ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Suites de Cauchy et théorème du point fixe de Banach

Frédéric Élie

novembre 2012

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Les suites de Cauchy sont d'un usage constant dans les espaces vectoriels normés complets, comme ceux basés sur le corps des réels ou des complexes, parce qu'elles permettent, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, de s'assurer de la convergence d'une suite (ce théorème énonce que toute suite réelle ou complexe bornée admet une sous-suite convergente).
Un cas intéressant d'application des suites de Cauchy est celui du théorème du point fixe de Banach concernant les applications contractantes. Selon ce théorème, toute fonction contractante dans un sous-espace fermé d'un espace vectoriel normé admet un point fixe unique. Les conséquences de ce théorème de l'analyse fonctionnelle sont immenses dans des domaines aussi divers que: la résolution des équations différentielles, la stabilité et le contrôle des systèmes en automatisme, l'étude de l'évolution des systèmes dynamiques et chaotiques vers des états "attracteurs" dont les applications touchent tous les domaines scientifiques (théorie des systèmes complexes, économie, finances, sciences stratégiques, sciences cognitives, systèmes biologiques, évolutions climatiques, etc...). Ces approches ne pourront pas être développées dans le cadre très restreint de cet article, qui se bornera à exposer les définitions et théorèmes relatifs aux suites de Cauchy et au théorème du point fixe de Banach.

SOMMAIRE

1 - Définition d'une suite de Cauchy

Soit (E, ||.||) un espace vectoriel normé, de norme ||.||. Une suite (u_n) est de ***Cauchy*** si, pour un rang suffisamment grand, ses valeurs sont arbitrairement proches (leurs différences tendent vers zéro), ce qu'illustre la figure 1.
Cela s'énonce ainsi:

$$\forall \eta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}:\ n, m \geq \mathbb{N} \Rightarrow \| u_n - u_m \| < \eta \quad \text{a}$$

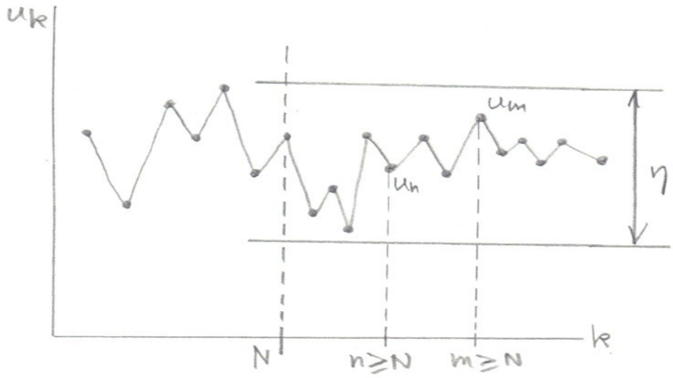


figure 1 - suite de Cauchy

2 - Une suite convergente est-elle de Cauchy?

Réponse: oui, toujours.

Proposition (1): Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve:

Soit (u_n) une suite convergente dans (E, ||.||), de limite L; par définition de la convergence (figure 2):

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n - L\| < \epsilon$$

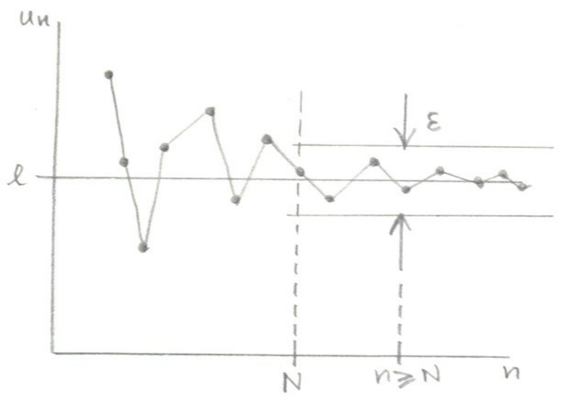


figure 2 - suite convergente

Suite de Cauchy: $\forall \eta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}:\ n, m \geq \mathbb{N} \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \eta$

Or: $||u_n - u_m|| = ||(u_n - L) - (u_m - L)||$

L'inégalité triangulaire (une des propriétés définissant une norme) donne:

$||(u_n - L) - (u_m - L)|| \leq ||u_n - L|| + ||u_m - L|| < 2\varepsilon$

donc $||u_n - u_m|| < \eta$ il suffit de choisir $\eta = 2\varepsilon$
La suite (u_n) convergente de limite L est donc une suite de Cauchy - CQFD

3 - Espaces complets, théorème de Bolzano-Weierstrass

La réciproque de la proposition (1) est fausse: dans un espace vectoriel normé quelconque, une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente.

Définition (***espace vectoriel normé complet***) - (E, ||.||) est dit complet quand toute suite de Cauchy y est convergente.

