Q_1^{-1} Q'_1$ qui est un quaternion, la relation précédente est donc :

$$Q_1 + Q'_1 X = 0$$

en multipliant à gauche par Q_1^{-1} , il vient : $Q_1^{-1} Q_1 + Q_1^{-1} Q'_1 X = 1 + X^2 = 0$ donc $X^2 = -1$.
Comme X est un quaternion il peut toujours se décomposer sous la forme (77) :

$$X = X_s + j1 X_v \alpha$$

où X_s réel, X_v vecteur unitaire, α réel. Le carré de X est alors :

$$X^2 = X_s^2 - \alpha^2 + 2j1 X_s X_v \alpha = -1$$

cette égalité a lieu si : $X_s^2 - \alpha^2 = -1$ et $X_s X_v \alpha = 0$, par suite :

- soit $\alpha = 0$ alors $X_s^2 = -1$, ce qui est impossible puisque X_s est réel ;
- soit il reste $X_s = 0$ et $\alpha^2 = 1$; dans ce cas il vient : $X = j1 X_v \alpha = -j1 X_v$ par conséquent : $Q'_1 = -j1 Q_1 X_v$ et donc $A_1 = Q_1 + \gamma_5 Q'_1 = Q_1 - j\gamma_5 Q_1 X_v$ et comme $j\gamma_5$ est isomorphe à -1 , il vient :

$$A_1 = Q_1 (1 + X_v)$$

Pour les biquaternions qui n'ont pas d'inverse à droite, calculons $A_1 A_1^*$:

$$A_1 A_1^* = Q_1 (1 + X_v) Q_1^* (1 + Q_1)^* = Q_1 Q_1^* (1 + X_v) (1 - X_v) = Q_1 Q_1^* (1 - X_v^2) = 0$$

puisque $X_v^2 = 1$ (unitaire). Donc $A_1 A_1^* = 0$.
CQFD.

Les biquaternions qui n'ont pas d'inverse à droite, et donc qui vérifient (100) et (101), sont des spineurs.

Norme d'un biquaternion :

Notons que les biquaternions sont un espace vectoriel (Q) de dimension 8, cela est aisément vérifiable à partir de :

$$A = A_s + A_B + A_P = X^0 1 + (x^{10} \sigma'_1 + x^{20} \sigma'_2 + x^{30} \sigma'_3) - (x^{12} \sigma'_1 \sigma'_2 + x^{23} \sigma'_2 \sigma'_3 + x^{31} \sigma'_3 \sigma'_1) + x^5 \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

$$\dim(Q) = 8 \quad (102)$$

Soit un biquaternion $A = Q + \gamma_5 Q'$ où Q et Q' sont des quaternions. Soient Q^* et Q'^* les quaternions obtenus par renversement de l'ordre des produits (21). Alors le carré de la norme de A est égale à, suite à (79) :

$$\|A\|^2 = QQ^* + Q'Q'^* = \|Q\|^2 + \|Q'\|^2 \quad (103)$$

L'espace des biquaternions muni de la norme définie par (103) est, lui aussi, un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). De plus la norme est euclidienne.

On définit alors le produit scalaire de deux biquaternions par la somme des produits scalaires des quaternions de C_3 qui les constituent :

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \frac{1}{2} (Q_1 Q_2^* + Q_2 Q_1^* + Q'_1 Q'_2^* + Q'_2 Q'_1^*) = \langle Q_1, Q_2 \rangle + \langle Q'_1, Q'_2 \rangle \quad (104)$$

où les $\langle Q_k, Q_m \rangle$ sont les produits scalaires de l'espace vectoriel des quaternions de C_3 , donnés par (80).

8 – Spineurs : définition algébrique

8-1 : Spineurs dans C_3

Soit A un c-nombre de C_3 . On l'appelle :

- spineur positif si : $A\sigma_3 = A$
- spineur négatif si : $A\sigma_3 = -A$

A tout c-nombre B de C_3 , on lui associe un idéal gauche de :

- spineur positif $B_+ = \frac{1}{2} B(1 + \sigma_3)$, en effet, on a :

$$B_+ \sigma_3 = \frac{1}{2} B(1 + \sigma_3) \sigma_3 = \frac{1}{2} B \sigma_3 + \frac{1}{2} B \sigma_3^2 = \frac{1}{2} B(1 + \sigma_3) = B_+$$

- spineur négatif $B_- = \frac{1}{2} B(1 - \sigma_3)$; on montre de même que $B_- \sigma_3 = -B_-$

Il est immédiat qu'un nombre de C_3 se décompose de manière unique en un spineur positif et un spineur négatif :

$$B = B_+ + B_-$$

Les ensembles des deux idéaux $\{B_+\}$ et $\{B_-\}$ sont indépendants : soit en effet à déterminer a et b tels que $aB_+ + bB_- = 0$:

$$aB_+ + bB_- = a \frac{1}{2} B(1 + \sigma_3) + b \frac{1}{2} B(1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (a + b) 1 + \frac{1}{2} B(a - b) \sigma_3 = 0$$

ce qui nécessite : $a + b = 0$ et $a - b = 0$ donc $a = b = 0$. Les idéaux sont donc bien indépendants.

Quelle est la base de ces idéaux (puisqu'ils forment un sous-espace vectoriel) ?

Pour l'établir, utilisons la décomposition (19) de tout c-nombre de C_3 , B :

$$B = B_S + B_V + B_B + B_P$$

avec :

$$B_S = B_0 \mathbf{1} \text{ scalaire}$$

$$B_V = B_1 \sigma_1 + B_2 \sigma_2 + B_3 \sigma_3 \text{ vecteur}$$

$$B_B = B_{12} \sigma_1 \sigma_2 + B_{23} \sigma_2 \sigma_3 + B_{31} \sigma_3 \sigma_1 \text{ bivecteur}$$

$$B_P = B_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = j \mathbf{1} B_4 \text{ pseudo-scalaire}$$

Or on a par (17) : $j\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3$, $j\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1$, $j\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ d'où le bivecteur :

$$\mathbf{B}_B = jB_{23}\sigma_1 + jB_{31}\sigma_2 + jB_{12}\sigma_3$$

Il s'ensuit :

$\mathbf{B} = (B_0\mathbf{1} + j\mathbf{1}B_4) + (B_1\mathbf{1} + j\mathbf{1}B_{23})\sigma_1 + (B_2\mathbf{1} + j\mathbf{1}B_{31})\sigma_2 + (B_3\mathbf{1} + j\mathbf{1}B_{12})\sigma_3$ donc tout nombre de C_3 , $\mathbf{B}$ se décompose sur la base des matrices de Pauli suivant des coordonnées qui sont la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire :

$$\mathbf{B} = A_0 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3$$

avec : $\mathbf{A}_k$ sommes d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire : $A_k = a_k\mathbf{1} + j\mathbf{1}a'_k$ où :

$$\begin{array}{ll} a_0 = B_0 & a'_0 = B_4 \\ a_1 = B_1 & a'_1 = B_{23} \\ a_2 = B_2 & a'_2 = B_{31} \\ a_3 = B_3 & a'_3 = B_{12} \end{array} \text{ et }$$

il s'ensuit que le spineur positif associé à $\mathbf{B}$ est :

$$\begin{aligned} B_+ &= \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{1} + \sigma_3) = \frac{1}{2}(A_0 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3)(\mathbf{1} + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{2}(A_0 + A_3)(\mathbf{1} + \sigma_3) + \frac{1}{2}(A_1\sigma_1(\mathbf{1} + \sigma_3) + A_2\sigma_2(\mathbf{1} + \sigma_3)) \end{aligned}$$

le deuxième terme est égal à $\frac{1}{2}(A_1\sigma_1(\mathbf{1} + \sigma_3) + A_2\sigma_2(\mathbf{1} + \sigma_3)) = (A_1 + jA_2)(\mathbf{1} - \sigma_3)\sigma_1$ où l'on a utilisé (17), d'où :

$$B_+ = \frac{1}{2}(A_0 + A_3)(\mathbf{1} + \sigma_3) + \frac{1}{2}(A_1 + jA_2)(\mathbf{1} - \sigma_3)\sigma_1 \quad (105)$$

ce qui montre que la base des spineurs positifs est formée de deux nombres de Pauli :

$(\mathbf{1} + \sigma_3)$ et $(\mathbf{1} - \sigma_3)\sigma_1$: l'espace vectoriel des spineurs positifs est donc de dimension 2 ; de même, on montre que la base de l'espace vectoriel des spineurs négatifs, elle aussi de dimension 2, est formée de : $(\mathbf{1} - \sigma_3)$ et $(\mathbf{1} + \sigma_3)\sigma_1$.

8-2 : Spineurs dans C_4

Soit un d-nombre quelconque de C_4 , $\mathbf{A}$. On lui associe deux autres d-nombres :

- par définition, un spineur positif de Dirac : $A_+ = \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{1} + \sigma'_3)$, donc $A_+\sigma'_3 = A_+$;
- par définition, un spineur négatif de Dirac : $A_- = \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{1} - \sigma'_3)$, donc $A_-\sigma'_3 = -A_-$.

$\mathbf{A}$ se décompose en un spineur positif et un spineur négatif : $\mathbf{A} = A_+ + A_-$

Comme pour les spineurs de C_3 , on montre que les deux idéaux formés des spineurs positifs et négatifs $\{A_+\}$ et $\{A_-\}$ sont indépendants :

$$aA_+ + bA_- = 0 = \frac{1}{2}\mathbf{A}(a+b) + \frac{1}{2}\mathbf{A}(a-b)\sigma'_3 = 0$$

entraîne : $a + b = 0$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 0$.

Or on a vu en (63) que tout d-nombre de C_4 , $\mathbf{A}$, se décompose en un d-nombre pair $\mathbf{A}'$ et un d-nombre impair $\mathbf{A}''$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''$ où $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{A}''$ sont donnés par (63bis). Par ailleurs $\mathbf{A}''$ peut toujours s'écrire : $\mathbf{A}'' = X \gamma_0$, et par suite :

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{2} A(1 + \sigma'_3) = \frac{1}{2} (A' + A'')(1 + \sigma'_3) = \frac{1}{2} (A' + X \gamma_0)(1 + \sigma'_3) \\ &= \frac{1}{2} A'(1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2} X \gamma_0(1 + \sigma'_3) \end{aligned}$$

or $\mathbf{A}'$ en tant que d-nombre se décompose en : $A' = A'_+ + A'_-$

et X en tant que d-nombre se décompose en : $X = X_+ + X_-$

d'où : $A_+ = \frac{1}{2} (A'_+ + A'_-)(1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2} (X_+ + X_-) \gamma_0(1 + \sigma'_3) = A'_+ + X_- \gamma_0$, on a donc :

$$A_+ = A'_+ + X_- \gamma_0 \quad (106)$$

de même :

$$A_- = A'_- + X_+ \gamma_0 \quad (106bis)$$

Ces relations (106) et (106bis) relient les spineurs de Dirac (de C_4) $\mathbf{A}_+$ et $\mathbf{A}_-$ aux spineurs de Pauli $\mathbf{X}_-$ et $\mathbf{X}_+$ via γ_0 (et à la correspondance $\sigma'_k \rightarrow \sigma_k$ près).

Soit un biquaternion $\mathbf{A}$, alors en tant que d-nombre il vérifie lui aussi : $A = A_+ + A_-$ où les spineurs sont : $A_+ = \frac{1}{2} A(1 + \sigma'_3)$ et $A_- = \frac{1}{2} A(1 - \sigma'_3)$.

Or l'ensemble des biquaternions $\{\mathbf{A}\}$ est en bijection avec l'ensemble des spineurs de C_4 , car :

$$A_+ = A'_+ + X_- \gamma_0 \quad \text{et} \quad A_- = A'_- + X_+ \gamma_0, \quad \text{où } \mathbf{A}'_+, \mathbf{A}'_-, \mathbf{X}_+, \mathbf{X}_- \text{ sont des spineurs de } C_4.$$

Mais cette bijection ne conserve pas la structure d'anneau des biquaternions (pour lesquels on a vu que, si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont deux biquaternions, leur produit est encore un biquaternion, c'est-à-dire : $A_1 A_2 = (\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}'_1 \mathcal{Q}'_2) + \gamma_5 (\mathcal{Q}'_1 \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}'_2)$ est encore un biquaternion), car, si $\mathbf{A}_{1+}$ et $\mathbf{A}_{2+}$ sont deux quaternions associés aux d-nombres $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$, il vient :

$$A_{1+} A_{2+} = \frac{1}{2} A_1(1 + \sigma'_3) \frac{1}{2} A_2(1 + \sigma'_3) = \frac{1}{4} (A_1 A_2 + A_1 A_2 \sigma'_3 - A_1 A_2 \sigma'_3 - A_1 A_2) = 0 \quad \text{car}$$

$\sigma'^2_3 = 1$; de même on obtient : $A_{1-} A_{2-} = 0$, donc le produit de deux spineurs n'est pas un spineur.

De plus, pour un spineur $\mathbf{A}_+$:

$$\begin{aligned} A_+ A_+^* &= \frac{1}{2} A_+(1 + \sigma'_3) \frac{1}{2} A_+^*(1 - \sigma'_3) = \frac{1}{4} (A_+ A_+^* - A_+ A_+^* \sigma'_3 + A_+ \sigma'_3 A_+^* - A_+ \sigma'_3 A_+^* \sigma'_3) \\ &= \frac{1}{4} (A_+ A_+^* - A_+ A_+^* \sigma'_3 + A_+ A_+^* - A_+ A_+^*) = 0 \end{aligned}$$

puisque par définition $A_+ A_+^* \sigma'_3 = A_+ (A_+^* \sigma'_3) = A_+ A_+^*$, de même pour $A_- A_-^*$:

$$\begin{aligned} A_+ A_+^* &= 0 \\ A_- A_-^* &= 0 \end{aligned} \quad (107)$$

Donc les spineurs $\mathbf{A}_+$ ou $\mathbf{A}_-$ de C_4 ne peuvent pas être de la forme $A_+ = (\rho_+ \exp j \mathbf{1} \beta_+)^{1/2} \mathbf{R}_+$ c'est-à-dire sous une forme qui fait intervenir les rotations de Lorentz dans l'espace-temps, de

même pour **A**.

Donc les biquaternions de C_4 sont plus généraux que les spineurs de C_4 qui eux, interviennent dans l'équation classique de Dirac, comme cela sera montré au point 11.

9 – Équation de Pauli avec les spineurs de C_4

L'équation de Schrödinger ne respecte pas la covariance relativiste : les variables d'espace x_k ($k = 1, 2, 3$) et de temps $x_0 = ct$ interviennent dans l'équation différentielle avec des ordres différents : 1 pour le temps, 2 pour l'espace, alors qu'elles devraient intervenir avec le même ordre comme l'exige la Relativité Restreinte où temps et espace jouent un rôle symétrique :

$$\left\{ -\frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) + j \hbar c \frac{\partial}{\partial x_0} \right\} \Psi = 0$$

On doit donc la remplacer par une équation linéaire, incluant l'équation de Schrödinger, avec seulement des dérivées du premier ordre $\partial/\partial x_j$ pour toutes les variables d'espace-temps x_j , où $j = 0, 1, 2, 3$.

Puisque la quantité de mouvement **P** et l'énergie **E** sont les composantes du même quadrivecteur énergie-impulsion **W** = (**E/c**, **P**) en Relativité Restreinte, l'équation cherchée doit faire intervenir l'opérateur associé à ce quadrivecteur (opérateur que l'on note encore **W**) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -j \hbar \nabla = -j \hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ E &= j \hbar c \frac{\partial}{\partial x_0} \end{aligned}$$

sous la forme d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\mathbf{D} \Psi = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K}) \Psi = 0 \quad (108)$$

où l'opérateur quadrivectoriel est **G** = (G_0, G_1, G_2, G_3) et l'opérateur quadrivecteur énergie-impulsion sur lequel il agit est **W** = ($P_0 = E/c, P_1, P_2, P_3$) ; **G** et **K** sont à déterminer. (108) s'explique en :

$$\left(G_0 \frac{E}{c} + G_1 P_1 + G_2 P_2 + G_3 P_3 + \mathbf{K} \right) \Psi = 0 \quad (108\text{bis})$$

Les solutions de (108bis) doivent être aussi solutions de l'équation de Schrödinger que l'on réécrit avec les opérateurs **P** et **E** :

$$\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} - E \right) \Psi = 0$$

Cette équation du 2e ordre s'obtient en multipliant l'opérateur **D** du premier ordre, intervenant dans (108), par un autre opérateur **D'** du premier ordre :

$$\mathbf{D}' = \mathbf{G}' \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K}' \quad \text{où : } \mathbf{G}' = (G'_0, G'_1, G'_2, G'_3)$$

de façon à avoir : $\mathbf{D} \mathbf{D}' = A \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} - E \right)$ soit encore : $\mathbf{D} \mathbf{D}' = -\frac{A}{2m} (2mE - \mathbf{P}^2)$ où **A** est une constante de proportionnalité arbitraire (puisque l'on a l'équation de Schrödinger $\mathbf{D} \mathbf{D}' \Psi = 0$) que l'on prend donc égale à $A = -2m$; d'où :

$$\mathbf{D} \mathbf{D}' = 2mc - P_k P_k = 2mc P_0 - P_k P_k \quad k = 1, 2, 3$$

que l'on développe :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{D}' &= (\mathbf{G} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K})(\mathbf{G}' \cdot \mathbf{W} + \mathbf{K}') = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{W})(\mathbf{G}' \cdot \mathbf{W}) + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{W})\mathbf{K}' + \mathbf{K}(\mathbf{G}' \cdot \mathbf{W}) + \mathbf{K} \mathbf{K}' \\ &= (G_0 P_0 + G_k P_k)(G'_0 P_0 + G'_k P_k) + (G_0 P_0 + G_k P_k)\mathbf{K}' + \mathbf{K}(G'_0 P_0 + G'_k P_k) + \mathbf{K} \mathbf{K}' \\ &= (G_0 G'_0) P_0^2 + (G_0 G'_k + G_k G'_0) P_k P_0 + G_k G'_k P_k P_k \\ &\quad + (G_0 \mathbf{K}' + G'_0 \mathbf{K}) P_0 + (G_k \mathbf{K}' + G'_k \mathbf{K}) P_k + \mathbf{K} \mathbf{K}' \equiv 2mc P_0 - P_k P_k \end{aligned}$$

par identification terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned} G_0 G'_0 &= 0 \\ G_0 G'_k + G_k G'_0 &= 0 \quad k=1,2,3 \\ G'_k G'_m + G'_m G'_k &= -2\delta_{km} \quad k, m=1,2,3 \\ G_k \mathbf{K}' + G'_k \mathbf{K} &= 0 \quad k=1,2,3 \\ \mathbf{K} \mathbf{K}' &= 0 \\ G_0 \mathbf{K}' + G'_0 \mathbf{K} &= 2mc \end{aligned} \quad (109)$$

En introduisant d'autres opérateurs B_n et B'_n , $n = 0, 1, 2, 3, 4$, construits sur les précédents :

$$\begin{aligned} B_0 &= j \left(G_0 + \frac{K}{2mc} \right) ; \quad B'_0 = j \left(G'_0 + \frac{K'}{2mc} \right) \\ B_4 &= G_0 - \frac{K}{2mc} ; \quad B'_4 = G'_0 - \frac{K'}{2mc} \\ B_1 &= G_1 ; \quad B'_1 = G'_1 \\ B_2 &= G_2 ; \quad B'_2 = G'_2 \\ B_3 &= G_3 ; \quad B'_3 = G'_3 \end{aligned}$$

les relations (109) se rassemblent en la relation d'anticommutation :

$$B'_j B_n + B'_n B_j = -2\delta_{jn} \quad n, j=0,1,2,3,4 \quad (109bis)$$

On peut vérifier en effet que (109), pris pour chaque familles d'indices, donne (109bis) :

- pour les indices d'espace $m, k = 1, 2, 3$: $B'_k B_m + B'_m B_k = G'_k G'_m + G'_m G'_k = -2\delta_{km}$
- pour l'indice d'espace $k = 1, 2, 3$:
 $B'_0 B_k + B'_k B_0 = j(G'_0 G_k + G'_k G_0) + j/2mc(\mathbf{K}' G_k + \mathbf{K} G'_k) = 0$
- $B'_4 B_0 + B'_0 B_4 = j G'_0 G_0 + j \mathbf{K}' G_0 / 2mc - j G'_0 \mathbf{K} / 2mc - j \mathbf{K} \mathbf{K}' / (2mc)^2 = 0$
- $B'_0 B_0 + B_0 B'_0 = (-1/2mc)(G'_0 \mathbf{K} + \mathbf{K}' G_0 + G_0 \mathbf{K}' + \mathbf{K} G'_0) = -4mc / 2mc = -2$
- pour l'indice d'espace $k = 1, 2, 3$: $B'_k B_k + B_k B'_k = G'_k G_k + G_k G'_k = -2$

CQFD.

La relation d'anticommutation n'est pas identique à celle (57) qui concerne les générateurs α_n de l'espace C_4 , avec $n = 0, 1, 2, 3$, et qui sont tels que : $\gamma_0 = \alpha_0$, $\gamma_k = j\alpha_k$, $k = 1, 2, 3$. Cette relation, rappelons-le, est :

$$\alpha_j \alpha_n + \alpha_n \alpha_j = 2\delta_{jn} \mathbf{1}$$

Pour l'obtenir à partir de (109bis), on introduit un opérateur $\mathbf{X}$ tel que :

$$B_4 = -jX, \quad B'_4 = -jX^{-1}, \quad B_m = X\alpha_m, \quad B'_m = -\alpha_m X^{-1} \quad (110)$$

où $m = 0, 1, 2, 3$ (indice d'espace-temps), que l'on remplace dans (109bis) :

– pour $m, p = 0, 1, 2, 3$:

$$B'_m B_p + B'_p B_m = -\alpha_m X^{-1} X \alpha_p - \alpha_p X^{-1} X \alpha_m = -(\alpha_m \alpha_p + \alpha_p \alpha_m) \equiv -2\delta_{mp} \mathbf{1}$$

d'où : $\alpha_m \alpha_p + \alpha_p \alpha_m = 2\delta_{mp} \mathbf{1}$;

– pour $m = 0, 1, 2, 3$:

$$B'_4 B_m + B'_m B_4 = -jX^{-1} X \alpha_m + \alpha_m X^{-1} jX = j(\alpha_m - \alpha_m) = 0$$

on a donc bien : $\alpha_j \alpha_n + \alpha_n \alpha_j = 2\delta_{jn} \mathbf{1}$, $j, n = 0, 1, 2, 3$, et donc : $\alpha_j^2 = \mathbf{1}$

Puisque (109bis) correspond à (57), on peut utiliser les α_n pour déterminer l'ordre des matrices associées aux opérateurs qui interviennent dans (108bis). Pour cela :

Les valeurs propres des α_n sont égales à ± 1 puisque $\alpha_n^2 = \mathbf{1}$. De la relation d'anticommutation (57) on a : $\alpha_n \alpha_j = -\alpha_j \alpha_n$ pour $j \neq n$ donc : $\alpha_n \alpha_j \alpha_j = \alpha_n \alpha_j^2 = \alpha_n = -\alpha_j \alpha_n \alpha_j$; on en déduit que la trace de ce produit de matrices est :

$$\text{Tr}(\alpha_n) = -\text{Tr}(\alpha_j \alpha_n \alpha_j) = -\text{Tr}(\alpha_n \alpha_j \alpha_j) = -\text{Tr}(\alpha_n \alpha_j^2) = -\text{Tr}(\alpha_n)$$

puisque pour deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ on a $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$, donc : $\text{Tr}(\alpha_n) = -\text{Tr}(\alpha_n)$, soit :

$$\text{Tr}(\alpha_n) = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Or $\text{Tr}(\alpha_n)$ = somme des valeurs propres de α_n , et comme celles-ci sont ± 1 , le nombre de valeurs propres égales à +1 est égal au nombre des valeurs propres égales à -1, donc l'ordre des matrices α_n est un nombre pair.

– Considérons l'ordre 2 : les matrices d'ordre 2, c'est-à-dire les matrices 2x2, forment un espace vectoriel de dimension 4 dont une base est l'ensemble formé de la matrice unité $\mathbf{1}$ et des trois matrices de Pauli σ_k , $k = 1, 2, 3$ ⁽⁹⁾. Or il faut 4 matrices α_n ($n = 0, 1, 2, 3$) qui anticommulent. Donc l'ordre 2 ne convient pas.

– Essayons alors l'ordre 4 : on forme les matrices $\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}$ qui

vérifient (57). Si $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ alors (110) donne : $B_k = X\alpha_k = \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}$ $k = 1, 2, 3$, et :

⁹ On peut le démontrer en exercice : on sait que les matrices de Pauli sont linéairement indépendantes, l'ensemble formé de ces matrices et de la matrice 2x2 unité $\mathbf{1}$ est également linéairement indépendant : $a_0 \mathbf{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = 0$ si et seulement si $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ensuite on décompose une matrice 2x2 en combinaison linéaire des quatre matrices $\mathbf{1}$ et

σ_k , et l'on identifie les coefficients : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3$ en montrant que les a_0, a_1, a_2, a_3

sont déterminés de manière biunivoque par les composantes de la matrice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

$$B_0 = X \alpha_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = -j X = -j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De $B_0 = j \left(G_0 + \frac{K}{2mc} \right)$ et $B_4 = G_0 - \frac{K}{2mc}$ on déduit alors G_0 et K :

$$K = -mc(B_4 + j B_0) = 2mc j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_0 = \frac{1}{2}(B_4 - j B_0) = -j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ce sont des matrices d'ordre 4, donc la fonction d'onde Ψ est un vecteur à 4 composantes, que l'on écrit classiquement sous forme de deux fonctions d'onde à 2 composantes :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix}$$

L'équation d'onde linéaire cherchée (108bis) est alors :

$$\left\{ -j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{E}{c} + \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} P_k + 2mc j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

en utilisant le vecteur de composantes matrices de Pauli : $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} P_k = \begin{bmatrix} \sigma \cdot P & 0 \\ 0 & \sigma \cdot P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot P \quad (\text{où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein sur les indices}) ;$$

l'équation précédente est alors finalement :

$$\left\{ -j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{E}{c} + \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot P + 2mc j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix} = 0 \quad (111)$$

C'est l'équation de Pauli pour une particule libre, établie dans C4. Elle se décompose en deux équations matricielles d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot P \psi + 2mc j \phi &= 0 \\ -j \frac{E}{c} \psi + \sigma \cdot P \phi &= 0 \end{aligned} \quad (112)$$

En présence d'un champ électromagnétique de potentiel $(V, \mathbf{A})$, on a les substitutions :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - eV \\ \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{P} - (e/c) \mathbf{A} \end{aligned}$$

Les équations (112) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi + 2mc j \phi &= 0 \\ -j \left(\frac{E}{c} - \frac{e}{c} V \right) \psi + \sigma \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \phi &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

on élimine ϕ entre ces deux équations $\phi = \frac{j}{2mc} \sigma \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \psi$ que l'on remplace dans la deuxième équation :

$$\left\{ E - eV - \frac{1}{2m} (\sigma \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})) (\sigma \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})) \right\} \psi = 0$$

or d'après (44) : $(\sigma \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})) (\sigma \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})) = (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) + j \sigma \cdot ((\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \times (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}))$
d'où :

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 + \frac{je}{2mc} \sigma \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{A}) \right] \psi = 0$$

et comme $\mathbf{P} = -j\hbar \nabla$ et que l'induction magnétique est : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ il vient $\mathbf{P} \times \mathbf{A} = -j\hbar \mathbf{B}$
d'où :

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 + \frac{e\hbar}{2mc} \sigma \cdot \mathbf{B} \right] \psi = 0 \quad (114)$$

C'est l'équation d'onde de Pauli où le spin est automatiquement introduit ; le terme $\frac{e\hbar}{2mc} \sigma \cdot \mathbf{B}$ représente l'énergie d'interaction du champ magnétique avec le moment intrinsèque de l'électron (son spin).

On a déjà vu cette équation en (47), mais elle avait été établie directement dans C_3 donc de façon plus restrictive qu'avec les spineurs de Dirac de C_4 , et la composante ϕ de la fonction d'onde Ψ qui intervient en (113) n'était pas prédite, de sorte que l'équation de Pauli dans C_4 est plus générale que celle de Schrödinger-Pauli dans C_3 .

10 – Transformation de Lorentz en relativité restreinte : expression avec les d-nombres

On va formaliser dans C_4 les transformations de Lorentz de la Relativité Restreinte, ainsi que les propriétés du champ électromagnétique. Pour cela, on démontre d'abord le théorème suivant.

Théorème : décomposition canonique des rotations d'espace-temps, ou rotations de Lorentz : Soit $\mathbf{X}$ un quadrvecteur d'espace-temps et $\mathbf{X}'$ son image par la transformation :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R} \mathbf{X} \mathbf{R}^* \quad (115)$$

où $\mathbf{R}$ est un biquaternion tel que $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \mathbf{R}^* = \mathbf{1}$. Alors :

1°) La transformation (115) est une rotation d'espace-temps (donc dans E_4) ;

2°) Elle s'écrit sous la forme canonique, où $\mathbf{B}$ est un bivecteur :

$$\mathbf{R} = \exp \mathbf{B} \quad \text{ou: } \mathbf{R} = -\exp \mathbf{B} \text{ si } \mathbf{B} \text{ bivecteur tel que } \mathbf{B}^2 = 0 \quad (116)$$

PREUVE :

1°) $\mathbf{X}$ est un vecteur de E_4 , donc il vérifie : $\mathbf{X}^0 = -\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$. Vérifions qu'il en est de même pour $\mathbf{X}'$:

$$\mathbf{X}'^0 = \mathbf{R} \mathbf{X}^0 \mathbf{R}^* = -\mathbf{R} \mathbf{X} \mathbf{R}^* = -\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{X}'^* = \mathbf{R} \mathbf{X}^* \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \mathbf{X} \mathbf{R}^* = \mathbf{X}'$$

Donc $\mathbf{X}'$ est aussi un vecteur de E_4 .

De plus : $\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^*\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\mathbf{X}^2\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{X}\mathbf{R}^* = -\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^*\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{R}^*\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2$

donc la transformation (115) conserve la norme du vecteur.

La transformation est bijective, en effet : $\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^*\mathbf{R} = \mathbf{R}^*\mathbf{X}'\mathbf{R} = \mathbf{X}$, donc $\mathbf{X}'$ est l'image d'un seul $\mathbf{X}$.

Enfin, la transformation conserve le sens de la base de E_4 :

$$\mathbf{R}\gamma_5\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\mathbf{R}^*\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5$$

Conclusion : la transformation (115) est une rotation dans E_4 .

2°) Il s'agit de montrer qu'il existe un $\mathbf{B}$ tel que la décomposition (116) soit satisfaite, la démonstration suivante consiste alors à *choisir* des éléments de C_4 qui le permettent.

$\mathbf{R}$ étant un biquaternion, c'est un d-nombre pair : $\mathbf{R} = \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P$, où $\mathbf{R}_S$ scalaire, $\mathbf{R}_B$ bivecteur, $\mathbf{R}_P$ pseudo-scalaire, donc tels que :

- d'après (73), si $\mathbf{R}_B^2$ non nul, $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{BV} + \gamma_5 \mathbf{R}'_{BV} = (R_1 + \gamma_5 R_2) \mathbf{V}$ où $\mathbf{V}$ vecteur, R_1 et R_2 nombres réels : $\mathbf{R}_{BV} = R_1 \mathbf{V}$, $\mathbf{R}'_{BV} = R_2 \mathbf{V}$;
- pseudo-scalaire : $\mathbf{R}_P = r \gamma_5$ où r nombre réel.

La condition $\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{1}$ se développe alors en :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P)(\mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P)^* &= (\mathbf{R}_S + R_1 \mathbf{V} + \gamma_5 R_2 \mathbf{V} + \mathbf{R}_P)(\mathbf{R}_S - R_1 \mathbf{V} - \gamma_5 R_2 \mathbf{V} + \mathbf{R}_P) \\ &= (\mathbf{R}_S + \mathbf{R}_P)^2 + (R_2^2 \mathbf{V}^2 - R_1^2 \mathbf{V}^2 - 2\gamma_5 R_1 R_2 \mathbf{V}^2) \\ &= \mathbf{R}_S^2 - r^2 + 2\gamma_5 \mathbf{R}_S r + (R_2^2 - R_1^2) \mathbf{V}^2 - 2\gamma_5 R_1 R_2 \mathbf{V}^2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

comme $\mathbf{V}^2$ est scalaire, on sépare dans l'expression précédente les termes réels et les termes pseudo-scalaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S^2 - r^2 + (R_2^2 - R_1^2) \mathbf{V}^2 &= \mathbf{1} \quad (a) \\ \mathbf{R}_S r - R_1 R_2 \mathbf{V}^2 &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (117)$$

On choisit $\mathbf{V}^2 = r$ et $\mathbf{R}_S = R_1 R_2 \mathbf{1}$ ce qui résout (117b), et (117a) devient :

$$R_1^2 R_2^2 - \mathbf{V}^4 + (R_2^2 - R_1^2) \mathbf{V}^2 = \mathbf{1}$$

soit :

$$(R_1^2 + \mathbf{V}^2)(R_2^2 - \mathbf{V}^2) = \mathbf{1} \quad (118)$$

On choisit des solutions sous la forme :

$$R_1^2 + \mathbf{V}^2 = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad R_2^2 - \mathbf{V}^2 = \mathbf{1}$$

ce qui amène à poser :

$$R_1 = \cos \theta_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \sin \theta_1 \quad \text{puisque} \quad \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$$

$$R_2 = \cosh \theta_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \sinh \theta_2 \quad \text{puisque} \quad \cosh^2 \theta_2 - \sinh^2 \theta_2 = 1$$

Attention ! θ_1 et θ_2 ne sont pas des angles mais sont des d-nombres. Et les cos, sin, cosh, sinh sont définis par les développements :

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= 1 - \theta_1^2/2! + \theta_1^4/4! - \dots + (-1)^n \theta_1^{2n}/(2n)! + \dots \\ \sin \theta_1 &= \theta_1 - \theta_1^3/3! + \theta_1^5/5! - \dots + (-1)^n \theta_1^{2n+1}/(2n+1)! + \dots \\ \cosh \theta_2 &= 1 + \theta_2^2/2! + \theta_2^4/4! - \dots + \theta_2^{2n}/(2n)! + \dots \\ \sinh \theta_2 &= \theta_2 + \theta_2^3/3! + \theta_2^5/5! + \dots + \theta_2^{2n+1}/(2n+1)! + \dots \end{aligned}$$

si on pose $\theta_1 = \alpha V$ et $\theta_2 = \beta V$, α et β réels, les développements donnent :

$$\begin{aligned} V &= \sin \alpha V & \text{et} & & V &= \sinh \beta V \\ R_1 &= \cos \alpha V & \text{et} & & R_2 &= \cosh \beta V \end{aligned}$$

ce qui détermine les réels α , β , R_1 , R_2 . Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} R_1 \mathbf{1} + \gamma_5 V &= \cos \alpha V + \gamma_5 \sin \alpha V = \exp \gamma_5 \alpha V = \exp \gamma_5 \theta_1 \\ R_2 \mathbf{1} + V &= \cosh \beta V + \sinh \beta V = \exp \beta V = \exp \theta_2 \end{aligned}$$

et donc $\mathbf{R} = \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P$, avec $\mathbf{R}_S = R_1 R_2 \mathbf{1}$, $\mathbf{R}_B = (R_1 + \gamma_5 R_2) V$, $\mathbf{R}_P = r \gamma_5$, $r = V^2$, devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_1 R_2 \mathbf{1} + (R_1 + \gamma_5 R_2) V + V^2 \gamma_5 \\ &= (\exp \gamma_5 \theta_1 - \gamma_5 V)(\exp \theta_2 - V) + ((\exp \gamma_5 \theta_1 - \gamma_5 V) + \gamma_5 (\exp \theta_2 - V)) V + V^2 \gamma_5 \\ &= \exp \gamma_5 \theta_1 \cdot \exp \theta_2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{R} = \exp(\gamma_5 \theta_1 + \theta_2)$$

d'où : $\mathbf{B} = \gamma_5 \theta_1 + \theta_2 = \gamma_5 \alpha V + \beta V = (\gamma_5 \alpha + \beta) V = (\gamma_5 \alpha + \beta) \|V\| V / \|V\|$ et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\gamma_5 \theta + \phi) b \\ \mathbf{R} = \exp \mathbf{B} &= (\cosh \theta + b \sinh \theta)(\cos \phi + \gamma_5 b \sin \phi) \quad (119) \end{aligned}$$

avec : $b = V / \|V\|$, $b^2 = 1$, $\alpha \|V\| = \theta$ et $\beta \|V\| = \phi$ réels.

Si $\mathbf{R}_B^2 = 0$ alors $\mathbf{R} \mathbf{R}^* = \mathbf{1}$ donne $(\mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P)(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P) = (\mathbf{R}_S + \mathbf{R}_P)^2 = \mathbf{1}$ et donc :
 $\mathbf{R} \mathbf{R}^* = \mathbf{R}_S^2 - r^2 + 2 \gamma_5 \mathbf{R}_S r = \mathbf{1}$ qui se décompose en les deux équations :

$$\begin{aligned} R_S^2 - r^2 &= 1 \\ R_S r &= 0 \end{aligned} \rightarrow r = 0 \text{ et } R_S = \pm 1 \text{ d'où les deux cas de figure :}$$

– si $\mathbf{R}_S = +1$ alors $\mathbf{R} = \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_P = \mathbf{1} + \mathbf{R}_B = \exp \mathbf{R}_B$ car $\mathbf{R}_B^2 = 0$ et puisque l'on a :

$$\exp \mathbf{R}_B = \mathbf{1} + \mathbf{R}_B / 1! + \mathbf{R}_B^2 / 2! + \dots + \mathbf{R}_B^n / n! = \mathbf{1} + \mathbf{R}_B + 0 + \dots + \mathbf{R}_B^2 \mathbf{R}_B^{(n-2)} / n! (=0) \dots$$

et donc $\mathbf{B} = \mathbf{R}_B$, donc $\mathbf{R} = \exp \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}^2 = 0$.

– si $\mathbf{R}_S = -1$ alors $\mathbf{R} = -\mathbf{1} + \mathbf{R}_B = -(\mathbf{1} - \mathbf{R}_B) = -\exp(-\mathbf{R}_B) = -\exp \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B} = -\mathbf{R}_B$ et $\mathbf{B}^2 = 0$.

CQFD.

Transformation spéciale de Lorentz :

La transformation spéciale de Lorentz est une rotation de l'espace-temps où la décomposition canonique (119) se réduit à :

$$\mathbf{R} = \cosh \frac{\alpha}{2} + \sigma'_3 \sinh \frac{\alpha}{2} \quad (120)$$

avec donc : $\theta = \alpha/2$, $\mathbf{b} = \sigma'_3$, $\varphi = 0$. D'où :

$$X' = R X R^* = \left(\cosh \frac{\alpha}{2} + \sigma'_3 \sinh \frac{\alpha}{2} \right) X \left(\cosh \frac{\alpha}{2} - \sigma'_3 \sinh \frac{\alpha}{2} \right)$$

comme $X = x_0 \gamma^0 + x_1 \gamma^1 + x_2 \gamma^2 + x_3 \gamma^3$ et $X' = x'_0 \gamma^0 + x'_1 \gamma^1 + x'_2 \gamma^2 + x'_3 \gamma^3$ et puisque :

$$\begin{aligned}\sigma'_3 \gamma_0 \sigma'_3 &= \gamma_3 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_3^2 \gamma_0 = -\gamma_0 \\ \sigma'_3 \gamma^1 \sigma'_3 &= \gamma_3 \gamma_0 \gamma^1 \gamma_3 \gamma_0 = -\gamma_3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_3^2 \gamma_1 = -\gamma_1 \\ \sigma'_3 \gamma^2 \sigma'_3 &= \gamma_3 \gamma_0 \gamma^2 \gamma_3 \gamma_0 = -\gamma_3 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_3^2 \gamma_2 = -\gamma_2 \\ \sigma'_3 \gamma^3 \sigma'_3 &= \gamma_3 \gamma_0 \gamma^3 \gamma_3 \gamma_0 = -\gamma_3 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_3\end{aligned}$$

car $\gamma_0^2 = 1$, $\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_k = -\gamma^k$, $\gamma_k^2 = -1$ $k = 1, 2, 3$, il vient tous calculs faits :

$$\begin{aligned}X' &= (x_0 \cosh \alpha - x_3 \sinh \alpha) \gamma_0 - x_1 \gamma_1 - x_2 \gamma_2 - (x_3 \cosh \alpha - x_0 \sinh \alpha) \gamma_3 \\ &= x'_0 \gamma^0 + x'_1 \gamma^1 + x'_2 \gamma^2 + x'_3 \gamma^3 = x'_0 \gamma_0 - x'_1 \gamma_1 - x'_2 \gamma_2 - x'_3 \gamma_3\end{aligned}$$

donc les relations de transformation des coordonnées dans E_4 :

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \cosh \alpha - x_0 \sinh \alpha = \cosh \alpha (x_3 - x_0 \tanh \alpha) \\ x'_0 &= x_0 \cosh \alpha - x_3 \sinh \alpha = \cosh \alpha (x_0 - x_3 \tanh \alpha)\end{aligned} \quad (121)$$

Cette écriture (121) des transformations spéciales de Lorentz, en tant que rotation dans E_4 , peut s'interpréter comme une transformation des coordonnées dans E_3 et du temps $x_0 = ct$, de la façon suivante :

Si $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ alors $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_0 \tanh \alpha = vt$; dans ce cas la transformation correspond à une translation à la vitesse v constante suivant l'axe x_3 et à une transformation du temps $x'_0 = ct' = \cosh \alpha (x_0 - x_3 \tanh \alpha) = x_0 \cosh \alpha (1 - \tanh^2 \alpha)$ où donc $\tanh \alpha = v/c$; il vient donc :

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (122a)$$

et lorsque x_3 est quelconque, $x'_3 = \cosh \alpha (x_3 - x_0 \tanh \alpha)$, soit :

$$x'_3 = \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (122b)$$

La relation (122a) montre la « contraction relativiste du temps » dans le référentiel mobile en translation ($O'x'_1, x'_2, x'_3$) par rapport au temps mesuré dans le référentiel fixe (Ox_1, x_2, x_3). De la relation (122b) on déduit la « dilatation relativiste des longueurs » dans le référentiel mobile par rapport aux longueurs mesurées dans le référentiel immobile, en effet :

Soit un autre point x'_{31} du référentiel en translation suivant Ox_3 , alors d'après (122b) :

$$x'_3 = (x_3 - vt) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

La distance entre le point x'_3 et le point x'_{31} est donc :

$$\Delta l' = \frac{x_{31} - vt - (x_3 - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_{31} - x_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (122c)$$

Champ électromagnétique dans le référentiel en translation :

Le champ électromagnétique dans le référentiel immobile est défini par un bivecteur de C_4 qui, d'après (73), se décompose en :

$$F = E + \mu \gamma_5 H \quad (123)$$

où E est le vecteur champ électrique, H le vecteur champ magnétique (ce sont des vecteurs de E_3) ; μ est la permittivité du milieu.

Le champ électromagnétique $F' = E' + \mu \gamma_5 H'$ dans le référentiel en translation uniforme est donc l'image par rotation d'espace-temps de F :

$$F' = RFR^*$$

Avec $\gamma_5 \sigma'_1 = \sigma'_2 \sigma'_3$, $\gamma_5 \sigma'_2 = \sigma'_3 \sigma'_1$, $\gamma_5 \sigma'_3 = \sigma'_1 \sigma'_2$ et les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} E &= E_1 \sigma'_1 + E_2 \sigma'_2 + E_3 \sigma'_3 & E' &= E'_1 \sigma'_1 + E'_2 \sigma'_2 + E'_3 \sigma'_3 \\ H &= H_1 \sigma'_1 + H_2 \sigma'_2 + H_3 \sigma'_3 & H' &= H'_1 \sigma'_1 + H'_2 \sigma'_2 + H'_3 \sigma'_3 \\ R &= \cosh \frac{\alpha}{2} + \sigma'_3 \sinh \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

on obtient $\gamma_5 H = H_1 \sigma'_2 \sigma'_3 + H_2 \sigma'_3 \sigma'_1 + H_3 \sigma'_1 \sigma'_2$ et tous calculs faits on a :

$$\begin{aligned} E'_1 &= (E_1 + \mu H_2 \tanh \alpha) \cosh \alpha & \mu H'_1 &= (\mu H_1 - E_2 \tanh \alpha) \cosh \alpha \\ E'_2 &= (E_2 - \mu H_1 \tanh \alpha) \cosh \alpha & \mu H'_2 &= (\mu H_2 - E_1 \tanh \alpha) \cosh \alpha \\ E'_3 &= E_3 & H'_3 &= H_3 \end{aligned} \quad (124)$$

où $\cosh \alpha = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ et $\tanh \alpha = v/c$. Les relations (124) sont les transformations de Lorentz du champ électromagnétique.

Équations de l'électromagnétisme avec les d-nombres :

Proposition : - Les équations de Lorentz de l'électron en mouvement s'expriment, dans le formalisme de C_4 , sous la forme de l'équation de M. Riesz :

$$\square F = J \quad (125)$$

où l'opérateur différentiel $\square$ dans C_4 est défini par (67), où J est le 4-vecteur densité charge-courant dans l'espace-temps.

PREUVE de (125) : - D'après (68) on a :

$$\square F = \square \cdot F + \square \wedge F$$

Comme J est un vecteur, la relation $\square F = J$ impose d'avoir : $\square \cdot F = J$ et $\square \wedge F = 0$

J , en tant que vecteur de E_4 peut s'exprimer au moyen d'une décomposition en une

composante temporelle que l'on identifie à la densité de charge ρ , et une composante vectorielle spatiale que l'on identifie au vecteur densité de courant $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{J} = J^0 \gamma_0 + J^1 \gamma_1 + J^2 \gamma_2 + J^3 \gamma_3$$

avec $J^0 = \rho/\epsilon$ (ϵ perméabilité du milieu). On a en effet :

$$\begin{aligned} \gamma_0 \mathbf{J} &= J^0 \mathbf{1} + J^1 \gamma_0 \gamma_1 + J^2 \gamma_0 \gamma_2 + J^3 \gamma_0 \gamma_3 = J^0 \mathbf{1} - J^1 \gamma_1 \gamma_0 - J^2 \gamma_2 \gamma_0 - J^3 \gamma_3 \gamma_0 \\ &= J^0 \mathbf{1} - (J^1 \sigma'_1 + J^2 \sigma'_2 + J^3 \sigma'_3) = J^0 \mathbf{1} - \mathbf{j} \end{aligned}$$

où le vecteur spatial est la densité de courant : $\mathbf{j} = J^1 \sigma'_1 + J^2 \sigma'_2 + J^3 \sigma'_3 = J^n \sigma'_n$ ($n = 1, 2, 3$)

On a de même : $\mathbf{J} \gamma_0 = J^0 \mathbf{1} + \mathbf{j}$

Ces résultats conduisent alors à transformer (125) ainsi :

$$\gamma_0 \square F = \gamma_0 \square \cdot F = \gamma_0 \mathbf{J} = J^0 \mathbf{1} - \mathbf{j}$$

or d'après (71) $\gamma_0 \square = \partial_0 + \nabla$ d'où : $(\partial_0 + \nabla)(E + \mu \gamma_5 H) = J^0 \mathbf{1} - \mathbf{j}$ ce qui donne, après développement, et en utilisant $\nabla H = \nabla \cdot H + \nabla \wedge H$ et $\nabla E = \nabla \cdot E + \nabla \wedge E$, à l'expression suivante où l'on a regroupé les termes par types de composantes : scalaire, vecteur, bivecteur, pseudo-scalaire :

$$\begin{array}{cccc} (\nabla \cdot E - J^0) \mathbf{1} & + & (\partial_0 E + \mu \gamma_5 \nabla \wedge H + \mathbf{j}) & + & (\mu \gamma_5 \partial_0 H + \nabla \wedge E) & + & (\mu \gamma_5 \nabla \cdot H) = 0 \\ \text{scalaire} & & \text{vecteur} & & \text{bivecteur} & & \text{pseudo-scalaire} \end{array}$$

chaque composante est donc identiquement nulle :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E - J^0 &= 0 \\ \partial_0 E + \mu \gamma_5 \nabla \wedge H + \mathbf{j} &= 0 \\ \mu \gamma_5 \partial_0 H + \nabla \wedge E &= 0 \\ \mu \gamma_5 \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned}$$

et comme $\gamma_5 \nabla \wedge H = -\nabla \times H$ et $\gamma_5 \nabla \wedge E = -\nabla \times E$ on obtient, dans l'espace E_3 , les équations de Lorentz pour un électron en mouvement, où l'on a remplacé $J^0 = \rho/\epsilon$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \partial_0 E - \mu \nabla \times H &= -\mathbf{j} \\ \mu \partial_0 H + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned} \quad (126)$$

CQFD.