Bien noter que la propriété de complétude est rattachée au choix de la norme ||.||: pour un même espace vectoriel, E est complet pour certaines normes et pas pour d'autres.

Théorème (2) - **R**, **C** et tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.

Preuve:

Pour démontrer le théorème (2) il faut, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass:

Théorème (3) de Bolzano-Weierstrass: Toute suite réelle ou complexe bornée admet une sous-suite convergente.

Donc il suffira de montrer d'abord que toute suite de Cauchy est bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie. La démonstration se termine alors par le théorème (4) suivant dont la preuve est immédiate ([1]):

Théorème (4): Toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé qui admet une sous-suite convergente est elle-même convergente.

On montre alors d'abord qu'une suite de Cauchy est bornée. Or on a:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}: \ n, m \geq \mathbb{N} \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

En particulier, si m est fixé et correspond à une valeur de la suite $u_m = a$, alors $||u_n - a|| < \varepsilon$ donc la suite est bornée.

La suite de Cauchy admet donc une sous-suite convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (3). Donc elle est elle-même convergente d'après le théorème (4).
CQFD.

Reste alors à prouver le théorème de Bolzano-Weierstrass (3), ce que nous faisons au paragraphe 4 ci-après.

4 - Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème peut être démontré par la ***méthode dichotomique*** (figure 3):

1 En effet, soit (u_n) une suite de Cauchy, et $(u_{f(n)})$ une sous-suite convergente, où f(n) est une fonction de changement d'indice croissante. Pour n suffisamment grand on a donc: $||u_{f(n)} - L|| < \varepsilon$ et comme un de Cauchy, pour m et n suffisamment grand on a: $||u_m - u_{f(n)}|| = ||(u_m - L) - (u_{f(n)} - L)|| \leq ||u_m - L|| + ||u_{f(n)} - L|| < 2\varepsilon$, donc la suite de Cauchy un converge.

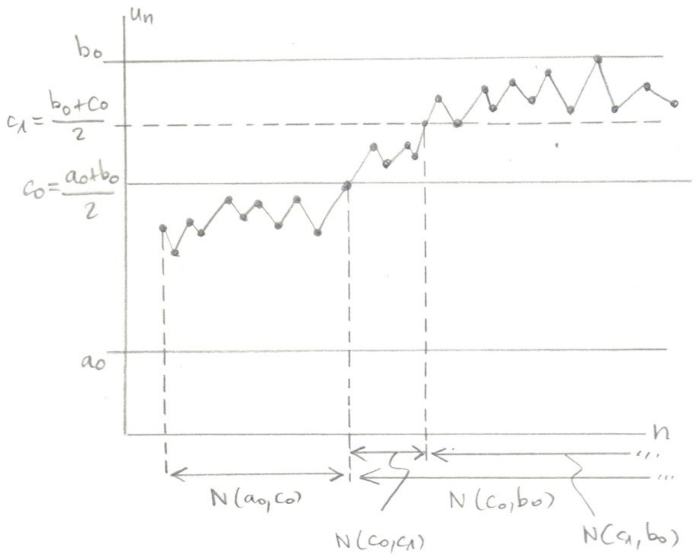


figure 3 - principe de la méthode dichotomique

Par définition, une suite est formée d'un nombre infini dénombrable de termes: $0 \leq n \leq +\infty$, donc n parcourt l'ensemble des entiers naturels **N**.
La suite (un) étant bornée, il existe:

$$a_0 = inf(u_n, n \in \mathbb{N})$$
$$b_0 = sup(u_n, n \in \mathbb{N})$$

autrement dit: $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$
Soit N(a,b) l'ensemble des indices n correspondant aux termes de la suite (u_n) qui sont compris entre a et b:

$$N(a,b) = \{n \in \mathbb{N} / a \leq u_n \leq b\}$$

avec $a_0 \leq a$ et $b \leq b_0$. On a évidemment $N(a,b) \subset \mathbb{N}$.
En particulier si $a = a_0$ et $b = b_0$ on a $N(a_0, b_0) =$ **N** puisque dans ce cas tous les indices n de la suite sont employés (on a donc affaire à la suite (u_n)).