Proposition : - la conservation de la charge électrique est une conséquence de (125).

PREUVE : - De (125) on tire : $\square^2 F = \square J = \square \cdot J + \square \wedge J$, or l'opérateur $\square^2$ est un scalaire et F est un bivecteur, donc $\square^2 F$ ne peut pas avoir de composante scalaire, ce qui impose que la composante scalaire de $\square J$ doit être nulle ; on identifie cette composante de la manière suivante :

en utilisant (67) : $\square J = \gamma_0^2 \square J = \gamma_0 \gamma_0 \square J = \gamma_0 \gamma_0 \gamma^k \frac{\partial J}{\partial x^k}$ et l'écriture $\partial_k = \partial / \partial x^k$ (attention à la propriété de covariance! $\gamma^k = -\gamma_k$ pour $k = 1, 2, 3$ et $\gamma_0 = \gamma^0$ pour $k = 0$), il vient :

$$\begin{aligned} \square J &= \gamma_0 \gamma_0^2 \partial_0 J + \gamma_0 \gamma_0 \gamma^n \partial_n J \quad (n = 1, 2, 3) = \gamma_0 \gamma_0^2 \partial_0 J - \gamma_0 \gamma_0 \gamma_n \partial_n J \\ &= \gamma_0 \gamma_0^2 \partial_0 J + \gamma_0 \gamma_n \gamma_0 \partial_n J = \gamma_0 \partial_0 J - \sigma'_n \gamma_0 \partial_n J = \partial_0 (\gamma_0 J) - \sigma'_n \partial_n (\gamma_0 J) \\ &= \partial_0 (J^0 \mathbf{1} - \mathbf{j}) - \sigma'_n \partial_n (J^0 \mathbf{1} - \mathbf{j}) \\ &= \sigma'^2_1 \partial_1 J^1 + \sigma'_m \sigma'_1 \partial_m J^1 \quad (m \neq 1) + \sigma'^2_2 \partial_2 J^2 + \sigma'_m \sigma'_2 \partial_m J^2 \quad (m \neq 2) + \sigma'^2_3 \partial_3 J^3 + \sigma'_m \sigma'_3 \partial_m J^3 \quad (m \neq 3) \\ &= (\partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3) \mathbf{1} + \text{termes non scalaires } \mathbf{Y} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \mathbf{Y} \end{aligned}$$

donc : $\square J = (\partial_0 J^0 + \nabla \cdot \mathbf{j}) \mathbf{1} - \partial_0 \mathbf{j} - \nabla J^0 + \mathbf{Y}$ d'où, puisque la composante scalaire doit être nulle et en remplaçant $J^0 = \rho / \epsilon$:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (127)$$

qui est l'équation de continuité de la charge électrique dans E_3 .
CQFD.

Proposition : - Le bivecteur de C_4 électromagnétique $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel.

PREUVE : - Comme $\square \wedge \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel 4-vecteur $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{F} = \square \mathbf{A} = \square \cdot \mathbf{A} + \square \wedge \mathbf{A} \quad (128a)$$

comme $\mathbf{F}$ est un bivecteur, on a : $\square \cdot \mathbf{A} = 0$ et $\mathbf{F} = \square \wedge \mathbf{A}$, et (125) devient :

$$\square \mathbf{F} = \square (\square \wedge \mathbf{A}) = \square \cdot (\square \wedge \mathbf{A}) + \square \wedge (\square \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

or puisque $\square \cdot \mathbf{A} = 0$ on a :

$$\square^2 \mathbf{A} = \square \cdot (\square \cdot \mathbf{A} + \square \wedge \mathbf{A}) + \square \wedge (\square \cdot \mathbf{A} + \square \wedge \mathbf{A}) = \square \cdot (\square \wedge \mathbf{A}) + \square \wedge (\square \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

d'où finalement l'équation d'onde du potentiel $\mathbf{A}$:

$$\square^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (129)$$

Remarque : condition de jauge – (129) est aussi vérifiée par tout vecteur $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \square \Phi$ où Φ est un scalaire tel que $\square^2 \Phi = 0$.

On termine la démonstration en écrivant : $\mathbf{A} = A^0 \gamma_0 + A^1 \gamma_1 + A^2 \gamma_2 + A^3 \gamma_3$ d'où

$$\gamma_0 \mathbf{A} = A_S - A_V \quad \text{avec} \quad A_S = A^0 \mathbf{1} \quad \text{et} \quad A_V = A^1 \sigma'_1 + A^2 \sigma'_2 + A^3 \sigma'_3$$

Donc : $\mathbf{F} = \square \mathbf{A} = \square (\gamma_0 \gamma_0) \mathbf{A} = (\square \gamma_0) (\gamma_0 \mathbf{A}) = \mathbf{E} + \mu \gamma_5 \mathbf{H}$

et comme $\square \gamma_0 = \partial_0 - \nabla$ et $\gamma_0 \mathbf{A} = A_S - A_V$ il vient

$$(\partial_0 - \nabla) (A_S - A_V) = \mathbf{E} + \mu \gamma_5 \mathbf{H} = \partial_0 A^0 \mathbf{1} - \partial A_V - \nabla A^0 + \nabla \cdot A_V + \nabla \wedge A_V$$

mais $\nabla \cdot A_V = 0$ puisque $\square \cdot A = \nabla \cdot A_V = 0$ et $\nabla \wedge A_V = \gamma_5 \nabla \times A_V$ avec $\nabla \times A_V = \nabla \times A$ d'où :

$$\begin{aligned} E &= -\partial_0 A_V - \nabla A^0 \\ H &= \frac{1}{\mu} \nabla \times A_V \end{aligned} \quad (128b)$$

Les équations (128b) donnent les relations entre les champs électromagnétiques et leur potentiel dans l'espace E_3 .
CQFD.

Force de Lorentz :

La force de Lorentz par unité de volume est le 4-vecteur de E_4 :

$$L = \varepsilon F \wedge J = \frac{1}{2} \varepsilon (F J - J F) \quad (130)$$

on va utiliser le fait que pour tout bivecteur $B = B_V + \gamma_5 B'_V$ (où B_V et B'_V vecteurs de E_3), on a $B \gamma_0 = \gamma_0 (-B_V + \gamma_5 B'_V)$:

$$\begin{aligned} L \gamma_0 &= L^0 \mathbf{1} + L_V = \varepsilon \frac{1}{2} (E + \mu \gamma_5 H) J \gamma_0 - \varepsilon \frac{1}{2} J (E + \mu \gamma_5 H) \gamma_0 \\ &= \varepsilon \frac{1}{2} (E + \mu \gamma_5 H) J \gamma_0 - \varepsilon \frac{1}{2} J \gamma_0 (-E + \mu \gamma_5 H) \\ &= \varepsilon \frac{1}{2} (E + \mu \gamma_5 H) (J^0 \mathbf{1} + j) - \varepsilon \frac{1}{2} (J^0 \mathbf{1} + j) (-E + \mu \gamma_5 H) \\ &= \varepsilon E J^0 \mathbf{1} + \frac{1}{2} \varepsilon (E j + j E) + \varepsilon \frac{1}{2} \mu \gamma_5 (H j - j H) = \varepsilon J^0 E + \varepsilon E \cdot j + \varepsilon \mu \gamma_5 H \wedge j \\ &= \varepsilon J^0 E + \varepsilon E \cdot j - \varepsilon \mu H \times j = \varepsilon J^0 E + \varepsilon E \cdot j + \varepsilon \mu j \times H \end{aligned}$$

en identifiant terme à terme les composantes scalaires et vecteurs, il vient :

$$\begin{aligned} L^0 &= \varepsilon E \cdot j \\ L_V &= \varepsilon J^0 E + \varepsilon \mu j \times H \end{aligned}$$

et avec $J^0 = \rho / \varepsilon$ et puisque $\varepsilon \mu c^2 = 1$ la composante spatiale de la force de Lorentz est :

$$L_V = \rho E + \frac{1}{c^2} j \times H \quad (131)$$

Cas du photon :

C'est le champ électromagnétique en l'absence des sources de charge électrique : (125) se réduit alors à :

$$\square F = 0 \quad (132)$$

On cherche des solutions de la forme : $F(x) = F_B \exp \gamma_5 (K \cdot x)$ où F_B est un bivecteur constant $K = K^m \gamma_m$, x le vecteur position espace-temps $x = x^n \gamma_n$ et donc $K \cdot x = K_m x^m$

leur produit scalaire. De $\square = \gamma^k \partial_k$ on tire :

$$\square F = \gamma^k F_B \partial_k \exp \gamma_5 (K \cdot x) = \gamma^m \gamma_5 F_B K^m \exp \gamma_5 (K \cdot x) = K \gamma_5 F_B \exp \gamma_5 (K \cdot x)$$

où l'on a utilisé : $\gamma^m = -\gamma_m$ et $\gamma_m \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_m$. Par conséquent $\square F = 0$ entraîne :

$$K F_B = 0$$

Comme K est un 4-vecteur de E_4 , il est égal à : $K = K^0 \gamma_0 + K^n \gamma_n$ avec $n = 1, 2, 3$ et donc :

$\gamma_0 K = K^0 1 - K_V$ où $K_V = K^n \sigma'_n$. La condition $K F_B = 0$ équivaut à $\gamma_0 K F_B = 0$ c'est-à-dire $(K^0 1 - K_V) F_B = 0$ que l'on peut toujours multiplier à droite par $K \gamma_0 = K^0 1 + K_V$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} (K^0 1 - K_V) F_B (K^0 1 + K_V) &= 0 = (K^0 F_B - K_V F_B) (K^0 1 + K_V) \\ &= K^0 F_B + K^0 (F_B K_V - K_V F_B) - K_V F_B K_V \end{aligned}$$

or $F_B K_V = K_V F_B$ car les γ_m de F_B et les σ'_n de K_V commutent, on a donc $(K^0 F_B - K_V F_B) (K^0 1 + K_V) = 0$ et F_B étant constant, il vient :

$$(K^0)^2 = (K_V)^2 \quad (133)$$

(133) est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques monochromatiques ; avec $K^0 = \frac{\omega}{c}$ et K_V de composantes (K^1, K^2, K^3) , elle s'écrit encore :

$$(K^1)^2 + (K^2)^2 + (K^3)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (134)$$

Remarque : la condition (133) ne suffit pas à décrire l'onde électromagnétique monochromatique, car elle introduit une perte d'information par rapport à la condition $K F_B = 0$; celle-ci nécessite d'être utilisée pour trouver d'autres propriétés de l'onde, ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition : - Les composantes champ électrique et champ magnétique de l'onde électromagnétique sont perpendiculaires entre elles et se propagent suivant l'axe du vecteur d'onde spatial K_V . (figure 6)

PREUVE : - F_B étant un bivecteur, il s'écrit : $F_B = F_{BV} + \gamma_5 F'_{BV}$ où F_{BV} et F'_{BV} sont des vecteurs de E_3 . La condition $(K^0 1 - K_V) F_B = 0$ vue plus haut s'écrit donc :

$$(K^0 1 - K_V) (F_{BV} + \gamma_5 F'_{BV}) = 0$$

qui se développe, en séparant les différentes composantes scalaire, pseudo-scalaire, vecteur, bivecteur :

$$K^0 F_{BV} + K^0 \gamma_5 F'_{BV} - \gamma_5 (K_V \wedge F'_{BV}) - K_V \wedge F_{BV} = K_V \cdot F_{BV} + \gamma_5 (K_V \cdot F'_{BV}) \quad (135a)$$

le terme à droite du signe égal est formé d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire, il doit donc être

nul puisque, à gauche, ce sont des termes vectoriels et bivectoriels, ce qui implique que chacun de ses composants, scalaire et pseudo-scalaire, doivent être nuls :

$$K_V \cdot F_{BV} + \gamma_5 (K_V \cdot F'_{BV}) = 0 \rightarrow \begin{matrix} K_V \cdot F_{BV} = 0 \\ K_V \cdot F'_{BV} = 0 \end{matrix} \quad (135b)$$

Les relations (135b) montrent alors les amplitudes champ électrique et champ magnétique (F_{BV} , F'_{BV}) du champ électromagnétique, sont perpendiculaires à la direction K_V spatiale de la propagation.

Reste à considérer l'annulation du terme de gauche de l'égalité (135a) :

$$K^0 F_{BV} + K^0 \gamma_5 F'_{BV} = K_V \wedge F_{BV} + \gamma_5 (K_V \wedge F'_{BV})$$

l'égalité terme à terme des composantes de même nature conduit à :

$$\begin{aligned} K^0 F_{BV} &= \gamma_5 (K_V \wedge F'_{BV}) = -K_V \times F'_{BV} \\ K^0 \gamma_5 F'_{BV} &= K_V \wedge F_{BV} \rightarrow K^0 F'_{BV} = K_V \times F_{BV} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} K^0 F_{BV} &= -K_V \times F'_{BV} \\ K^0 F'_{BV} &= K_V \times F_{BV} \end{aligned} \quad (135c)$$

Les relations (135c) montrent que les composantes électriques et magnétiques du champ électromagnétique sont perpendiculaires entre elles. De plus, suite à (133) leurs modules sont égaux :

$$F_{BV}^2 = F'_{BV}{}^2 \quad (136)$$

CQFD.

Ainsi, au moyen des d-nombres les propriétés du champ électromagnétique sont établies.

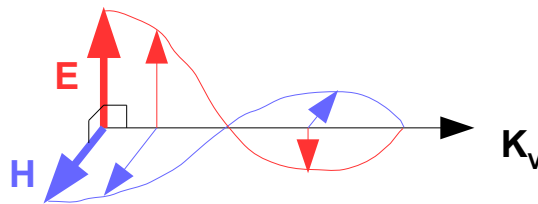


figure 6

11 – Équation de Dirac : expression avec les spineurs de C_4

11-1 : Établissement des équations de Dirac

L'équation de Dirac prend automatiquement en compte l'existence du spin des particules, tout en étant en totale cohérence avec les invariances relativistes et, bien sûr, le formalisme opératoire de la Physique Quantique (principe de correspondance entre grandeurs et opérateurs agissant sur une fonction d'onde). En théorie de Dirac la fonction d'onde est un spineur de C_4 . En l'absence de spin (particules de spin zéro), une autre équation rend bien

compte des propriétés et de la dynamique d'une particule soit libre soit en interaction avec un champ électromagnétique : c'est l'équation de Klein-Gordon dont la fonction d'onde inconnue est cette fois-ci un scalaire. Elle est donc plus restrictive que l'équation de Dirac, et c'est en analysant les insuffisances de la théorie de Klein-Gordon que A. M. Dirac a élaboré sa théorie en 1928.

Il est donc utile de présenter d'abord l'équation de Klein-Gordon pour saisir ce que l'équation de Dirac apportait de nouveau. C'est ce qui est présenté ci-après, ce qui va nécessiter un petit retour vers la Relativité Restreinte et le formalisme variationnel ⁽¹⁰⁾.

Relativité restreinte et équation d'onde de Klein-Gordon :

L'équation d'onde de Klein-Gordon est obtenue en appliquant le principe de correspondance de la Physique Quantique à l'équation d'énergie d'Einstein. Pour le cas d'une particule libre, cette équation d'Einstein est :

$$E^2 = \mathbf{p}_V^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (137)$$

où : E énergie de la particule, m sa masse propre (c'est-à-dire dans son référentiel de repos), $\mathbf{p}_V$ vecteur de E_3 quantité de mouvement, c vitesse de la lumière.

PREUVE de (137) :

On obtient (137) en utilisant au 4-vecteur impulsion-énergie $\mathbf{p}$ le carré scalaire dans l'espace-temps de Minkowski de métrique g_{jk} dont on a vu que la signature est (+ - - -). Avec $\mathbf{p} = p^k \mathbf{e}_k$, où la convention de sommation sur les indices qui se répètent est adoptée, $k = 0, 1, 2, 3$, ($\mathbf{e}_k$) vecteurs unitaires de base, le carré scalaire est :

$$p^2 = p^k p_k = g_{jk} p^j p^k \quad \text{avec le tenseur métrique} \quad \begin{aligned} g_{jk} &= 0 \text{ si } j \neq k \\ g_{jk} &= -1 \text{ si } j = k = 1, 2, 3 \\ g_{jk} &= 1 \text{ si } j = k = 0 \end{aligned}$$

Il faut maintenant exprimer les p^k . On va montrer que, pour une particule libre, ils sont égaux à :

$$p^k = m c \frac{dx^k}{ds}$$

où m est la masse propre, x^k les coordonnées (contravariantes) du 4-vecteur position espace-temps et ds l'élément de longueur tel que $ds^2 = dx^k dx_k$. Pour cela il faut déterminer l'action de Jacobi pour une particule libre relativiste. Entre deux instants t_1 et t_2 , cette action est :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

où L est la fonction de Lagrange. Or, on a vu que le temps dt' dans le référentiel en translation (temps propre) est relié au temps dt dans le référentiel fixe par (122) :

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

avec $ds^2 = c^2 dt'^2$. Dans le référentiel en translation, S est de la forme :

¹⁰ Voir par exemple l'article : F. Élie : *Introduction aux équations de Lagrange en mécanique analytique* ; site <http://fred.elie.free.fr>, octobre 2011

$$S = \int_{t_1'}^{t_2'} a dt' = \int_{t_1}^{t_2} a \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt$$

d'où le lagrangien :

$$L = a \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

où « a » est une constante à déterminer, liée uniquement à la particule. On l'identifie en passant à la limite classique $V/c \ll 1$ pour laquelle on doit avoir L égale à l'énergie cinétique (puisque la particule est libre et donc la fonction potentiel n'intervient pas) :

$$V/c \ll 1 \rightarrow L \approx a \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right) = \frac{1}{2} m' V^2 \quad \text{d'où : } L - a = -a \frac{V^2}{2c^2}$$

comme a est constant, L-a et L conduisent aux mêmes équations du mouvement, on peut donc identifier L à : $L = -a \frac{V^2}{2c^2} = \frac{1}{2} m' V^2$ ce qui donne : $a = -m' c^2$. Donc l'action pour une particule libre est :

$$S = -m' c^2 \int_{t_1'}^{t_2'} dt' = -m' c \int_{(1)}^{(2)} ds \quad (138)$$

et la fonction de Lagrange :

$$L = -m' c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (139)$$

De (139) on déduit l'expression des p^k de la façon suivante :

Le principe de moindre action pose que parmi les mouvements possibles entre deux états (1) et (2) les mouvements réels sont ceux pour lesquels l'action est extrémale :

$$\delta S = -m' c \delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0$$

or $ds = \sqrt{dx_k dx^k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, d'où en posant le vecteur unitaire $u_k = \frac{dx_k}{ds}$:

$$\delta S = -m' c \int_{(1)}^{(2)} \frac{dx_k \delta dx^k}{ds} = -m' c \int_{(1)}^{(2)} u_k \delta dx^k$$

(d et δ commutent). En intégrant par parties :

$$\delta S = -m' c \left[u_k \delta x^k \right]_{(1)}^{(2)} + m' c \int_{(1)}^{(2)} \delta x^k \frac{du_k}{ds} ds \quad (140)$$

Si aux extrémités (1) et (2) des trajectoires possibles on avait pour conditions aux limites $(\delta x^k)_{(1)} = (\delta x^k)_{(2)} = 0$ alors la condition $\delta S = 0$ donnerait $m' c u_k = 0$ c'est-à-dire une vitesse constante. Or l'action varie avec les coordonnées, ce qui entraîne que l'une des extrémités est fixée et l'autre non, disons $\delta x_k(1) = \delta x_k$; donc rendre S extrémale revient à rendre extrémale la

quantité $-m' c u_k \delta x^k$ et donc l'intégrale qui intervient dans (140) est nulle ; il s'ensuit :

$$\delta S = -m' c u_k \delta x^k$$

Or on démontre que le 4-vecteur énergie-impulsion est égal à :

$$p_k = -\frac{\partial S}{\partial x^k}$$

d'où les composants covariants, respectivement contravariants, du 4-vecteur énergie-impulsion :

$$p_k = m' c u_k = m' c \frac{dx_k}{ds} \quad \text{ou :} \quad p^k = m' c u^k = m' c \frac{dx^k}{ds} \quad (141)$$

Noter que, avec la métrique de Minkowski, $p_0 = p^0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{E}{c}$ où E est l'énergie de la particule, et $p^n = -\frac{\partial S}{\partial x_n} = -p_n$ ($n = 1, 2, 3$) est le vecteur spatial impulsion $\mathbf{p}_V$, de sorte que :

$$p^k = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_V \right) \quad (142)$$

On peut maintenant calculer le carré scalaire de $\mathbf{p} = (p^k)$; de (141) on obtient immédiatement :

$$\mathbf{p}^2 = p_k p^k = (m' c)^2 \frac{dx^k}{ds} \frac{dx_k}{ds} = (m' c)^2 \quad (143)$$

autrement dit, pour une particule libre, $\mathbf{p}^2$ est un invariant. Avec (142), $\mathbf{p}^2$ s'écrit :

$$\mathbf{p}^2 = (m' c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}_V^2$$

ce qui est la relation d'Einstein (137).
CQFD.

Remarque : - (143) conduit à : $\mathbf{p}^2 = (p^0)^2 - \sum_{n=1}^3 (p^n)^2$ avec $p^0 = m' c u^0 = m' c \frac{dx^0}{ds}$ soit encore

$$(p^0)^2 = m'^2 c^2 \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = m'^2 c^2 \frac{1}{\left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2} = m'^2 c^2 \frac{1}{\left(\frac{dx^0}{dx^0} \right)^2 - \sum_{n=1}^3 \left(\frac{dx^n}{dx^0} \right)^2} = \frac{m'^2 c^2}{1 - \sum_{n=1}^3 \frac{(V^n)^2}{c^2}} \quad \text{avec}$$

$V^n = dx^n/dt$ et $dx^0 = cdt$. D'où : $p^0 = \frac{E}{c} = \frac{m' c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ soit :

$$E = \frac{m' c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (144)$$

et en utilisant (144) dans (137) on obtient la transformation de la quantité de mouvement :

$$p_V = \frac{m' V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m V \quad (145)$$

ce qui montre comment la masse de la particule observée dans le référentiel fixe, m , est liée à la masse propre m' de la particule.

On a établi l'équation de l'énergie d'Einstein pour une particule libre : comment évolue-t-elle lorsque la particule est soumise à un champ électromagnétique de potentiel dans $E_4 (A^0, \mathbf{A}_V)$? Dans ce cas l'action de Jacobi présente 3 composantes :

$$S = S_P + S_{PC} + S_C$$

où :

S_P : action liée uniquement à la particule (comme vue auparavant),

S_C : action liée au champ électromagnétique seul (en l'absence de charges),

S_{PC} : action liée à l'interaction entre la particule chargée et le champ.

On a :

$$S_P = -m' c \int ds \quad (\text{relation (138)})$$

$$S_{PC} = -\frac{e}{c} \int A_k dx^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \text{ où } e \text{ est la charge de la particule}$$

$$S_C = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{jk} F^{jk} d^4x \quad \text{où } d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \text{ élément de 4-volume, et } F_{jk} \text{ tenseur électromagnétique}$$

Comme on s'intéresse à la dynamique de la particule, on posera ici $S_C = 0$, alors :

$$S = S_P + S_{PC} = \int \left(-m' c ds + \frac{e}{c} \mathbf{A}_V \cdot d\mathbf{x} - \frac{e}{c} A^0 dx^0 \right)$$

or $d\mathbf{x} = \mathbf{V} dt$, donc :

$$S = \int \left(-m' c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_V \cdot \mathbf{V} - e A^0 \right) dt = \int L dt \quad (146a)$$

d'où le lagrangien :

$$L = -m' c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_V \cdot \mathbf{V} - e A^0 \quad (146b)$$

Le nouveau 4-vecteur énergie-impulsion en présence de champ est noté : $\bar{p}^k = -\frac{\partial S}{\partial x_k}$ et se déduit de l'ancien p^k en l'absence de champ par :

$$\begin{aligned} \bar{p}^0 &= p^0 + \frac{e}{c} A^0 = \frac{E}{c} + \frac{e}{c} A^0 \\ \bar{p}_V &= p_V + \frac{e}{c} \mathbf{A}_V \end{aligned} \quad (146c)$$

En exprimant p^0 et $\mathbf{p}_V$ en fonction de $\bar{p}^0$ et $\bar{\mathbf{p}}_V$ dans (137), où $\mathbf{p}^2$ reste un invariant, on obtient la nouvelle équation d'énergie en présence de champ électromagnétique :

$$\left(\bar{p}^0 - \frac{e}{c} A^0\right)^2 = m'^2 c^2 + \left(\bar{\mathbf{p}}_V - \frac{e}{c} \mathbf{A}_V\right)^2 \quad (147a)$$

Comme $\bar{p}^0 = \frac{H}{c}$ où H hamiltonien (énergie) de la particule dans le champ, on a :

$$H = \sqrt{m'^2 c^4 + c^2 \left(\bar{\mathbf{p}}_V - \frac{e}{c} \mathbf{A}_V\right)^2} + e A^0 \quad (147b)$$

L'application du principe de correspondance de la Physique Quantique à (147a) conduit à l'équation d'onde de Klein-Gordon :

$$\begin{aligned} \bar{p}^0 &\rightarrow \text{opérateur } \bar{p}^0 = \frac{H}{c} = j \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} = j \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} \\ \bar{p}^n &\rightarrow \text{opérateur } \bar{p}^n = -j \hbar \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (n=1, 2, 3) \rightarrow \bar{\mathbf{p}}_V = -j \hbar \nabla \end{aligned} \quad (147c)$$

en injectant dans (147a) on obtient l'équation d'onde de Klein-Gordon pour une particule chargée sans spin, située dans un champ électromagnétique :

$$\left[\left(j \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - e A^0 \right)^2 - \left(j \hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}_V \right)^2 - m'^2 c^2 \right] \Psi = 0 \quad (148)$$

où $\Psi(x^k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, est la fonction d'onde de la particule. En l'absence de champ (particule libre), (148) se réduit à :

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \hbar^2 \nabla^2 - m'^2 c^2 \right) \Psi = 0$$

soit encore :

$$\left[\square^2 - \left(\frac{m' c}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0$$

Équation de Dirac :

L'équation de Klein-Gordon prédit parfaitement la dynamique d'une particule de masse m (nulle ou non) sans spin, ou particules scalaires (exemple : photons) et la fonction d'onde Ψ est une fonction scalaire (une seule composante).

La prédiction d'un spin nécessite donc une autre formalisation qu'apporta Dirac ⁽¹¹⁾.

De plus, bien que la covariance relativiste de (148) soit respectée (les variables temps et espace interviennent avec le même ordre, 2 en l'occurrence), il reste que l'application du principe de correspondance ne respecte pas le caractère 4-vectorel au premier ordre du vecteur de E_4 énergie-impulsion, à savoir

11 A. M. Dirac : Proc. Of the Royal Soc. A117 ; 610, 624 (1928)

$$W=(p^0, p^n)=(\frac{H}{c}, p_V) \quad n = 1, 2, 3$$

telle que vue au point 9.

L'équation d'onde devrait donc être une équation linéaire faisant intervenir l'opérateur **W** à l'ordre 1. Le raisonnement à suivre est alors comparable à celui du point 9 pour l'établissement de l'équation de Pauli avec les spineurs de C_4 .

L'équation cherchée doit être invariante par transformation de Lorentz et, étant linéaire, elle a une forme comparable à celle du point 9 :

$$(G \cdot W + K)\Psi = 0$$

où **G** = (**G**₀, **G**₁, **G**₂, **G**₃), **W** = (p⁰ = H/c, p¹, p², p³), et choisissant **G**₀ = **1**, elle s'explicite en :

$$(p^0 \mathbf{1} + G_1 p^1 + G_2 p^2 + G_3 p^3 + K)\Psi = 0 \quad (149)$$

Les **G**_n sont des matrices à déterminer, ce qui sera d'abord fait pour la particule libre, le cas du champ électromagnétique sera traité à l'aide des correspondances (147c).

La particule étant libre, tous les points de l'espace-temps jouent un rôle équivalent dans (149), donc l'hamiltonien H = cp⁰ ne dépend pas des (x^k) (k = 0, 1, 2, 3), donc les opérateurs p^k commutent avec les **G**_j et **K**.

La contrainte sur (149) est qu'elle doit retrouver l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre, réécrite sous la forme symbolique où les p⁰ et **p**_V sont des opérateurs différentiels issus du principe de correspondance (147c) (on a enlevé le bar pour alléger l'écriture) :

$$(-p^{0^2} + p_V^2 + (m'c)^2)\Psi = 0 \quad (150)$$

avec $p^0 = j\hbar \partial / \partial x_0$, $(p_V) = -j\hbar \partial / \partial x_n$ (n = 1, 2, 3) = $-j\hbar \nabla$ où **p**_V = (p¹, p², p³). Pour cela, on multiplie (149) par $(-p^0 \mathbf{1} + G_1 p^1 + G_2 p^2 + G_3 p^3 + K)$ ce qui donne :

$$(-p^0 \mathbf{1} + G_1 p^1 + G_2 p^2 + G_3 p^3 + K)(p^0 \mathbf{1} + G_1 p^1 + G_2 p^2 + G_3 p^3 + K)\Psi = 0$$

qui s'identifie à (150) si :

$$\begin{aligned} G_1^2 &= G_2^2 = G_3^2 = \mathbf{1} \\ K^2 &= (m'c)^2 \mathbf{1} \\ G_n K + K G_n &= 0 \quad (n=1, 2, 3) \\ G_n G_m + G_m G_n &= 0 \text{ si } n \neq m \quad (n, m=1, 2, 3) \end{aligned}$$

si l'on introduit **G**₀ tel que $K = -m'c G_0$, les conditions précédentes se regroupent en :

$$G_k G_j + G_j G_k = 2\delta_{jk} \mathbf{1} \quad (j, k=0, 1, 2, 3) \quad (151)$$

Les relations (151) sont d'anti-commutation du type (57). Le même argument algébrique qu'au point 9 permet de déterminer l'ordre des matrices associées aux opérateurs **G**_k :

Les matrices **G**_k (k = 0, 1, 2, 3) sont de trace nulle, en effet (151) donne :

$$G_j (G_k G_j + G_j G_k) = 2G_j \delta_{jk} = G_j G_k G_j + G_j^2 G_k = G_j G_k G_j + G_k \rightarrow G_j G_k G_j = 2G_j \delta_{jk} - G_k$$

Si k = j : $G_k^2 G_k = G_k = 2G_k - G_k = G_k$ donc $Tr(G_k) = Tr(G_k)$ ce qui est trivial ;

Si $k \neq j$: $\mathbf{G}_j \mathbf{G}_k \mathbf{G}_j = -\mathbf{G}_k$ donc $Tr(\mathbf{G}_j \mathbf{G}_k \mathbf{G}_j) = Tr(\mathbf{G}_k \mathbf{G}_j^2) = Tr(\mathbf{G}_k) = -Tr(\mathbf{G}_k)$
donc $Tr(\mathbf{G}_k) = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

Par ailleurs, $\mathbf{G}_k^2 = \mathbf{1}$ implique que les valeurs propres de $\mathbf{G}_k$ sont seulement +1 ou -1. Or la trace de $\mathbf{G}_k$ est la somme des valeurs propres, laquelle est 0 d'après ce qui précède, donc le nombre de valeurs propres égales à +1 est égal au nombre de valeurs propres égales à -1. Donc $\mathbf{G}_k$ sont des matrices $n \times n$ où n est paire. Le même raisonnement qu'au point 9 montre que $n = 2$ ne convient pas car (151) et $\mathbf{G}_k^2 = \mathbf{1}$ ne sont pas simultanément vérifiées. La plus petite dimension $n = 4$ convient donc $\Psi(x^k)$ est un vecteur de C_4 à 4 composantes, c'est-à-dire un spineur de C_4 , à condition de poser :

$$\mathbf{K}/m'c = -\mathbf{G}_0 = -\gamma^0 \text{ et } \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_n = \gamma^n, n = 1, 2, 3$$

où les γ^k sont les matrices de Dirac. Pour une particule libre, (149) écrit avec le principe de correspondance, est :

$$\left(\mathbf{1} j \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{G}_1 j \hbar \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{G}_2 j \hbar \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{G}_3 j \hbar \frac{\partial}{\partial x_3} - m' c \mathbf{G}_0 \right) \Psi = 0$$

donc, après multiplication à gauche par $\mathbf{G}_0$, puisque $\mathbf{G}_0 \mathbf{G}_n = \gamma^n$, $n = 1, 2, 3$:

$$\left[j \hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_0} - \gamma^n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) - m' c \mathbf{1} \right] \Psi = 0 \quad (n = 1, 2, 3) \quad (152)$$

L'équation d'onde (152) est l'équation de Dirac pour une particule libre de masse propre m' (donc pas de champ électromagnétique).

En présence de champ de potentiel (dans C_4) $A = A^k \gamma_k$ ($k = 0, 1, 2, 3$), l'application du principe de correspondance élargi (147c), puisque :

$$\begin{aligned} p^0 &= j \hbar \partial / \partial x_0 \rightarrow \bar{p}^0 = j \hbar \partial / \partial x_0 + \frac{e}{c} A^0 \\ p^n &= -j \hbar \partial / \partial x_n \rightarrow \bar{p}^n = -j \hbar \partial / \partial x_n + \frac{e}{c} A^n \\ \text{où : } A_V &= (A^n), n = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

donne immédiatement :

$$(\gamma^0 \bar{p}_0 + \gamma^n \bar{p}_n - m' c \mathbf{1}) \Psi = 0$$

et sa multiplication à gauche par γ_0 donne, compte tenu de $\sigma'_n = \gamma_n \gamma_0$:

$$\left(\mathbf{1} j \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{1} \frac{e}{c} A^0 + j \hbar \sigma'_n \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{e}{c} A^n \sigma'_n - \gamma_0 m' c \right) \Psi = 0 \quad (153)$$

L'équation (153) est l'équation de Dirac d'une particule de charge e et de masse propre m' dans un champ électromagnétique de potentiel (A^0, A^n) .

Remarque : - Comme $\bar{p}_k = g_{kj} \bar{p}^j = (\bar{p}^0, -\bar{p}^n) = (\bar{p}_0, \bar{p}_n)$ (153) s'écrit aussi :

$$(\gamma^k \bar{p}_k - m' c \mathbf{1}) \Psi = 0$$

soit, en posant $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \bar{p}^n \gamma_n$, $(\boldsymbol{\gamma}^0 \bar{p}^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \Psi = m' c \mathbf{1} \Psi$ où $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Le formalisme de Dirac introduit « naturellement » le spin d'une particule :

On montre en Physique Quantique que l'application du principe de correspondance au crochet de Poisson donne, pour une grandeur A quelconque :

$$[A, H] \rightarrow \frac{1}{j\hbar} [A, H]$$

où H est l'hamiltonien et dans la seconde partie de la correspondance, A et H sont respectivement les opérateurs associés à la grandeur A et à l'hamiltonien. Or en mécanique classique (Liouville) : $\frac{dA}{dt} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$ ce qui correspond en Physique quantique, où cette fois A et H sont des opérateurs :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{j\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (154)$$

Lorsque cette relation très générale (154) s'applique à une grandeur $A = x = (x_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, on obtient :

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{j\hbar} [x_k, H] = \dot{x}_k$$

NB : on rappelle que le crochet de Poisson de deux grandeurs u et v est :

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q}$$

où q, p variables conjuguées par l'équation de Hamilton :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Le moment cinétique de la particule dans un champ électromagnétique est $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}_V$ et son évolution dans le temps est : $\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{1}{j\hbar} [\mathbf{L}, H] = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}_V$; on introduit alors l'opérateur spin à partir des matrices de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma}^{jk} = \frac{j}{2} [\boldsymbol{\gamma}^j, \boldsymbol{\gamma}^k]$$

et (σ_n) de composantes $(\sigma_n) = \sigma^{mk} = \frac{j}{2} [\boldsymbol{\gamma}^m, \boldsymbol{\gamma}^k]$ $n, m, k = 1, 2, 3$.

Comme $\boldsymbol{\gamma}^k \boldsymbol{\gamma}^j + \boldsymbol{\gamma}^j \boldsymbol{\gamma}^k = 2g^{kj} \mathbf{1}$ et $G_k^2 = \mathbf{1}$ et (151), il vient :

$\sigma_3 = -j G_1 G_2$ et relations analogues pour les autres indices, donc (154), avec $\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma}_k$, donne :

$$\dot{\sigma}_3 = \frac{1}{j\hbar} [\sigma_3, H] = \frac{1}{j\hbar} [-j G_1 G_2, \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}] = \frac{-2}{\hbar} (\mathbf{G} \times \mathbf{p})_3$$

et pour tous les composants :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\hbar}{2}\sigma\right) = -(\mathbf{G} \times \mathbf{p}) \quad (155)$$

De $\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}_V$ et (155) il ressort que le vecteur $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\sigma$, qui est la somme des moments cinétiques de la particule, est une constante du mouvement, où $\mathbf{L}$ est le moment cinétique extérieur de la particule (ou moment orbital) et $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ le moment intrinsèque de la particule (ou de « rotation » propre) ou spin.

De la définition des γ_k qui interviennent dans (153) et du fait que la fonction d'onde à 4 composantes se décompose en deux fonctions d'onde à 2 composantes $\Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix}$, avec

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \text{ et } \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \text{ l'équation de Dirac (153) } (\gamma^0 \bar{p}_0 + \gamma^n \bar{p}_n - m'c \mathbf{1}) \Psi = 0, \text{ où } \gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^n = -\gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix} \text{ prend les formes :}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{p}_0 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix} \bar{p}_n - m'c \mathbf{1} \right\} \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

soit :

$$\begin{aligned} (\bar{p}_0 + \bar{p}_n \sigma_n) \phi &= m'c \psi \\ (\bar{p}_0 - \bar{p}_n \sigma_n) \psi &= m'c \phi \end{aligned} \quad (156)$$

L'expression (156) de l'équation de Dirac en deux composants faisant intervenir les spineurs à deux composants ψ, ϕ permet de mettre en évidence que chacun de ces spineurs se transforment de manière différente : on montre ⁽¹²⁾ que la transformation du spineur ψ est représentée, de manière irréductible, par $D^{(1/2, 0)}$ et que la transformation du spineur ϕ est représentée, de manière irréductible, par $D^{(0, 1/2)}$. Sans entrer dans les détails, qui font appel à un formalisme mathématique élaboré sur les groupes de transformations et leurs représentations irréductibles, non traité dans cet article, on donne ici les définitions suivantes :

Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ un spineur à deux composants complexes. Les transformations, notées $M(\text{SL})$, de ψ qui donnent le spineur ψ' de composants (ψ'_1, ψ'_2) tels que :

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= a_{11} \psi_1 + a_{12} \psi_2 \\ \psi'_2 &= a_{21} \psi_1 + a_{22} \psi_2 \end{aligned} \quad (157a)$$

et qui vérifient $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$ (condition d'unimodularité), forment un groupe noté $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ qui est donc un groupe unimodulaire. Il s'ensuit que chaque transformation fait intervenir trois nombres complexes, puisque le quatrième est lié aux trois autres par la condition d'unimodularité. On montre alors que le quatrième nombre de la matrice de transformation est :

$$a_{22} = \frac{1 + a_{21} a_{12}}{a_{11}} \quad (157b)$$

Le spineur conjugué complexe de ψ , noté ψ^* , a pour composantes $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*)$; il ne se transforme pas selon (157a, b) mais selon

$$\begin{aligned} \psi_1'^* &= a_{11}^* \psi_1^* + a_{12}^* \psi_2^* \\ \psi_2'^* &= a_{21}^* \psi_1^* + a_{22}^* \psi_2^* \end{aligned} \quad (157c)$$

avec :

$$a_{22}^* = \frac{1 + a_{21}^* a_{12}^*}{a_{11}^*} \quad (157d)$$

On montre alors que le spineur à 2 composantes ϕ qui intervient dans (156) se transforme selon (157c, d) (de représentation irréductible $D^{(0, 1/2)}$) et non comme ψ qui, lui, se transforme selon (157a, b) (de représentation irréductible $D^{(1/2, 0)}$). De sorte qu'en théorie de Dirac, l'ensemble des spineurs se répartit en deux familles : celle où les spineurs se transforment selon (157a,b) et celle où les spineurs se transforment selon (157c,d) ; le groupe des transformations unimodulaires des spineurs $SL(2, \mathbb{C})$ est donc la somme ensembliste notée $D^{(1/2, 0)}_{(+)} D^{(0, 1/2)}$: tout bispineur à 4 composantes de Dirac Ψ a pour composants deux spineurs à 2 composants qui se transforment respectivement suivant (157a,b) et (157c,d).

11-2 : Équivalence entre l'expression matricielle et l'expression avec les p-nombres des équations de Dirac

La fonction d'onde de l'équation de Dirac (153) est un bispineur (vecteur à 4 composantes) comme on l'a vu. On peut réexprimer cette équation avec pour fonction d'onde un d-nombre pair (ou p-nombre) : cette transformation permet de traiter la théorie de Dirac dans le cadre plus général de l'algèbre vectoriel C_4 (puisque les p-nombres en sont des éléments plus larges que les bispineurs) ; on s'attend alors à ce que cette nouvelle formulation introduise « naturellement » des propriétés des particules ou des champs que ne permettait pas le formalisme relativiste avec les spineurs.

Cet élargissement met en œuvre une démarche très simple puisqu'elle s'appuie sur la relation linéaire bijective (66) entre un p-nombre Φ (écrit donc sous la forme d'une matrice 4x4 puisque les éléments générateurs de C_4 γ_k sont des matrices 4x4) et un spineur de Dirac Ψ à quatre composantes complexes :

$$\Psi = T(\Phi) =: \Phi u \quad \text{où} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il suffit, pour cela, de multiplier (153) à droite par γ_0 :

$$\left(j \hbar \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{1} \frac{e}{c} A^0 \gamma_0 + j \hbar \sigma'_n \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{e}{c} A^n \sigma'_n \gamma_0 - m' c \mathbf{1} \right) \Psi = 0$$

qui s'écrit encore, puisque $A = A^k \gamma_k$ (donc $A_0 = A^0$ et $A_n = -A^n$) et $\sigma'_n = \gamma_n \gamma_0$ ($n = 1, 2, 3$) :

$$\left[j \hbar \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + \frac{e}{c} (A^0 \gamma_0 - A^n \gamma_n) - m' c \mathbf{1} \right] \Psi = 0$$

or avec (67) : $\square =: \gamma^k \partial / \partial x^k$ ($k = 0, 1, 2, 3$), et avec $A_n = -A^n$ l'équation précédente exprimée en coordonnées covariantes devient :

$$\left[j \hbar \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} (A_0 \gamma^0 + A_n \gamma^n) - m' c \mathbf{1} \right] \Psi = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left[j \hbar \square + \frac{e}{c} A - m' c \mathbf{1} \right] \Psi = 0 \quad \text{soit encore :} \quad \square \Psi = -j \left(\frac{m' c}{\hbar} - \frac{e}{\hbar c} A \right) \Psi$$

Comme $\Psi = T(\Phi) = \Phi u$ l'équation précédente devient :

$$\square \Phi u = -j \left(\frac{m' c}{\hbar} - \frac{e}{\hbar c} A \right) \Phi u$$

Or $\gamma_0 u = u$ et $j u = \gamma_2 \gamma_1 u$ d'où :

$$\begin{aligned} \square \Phi u &= -j \frac{m' c}{\hbar} \Phi u + \frac{e}{\hbar c} A \Phi j u = -j \frac{m' c}{\hbar} \Phi u + \frac{e}{\hbar c} A \Phi \gamma_2 \gamma_1 u \\ &= -j \frac{m' c}{\hbar} \Phi \gamma_0 u + \frac{e}{\hbar c} A \Phi \gamma_2 \gamma_1 u = -\frac{m' c}{\hbar} \Phi \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 u + \frac{e}{\hbar c} A \Phi \gamma_2 \gamma_1 u \end{aligned}$$

et en éliminant u :

$$\square \Phi = \left(-\frac{m' c}{\hbar} \Phi \gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A \Phi \right) \gamma_2 \gamma_1 \quad (158)$$

Pour achever de démontrer l'équivalence de (158) et (153), il reste à prouver que toute solution de (153) est solution de (158) :

Pour cela posons le d-nombre : $D = \square \Phi - \left(-\frac{m' c}{\hbar} \Phi \gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A \Phi \right) \gamma_2 \gamma_1$ et multiplions-le à droite par u , on obtient :

$$D u = \square \Psi + j \left(\frac{m' c}{\hbar} - \frac{e}{\hbar c} A \right) \Psi$$

Si Ψ est solution de (153) alors $D u = 0$, ce qui implique $D = 0$, donc $\Phi = T^{-1}(\Psi)$ est solution de (158). Ce qui termine la démonstration.

L'équivalence entre (153) (théorie de Dirac) et (158) a pour conséquence importante que les résultats de la théorie de Dirac peuvent être exprimés en algèbre vectorielle et que celle-ci introduit des propriétés que le formalisme de Dirac ne pouvait pas à lui seul exprimer (telle la théorie du nucléon).