Dichotomie:

- On prend le milieu c_0 de a_0 et b_0, et la suite (u_n) se répartit en deux sous-ensembles de part et d'autre de ce milieu:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

- Les indices des termes de la suite qui appartiennent à ces deux sous-ensembles se répartissent donc en deux sous-ensembles de **N**:

$$N(a_0, c_0) = \{n \in \mathbb{N} / a_0 \leq u_n \leq c_0\}$$
$$N(c_0, b_0) = \{n \in \mathbb{N} / c_0 \leq u_n \leq b_0\}$$

et l'on a: $N(a_0, b_0) = \mathbb{N} = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$ donc:

$$\text{Card } \mathbf{N} = +\infty = \text{Card } N(a_0,c_0) + \text{Card } N(c_0,b_0)$$

donc l'un des sous-ensembles $N(a_0,c_0)$ ou $N(c_0,b_0)$ est infini:

- Si Card N(a_0,c_0) = +∞ : on pose alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$
- Si Card N(c_0,b_0) = +∞ : on pose alors $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

- Par construction, on a donc: $[a_1, b_1] = \{u_n / a_1 \leq u_n \leq b_1\}$ infini, Card N(a_1, b_1) = ∞, donc [a_1, b_1] est bien une sous-suite (car infinie) de (u_n).

- Le processus de dichotomie est poursuivi jusqu'au rang n:

[a_n,b_n] construit tel que Card N(a_n,b_n) = ∞.

Le milieu de [a_n, b_n] est:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

et l'on a: $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$ infini, donc l'un au moins des sous-ensembles d'indices N(a_n,c_n) ou N(c_n,b_n) est infini:
- Si Card N(a_n,c_n) = ∞ alors on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$;
- Si Card N(c_n,b_n) = ∞ alors on pose $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.

- On construit ainsi par récurrence une suite de segments emboîtés ([a_n,b_n]):

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ...$$

La longueur d'un segment [a_n,b_n] est, par construction:

$$L_n = \frac{b_0 + a_0}{2^n}$$

Cette longueur tend vers 0 quand n tend vers l'infini:

$$\lim_{n \to \infty} L_n = 0$$

par conséquent les suites des bornes (a_n) et (b_n) sont des ***suites adjacentes*** c'est-à-dire ont une limite commune L.

Reste à vérifier s'il existe une suite ($u_{f(n)}$) extraite de (u_n) qui converge vers cette limite L, où f est une application strictement croissante de **N** dans **N** (changement d'indice). A-t-on donc:

$$\lim_{n \to \infty} u_{f(n)} = L \quad ?$$

Il suffit de choisir:
f(0) = 0
f(n) > f(n-1) pour tout n avec $u_{f(n)} \in [a_n, b_n]$ c'est-à-dire $f(n) \in N(a_n, b_n)$, ce qui est possible puisque N(a_n, b_n) est infini et il suffit de prendre par exemple $u_{f(n)} = a_n$ ou b_n, puisque a_n et b_n font partie des valeurs de la suite (u_n).
On a donc bien ($u_{f(n)}$) sous-suite extraite de (u_n) telle que:

$$a_n \leq u_{f(n)} \leq b_n$$

et comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite L, on a aussi:

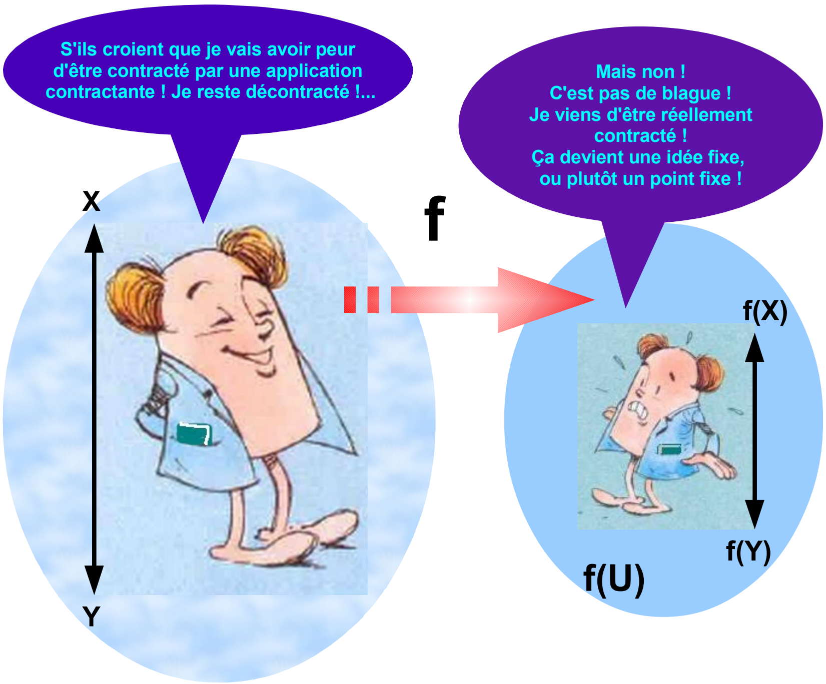
$$\lim_{n \to \infty} u_{f(n)} = L$$

autrement dit la suite $(u_{f(n)})$ est convergente - CQFD.