Invariance de jauge :

Dans (153) le potentiel de champ A est défini à une invariance de jauge près ; il en est de même dans (158) :

le potentiel A' défini par

$$A' = A + \square a \quad \text{avec :} \quad \square^2 a = 0$$

ne change pas (158), à condition de transformer la fonction d'onde Φ par :

$$\Phi' = \Phi \exp(\gamma_5 \sigma'_3 e a) \quad (e \text{ est la charge})$$

Grandeurs de champ :

Elles sont construites à l'aide de la fonction d'onde Φ : ce sont des d-nombres tels que

$$G(D) = \Phi D \Phi^* \quad (\text{où } \Phi^* \text{ est défini par (21)})$$

et la grandeur physique D se déduit de $G(D)$ si cette grandeur de champ est supposée connue. La condition nécessaire et suffisante pour que $G(D)$ reste inchangée sous la transformation de jauge de Φ vue ci-dessus :

$$\Phi' D \Phi'^* = \Phi \exp(\gamma_5 \sigma'_3 e a) \cdot D \cdot \exp(-\gamma_5 \sigma'_3 e a) \Phi^* = \Phi D \Phi^*$$

est que D commute avec $\gamma_5 \sigma'_3$: $D \gamma_5 \sigma'_3 = \gamma_5 \sigma'_3 D$

D'autre part les grandeurs de champ doivent avoir un caractère réel, autrement dit elles sont égales à leurs duales :

$$\gamma_5 G(D) = G(D)$$

De ce qui précède, il s'ensuit que les grandeurs de champ font intervenir seulement les produits des vecteurs de C_4 : $1, \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$; ces vecteurs sont donc une base sur laquelle se développent les grandeurs de champ, ce qui permet de distinguer 4 sortes de grandeurs physiques :

- scalaires : $K = \text{partie scalaire}(\Phi \Phi^*) 1$ et $K' = \text{partie scalaire}(\Phi \gamma_5 \Phi^*) 1$;
- vecteurs courant : $J_0 = \Phi \gamma_0 \Phi^*$
- bivecteurs : $B = \Phi \gamma_1 \gamma_2 \Phi^*$
- vecteur d'espace ou spin : $S = \Phi \gamma_3 \Phi^*$

En tant que p-nombre (ou biquaternion de C_4), Φ s'écrit aussi sous la forme (97) :

$$\Phi = \rho^{1/2} (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \beta) R$$

où R est une rotation de Lorentz, donc vérifie $R^\circ = R$ et $R R^* = 1$; donc R définit en chaque point de l'espace-temps E_4 une base propre dont les vecteurs sont :

$$e_k = R \gamma_k R^* \quad (159)$$

Le vecteur e_0 de cette base propre est la vitesse d'univers $e_0 = R \gamma_0 R^*$ et comme $e_0^2 = 1$ la composante spatiale de la vitesse d'univers, ou vitesse d'espace, est nulle : dans le référentiel propre, la particule est au repos, d'où l'appellation « base propre ».

Dans l'expression (97) de Φ , ρ est la densité de probabilité, et β est l'angle de Takabayasi dont on verra une possible interprétation plus loin.

De (159) et à partir des 4 sortes de grandeurs de champ listées plus haut, on montre que s'en déduisent les grandeurs de champ suivantes :

- scalaires : $K = \rho \cos \beta 1$, $K' = -\rho \sin \beta 1$
- courant : $J_0 = \rho e_0$ (4-vecteur densité-flux)

- bivecteurs : $B = \rho (\exp \gamma_5 \beta) e_1 e_2 = e + \gamma_5 h$ où les bivecteurs e et h sont :
 - densité (probabiliste) de moment électrique : $e = -K' e_3 e_0$
 - densité (probabiliste) de moment magnétique : $h = -K e_3 e_0$
- de sorte que, en unités physiques, la densité des moments électrique et magnétique est

$$\frac{e \hbar}{2 m' c} B = \frac{e \hbar}{2 m' c} (e + \gamma_5 h)$$

où $\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m' c}$ est le magnéton de Bohr

- spin : $S = \rho e_3$, dont la densité (sous-entendue probabiliste) de spin est :

$$\sigma = \frac{\hbar}{2} S e_0 = \frac{\hbar}{2} \rho e_3 e_0$$

Les grandeurs sont souvent introduites par leurs densités, ce sont ces densités, et non les grandeurs, qui ont les variances relativistes, bien que ce soient les grandeurs qui ont un intérêt physique. En fait, les grandeurs physiques sont obtenues comme des valeurs moyennes pondérées par les densités de probabilité : ces valeurs moyennes sont obtenues par intégration des grandeurs de champ dans l'espace-temps et pour qu'elles aient un sens physique il faut que la densité de probabilité soit normée à l'unité (sinon la fonction d'onde ne pourrait pas être interprétée de manière probabiliste : principe de la physique quantique).

La cohérence du système exige alors que la normalisation à l'unité de la fonction d'onde soit conservée, du moins localement, lors de la déformation du référentiel de la particule. Or on montre que cette condition équivaut à l'annulation de la 4-divergence du vecteur courant dans une base fixe associée à l'origine O : $(\square \cdot J_0)_{(O)} = 0$. Cette condition importante doit être satisfaite, et c'est ce qui va être montré par la suite, sans trop insister sur les démonstrations et calculs détaillés (voir références), et qui nécessite de décrire la déformation du référentiel au moyen du tenseur de rotation.

Base propre et sa déformation :

L'existence d'une base propre implique qu'en un point d'espace-temps O , initialement de base (γ_k) , le repère se déforme localement au cours de l'évolution de la particule.

En indiquant par (O) ce qui est relatif à l'origine (la base fixe), on a donc d'après (159) :

$$(e_k)_{(O)} = \gamma_k \text{ puisque avant déformation on a } R_{(O)} = 1$$

et on a vu que la probabilité quantique, obtenue par intégration de J_0 dans la base fixe dans tout l'espace-temps doit rester indépendante de la déformation de la base propre.

Or, la déformation locale de la base est décrite par le tenseur de rotation Ω de composantes :

$$\Omega_k = 2 \left(\frac{\partial R}{\partial x^k} \right) R^*$$

R peut s'écrire :

$$R = Q \exp(\gamma_2 \gamma_1 b) \quad (160)$$

où b est un scalaire nul à l'origine ($b_{(O)} = 0$), et où Q vérifie $Q Q^* = 1$ et $Q = Q^\circ$ et à l'origine $Q_{(O)} = 1$ (puisque'il en est de même pour R).

On montre (v. réf. G. Casanova) que, au voisinage de O, compte tenu de l'équation de Dirac sous sa forme (158), le scalaire b est égal à :

$$b = \left[-\frac{m'c}{\hbar} \cos \beta_{(O)} + \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^0 \right] x_0 + \frac{e}{\hbar c} (A_{(O)}^1 x_1 + A_{(O)}^2 x_2 + A_{(O)}^3 x_3)$$

où les A^k sont les coordonnées du potentiel $\mathbf{A} = A^k \gamma_k$. Donc en O, où $x_k = 0$, on a bien $b_{(O)} = 0$.

Comme $\Phi = \rho^{1/2} (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \beta) \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ est exprimé par (160), dans (158) il vient :

$$\square \Phi = \left[\square (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \right] \mathbf{R} + \rho^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} \gamma_5 \beta) \square \mathbf{R}$$

et on montre que l'équation de Dirac (158) donne localement (au voisinage de O), où $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{(O)}$:

$$(\square \rho^{1/2} \exp \frac{1}{2} \gamma_5 \mathbf{Q})_{(O)} = -\frac{m'c}{\hbar} \rho_{(O)}^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} \gamma_5 \beta_{(O)}) \sin \beta_{(O)} \gamma_3$$

c'est-à-dire :

$$(\square \rho)_{(O)} - \gamma_5 \rho_{(O)} (\square \beta)_{(O)} + 2 \rho_{(O)} (\square \mathbf{Q})_{(O)} = -2 \frac{m'c}{\hbar} \rho_{(O)} \sin \beta_{(O)} \gamma_3 \quad (161a)$$

qui se décompose en parties vecteur et tri-vecteur :

$$(\square \rho)_{(O)} + 2 \rho_{(O)} (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} = -2 \frac{m'c}{\hbar} \rho_{(O)} \sin \beta_{(O)} \gamma_3 \quad (161b)$$

$$-\gamma_5 (\square \beta)_{(O)} + 2 (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} = 0 \quad (161c)$$

On montre alors que les gradients de la base propre en O et des courants $\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{e}_k$ sont :

$$(\square \mathbf{e}_0)_{(O)} = 2 \gamma_0 \cdot (\square \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_0 \mathbf{Q})_{(O)} \quad \text{qui se décompose en :}$$

$$\begin{aligned} (\square \cdot \mathbf{e}_0)_{(O)} &= 2 \gamma_0 \cdot (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} \\ (\square \wedge \mathbf{e}_0)_{(O)} &= 2 \gamma_0 \cdot (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_0 \mathbf{Q})_{(O)} \end{aligned}$$

$$(\square \mathbf{e}_3)_{(O)} = 2 \gamma_3 \cdot (\square \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_3 \mathbf{Q})_{(O)} \quad \text{qui se décompose en :}$$

$$\begin{aligned} (\square \cdot \mathbf{e}_3)_{(O)} &= 2 \gamma_3 \cdot (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} \\ (\square \wedge \mathbf{e}_3)_{(O)} &= 2 \gamma_3 \cdot (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_3 \mathbf{Q})_{(O)} \end{aligned}$$

$$(\square \mathbf{e}_1)_{(O)} = 2 \gamma_1 \cdot (\square \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_1 \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\square b)_{(O)} \gamma_2 \quad \text{qui se décompose en :}$$

$$\begin{aligned} (\square \cdot \mathbf{e}_1)_{(O)} &= 2 \gamma_1 \cdot (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} + 2 \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^2 \\ (\square \wedge \mathbf{e}_1)_{(O)} &= 2 \gamma_1 \cdot (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_1 \mathbf{Q})_{(O)} + 2 \gamma_2 \wedge (\square b)_{(O)} \end{aligned}$$

de même pour $\mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned}
(\square \cdot \mathbf{e}_2)_{(O)} &= 2 \gamma_2 \cdot (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} - 2 \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^1 \\
(\square \wedge \mathbf{e}_2)_{(O)} &= 2 \gamma_2 \cdot (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_2 \mathbf{Q})_{(O)} - 2 \gamma_1 \wedge (\square b)_{(O)}
\end{aligned}$$

que l'on rassemble toutes en :

– divergences :

$$(\square \cdot \mathbf{e}_k)_{(O)} = 2 \gamma_k \cdot (\square \cdot \mathbf{Q})_{(O)} + 2 \frac{e}{\hbar c} \gamma_5 (\gamma_3 \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_k \wedge A)_{(O)} \quad (162)$$

– rotationnels :

$$(\square \wedge \mathbf{e}_k)_{(O)} = 2 \gamma_k \cdot (\square \wedge \mathbf{Q})_{(O)} - 2 (\partial_k \mathbf{Q})_{(O)} + 2 \gamma_5 (\gamma_k \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) \wedge (\square b)_{(O)} \quad (163)$$

D'où les divergences et rotationnels des vecteurs courant $\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{e}_k$:

$$(\square \mathbf{J}_k)_{(O)} = (\square \rho \mathbf{e}_k)_{(O)} = (\square \rho)_{(O)} \gamma_k + \rho_{(O)} (\square \mathbf{e}_k)_{(O)}$$

qui, avec (162), donne pour la partie divergences :

$$(\square \cdot \mathbf{J}_k)_{(O)} = 2 \frac{m' c}{\hbar} (\sin \beta_{(O)}) \gamma_3 \cdot (\mathbf{J}_k)_{(O)} + 2 \frac{e}{\hbar c} \gamma_5 (\gamma_3 \wedge \gamma_0 \wedge (\mathbf{J}_k)_{(O)} \wedge A_{(O)}) \quad (164)$$

De (164) on déduit que pour $k = 0$, on a :

$$(\square \cdot \mathbf{J}_0)_{(O)} = 0 \quad (164\text{bis})$$

Cette relation (164bis) exprime ce que l'on voulait démontrer : la conservation de la normalisation à l'unité de la fonction d'onde Φ lors de la déformation du repère lié à la particule.

Et de (164) on déduit pour $k = 3$ la formule de la divergence du vecteur courant de spin d'Uhlenbeck et Laporte :

$$(\square \cdot \mathbf{J}_3)_{(O)} = -2 \frac{m' c}{\hbar} \rho_{(O)} \sin \beta_{(O)}$$

Et pour la partie rotationnel (163) donne :

$$(\square \wedge \mathbf{J}_k)_{(O)} = (\square \rho)_{(O)} \wedge \gamma_k + (\mathbf{J}_k)_{(O)} \cdot \gamma_5 (\square \beta)_{(O)} - 2 \rho_{(O)} (\partial_k \mathbf{Q})_{(O)} + 2 (\square b)_{(O)} \wedge \gamma_5 ((\mathbf{J}_k)_{(O)} \wedge \gamma_3 \wedge \gamma_0) \quad (165)$$

En particulier pour $k = 0$ (165) devient :

$$(\square \wedge \mathbf{J}_0)_{(O)} = (\square \rho)_{(O)} \wedge \gamma_0 + \rho_{(O)} \gamma_0 \cdot \gamma_5 (\square \beta)_{(O)} - 2 \rho_{(O)} (\partial_0 \mathbf{Q})_{(O)}$$

On montre que l'on peut éliminer les $(\partial_k \mathbf{Q})_{(O)}$ dans (165) et que l'équation équivalente à (165) est :

$$\begin{aligned}
\gamma^k (\square \wedge \mathbf{J}_k)_{(O)} &= -2 (\square \rho)_{(O)} + 2 \gamma_5 \rho_{(O)} (\square \beta)_{(O)} - 2 \frac{m' c}{\hbar} \rho_{(O)} \gamma_3 \sin \beta_{(O)} \\
&+ 2 \rho_{(O)} \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^2 \gamma_1 - 2 \frac{e}{\hbar c} \rho_{(O)} A_{(O)}^1 \gamma_2 + 4 \rho_{(O)} \gamma_2 \wedge \gamma_1 \wedge (\square b)_{(O)}
\end{aligned} \quad (166)$$

On montre aussi que le tenseur de rotation est lié aux rotationnels de la base propre au voisinage de O en utilisant (161c) :

$$(\Omega_k)_{(O)} = \gamma_k \cdot \gamma_5 (\square \beta)_{(O)} + 2 \gamma_5 (\gamma_k \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_3) \wedge (\square b)_{(O)} + 2 (\partial_k b)_{(O)} \gamma_2 \gamma_1 - (\square \wedge e_k)_{(O)} \quad (167)$$

Pour $k = 0$ (167) donne :

$$(\Omega_0)_{(O)} = \gamma_0 \cdot \gamma_5 (\square \beta)_{(O)} + 2 \left(-\frac{m'c}{\hbar} \cos \beta_{(O)} + \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^0 \right) \gamma_2 \gamma_1 - (\square \wedge e_0)_{(O)}$$

et pour $k = 3$:

$$(\Omega_3)_{(O)} = \gamma_3 \cdot \gamma_5 (\square \beta)_{(O)} + 2 \frac{e}{\hbar c} A_{(O)}^3 \gamma_1 \gamma_2 - (\square \wedge e_3)_{(O)}$$

L'accélération d'espace-temps au voisinage de la base fixe est :

$$(\partial_0 e_0)_{(O)} = [\partial_0 (R \gamma_0 R^*)]_{(O)} = (\partial_0 Q)_{(O)} \gamma_0 - \gamma_0 (\partial_0 Q)_{(O)}$$

et l'on montre qu'elle est directement reliée à la composante de temps du tenseur de rotation :

$$(\partial_0 e_0)_{(O)} = (\Omega_0)_{(O)} \cdot \gamma_0 \quad (168)$$

Interprétation de l'angle de Takabayasi β qui intervient dans (161) :

On montre que l'on peut déduire de l'équation de Dirac une équation équivalente où apparaît explicitement la force de Lorentz qui s'exerce sur la particule chargée dans le champ de potentiel **A**.

La force de Lorentz est définie par (130), et comme le bivecteur champ électromagnétique **F** dérive du potentiel 4-vecteur (relation 128a), elle est :

$$L = \varepsilon F \wedge J = \varepsilon \square A \wedge J$$

Comme en fait **L** est une densité de force, ici **J** s'assimile à $\mathbf{J}_k = \mathbf{e}_k$ et non pas $\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{e}_k$. Dans le repère relatif à l'origine O, et puisque $(J_0)_{(O)} = (e_0)_{(O)} = \gamma_0$, on montre que la force de Lorentz devient :

$$L_{(O)} = \varepsilon e (\square A)_{(O)} \cdot \gamma_0$$

On montre que l'équation de Dirac (158), écrite dans tout référentiel relativiste, est équivalente à l'équation suivante où le potentiel du champ dans le repère d'origine **A**_(O) est mis en évidence par rapport au potentiel **A** :

$$\begin{aligned} (\square \rho^{1/2} (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \beta) Q) = & -\frac{m'c}{\hbar} \rho^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} \gamma_5 \beta) ((\exp \gamma_5 \beta) Q \gamma_0 - (\cos \beta_{(O)}) \gamma_0 Q) \gamma_2 \gamma_1 \\ & + \frac{e}{\hbar c} \rho^{1/2} (A - A_{(O)}) (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \beta) Q \gamma_2 \gamma_1 \end{aligned}$$

Dans le repère lié à O, on montre ensuite que cette équation devient :

$$\mathcal{Q}_B \cdot \gamma_0 = \frac{m'c}{\hbar} \cos \beta_{(O)} (\partial_0 \mathbf{e}_0)_{(O)} + \frac{e}{\hbar c} (\square A)_{(O)} \cdot \gamma_0$$

où $\mathcal{Q}_B$ est la composante bivecteur de $(\square^2 \mathcal{Q})_{(O)} \gamma_1 \gamma_2$, et où $(\partial_0 \mathbf{e}_0)_{(O)}$ est l'accélération d'espace-temps au voisinage de O donnée par (168). Dans l'équation précédente on reconnaît la force de Lorentz via le terme $e(\square A)_{(O)} \cdot \gamma_0 = L_{(O)}/\varepsilon$.

De plus, la masse qui est affectée à l'accélération d'espace-temps $(\partial_0 \mathbf{e}_0)_{(O)}$ est, non pas m' mais $m' \cos \beta_{(O)}$. Son produit avec l'accélération est donc une force. Dans le repère propre de la particule cette force doit être égale à la force de Lorentz qui y gouverne la dynamique de la particule, on doit donc avoir dans ce repère :

$$\frac{e}{\hbar c} (\square A)_{(O)} \cdot \gamma_0 = - \frac{m'c}{\hbar} \cos \beta_{(O)} (\partial_0 \mathbf{e}_0)_{(O)}$$

et par conséquent : *composante bivecteur* $[(\square^2 \mathcal{Q})_{(O)} \gamma_1 \gamma_2] \cdot \gamma_0 = 0$.

Ainsi, la masse propre qui intervient dans la dynamique locale est, non pas m' , mais $m' \cos \beta_{(O)}$. Cette introduction de la masse propre où intervient l'angle de Takabayasi β en fournit une interprétation : l'énergie non potentielle peut varier de $(-m')$ ($\beta_{(O)} = 0$) à $(+m')$ ($\beta_{(O)} = \pi$), donc $\beta_{(O)}$ qui est compris entre ces deux valeurs extrêmes, mesure le mélange des ondes à énergie non potentielle positive et à énergie non potentielle négative. Les ondes à énergie non potentielle négative sont liées à des états virtuels, inobservables, mais impliquées dans un franchissement d'une barrière de potentiel (effet tunnel) (paradoxe de Klein).

Si $\Phi(m')$ est solution de (158) alors $\Phi(-m')$ vérifie :

$$\square \Phi(-m') = \left[\frac{m'c}{\hbar} \Phi(-m') \gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A \Phi(-m') \right] \gamma_2 \gamma_1$$

et donc $\Phi(-m')$ est aussi solution de (158).

Donc l'équation de Dirac associe à toute solution $\Phi(m')$ une solution $\gamma_5 \Phi(-m')$ de masse propre $(-m')$ de sorte que toute solution de (158) est un mélange d'ondes à énergie non potentielle positive et négative, lorsque les intégrations d'espace sont sur volumes positifs. L'intégration sur des volumes négatifs conduit au passage du positon de charge $+e$ et de masse m' qui sont encore adaptées à l'équation de Dirac (invariance par retournement du temps).

Pour illustrer cela, prenons l'exemple de l'onde plane, en l'absence de champ, solution de (158) :

$$\square \Phi = \frac{m'c}{\hbar} \Phi \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1$$

On montre que la solution Φ est alors de la forme :

$$\Phi^+ = \rho^{1/2} \mathbf{u} \exp(\gamma_5 \sigma'_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \quad (169a)$$

avec $\mathbf{r} = \frac{m'c}{\hbar} \mathbf{u} \gamma_0 \mathbf{u}^*$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire de rotation : $\mathbf{u} \mathbf{u}^* = \mathbf{1}$;

ainsi que :

$$\Phi^- = \rho^{1/2} \mathbf{u} \gamma_5 \exp(-\gamma_5 \sigma'_3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \quad (169b)$$

Les ondes définies par (169a) et (169b) se déduisent l'une de l'autre par changement de signe

de $\mathbf{r}$, donc de la masse propre m' : celles pour lesquelles on a $(-\mathbf{r})$ sont dites à « énergie négative », celles pour lesquelles on a $(+\mathbf{r})$ sont dites à « énergie positive », le mélange de ces deux types d'ondes forme un système total : toute solution de (158) s'obtient comme combinaison de ces ondes à énergie négative ou positive.

Or Φ^+ et Φ^- , en tant que p-nombres, s'écrivent aussi :

$$\Phi = (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} R \quad \text{où} \quad R = R^\circ \quad \text{et} \quad R R^* = 1$$

Donc pour Φ^+ on a $\beta = 0$ et pour Φ^- , on a $\beta = \pi$, donc β est lié au signe de l'énergie non potentielle.

Dit de manière plus imagée, la théorie de Dirac, dans son formalisme algèbre vectoriel, prédit, à travers l'angle β qui y intervient, l'existence de la « matière » (particules à énergie non potentielle positive, ou à masse propre $m' > 0$) et de l'« anti-matière » (particules à énergie non potentielle négative, ou à masse propre $m' < 0$).

12 – Théorie du nucléon avec l'algèbre vectorielle, en physique quantique

Le nucléon est une particule constitutive du noyau atomique, de charge $+e$ et de masse propre $m_P = m_N - \delta m$ pour le proton, ou de charge 0 et de masse propre m_N pour le neutron. Les masses sont très proches ⁽¹³⁾.

Dans le noyau il y a donc seulement des charges électriques identiques $+e$, donc elles créent entre elles un champ électrique répulsif qui devrait empêcher la cohésion du noyau. Cette cohésion est donc assurée par un champ, qualifié de pionique, dont les vecteurs – les pions – sont des particules chargées agissant sur le nucléon lorsqu'ils sont à une distance inférieure au rayon de H. Yukawa ⁽¹⁴⁾. Comme pour les pions ce rayon est très faible, on peut modéliser les interactions entre les nucléons au moyen des équations locales.

Soient les fonctions d'onde du neutron Φ_N et du proton Φ_P , et Φ la fonction d'onde totale :

$$\Phi = \Phi_N + \Phi_P$$

avec donc :

$$\begin{aligned} \Phi_P &= \cos \frac{\theta}{2} (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) \Phi \\ \Phi_N &= -\gamma_5 \sigma'_1 \sin \frac{\theta}{2} (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) \Phi \end{aligned}$$

puisque l'on a : $\cos \frac{\theta}{2} (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) - \gamma_5 \sigma'_1 \sin \frac{\theta}{2} (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) = (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) (\exp -\gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta}{2}) = 1$
et que Φ est sous la forme (97). Φ_P et Φ_N vérifient chacune l'équation de Dirac (158) :

$$\square \Phi_P = \left[(m_N - \delta m) \frac{c}{\hbar} \Phi_P \gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} A \Phi_P \right] \gamma_5 \sigma'_3$$

13 Masse du proton : $m_P = 1,672623 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938,27231 \text{ MeV}/c^2$; masse du neutron : $m_N = 1,674929 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939,56563 \text{ MeV}/c^2$

14 Le rayon de Yukawa définit l'étendue du domaine spatial où un champ agit, lorsque ce champ d'interaction se décrit comme l'échange de particules vecteurs, ou bosons : il est donné par : $R = \hbar/\mu c$ où μ est la masse propre de ces particules. Par exemple, le potentiel du champ associé aux échanges de mésons, est non pas en $1/r$, comme c'est le cas du champ électromagnétique (r est la distance de propagation), mais en $\exp(-r/R)/r$, où l'on voit donc apparaître un effet d'écran dans le terme exponentiel. Ainsi, les photons ayant une masse propre nulle, la portée du champ électromagnétique auquel ils sont associés, est infinie : elle n'est pas confinée, et le potentiel est en $1/r$.

$$\square \Phi_N = \frac{m_N c}{\hbar} \Phi_N \gamma_0 \gamma_5 \sigma'_3 \quad (\text{car } \mathbf{A} = 0 \text{ pour le neutron})$$

d'où, pour la fonction d'onde totale :

$$\square(\Phi_P + \Phi_P) = \square \Phi = \left(\frac{m_N c}{\hbar} \Phi_N + \frac{\delta m c}{\hbar} \Phi_P \right) \gamma_0 \gamma_5 \sigma'_3 + \frac{e}{\hbar c} A \Phi_P \gamma_5 \sigma'_3 \quad (170)$$

L'équation (170) n'est donc pas une équation de Dirac pour Φ . Il faut donc recourir à un formalisme, issu de l'algèbre vectorielle, qui est au-delà de celui de Dirac.

L'équation (170) doit être écrite dans la base propre de l'origine O au voisinage duquel est le nucléon, et où la condition de conservation de la normalisation à l'unité doit être vérifiée au cours de la déformation du repère : $(\square \cdot \mathbf{J}_0)_{(O)} = 0$ (164bis).

Pour cela, il faut utiliser les isovecteurs ; les isovecteurs sont :

$$\mathbf{I}_k = \Phi \gamma_k \Phi^* \quad (171)$$

On montre que la base formée par les isovecteurs est une base propre : la vitesse d'espace, qui est nulle dans la base propre des vecteurs $\mathbf{J}_k$, est nulle dans toutes les bases de l'espace propres.

Soit $\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{e}_k = \rho \mathbf{R} \gamma_k \mathbf{R}^*$ d'après (159), vecteurs courants. Rappel : pour $k = 0$, $\mathbf{J}_0 = \rho \mathbf{e}_0$ et pour $k = 3$, $\mathbf{J}_3 = \rho \mathbf{e}_3$ est le spin $\mathbf{S}$.

Si la fonction d'onde $\Phi = (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \mathbf{R}$ est un biquaternion solution de (170), alors

$\Phi = \exp(-\frac{1}{2} \gamma_5 \sigma' \theta) (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \mathbf{R}$ est aussi un biquaternion solution, où :

$$\sigma' = s^1 \sigma'_1 + s^2 \sigma'_2 + s^3 \sigma'_3$$

est un vecteur d'espace qui doit satisfaire certaines conditions pour que l'on ait (164bis). De (171) il vient alors :

$$\mathbf{I}_k = (\exp - \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma' \theta) (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \mathbf{R} \gamma_k \mathbf{R}^* (\rho \exp - \gamma_5 \beta)^{1/2} (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma' \theta)$$

soit :

$$\mathbf{I}_k = (\exp - \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma' \theta) \mathbf{J}_k (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma' \theta) \quad (172)$$

donc les $\mathbf{I}_k$ se déduisent des $\mathbf{J}_k$ par rotation (σ', θ) . Pour $k = 3$, $\mathbf{I}_3$ est l'isospin.

On montre alors, puisque $\mathbf{I}_0 = \mathbf{J}_0$, que :

$$(\square \cdot \mathbf{I}_0)_{(O)} = - \frac{e}{\hbar c} \sin \theta_{(O)} A_{(O)}^0 s^3$$

et donc que la condition de conservation de la normalisation à l'unité (164bis) est $s^3 = 0$ quel que soit le potentiel $\mathbf{A}$. Donc σ' doit être orthogonal à σ'_3 , c'est-à-dire de la forme :

$$\sigma' = \sigma'_1 \cos \phi + \sigma'_2 \sin \phi$$

On montre aussi que dans l'isobase liée à l'origine O, (170) s'écrit :

$$\square \Phi = \left[\frac{m_N c}{\hbar} \Phi \gamma_0 + \frac{e}{\hbar c} (\cos \frac{1}{2} \theta) A (\exp \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma'_1 \theta) \Phi \right] \gamma_2 \gamma_1 - g \Phi p' \gamma_5 \quad (173)$$

où l'on a identifié $\sigma' = \sigma'_1$. Dans (173) le champ pionique est représenté par :

$$p' = \sigma'_3 p \sigma'_3 \quad \text{avec} \quad p = p^n \gamma_n \quad n = 1, 2, 3$$

Dans (173) g est la constante de couplage, et le champ pionique, qui assure la cohésion des nucléons, est lié au défaut de masse δm entre le proton et le neutron :

$$\begin{aligned} p^1 &= 0 \\ g p^2 &= (\delta m) \frac{c}{\hbar} \cos \frac{\theta_{(O)}}{2} \sin \frac{\theta_{(O)}}{2} \\ g p^3 &= -(\delta m) \frac{c}{\hbar} \cos^2 \frac{\theta_{(O)}}{2} \end{aligned} \quad (174)$$

Remarque : (173) est plus générale que l'équation de Dirac (158), et s'identifie à elle en l'absence de champ pionique p et si $\theta = 0$. Elle utilise l'algèbre vectorielle sans recourir à la transformation de l'équation de Dirac de la forme (153) à la forme (158).

Charge du nucléon :

On a vu que, pour le proton, dans le repère lié à O :

$$\Phi_P = \cos \frac{\theta_{(O)}}{2} (\exp \gamma_5 \sigma'_1 \frac{\theta_{(O)}}{2}) \Phi_{(O)}$$

où $\Phi_{(O)}$ est la fonction d'onde dans l'isobase au voisinage de O :

$$\Phi_{(O)} = (\rho_{(O)} \exp \gamma_5 \beta_{(O)})^{1/2}$$

La charge q du nucléon est donc directement liée à la densité de probabilité :

$$q = e (\Phi_P \Phi_P^*)_{(O)} = \rho_{(O)} e \cos^2 \frac{1}{2} \theta_{(O)}$$

soit :

$$q = \rho_{(O)} e \frac{1 + \cos \theta_{(O)}}{2} \quad (175)$$

Ainsi (175) montre que la charge est liée à l'angle $\theta_{(O)}$, donc pour :

- le neutron : $\theta_{(O)} = \pi$
- le proton : $\theta_{(O)} = 0$

et elle est liée au champ pionique puisque de (174) on a :

$$\tan \frac{1}{2} \theta_{(O)} = - \frac{p^2}{p^3}$$

donc la charge s'exprime avec le champ pionique :

$$q = \frac{(p^3)^2}{(p^2)^2 + (p^3)^2} \quad (176)$$

13 – Algèbres de Lie : lien avec l'algèbre de Clifford

13-1 : Définition et propriétés de l'algèbre de Lie

L'algèbre de Lie fait appel aux groupes continus (ou groupes de Lie) que l'on va d'abord définir.

Groupes continus, ou groupes de Lie :

On a vu au chapitre 1 un exemple de groupe continu dont les éléments sont les matrices infinitésimales de rotation dans E_3 autour d'un axe $\mathbf{e}_k$ $L_k = \left(\frac{d R_k(a_k)}{d a_k} \right)_{(a_k=0)}$ où $R_k(a_k)$ sont les matrices de rotation autour de $\mathbf{e}_k$: ce groupe continu est appelé $SO(3)$.

Lorsque les rotations autour d'un axe sont dans le plan E_2 , le groupe continu s'appelle $SO(2)$. Avant de donner la définition formelle d'un groupe de Lie, regardons l'exemple simple du groupe $SO(2)$.

Dans E_2 , une rotation d'angle α autour d'un axe quelconque est exprimée par la transformation d'un point $M(x,y)$ en un point $M'(x',y')$ telle que :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha = f_1(x, y; \alpha) \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha = f_2(x, y; \alpha) \end{aligned}$$

relation que l'on exprime par une matrice $G(\alpha)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = G(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad G(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Les rotations dans E_2 forment un groupe parce que le produit de deux rotations $G(\alpha)$ et $G(\alpha')$ est encore une rotation d'angle $\alpha'' = \alpha + \alpha'$:

$$G(\alpha)G(\alpha') = G(\alpha'') = G(\alpha + \alpha')$$

On appelle alors loi du groupe ϕ la relation entre l'angle de rotation finale et les angles de rotation successifs :

$$\alpha'' = \phi(\alpha, \alpha') = \alpha + \alpha'$$

Les angles α peuvent prendre une infinité de valeurs continues mais qui sont bornées par 0 et 2π : le groupe des rotations dans un plan est donc qualifié de groupe continu compact.

Ce qui vient d'être présenté pour les rotations dans un plan, peut sans difficulté s'étendre aux rotations spatiales dans E_3 (groupe $SO(3)$). Voyons alors maintenant la définition générale des groupes continus (ou groupes de Lie).

Définition d'un groupe de Lie : - Soient des transformations, linéaires ou non, qui font correspondre un point $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ à un point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un espace E_n de dimension n , par une relation qui dépend de p paramètres qui peuvent prendre des valeurs

continues (α_k), $k = 1, \dots, p$:

$$x'_j = f_j(x_q; \alpha_k) \text{ avec } j, q = 1, \dots, n \text{ et } k = 1, \dots, p \quad (177)$$

Les transformations $M \rightarrow M'$ sont obtenues par une opération sur les α_k , que l'on note $G(\alpha_k)$ (par exemple une matrice de rotation) ; lorsque ces opérations concernent une infinité de valeurs continues de α_k , et constituent un groupe ⁽¹⁵⁾, on dit que le groupe est continu, c'est-à-dire un groupe de Lie.

Les relations entre les α_k'' et les α_k et α'_k lors d'un produit de G sont la loi du groupe :

$$G(\alpha_k'') = G(\alpha_k)G(\alpha'_k) \rightarrow \alpha_k'' = \phi(\alpha_j; \alpha'_q) \text{ avec } k, j, q = 1, \dots, p \quad (178)$$

L'existence d'une transformation inverse $G^{-1}(\alpha'_k)$, donc pouvoir obtenir $x_q = f_q^{-1}(x'_k; \alpha'_k)$, donc inverser (177), a pour condition nécessaire et suffisante que le déterminant de la transformation (177) ne soit pas nul :

$$J = \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_q} \right| \neq 0 \quad (179)$$

J est appelé le jacobien de la transformation.

Le cas des rotations est un exemple de groupe continu linéaire, avec donc $G(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ qui est une matrice. La condition (179) se réduit alors à la condition du déterminant de cette matrice non nul.

Lorsque la transformation (177) est linéaire (exemple groupe $SO(2)$, $SO(3)$, ...), elle peut donc s'écrire aussi :

$$x' = G(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_p)x \quad (180)$$

Représentation d'un groupe continu linéaire :

Soient des vecteurs $\mathbf{X}$ d'un espace vectoriel V de dimension n qui s'expriment en fonction des points $\mathbf{x}$ (par exemple un champ de vitesse qui dépend des vecteurs position) : $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$.

Comment évolue $\mathbf{X}$ lorsque $\mathbf{x}$ subit une transformation appartenant à un groupe continu linéaire S_G ?

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}') = \mathbf{X}(G(\alpha_1, \dots, \alpha_p)\mathbf{x})$$

Cette relation est une opération qui transforme $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{X}(\mathbf{x}')$ via la transformation G (180) (par exemple une rotation) : elle est associée à G et se note :

$$\Gamma(G)\mathbf{X}(\mathbf{x}) =: \mathbf{X}(G\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}') \quad (181)$$

L'opérateur $\Gamma(G)$ agit sur l'espace vectoriel V , appelé espace de représentation du groupe S_G continu linéaire des transformations G .

Proposition : - Soient deux transformations linéaires G_1 et G_2 du même groupe S_G . Alors :

¹⁵ Rappel : un groupe est un ensemble d'opérations $*$ définies sur un ensemble E d'éléments a telles que :

- $a*a'$ sont encore des éléments de E
- l'opération $*$ est associative : $(a*a')*a'' = a*(a'*a'')$
- il existe un élément neutre (ou identité) : $a*1 = 1*a = a$
- tout élément a de E admet un inverse a^{-1} tel que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$

$$\Gamma(G_2 G_1) = \Gamma(G_2) \Gamma(G_1) \quad (182)$$

PREUVE de (182) : - Le produit $G_2 G_1$ est un élément du groupe continu linéaire S_G , comme G_1 et G_2 . Pour tout vecteur $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ de V , on applique donc (181) successivement :

$$\Gamma(G_2 G_1) \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(G_2 G_1 \mathbf{x}) = \mathbf{X}(G_2(G_1 \mathbf{x})) = \Gamma(G_2) \mathbf{X}(G_1 \mathbf{x}) = \Gamma(G_2) \Gamma(G_1) \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

CQFD.

Avec (182) l'opération (181) conserve la loi de groupe ; les opérateurs $\Gamma(G)$ sont alors des représentations du groupe S_G et c'est pourquoi V est appelé espace vectoriel de représentation.

Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel V' de V dans lequel les transformations (181) de tout vecteur $\mathbf{X}$ de V' donnent encore un vecteur $\mathbf{X}'$ de V' : dans ce cas, on dit que le sous-espace vectoriel V' est stable vis-à-vis des transformations G du groupe S_G .

Si ce sous-espace stable V' ne contient pas un autre sous-espace vectoriel stable, on dit que sa représentation du groupe est irréductible.

On peut représenter les opérateurs $\Gamma(G)$ par des matrices. En effet, soit une base de l'espace vectoriel V : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. L'application de (181) à chacun des vecteurs de cette base donne :

$$\Gamma(G) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_j(G \mathbf{x})$$

Or $\Gamma(G) \mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ donne un vecteur $\mathbf{X}_j$ de V et comme $\mathbf{X}_j$ se décompose sur la base $\{\mathbf{v}_k\}$, $k = 1, \dots, n$ on obtient :

$$\Gamma(G) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^n X_{jk} \mathbf{v}_k \quad (183)$$

où les X_{jk} sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{X}_j$ dans la base $\{\mathbf{v}_k\}$. Ces coordonnées dépendent de la transformation G et les X_{jk} , $j, k = 1, \dots, n$ sont les éléments d'une matrice $M(G)$ associée à G . L'ensemble des matrices $M(G)$ lorsque G varie forme une représentation matricielle du groupe continu linéaire S_G dont les éléments sont G .

Suite à (182) la matrice du produit de deux transformations est égale au produit des matrices de chacune des transformations :

$$M(G_1 G_2) = M(G_1) M(G_2)$$

Opérateurs infinitésimaux :

Soit $\mathbf{1}$ l'opérateur unité du groupe continu S_G : d'après (180) on a :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{1} \mathbf{x} =: G(0, \dots, 0, \dots, 0) \mathbf{x}$$

Par exemple, pour une rotation cela revient à avoir $\alpha = 0$. Soit maintenant une fonction h dérivable, scalaire ou vectorielle, de $\mathbf{x}$. Selon (180), soit $\mathbf{x}'$ la transformée de $\mathbf{x}$ par G , élément du groupe S_G ; alors la fonction $h(\mathbf{x}')$ est une fonction $H(G)$ de $h(\mathbf{x})$ telle que :

$$H(G) h(\mathbf{x}) =: h(\mathbf{x}') \quad (184)$$

$H(G)$ est la fonction induite par G sur h .

On note $dG = G(d\alpha_k)$ la variation de la transformation G au voisinage de la transformation identité $\mathbf{1}$, elle correspond à des variations $d\alpha_k$ des paramètres continus α_k . La transformée $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{x}$ par dG est, suite à (177) :

$$x'_j = x_j + dx_j = f_j(x_q; d\alpha_k), j, q = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p$$

soit en développant au voisinage de la transformation identité **1** :

$$dx_j = f_j(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_p) - f_j(x_1, \dots, x_n; 0, \dots, 0) = \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_k} \right]_{\alpha_k=0} d\alpha_k$$

De (184) il vient donc :

$$H(dG)h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}') = h(x_q + dx_q)_{q=1, n} = h(x_q)_q + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} dx_j$$

d'où, avec l'expression précédente de dx_j :

$$H(dG)h(\mathbf{x}) = (1 + \sum_{k=1}^p X_k d\alpha_k) h(\mathbf{x}) \quad (185)$$

où les générateurs infinitésimaux du groupe S_G sont les opérateurs :

$$X_k = \sum_{q=1}^n \left(\frac{\partial f_q}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \frac{\partial}{\partial x_q} \quad k = 1, \dots, p \quad (186)$$

$H(dG)$ est l'opérateur infinitésimal.

Théorème de Lie : - Les transformations continues (177), de paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_p$, forment un groupe si et seulement si le commutateur (ou crochet de Lie) de deux générateurs infinitésimaux quelconques du groupe S_G est une combinaison linéaire de tous les générateurs infinitésimaux :

$$[X_k, X_j] = X_k X_j - X_j X_k = \sum_{q=1}^p c_{kjq} X_q \quad (187)$$

Les c_{kjq} sont les constantes de structure du groupe.

On montre que les générateurs infinitésimaux vérifient l'identité de Jacobi :

$$[X_k, [X_j, X_q]] + [X_j, [X_q, X_k]] + [X_q, [X_k, X_j]] = 0 \quad (188)$$

On montre qu'elles vérifient :

- l'anticommutativité : $c_{kjq} = -c_{jkq}$
- et cette relation, qui découle de (188) :

$$\sum_{q=1}^p (c_{kjq} c_{qmr} + c_{jm q} c_{qkr} + c_{mkq} c_{qjr}) = 0 \quad (189)$$

Un exemple de générateurs infinitésimaux a été déjà rencontré au chapitre 1, à propos des opérateurs L_k qui jouent le rôle des X_k pour le groupe des rotations.

Matrices infinitésimales et expression exponentielle :

Les transformations à p paramètres (180) $G(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_p)$ qui forment un groupe linéaire

continu S_G , peuvent s'exprimer au moyen de matrices $\mathbf{M}(G)$ d'éléments matriciels $M_{km}(G)$ qui dépendent des paramètres α_n , $n = 1, \dots, p$. On peut exprimer ces matrices en fonction des matrices infinitésimales d'éléments Y_{mn}^k qui correspondent aux générateurs infinitésimaux du groupe, X_k , de la manière suivante :

$$Y_{mn}^k = \left(\frac{\partial M_{mn}}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k=0} \quad (190)$$

On développe en série les $M_{km}(G)$ au voisinage de la transformation identité, i.e. $\alpha_k = 0$, avec $k = 1, \dots, p$:

$$M_{km}(G) = M_{km}(G(0, \dots, 0)) + \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{km}^j$$

et donc :

$$\mathbf{M}(G) = \mathbf{M}(G(0, \dots, 0)) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{Y}^k \quad (191)$$

où $\mathbf{M}(G(0, \dots, 0))$ est la matrice identité $\mathbf{1}$ correspondant aux $\alpha_k = 0$. En comparant avec (185), les matrices $\mathbf{Y}^k$ sont les matrices des générateurs infinitésimaux $\mathbf{X}_k$ du groupe S_G . Elles vérifient donc elles aussi (187).

Supposons maintenant que les p paramètres continus α_k dépendent d'un seul paramètre t : $\alpha_k = \alpha_k(t)$; il est alors immédiat, selon la loi de groupe, que :

$$\mathbf{M}(G(t_1)) \mathbf{M}(G(t_2)) = \mathbf{M}(G(t_1 + t_2))$$

en dérivant cette expression par rapport à t_1 , il vient :

$$\frac{d \mathbf{M}(G(t_1))}{d t_1} \mathbf{M}(G(t_2)) = \frac{d \mathbf{M}(G(t_1 + t_2))}{d t_1}$$

pour $t_1 = 0$ et $t_2 = t$, on obtient : $\left(\frac{d \mathbf{M}(G(t))}{d t} \right)_{t=0} \mathbf{M}(G(t)) = \frac{d \mathbf{M}(G(t))}{d t}$.

Posant $\mathbf{Y}_0 = (d \mathbf{M}(G(t))/dt)_{t=0}$ qui est une constante, l'intégration de cette expression donne, avec pour condition aux limites $\mathbf{M}(G(0)) = \mathbf{1}$:

$$\mathbf{M}(G(t)) = \exp(\mathbf{Y}_0 t) = \mathbf{1} + \mathbf{Y}_0 t + 1/2! (\mathbf{Y}_0 t)^2 + 1/3! (\mathbf{Y}_0 t)^3 + \dots + 1/N! (\mathbf{Y}_0 t)^N + \dots \quad (192)$$

Or on a : $\mathbf{Y}_0 = \sum_{k=1}^p \mathbf{Y}^k \left(\frac{d \alpha_k}{d t} \right)_{t=0}$

donc (192) montre que les matrices associées aux transformations de S_G s'expriment en fonction des matrices infinitésimales associées aux générateurs infinitésimaux du groupe :

$$\mathbf{M}(G(t)) = \exp \left(\sum_{k=1}^p \mathbf{Y}^k \left(\frac{d \alpha_k}{d t} \right)_{t=0} t \right) \quad (193)$$

Algèbre de Lie :

Soit « s » un espace vectoriel de dimension p, de vecteurs de base ($\mathbf{e}_k$), $k = 1, \dots, p$, sur un corps K qui peut être les réels $\mathbf{R}$ ou les complexes $\mathbf{C}$. Sur cet espace vectoriel on définit un produit des vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, noté $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ (ou « crochet de Lie ») ; par définition, si et seulement si, ce produit vérifie les quatre propriétés suivantes, alors « s » est une algèbre de Lie :

- 1°) $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ est lui aussi un vecteur de s ;
- 2°) linéarité : pour tous a et b de K, on a $[\mathbf{X}, a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + b[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$
- 3°) anticommutativité : $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$
- 4°) identité de Jacobi (188) : $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0$

De la propriété (1°) il résulte que le produit de deux vecteurs de base est un vecteur de s et donc il se décompose sur la base de s, ce qui donne la relation (187) :

$$[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j] = \sum_{q=1}^p c_{kjq} \mathbf{e}_q \quad (194)$$

et comme déjà vu, les nombres c_{kjq} sont les constantes de structure. Des propriétés (3°) et (4°) il s'ensuit la relation entre ces constantes, de même type que (189).

A tout groupe continu S_G (groupe de Lie) est associée une algèbre de Lie, notée s_G , dont la base est constituée des générateurs infinitésimaux de S_G . Ces générateurs vérifient donc les propriétés (1°) à (4°) de la définition ci-dessus, soit les relations (187) ou (194), et (189) et l'identité de Jacobi (188).

Algèbres de Lie isomorphes :

Deux algèbres de Lie s et s' sont isomorphes si et seulement si il existe une application F inversible de s vers s' telle que :

- linéarité : pour tous a, b de K et pour tous $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ de s : $F(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = aF(\mathbf{X}) + bF(\mathbf{Y})$
- conservation du crochet de Lie : $F([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_s) = [F(\mathbf{X}), F(\mathbf{Y})]_{s'}$

Il s'ensuit que deux algèbres de Lie isomorphes ont les mêmes constantes de structure.

Exemple : - L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, de base ($\mathbf{e}_k$), $k = 1, 2, 3$, muni du produit vectoriel, réécrit comme un crochet de Lie, est une algèbre de Lie, et (187) donne ici :

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j = :[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j] = \sum_{q=1}^3 \varepsilon_{kjq} \mathbf{e}_q$$

où ε_{kjq} est le pseudo-tenseur antisymétrique de Levi-Civita, ses composantes sont ici les constantes de structure de l'algèbre de Lie. Par ailleurs, l'algèbre de Lie $so(3)$ associée au groupe des rotations spatiales $SO(3)$ a pour base les générateurs infinitésimaux L_k , et ceux-ci vérifient la relation (187):

$$[L_k, L_j] = \varepsilon_{kjq} L_q$$

on s'aperçoit que les algèbres de Lie $(\mathbf{R}^3, \times)$ et $so(3) = (SO(3), [.,.])$ ont mêmes constantes de structure : elles sont isomorphes.