5 - Le théorème du point fixe de Banach

Théorème (5) du point fixe de Banach: - Soit E un espace vectoriel normé complet et $U \subset E$ un sous-espace fermé de E..
Soit f: U → U une application contractante de U dans U, de rapport k.
Alors f admet un unique point fixe a.

Preuve:



Il s'agit de montrer que a, tel que f(a) = a, existe et est unique, avec $a \in U$.
Une application f est ***contractante*** si elle est continue et s'il existe $k \in [0,1]$ telle que $\forall x, y \in U$:

$$||f(y) - f(x)|| \leq k \, ||y - x||$$

On forme la suite dans U:

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^{\,n+1}(x_0)$$

Il suffit de montrer que (x_n) est une suite de Cauchy dans U, i.e.:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow ||x_{n+p} - x_n|| < \epsilon$$

Or: $x_{n+p} = f(x_{n+p-1}) = f^{\,n+p}(x_0)$
$x_n = f(x_{n-1}) = f^{\,n}(x_0)$

donc:
$$\begin{aligned} ||x_{n+p} - x_n|| &= ||f^{\,n}(f^{\,p}(x_0)) - f^{\,n}(x_0)|| \\ &\leq k \, ||f^{\,n-1}(f^{\,p}(x_0)) - f^{\,n-1}(x_0)|| \\ &\leq k^2 \, ||f^{\,n-2}(f^{\,p}(x_0)) - f^{\,n-2}(x_0)|| \\ &\ldots\ldots \\ &\leq k^n \, ||f^{\,p}(x_0) - x_0|| \end{aligned}$$

or: $f^{\,p}(x_0) - x_0 = (f^{\,p}(x_0) - f^{\,p-1}(x_0)) + (f^{\,p-1}(x_0) - f^{\,p-2}(x_0)) + \ldots + (x_1 - x_0)$

donc: $||f^p(x_0) - x_0|| \leq ||f^p(x_0) - f^{p-1}(x_0)|| + ||f^{p-1}(x_0) - f^{p-2}(x_0)|| + ... + ||x_1 - x_0||$

Comme: $f^p(x_0) - f^{p-1}(x_0) = x_p - x_{p-1}$
$f^{p-1}(x_0) - f^{p-2}(x_0) = x_{p-1} - x_{p-2}$
....

il vient: $||x_{n+p} - x_n|| \leq k^n [||x_p - x_{p-1}|| + ||x_{p-1} - x_{p-2}|| + ... + ||x_1 - x_0||]$

Or: $||x_p - x_{p-1}|| \leq k^{p-1} ||x_1 - x_0||$
$||x_{p-1} - x_{p-2}|| \leq k^{p-2} ||x_1 - x_0||$
etc...

donc:

$$||x_{n+p} - x_n|| \leq k^n (k_{p-1} + k_{p-2} + ... + k + 1) ||x_1 - x_0||$$

Or l'expression entre parenthèses est le développement limité jusqu'à l'ordre p-1 de la fonction 1/(1 - k):

$$\frac{1}{1-k}=1+k+k^2+....+k^{p-2}+k^{p-1}+o(k^p)$$

donc elle est inférieure à 1/(1 - k) puisque 0 < k < 1.
Par conséquent:

$$||x_{n+p}-x_n|| \leq \frac{k^n}{1-k} ||x_1-x_0|| \quad (6)$$

Or: $\lim_{n\to\infty} k^n=0$ donc (x_n) est une suite de Cauchy de limite L qui appartient à U puisque U est topologiquement fermé.
f étant supposée continue, on a:

$$L=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1})=f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=f(L)$$

donc L est un point fixe de f.
Unicité de L: supposons qu'il existe un autre L' tel que f(L') = L', alors:

$$|| L - L'|| = ||f(L) - f(L')|| \leq k ||L - L'||$$

Comme k > 0 cela n'arrive que si L = L' - CQFD.

Remarque: Appliquons (6) à $x_{n+p} = L$ et $x_n = x_0$ (donc n = 0) alors

$$||L-x_0|| \leq \frac{1}{1-k} ||f(x_0)-x_0|| \quad (7)$$

L'inégalité (7) permet d'évaluer la précision avec laquelle on approche de la solution d'une équation de la forme f(x) = x, où f est une fonction contractante.

Références

- Walter Appel: Mathématiques pour la physique et les physiciens – H & K éditions 2005

- Michel Cofsaftis : comportement et contrôle des systèmes complexes - Diderot éd. 1997

- Pierre Colez : éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) – éditions de l'École Polytechnique, septembre 2011

- Walter Rudin: Analyse réelle et complexe – Masson et Cie 1975

- Jean-Marie Arnaudiès : problèmes de préparation à l'agrégation de mathématiques, 3. Analyse : séries, séries entières, séries de fonctions – Ellipses 1997