13-2 : Algèbre de Lie et algèbre de Clifford

Les générateurs d'une algèbre de Clifford peuvent déterminer une base d'une algèbre de Lie.

Proposition : - Soient n éléments générateurs d'une algèbre de Clifford C_n qui vérifient donc (13) :

$$\{e_k, e_m\} = e_k e_m + e_m e_k = 2\delta_{km}$$

Alors les n éléments suivants forment une base de l'algèbre de Lie $so(n)$ associée au groupe des rotations à n paramètres $SO(n)$ de dimension n :

$$L_{km} = \frac{1}{2} e_k e_m \quad (195)$$

NB : il y a n éléments de cette base L_{km} , et non n^2 ($= n \times n$), parce que à cause de l'anti-commutation (13) on a d'une part $L_{km} = -L_{mk}$ et $L_{kk} = \frac{1}{2} (e_k)^2 = \frac{1}{2} \mathbf{1}$.

PREUVE de (195) : - Calculons le commutateur de deux éléments quelconques L_{km} et L_{jn} ; suite à (13) il vient immédiatement :

$$[L_{km}, L_{jn}] = \frac{1}{4} (e_k e_m e_j e_n - e_j e_n e_k e_m)$$

soit :

$$[L_{km}, L_{jn}] = \delta_{kn} L_{mj} + \delta_{nm} L_{jk} + \delta_{kj} L_{nm} \quad (196)$$

La relation (196) étant du type de (194), les L_{km} sont bien des générateurs de l'algèbre de Lie $so(n)$, et sont les générateurs infinitésimaux du groupe de rotation à n paramètres $SO(n)$. Les constantes de structure sont les symboles de Kronecker δ_{km} . Pour terminer la démonstration, montrons qu'une représentation de $SO(n)$ est donnée par l'ensemble des matrices formées par exponentiation des L_{km} (relation (192)):

$$R_{km}(\theta) = \exp(-\theta L_{km})$$

Or les $R_{km}(\theta)$ forment une représentation du groupe des rotations $SO(n)$ d'un espace vectoriel V_n de base (e_j) , $j = 1, \dots, n$, si l'opération suivante est une rotation dans V_n :

$$R_{km}(\theta) v R_{km}(-\theta) = v' \quad (197a)$$

Il suffit de le vérifier pour $v = e_k$; avec la définition des L_{km} , on obtient :

$$R_{km}(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{2} e_k e_m\right) = \cos \frac{\theta}{2} - e_k e_m \sin \frac{\theta}{2} \quad (197b)$$

donc l'opération ci-dessus s'explique en :

$$\begin{aligned} e'_k &= R_{km}(\theta) e_k R_{km}(-\theta) = e_k \cos \theta + e_m \sin \theta \\ e'_m &= R_{km}(\theta) e_m R_{km}(-\theta) = -e_k \sin \theta + e_m \cos \theta \end{aligned}$$

qui est bien une rotation dans V_n qui transforme (e_k, e_m) en (e'_k, e'_m) . Donc les matrices $R_{km}(\theta)$ sont bien une représentation du groupe $SO(n)$ et les L_{km} forment une base de l'algèbre de Lie associée $so(n)$. - CQFD.

Remarque : - Les groupes de Lie sont souvent introduits en géométrie différentielle dont l'objet, dit très simplement, est le calcul sur les variétés et leurs espaces tangents. Cela provient de ce

que, sur les variétés différentielles, les éléments des espaces qui leur sont tangents sont des vecteurs qui ont une forme du même type que (186) et plus généralement des formes différentielles qui agissent comme des dérivées sur des fonctions scalaires ou des vecteurs. Voir références et notamment R. Deheuvels. Ainsi, les concepts de groupes continus, d'algèbre de Lie, d'algèbre de Clifford, de spineurs, de formes différentielles, de variétés différentielles, de structures symplectiques, etc. entrent dans une synthèse plus large dans laquelle ils sont en relations, chacun apportant à son niveau de pertinence, un outil adapté aux études de structures, d'évolutions et d'invariances constamment utiles en sciences physiques.

Quelques exemples de groupes continus, algèbres de Lie, algèbres de Clifford :

Les exemples très brièvement présentés ou récapitulés ci-après ne forment pas une liste exhaustive, mais on les rencontre fréquemment en Physique.

- Espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni du produit vectoriel : $(\mathbf{R}^3, \times)$ – On a vu que c'est une algèbre de Clifford et aussi une algèbre de Lie.
- $SO(3)$: groupe des rotations autour d'un point fixe dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$:
On a vu que c'est un groupe de Lie à 3 paramètres continus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Son algèbre de Lie associée est $so(3)$ de base $\mathbf{L}_k, k = 1, 2, 3$, telle que $[L_k, L_j] = \varepsilon_{kj\ell} L_\ell$.
C'est aussi une algèbre de Clifford de dimension 3, de base $\mathbf{L}_k$, lorsque le produit de Clifford est la commutation $[\ , \]$.
On montre aussi que $so(3)$ est isomorphe à $(\mathbf{R}^3, \times)$ en tant qu'algèbre de Lie.
- Algèbre de Pauli C_3 (algèbre d'espace) : on a vu que c'est une algèbre de Clifford d'éléments générateurs les matrices 2x2 de Pauli $\mathbf{e}_k = \sigma_k$ (relations (14), (15)), de dimension $\dim C_3 = 8$.
- Algèbre de Dirac C_4 (algèbre d'espace-temps) : on a vu que c'est une algèbre de Clifford, d'éléments générateurs $\mathbf{e}_k = \alpha_k$ avec $\gamma_0 = \alpha_0, \gamma_n = j\alpha_n, n = 1, 2, 3$ (rel. (56)), où les matrices de Dirac γ_k sont données par (52) et où α_k vérifient (57) ; $\dim C_4 = 16$.
- Algèbre des quaternions H ⁽¹⁶⁾ : on a vu que c'est une sous-algèbre de Pauli C_3 dont les éléments sont $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s + j\mathbf{Q}_v\alpha$ (relation (77)), avec $\mathbf{Q}_s$ composante scalaire, $\mathbf{Q}_v^2 = 1, \alpha$ réel. Donc $\mathbf{Q}$ s'explicite en : $\mathbf{Q} = q_0 \mathbf{1} + q_1 j\sigma_1 + q_2 j\sigma_2 + q_3 j\sigma_3$; les éléments générateurs de cette algèbre H sont : $\{\mathbf{1}, j\sigma_n\}, n = 1, 2, 3$. Or on montre qu'une algèbre engendrée par $\{\mathbf{1}, j\sigma_n\}$ est une sous-algèbre paire de C_3 , notée C_{+3} , par conséquent H est isomorphe à C_{+3} .
 $\dim H = 4$.
Quaternions unitaires : $\mathbf{Q} = \exp(j\mathbf{Q}_v\theta) = \cos \theta + j \mathbf{Q}_v \sin \theta$, ils correspondent à une rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{Q}_v$, ce qui est généralisé dans (197) :

$$\text{pour tout vecteur } \mathbf{v} \text{ de } E_n : \mathbf{v}' = (\exp(-\frac{1}{2} \mathbf{Q}_v \theta)) \mathbf{v} (\exp(\frac{1}{2} \mathbf{Q}_v \theta))$$

- Biquaternions de l'algèbre de Dirac C_4 : On a vu qu'ils sont donnés par (97) :

$$\text{pour tout } \mathbf{A} \text{ de } C_4 \text{ tel que } \mathbf{A}\mathbf{A}^* \neq 0, \mathbf{A} = (\rho \exp \gamma_5 \beta)^{1/2} \mathbf{R}, \text{ avec } \mathbf{R}^\circ = \mathbf{R}, \mathbf{R}\mathbf{R}^* = 1$$

On a vu aussi que les biquaternions s'expriment au moyen de deux quaternions $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}'$ de C_3 (relation (98)) :

16 « H » comme Hamilton, qui a inventé les quaternions.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} + \gamma_5 \mathbf{Q}'$$

Les biquaternions forment une sous-algèbre de C_4 .

- Spineurs de C_4 : ce sont les biquaternions qui n'admettent pas d'inverse à droite :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 (1 + \mathbf{X}_v) \text{ où } \mathbf{X}_v \text{ vecteur unitaire, } \mathbf{Q}_1 \text{ quaternion de } C_3 \text{ (relation (100))}$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^* = 0 \text{ (} \mathbf{A}_1 \text{ est un vecteur isotrope) (relation (101))}$$

Ils forment une sous-algèbre de C_4 de dimension 4. On a introduit aussi les spineurs positif et négatif de Dirac associés à tout d-nombre $\mathbf{A}$ de C_4 :

$$\begin{aligned} \text{spineur positif : } \mathbf{A}_+ &= \frac{1}{2} \mathbf{A} (1 + \sigma'_3) \rightarrow \mathbf{A}_+ \sigma'_3 = \mathbf{A}_+ \\ \text{spineur négatif : } \mathbf{A}_- &= \frac{1}{2} \mathbf{A} (1 - \sigma'_3) \rightarrow \mathbf{A}_- \sigma'_3 = -\mathbf{A}_- \end{aligned}$$

avec donc : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-$. On a vu que $\mathbf{A}_+ \mathbf{A}_+^* = 0$ et $\mathbf{A}_- \mathbf{A}_-^* = 0$ (relation (107)), propriété d'isotropie vue en (101).

Les biquaternions de C_4 sont isomorphes aux spineurs de C_4 .

- Spineurs de C_3 : soit un c-nombre $\mathbf{A}$ de C_3 , on a vu que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ spineur positif si } \mathbf{A} \sigma_3 &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \text{ spineur négatif si } \mathbf{A} \sigma_3 &= -\mathbf{A} \end{aligned}$$

et qu'à tout $\mathbf{B}$ quelconque de C_3 , on peut lui associer les spineurs :

$$\begin{aligned} \text{positif : } \mathbf{B}_+ &= \frac{1}{2} \mathbf{B} (1 + \sigma_3) \rightarrow \mathbf{B}_+ \sigma_3 = \mathbf{B}_+ \\ \text{négatif : } \mathbf{B}_- &= \frac{1}{2} \mathbf{B} (1 - \sigma_3) \rightarrow \mathbf{B}_- \sigma_3 = -\mathbf{B}_- \\ \text{avec donc : } \mathbf{B} &= \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- \end{aligned}$$

Tout spineur de C_3 s'écrit : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \sigma_1 + \mathbf{A}_2 \sigma_2 + \mathbf{A}_3 \sigma_3$, où $\mathbf{A}_n = a_n \mathbf{1} + j \mathbf{1} a'_n$, $n = 1, 2, 3$, et $\mathbf{A}_0 = a_0 \mathbf{1}$.

Les spineurs de C_3 forment une sous-algèbre de C_3 , de dimension 2 et de base :

$$\{\mathbf{1} + \sigma_3, (\mathbf{1} - \sigma_3) \sigma_1\}$$

- $SO(2)$ groupe des rotations dans le plan $\mathbf{R}^2$: c'est un groupe de Lie à 1 paramètre continu α . Les rotations ont pour matrices : $G(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ et pour une variation infinitésimale de α au voisinage de la rotation unité on a au premier ordre $G(d\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin d\alpha & -\cos d\alpha \\ \cos d\alpha & -\sin d\alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -d\alpha & -1 \\ 1 & -d\alpha \end{pmatrix}$ donc la base de l'algèbre de Lie associée $so(2)$ est l'unique vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi $\dim so(2) = 1$.

- Groupes linéaires $GL(n)$: les transformations linéaires de n nombres complexes z_k de $\mathbf{C}$ sont les éléments de ce groupe : $z'_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} z_k$ où a_{nk} sont des nombres complexes. Ce sont des groupes Lie à $2n^2$ paramètres réels, et de dimension $\dim GL(n) = n$. Ils sont isomorphes aux matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes.

- Groupes unitaires $U(n)$: ce sont des groupes continus à n^2 paramètres a_{km} , où $k, m = 1, \dots, n$, avec pour condition d'unitarité : $\sum |a_{km}|^2 = 1$ ce qui entraîne $|a_{km}| \leq 1$ donc $U(n)$ est un groupe compact (car borné), il s'ensuit que tous les sous-groupes de $U(n)$ sont compacts.
Les $U(n)$ sont isomorphes aux groupe des matrices carrées $n \times n$ unitaires $\mathbf{M}$ c'est-à-dire tels que $\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \mathbf{1}$ où $\mathbf{M}^*$ est la matrice conjuguée complexe de $\mathbf{M}$.
- Sous-groupe unimodulaire unitaire $SU(n)$: c'est un sous-groupe de $U(n)$ où les matrices $n \times n$ auxquelles il est isomorphe sont de déterminant égal à 1 : $\det \mathbf{M} = 1$.
Nombre de paramètres : $n^2 - 1$. C'est un groupe de Lie.
- Groupes orthogonaux $O(n)$: les éléments de ce groupe sont des applications linéaires de déterminant égal à ± 1 , générés par $\frac{1}{2} n(n-1)$ paramètres continus, isomorphes aux matrices $n \times n$ orthogonales. Ce sont des groupes de Lie.

Exemple : groupe $O(4)$ des transformations orthogonales de dimension 4 : soit un espace vectoriel V_4 dont les vecteurs $\mathbf{X}$ ont pour norme la forme quadratique :

$$q(\mathbf{X}) = x_k x^k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (198)$$

Soit une transformation linéaire du vecteur $\mathbf{X}$: $x'^j = A^j_k x^k$; elle est dite orthogonale si elle conserve la norme des vecteurs : $q(\mathbf{A}\mathbf{X}) = q(\mathbf{X}) = x'_k x'^k$. Alors on vérifie aisément que les composantes de la matrice $\mathbf{A}$ associée à la transformation vérifient :

$$A^j_i A^k_j = \delta^k_i \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3 \quad (199)$$

On vérifie aussi que le produit de deux transformations orthogonales est aussi une transformation orthogonale, donc $O(4)$ est bien un groupe continu.

Les rotations dans un espace de dimension 4 forment un sous-groupe de $O(4)$ et ont pour déterminant +1, on note ce sous-groupe $SO(4)$.

- Sous-groupe $SO(n)$ des rotations dans un espace vectoriel V_n de dimension n : on montre qu'il est isomorphe au groupe des matrices $n \times n$ de déterminant +1 ; c'est un sous-groupe continu de $O(n)$. C'est évidemment un groupe de Lie.

Exemples :

- $SO(3)$ sous-groupe des rotations dans V_3 à 3 paramètres continus : ces rotations sont données par les matrices 3×3 :

$$\mathbf{R}_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc une rotation d'un vecteur de V_3 obtenue par une succession de rotations autour des axes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ est donnée par le produit des matrices correspondantes : $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$.

Remarque : Cependant, en lien avec la remarque « mise en garde » du point 7.1, une rotation dans E_3 autour d'un vecteur de E_3 , $\mathbf{\Omega} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2 + \theta_3 \mathbf{e}_3$, dont la norme $\|\mathbf{\Omega}\|$ est l'angle de rotation, s'écrit au moyen des générateurs infinitésimaux $\mathbf{L}_k$ sous forme de l'exponentielle d'un vecteur de l'algèbre de Lie de $SO(3)$ (qui est en fait une matrice) : $R(\mathbf{\Omega}) = \exp(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}) = \exp(\theta_1 \mathbf{L}_1 + \theta_2 \mathbf{L}_2 + \theta_3 \mathbf{L}_3)$; le produit de deux rotations étant une rotation, il est représenté par le produit des exponentielles qui donne une exponentielle

de vecteur de l'algèbre de Lie ; mais ce vecteur n'est pas la somme des vecteurs associés aux deux rotations, il s'exprime en fonction d'eux par une relation compliquée appelée formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$\exp(A)\exp(B)=\exp\left[A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]-\dots\right]$$

où $A = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$ et $B = \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{L}$. Alors, le produit vu plus haut $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$ s'exprime bien comme un produit d'exponentielles et est égal à l'exponentielle d'un vecteur de l'algèbre de Lie de $SO(3)$ qui n'est pas la somme des vecteurs. Inversement, se donnant une rotation $R(\mathbf{\Omega}) = \exp(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L})$, on ne la décompose pas directement comme un produit de rotations de la forme $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$ qui permettrait, à partir de la donnée de l'axe et de l'angle, de déduire les axes et les angles intermédiaires.

Les générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ s'obtiennent par :

$$L_k = \left(\frac{d R_k(\theta_k)}{d \theta_k} \right)_{\theta_k=0} \quad (200)$$

ce qui donne :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ces vecteurs L_k vérifient (187), et forment une base de l'algèbre de Lie $so(3)$, ce qui fixe les constantes de structure qui sont les symboles de Levi-Civita ε_{kjm} , $k, j, m = 1, 2, 3$:

$$[L_1, L_2] = L_3, [L_2, L_3] = L_1, [L_3, L_1] = L_2$$

D'après (192) les matrices de rotation s'écrivent :

$$R_k(\theta_k) = \exp(\theta_k L_k) \quad (201a)$$

donc une rotation obtenue par une succession de rotations autour des axes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ est donnée par le produit des matrices correspondantes :

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \exp(\theta_1 L_1) \exp(\theta_2 L_2) \exp(\theta_3 L_3) \quad (201b)$$

et au voisinage de la rotation unité $\mathbf{1}$, les rotations infinitésimales ont pour matrice infinitésimale selon (191):

$$R(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3) = \mathbf{1} + d\theta_1 L_1 + d\theta_2 L_2 + d\theta_3 L_3$$

Cette rotation infinitésimale transforme alors un vecteur $\mathbf{v}$ de V_n en un vecteur infinitésimal $d\mathbf{v}$ égal à :

$$d\mathbf{v} = (d\theta_1 L_1 + d\theta_2 L_2 + d\theta_3 L_3) \mathbf{v} \quad (202)$$

- $SO(4)$, groupe de Lie, sous-groupe des rotations dans V_4 à 4 paramètres continus : c'est un sous-groupe de $O(4)$ avec $\det \mathbf{M}(SO(4)) = +1$. Dans l'espace vectoriel V_4 de dimension 4 (espace-temps), on considère 6 plans : 3 plans espace-temps (x^0, x^n), $n =$

1,2,3 et 3 plans espace-espace (x^n, x^m) , $n, m = 1, 2, 3$. Les rotations dans les plans (x^k, x^l) , $k, l = 0, 1, 2, 3$ avec $k \neq l$ forment une famille de 6 rotations d'angles θ_{kl} qui correspondent aux 6 matrices :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{01} & -\sin \theta_{01} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{01} & \cos \theta_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{02} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{02} & 0 & -\sin \theta_{02} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_{02} & 0 & \cos \theta_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{03} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{03} & 0 & 0 & -\sin \theta_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{03} & 0 & 0 & \cos \theta_{03} \end{bmatrix}$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 \\ 0 & \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{13} & 0 & -\sin \theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{bmatrix}, R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{bmatrix}$$

Les matrices infinitésimales, génératrices de l'algèbre de Lie $so(4)$ sont alors :

$$X_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{01} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et elles vérifient (187) avec :

$$[X_{ij}, X_{kl}] = 0 \text{ si: } k, l \neq i, j$$

$$[X_{ij}, X_{jk}] = X_{ki}$$

– Groupe de Lorentz généralisé $O(3,1)$:

La transformation (115) $X' = R X R^*$, encore notée $X' = \Lambda X$, conserve la forme quadratique du vecteur X de l'espace vectoriel V_4 à 4 dimensions :

$$q(X) = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$$

qui définit la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski de l'espace-temps. Si g désigne

le tenseur métrique pseudo-euclidien, égal à $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors la forme

quadratique s'écrit : $q(X) = X^t g X$ où X^t est le vecteur transposé de X . La conservation de la norme donne alors :

$$\Lambda^t g \Lambda = g \quad (203)$$

Par définition, les matrices Λ qui vérifient (203) forment un groupe appelé groupe de Lorentz généralisé $O(3,1)$. C'est un groupe de Lie.

Les matrices pour lesquelles $\det \Lambda = +1$ sont des rotations dans l'espace-temps (que l'on a vues au chapitre 10), et forment un sous-groupe continu noté L_+ . Les matrices dont le déterminant est $\det \Lambda = -1$ ne forment pas un groupe, elles sont appelées réflexions de Lorentz.

- Groupe $SL(2, \mathbf{C})$: c'est le groupe dont les éléments transforment linéairement un vecteur à deux composantes (ϕ_1, ϕ_2) en un vecteur à deux composantes (ϕ'_1, ϕ'_2) dont les éléments sont des nombres complexes de $\mathbf{C}$:

$$\phi'_k = a_{km} \phi_m \quad k, m = 1, 2 \quad (204a)$$

avec :

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 \quad (204b)$$

donc $SL(2, \mathbf{C})$ est un groupe unimodulaire. On montre que, suite à (204b), les éléments de la matrice sont :

$$M(SL(2, \mathbf{C})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{1 + a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix} \quad (204c)$$

On a rencontré ces transformations au paragraphe 11-1, relations (157).

Ces transformations définissent les spineurs : les vecteurs à deux composantes complexes $\Psi = (\phi_1, \phi_2)$ sont des spineurs de $SL(2, \mathbf{C})$, dans l'espace V_4 de dimension 4, si et seulement s'ils se transforment selon (204b) avec la condition (204c).

- Groupe spinoriel $Spin(3)$: à tous vecteurs $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{u} = (y_1, y_2, y_3)$ de l'espace vectoriel E_3 on associe les c-nombres suivants développés sur les matrices de Pauli :

$$\mathbf{v} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$$

$$\mathbf{u} = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + y_3 \sigma_3$$

qui sont, rappelons-le, des matrices 2x2 qui agissent donc sur un vecteur à deux composantes, un spineur de C_3 . Ce vecteur est une fonction d'onde, ainsi un vecteur d'espace de dimension 3, devient équivalent à un opérateur sur une fonction d'onde à deux composantes, ce qui, dit de manière imagée, signifie qu'un vecteur d'espace, objet quotidien, est porteur d'une opération sur des entités, les fonctions d'onde, dont la signification est formalisée par l'axiomatique opératorielle des observations, fondatrice de la logique de la mécanique quantique (fin de cette parenthèse épistémologique!).

Le produit de Clifford (4) des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ donne :

$$\mathbf{vu} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{1} + j((x_2 y_3 - x_3 y_2) \sigma_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \sigma_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sigma_3)$$

ce qui est la forme d'un quaternion (77) dont les composantes sont :

$$\mathbf{Q}_S = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{1}$$

$$z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ce qui fait que ce produit $\mathbf{vu}$ est un quaternion, appartenant à l'algèbre $C_+(E_3)$:

$$v u = Q_S + \sum_{k=1}^3 j z_k \sigma_k \quad (205)$$

Posant $w = x \cdot y + j z_3$, $z = z_2 + j z_1$ la matrice (205) devient :

$$v u = \begin{pmatrix} x \cdot y + j z_3 & z_2 + j z_1 \\ -z_2 + j z_1 & x \cdot y - j z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & z \\ -z^* & w^* \end{pmatrix} \quad (206)$$

et la norme est $\|u\| = \det(u u) = w w^* + z z^*$. Lorsque cette norme est égale à 1 le groupe est le sous-groupe de Clifford $G_+(E_3)$, appelé groupe spinoriel de l'espace E_3 , noté $\text{Spin}(3)$.

La relation (206) montre que les quaternions de norme unité sont identifiés aux matrices de $\text{SU}(2)$: $\text{Spin}(3)$ est isomorphe à $\text{SU}(2)$.

Le théorème ci-après fait la correspondance entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie, sur la base de (192) :

Théorème de représentation d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie : - Soit $\Gamma(G)$ une représentation de dimension n caractérisée par des matrices $M(G)$ données par (183), d'un groupe de Lie S_G dont l'algèbre de Lie associée est notée s_G . Alors il existe une représentation $\Gamma(s_G)$ de dimension n , de l'algèbre de Lie s_G pour chaque vecteur A de s_G , par les matrices :

$$M_{s_G}(A) = \frac{d}{dt} \left[M_{S_G}(\exp(t A)) \right]_{t=0} \quad (207a)$$

et l'on a :

$$\forall A \in s_G, \forall t \in \mathbf{R} : \exp(t M_{s_G}(A)) = M_{S_G}(\exp(t A)) \quad (207b)$$

14 – Spineurs : définition géométrique

Le concept de spineur semble abstrait ; mais voici une façon de l'introduire de manière simple à partir de la projection stéréographique que les horloges astronomiques utilisent depuis quelques siècles (figure 7). Il est remarquable qu'à partir de cette définition l'on puisse retrouver les résultats de base présentés dans le présent article, et qui s'appliquent aux conceptions de la Physique moderne !

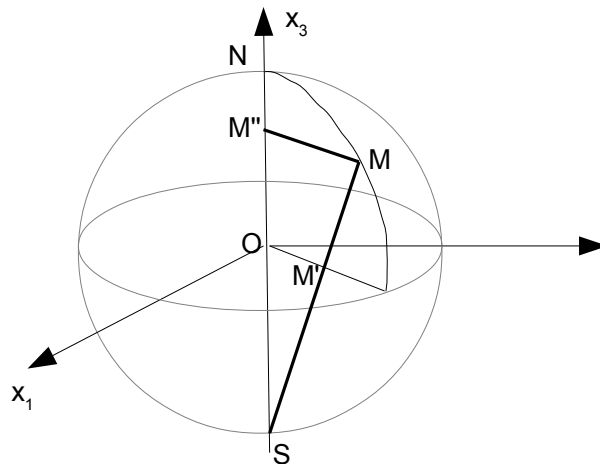


figure 7 – définition des spineurs à partir de la projection stéréographique sur une sphère

Soit un point M de la sphère centrée en O, de coordonnées M (x_1, x_2, x_3). La sphère est de rayon unité, donc : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. La projection de **OM** sur l'axe Ox_3 est M'' de coordonnées M''(0,0, x_3). Puisque O est l'origine des coordonnées les points polaires N et S ont respectivement comme coordonnées : N(0,0,1), S(0,0,-1). La projection stéréographique M' du point M sur le plan Ox_1x_2 à partir de S est matérialisée par le segment **SM** qui coupe le plan équatorial en M' de coordonnées M'(x'₁, x'₂, 0).

Si le plan Ox_1x_2 est assimilé au plan complexe **C** alors un point de ce plan s'écrit $x_1 + jx_2$. Il s'ensuit qu'en appliquant le théorème de Thalès aux triangles SM'O et SMM'', il vient :

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{1}{1+x_3} = \frac{x'_1 + jx'_2}{x_1 + jx_2} = \frac{x'_1 - jx'_2}{x_1 - jx_2}$$

Posons $z = x'_1 + jx'_2$ et $z^* = x'_1 - jx'_2$ son complexe conjugué. Si l'on définit deux nombres complexes ϕ et ψ tels que $z = \phi/\psi$ alors les relations précédentes donnent :

$$\begin{aligned} \psi\psi^* + \phi\phi^* &= 1 \\ x_3 &= \psi\psi^* - \phi\phi^* \\ x_1 &= \psi\phi^* + \psi^*\phi \\ x_2 &= j(\psi\phi^* - \psi^*\phi) \end{aligned} \quad (208)$$

Ainsi, (208) montre qu'à un point M sur une sphère déterminée par 3 valeurs de coordonnées x_1, x_2, x_3 , on peut associer deux nombres ϕ, ψ , dont le couple s'appelle ici et a priori spineur unitaire.

A un spineur unitaire (ϕ, ψ) on peut associer deux vecteurs **U** (u_1, u_2, u_3) et **V** (v_1, v_2, v_3) reliés à **OM** (x_1, x_2, x_3) par :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{U} \times \mathbf{V}$$

ce qui donne compte tenu de (208):

$$\begin{aligned} x_1 &= (\psi\psi^* + \phi\phi^*)(\psi\phi^* + \psi^*\phi) \\ \text{— pour les coordonnées de } \mathbf{OM} : \quad x_2 &= j(\psi\psi^* + \phi\phi^*)(\psi\phi^* - \psi^*\phi) \\ x_3 &= (\psi\psi^* - \phi\phi^*)(\psi\psi^* - \phi\phi^*) \end{aligned} \quad (209)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(\psi^2 + \psi^{*2} - \phi^2 - \phi^{*2}) \\ \text{— pour les coordonnées de } \mathbf{U} : \quad u_2 &= \frac{j}{2}(\psi^2 - \psi^{*2} + \phi^2 - \phi^{*2}) \\ u_3 &= -(\psi\phi + \psi^*\phi^*) \end{aligned} \quad (210)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{j}{2}(-\psi^2 + \psi^{*2} + \phi^2 - \phi^{*2}) \\ \text{— pour les coordonnées de } \mathbf{V} : \quad v_2 &= \frac{1}{2}(\psi^2 + \psi^{*2} + \phi^2 + \phi^{*2}) \\ v_3 &= j(\psi\phi - \psi^*\phi^*) \end{aligned} \quad (211)$$

Ainsi deux nombres complexes (ϕ, ψ), spineur unitaire, définissent 3 vecteurs **OM**, **U**, **V**, à 3 composantes dans E_3 ! Le spineur forme donc une représentation des deux vecteurs **U** et **V**. Les vecteurs **U** et **V** sont orthogonaux : $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ et de même norme : $\|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{V}\|$.

Formons un nouveau vecteur **W** (w_1, w_2, w_3) dont les coordonnées sont, à partir de **U** et **V** :

$$w_1 = u_1 + j v_1 ; w_2 = u_2 + j v_2 ; w_3 = u_3 + j v_3$$

autrement dit : $\mathbf{W} = \mathbf{U} + j\mathbf{V}$. Il vient alors la propriété de vecteur isotrope de $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = \|\mathbf{W}\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \quad (212)$$

Cette relation (212) est à rapprocher de celle (101) qui caractérise l'isotropie des spineurs de C_4 . Les coordonnées w_k de $\mathbf{W}$ se calculent uniquement à partir du spineur (ϕ, ψ) :

$$\begin{aligned} w_1 &= \psi^2 - \varphi^2 \\ w_2 &= j(\psi^2 + \varphi^2) \\ w_3 &= -2\psi\varphi \end{aligned} \quad (213)$$

Si le spineur est unitaire, $\|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{V}\| = \psi\psi^* + \varphi\varphi^* = 1$ alors ses composantes s'écrivent :

$$\psi = (\exp j\beta) \cos \alpha, \quad \varphi = (\exp j\beta') \sin \alpha$$

et pour un spineur non unitaire de norme égale à r :

$$\psi = r(\exp j\beta) \cos \alpha, \quad \varphi = r(\exp j\beta') \sin \alpha \quad (214)$$

Les rotations dans $E_3 = \mathbf{R}^3$ peuvent être représentées par des spineurs :

Reportons-nous à la proposition relative à la transformation (82), et à la figure 1 qui l'illustre, où la rotation d'un vecteur $\mathbf{v}$ en un vecteur $\mathbf{v}'$ autour d'un vecteur unitaire $\mathbf{Q}_v$ est traitée. On sait que la relation suivante existe entre $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{Q}_v$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}' = \mathbf{Q}_v \sin \frac{\theta}{2} \quad (215)$$

On va exprimer autrement, et de manière équivalente, la rotation (82) au moyen d'une matrice représentant cette rotation entre les spineurs qui caractérisent respectivement $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$. Compte tenu de l'unitarité de $\mathbf{Q}_v$: $\mathbf{Q}_v^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathbf{1}$ (où les x_n sont les coordonnées de $\mathbf{Q}_v$), et puisque l'on a :

$$\begin{aligned} x_1 \sin \frac{\theta}{2} &= v_2 v'_3 - v_3 v'_2 \\ x_2 \sin \frac{\theta}{2} &= v_3 v'_1 - v_1 v'_3 \\ x_3 \sin \frac{\theta}{2} &= v_1 v'_2 - v_2 v'_1 \end{aligned}$$

où v_n et v'_n coordonnées de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$, on montre que cette représentation de la rotation entre les spineurs (ϕ, ψ) et (ϕ', ψ') est donnée par le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{Q}_v, \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (216a)$$

avec :

$$R(\mathbf{Q}_V, \frac{\theta}{2}) = \begin{bmatrix} v'_3 & v'_1 - jv'_2 \\ v'_1 + jv'_2 & -v'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 & v_1 - jv_2 \\ v_1 + jv_2 & -v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - jx_3 \sin \frac{\theta}{2} & -(jx_1 + x_2) \sin \frac{\theta}{2} \\ (-jx_1 + x_2) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} + jx_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (216b)$$

qui est de la forme $R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{bmatrix}$ de déterminant $\det R = 1$; les a_{11} et a_{12} sont appelés paramètres de Cayley-Klein.

On voit donc qu'une définition équivalente des spineurs est qu'un spineur est un couple de nombres complexes (ϕ, ψ) qui, lorsqu'une rotation d'angle θ est appliquée à son vecteur associé, se transforme selon la matrice de Cayley-Klein (216b).

Lorsqu'on effectue un développement limité au premier ordre pour l'angle de rotation $\theta = \varepsilon$, au voisinage de la rotation identité ($R(0) = \mathbf{1}$), la matrice (216b) a l'expression approchée :

$$R(\mathbf{Q}_V, \frac{\varepsilon}{2}) = \mathbf{1} + \varepsilon L(\mathbf{Q}_V) \quad (217a)$$

où $L(\mathbf{Q}_V)$ est la matrice infinitésimale de rotation, de composantes :

$$L(\mathbf{Q}_V) = \left[\frac{\partial R(\mathbf{Q}_V, \varepsilon/2)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -jx_3 & -(jx_1 + x_2) \\ -jx_1 + x_2 & jx_3 \end{bmatrix} \quad (217b)$$

Il est facile de vérifier que la relation (217a), avec (217b), peut s'exprimer avec les matrices de Pauli :

$$R(\mathbf{Q}_V, \frac{\varepsilon}{2}) = \mathbf{1} - j \frac{\varepsilon}{2} (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) = \mathbf{1} - j \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{Q}_V \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (218)$$

et pour une rotation finie d'angle θ , on obtient :

$$R(\mathbf{Q}_V, \frac{\theta}{2}) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - j \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{Q}_V \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (219)$$

qui est de la forme de tout spineur de l'algèbre C_3 vue au point (8.1) :

$$B = A_0 + A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3$$

avec : A_k sommes d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire (c'est-à-dire équivalente à un nombre complexe).

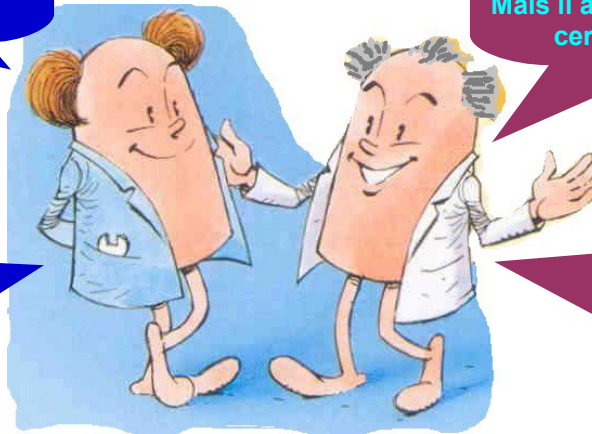
Ainsi, par l'introduction des spineurs au moyen de la projection stéréographique, concrète, on retrouve les propriétés des spineurs de l'algèbre C_3 , de nature plus abstraite, en tant qu'opérateurs matriciels 2x2, qui ont été introduits par l'algèbre vectorielle de Clifford.

Et pour terminer (pour nous décontracter), un exemple de projection stéréographique à la base du fonctionnement de certaines horloges astronomiques, comme celle de l'hôtel de ville de Prague :

La photo suivante montre la prodigieuse horloge astronomique de la tour de l'hôtel de ville de Prague, République Tchèque, dont la construction initiale remonte à 1410. Les commentaires sur son principe de fonctionnement, qui utilise la projection stéréographique, sont partiellement reproduits tels quels à partir du fascicule attribué aux visiteurs.

1 – Eh bien, Photon, cette conclusion avec l'horloge astronomique de Prague est la partie la plus agréable de cet article !...

3 – et maintenant il veut nous faire croire que les spineurs auraient pu être découverts au début du 15^e siècle !



2 - Oui, Mésion. Mais je suis content que Fred a aussi parlé de nous à propos des photons et des mésons. Mais il aussi parlé des Pions, c'est certainement un intrus...

4 – et pourquoi pas, Mésion ? Il y a des idées et des intuitions anciennement mises en pratique qui ne demandaient qu'à recevoir une formalisation algébrique ou géométrique plus modernes...



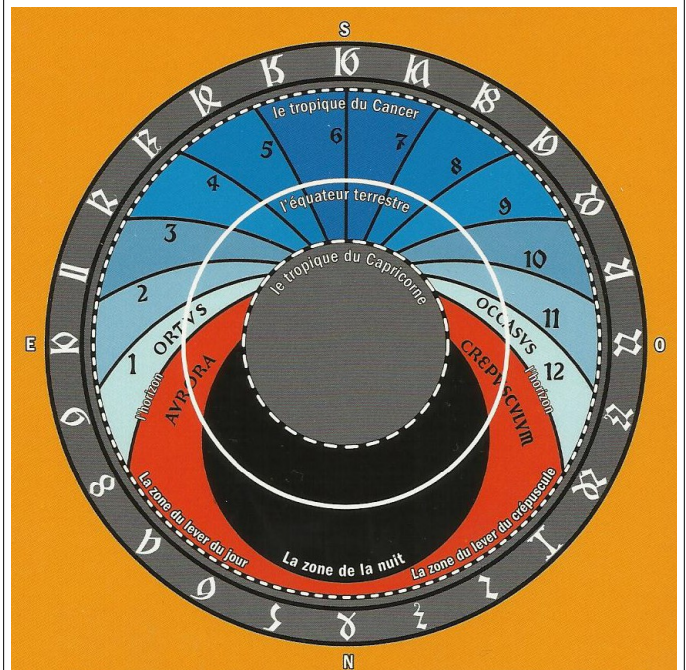
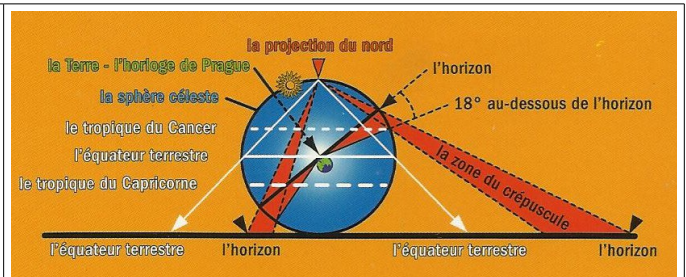
Horloge astronomique de la tour de l'hôtel de ville de Prague (photo : F. Elie, 28 octobre 2010)

Importance de la position des tropiques et de l'équateur :

Pendant son cheminement annuel à travers la sphère céleste, le Soleil se déplace précisément entre les Tropiques. Au moment du solstice d'hiver, il touche le tropique du Capricorne, pendant celui d'été il atteint le tropique du Cancer. Lors de l'équinoxe de printemps et d'automne, la trajectoire du Soleil passe par l'Équateur. Ce trajet apparent du Soleil à travers la sphère céleste – l'écliptique – est connu depuis l'Antiquité.

Comment représenter la sphère céleste sur la surface plate du cadran ?

Le plus facile c'est de projeter la sphère céleste sur la surface du cadran de la même manière que nous projetons des ombres sur une toile blanche. Imaginons une source lumineuse au pôle Nord de la sphère céleste, c'est-à-dire tout près de la Polaire. On place l'écran afin qu'il touche la sphère céleste sur sa partie opposée, autrement dit près du pôle Sud et qu'il soit perpendiculaire à l'axe terrestre. On appelle un tel mécanisme la projection stéréographique. Le maître Jan Sindel suivit probablement le même raisonnement lorsqu'il construisit le cadran astronomique de l'horloge. Maintenant nous pouvons imaginer les représentations des tropiques, de l'équateur et de l'horizon sur l'écran.



comme un cercle plus petit car il est plus proche de l'écran, le tropique du Cancer est au contraire plus grand parce qu'il est plus loin de l'écran. L'équateur est un cercle entre les deux. La représentation de notre horizon est similaire. L'horizon forme sur la sphère céleste un cercle à l'intersection du plan horizontal de la place où nous nous trouvons et de la sphère céleste. Sur le cadran astronomique, l'horizon est placé à la frontière entre la zone bleue du jour et la zone ocre du crépuscule. Le Soleil se lève à l'Est, c'est-à-dire à gauche du cadran. Le Soleil culmine au Sud qui se trouve en haut du cadran. L'Ouest est ainsi à droite, le

Les parallèles prennent la forme de cercles concentriques. Le tropique du Capricorne apparaît	Nord en bas.
---	--------------

Références

(par ordre alphabétique des auteurs)

- Mayeul Arminjon : Équations de Dirac dans un espace-temps courbe et leur mécanique quantique - janvier 2010-juin 2012, UMR 5521 CNRS/ Université Joseph Fourier/ Institut National Polytechnique de Grenoble, BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9, France.
- Sylvain Arguillère et Nicolas Mascot : Symétries de Lie des équations aux dérivées partielles et classification des actions locales de groupes de Lie - FIMFA, Ecole Normale Supérieure, Paris, juin 2008
- Marc Attéia : Physique et Mathématiques - 2 juillet 2015
- Florie-Anne Baugé : Géométrie différentielle, groupes de Lie et transformations - Rapport de Stage, INSA Rouen, Département Génie Mécanique, Juin à Septembre 2011
- H. Bacry : Le spin et la relativité restreinte - Commun. math. Phys. 1, 374-398 (1966) ; Gauthier-Villars, 1992 ; <http://www.numdam.org/legal.php>
- Roger Boudet : La théorie intrinsèque de la particule de Dirac et l'Ecole Louis de Broglie - Université de Provence, Pl. V. Hugo, 13331 Marseille cedex 13, France ; Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 26 n° spécial, 2001 (*En hommage à Olivier Costa de Beauregard et Georges Lochak, et à la mémoire de Francis Halbwachs et Takehiko Takabayasi*) ⁽¹⁷⁾
- Anna Cadoret : Groupes de Lie (groupes linéaires) et algèbres de Lie - cours M1 'groupes et représentations' - X 2011/12
- Michel Carrese : Spin et opérateurs quantiques de masse et de localisation spatio-temporelle - 8 juin 2010 ; Le présent document se situe dans le prolongement du cours de Philip Maulion "Physique avec ou sans présence" ; inspirés des notes de cours de B. Delamotte "Un soupçon de théorie des groupes" (LPTHE Paris 6-7) et des publications de M.T. Jaekel et S. Raynaud sur le sujet (site du laboratoire de physique théorique de l'ENS)

17 J'ai suivi les interventions du professeur Francis Halbwachs, grand mathématicien, lors des cours de Certificat d'Epistémologie de la Maîtrise de Mathématiques à l'Université de Provence, lorsque j'y étais étudiant.

- Elie Cartan : The Theory of Spinors – Dover Publications, New York, 1966
- Gaston Casanova: L'algèbre vectorielle – Que sais-je? PUF 1976
- W. K. Clifford : American Journal of Math., 1878
- Alain Comtet : Équation de Dirac. DEA. 2006. <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092970>
Submitted on 12 Sep 2006
- Jean-François Dat : Groupes et Algèbres de Lie - Université Pierre et Marie Curie, Master de Mathématiques, 2009-2010
- Claude Daviau : Equations de Dirac et fermions fondamentaux – Ann. Fondation Louis De Broglie, vol. 25, n°1, 1999
- René Deheuvels: Tenseurs et spineurs – PUF 1993
- F. Delduc : Introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens – ENS Lyon, Laboratoire de physique, Septembre 2008
- Stefano De Leo and Waldyr A. Rodrigues, Jr. : Quaternionic Electron Theory: Geometry, Algebra and Dirac's Spinors - October, 1997 ; ArXiv, 6 juin 1998
- Jean-Pierre Derendinger : Théorie quantique des champs - www.ppur.org © 2001, Presses polytechniques et universitaires romandes CH – 1015 Lausanne, Tous droits réservés. ISBN 2-88074-491-1
- P. A. M. Dirac : A Theory of Electrons and Protons – St John's College, Cambridge, 1929
- Edgard Elbaz: quantique, éd. Marketing, coll. Ellipses, Paris 1995
- M. Felden : Le modèle géométrique de la physique – Masson, 1992
- Luc Frappat (Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique CNRS–Université Savoie Mont Blanc 9 chemin de Bellevue, BP 110 F-74941 Annecy-le-Vieux cedex) : Introduction à la supersymétrie - Cours donné à l'Université de Brest, 5-7 octobre 2015
- Marc Herzlich : L'inégalité de Penrose – Séminaire Bourbaki, 2000-2001, n°883, pp. 85-111 © Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 2000-2001, tous droits réservés
- Jean Hladik: Les spineurs en physique – Masson 1996
- James Humphreys : Introduction to Lie algebras and representation theory – Springer, 1972
- Bernhard Keller : Introduction aux groupes et algèbres de Lie - Décembre 2001
- H. B. Lawson et M. L. Michelsohn : Spin Geometry – Princeton Univ. Press, 1989
- André Lichnérowicz : Les spineurs en relativité générale – Annales scientifiques de l'université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série Mathématiques, n°2 (1962) p. 171-177 © Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés
- C. Longuemare : Les spineurs en physique - séminaire d'analyse Université de Caen, année 2007-2008, Version 13/02/2008

- Alexander McAulay : Utility of Quaternions in Physics – London: MacMillan and Co. and New York, 1893 ; Project Gutenberg's, Release Date: August 11, 2008 [EBook #26262]
- Albert Messiah: mécanique quantique, tome II, Dunod, Paris, 1964
- Frédéric Paulin : Introduction aux groupes de Lie pour la physique - Cours de troisième année de l'Ecole Centrale Paris (Centrale-Supélec, Université Paris-Saclay) Option Mathématiques appliquées, Parcours Mathématiques-Physique, Année 2016-2017
- R. Penrose et W. Rindler : Spinors and Space-time – Cambridge University Press, 1984
- C-A. Pillet : Algèbre 2e partie, groupes de Lie – Univ. du Sud Toulon-Var, Licence de mathématiques 3e année
- Jean-Claude Radix : Quaternions – Techniques de l'Ingénieur, a140, 10 mai 1981
- Simon Raulot : Géométrie spinorielle et théorèmes de la masse positive
- M. Riesz : Clifford Numbers and Spinors, 1958
- K. Schulten : Notes on Quantum Mechanics - Department of Physics and Beckman Institute University of Illinois at Urbana-Champaign, 405 N. Mathews Street, Urbana, IL 61801 USA (April 18, 2000)
- Jean-Marie Souriau : Quantification géométrique - Faculté des Sciences de Marseille, Commun. math. Phys. 1, 374-398 (1966)
- Wikipedia : Quaternions - <http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions>
- J. Winogradski : Retournements de l'espace, du temps et de l'univers et représentations spinorielles fondamentales du groupe de Lorentz général - © Séminaire L. De Broglie, Théories physiques, tome 27 (1957-1958) exp. N°10, p. 1-17 (Secrétariat mathématique, Paris) tous droits réservés
- Jean-Bernard Zuber : Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations – Service de Physique théorique de Saclay, cours donné au Magistère inter-universitaire de physique, printemps 1994, nouv. éd. 2008

