ACCUEIL

Reconsidérations sur le système d'unités
Conversions d'unités :
Conventionnalisme ou objectivité ?

Jean-François Lahaeye, 6 février 2011

Abstract : Le système des unités physiques contient un certain nombre d'incohérences relatives à la façon de traiter les mesures d'angles. La solution adoptée par la 20$^{\text{ème}}$ conférence des Poids et Mesures en 1995 a fort bien éludé la difficulté, déjà connue dans les systèmes d'unités antérieurs (le C.G.S. par exemple) et que le SI semblait vouloir résoudre. Mais elle ne l'a pas résolue : traiter les anciennes « unités supplémentaires » comme des unités sans dimension est une hérésie de même sorte que le choix fait quelquefois d'utiliser des unités toutes égales à 1 pour « simplifier » les formules, notamment microscopiques ou cosmologiques. Je me suis avisé en 2004 de contradictions qui résultaient de ce camouflage et j'ai indiqué un chemin pour résoudre le problème au lieu de le camoufler. Pour autant je ne suis pas sûr d'avoir été exhaustif.

SOMMAIRE

1 – La question d'homogénéité dimensionnelle des formules physiques

2 – La question d'exhaustivité de la correction proposée

3 – Convention et conversions d'unités électriques et signification des constantes de structure

4 – Unités naturelles et unités conventionnelles

5 – Constante de Rydberg et charge électrique : vers une conjecture

6 – Pour conclure : réel et conventionnel

ANNEXE : Construire un tuner de radioastronomie avec quelques formules de cosmologie quantique (ou le rôle de π en physique)

1 – INTRODUCTION

2 – CALCUL DES CONDENSATEURS ET DES BOBINES

3 – FABRICATION D'UNE BOBINE DE DIAMETRE 2a ET DE LONGUEUR b

4 – CONCLUSION

1 – La question d'homogénéité dimensionnelle des formules physiques

La solution de l'équation aux dérivées partielles de D'Alembert pour le champ électrique conduit à la relation de Maxwell $\varepsilon_0 \, \mu_0 \, c^2 = 1$ tandis que l'équation différentielle des oscillateurs conduit à la formule de Thomson $LC\omega^2 = 1$.
Dans ce dernier cas, la difficulté dimensionnelle est évidente, si on écrit $\omega = 1/\sqrt{(LC)}$ on a des secondes dans le membre de droite et des radians par seconde dans le membre de gauche. Pour que la relation de Thomson reste compatible avec celle de Maxwell, j'ai proposé de définir les grandeurs de la façon suivante : $L = \mu_0 \, \lambda / (2\pi)$ et $C = \varepsilon_0 \, \lambda / (2\pi)$ et donc de changer discrètement le nom des unités : L se mesure en henry par radian et C en farad par radian. J'ai même suggéré d'adopter une notation de L barré et C barré (de même qu'on adopte un h barré pour la constante de Planck réduite).

Tout cela est si simple que cela mérite à peine qu'on s'y attarde : je m'étais efforcé de rendre la correction aussi discrète que possible afin qu'elle ne nuise pas à l'usage, *en la faisant porter sur le nom des unités plutôt que sur les formules*. Seules les formules de définition de L et C sont légèrement changées, en y insérant des radians. Cela conduit tout de même bien sûr à s'interroger sur la signification des unités réduites et des constantes réduites (telles que ħ par exemple). J'avais donc montré que le système des unités de Planck trouve une interprétation heuristique crédible en dépit de son caractère non observable à condition d'écrire et distinguer :

A – a) Le rayon de Planck $R_0 = \sqrt{(\hbar G/c^3)} = 1{,}616 \times 10^{-35}$
b) la longueur d'onde de Planck $\lambda_0 = 2\pi R_0 = 1{,}015 \times 10^{-34}$ m

B – a) La constante de temps de Planck $\tau_0 = \sqrt{(\hbar G/c^5)} = 5{,}391 \times 10^{-44}$
et corrélativement la pulsation de Planck $\omega_0 = 1/\tau_0 = 1{,}855 \times 10^{43}$ rad/s
b) la période de Planck $T_0 = 2\pi\tau_0 = 3{,}387 \times 10^{-43}$ s
et corrélativement la fréquence de Planck $\nu_0 = 1/T_0 = 2{,}950 \times 10^{42}$ Hz

C – La masse de Planck $m_0 = \sqrt{(\hbar c/G)} = 2{,}176 \times 10^{-8}$ kg

D – La charge de Planck $q_0 = \sqrt{(4\pi\varepsilon_0\hbar c\alpha_0)} = 1{,}875 \times 10^{-18}$ C, avec $\alpha_0 = 1$

E – La température de Planck $\theta_0 = \sqrt{(\hbar c^5/Gk^2)} = 1{,}420 \times 10^{32}$ K (k étant la constante de Boltzmann).

On verra que les définitions A et B permettent un regard intéressant sur la signification des constantes de structure de l'électromagnétisme et de la gravitation. Je n'ai pourtant fait apparaître ici que α_0 pour définir la charge de Planck, en supposant de plus $\alpha_0 = 1$, c'est-à-dire que la constante de structure fine est égale à l'unité quand on atteint le seuil de Planck. En supposant de plus que la constante de structure de la gravitation est aussi égale à l'unité (soit $\alpha_G = 1$) à ce même seuil de Planck la troisième loi de Kepler qui s'écrit $\omega^2 = GM/R^3$ peut être identifiée à la loi de résonance de Thomson pour un rayon gamma de même pulsation d'où $LC = R^3/(GM)$ et, avec les valeurs de Planck :

$$C_0 = R_0^3 / (L_0 GM) = \varepsilon_0 \; \lambda_0 /(2\pi)$$
$$L_0 = R_0^3 / (C_0 \, GM) = \mu_0 \, \lambda_0 /(2\pi)$$

Cette définition des constantes électromagnétiques localisées pour la résonance de Planck est en accord avec la correction d'homogénéité des formules proposées au début de cet exposé. On devrait noter par ailleurs qu'un tel couplage électro-gravitationnel de la formule de Kepler avec celle de Thomson est une singularité qui se présente uniquement dans le cas particulier où $\alpha_0 = \alpha_G = 1$, α_0 étant la constante de structure fine électromagnétique modifiée.

2 – La question d'exhaustivité de la correction proposée

Maintenant la vraie difficulté consiste à sonder l'exhaustivité de la correction qui précède et par conséquent sa cohérence plus globale avec le reste de la physique. J'ai de bonnes raisons de penser que cette exhaustivité n'est pas assurée. Je peux le montrer en reprenant deux exemples déjà esquissés dans mes anciens opuscules. Hormis le cas de la formule de Thomson d'où je suis parti, il y a d'autres formules courantes de la physique qui ne sont pas homogènes. Considérons la formule vectorielle de l'accélération relative lors d'un changement de repère :

$$ma_r = ma - m \, d\omega_e/dt \wedge r - m\omega_e \wedge v_e - 2 \, m\omega_e \wedge v_r$$

Il est clair que les radians par seconde présents dans les trois derniers termes sont *apparemment* absents dans le premier terme et dans le membre de gauche. Il faut donc soit insérer des radians dans ma (et dans ma_r) soit au contraire les neutraliser dans les produits vectoriels. Et d'ailleurs on devrait faire une option du même genre pour les formules électriques analogues telles que :

$$qE' = qE - q \, dB/dt \wedge r - qB \wedge v_e$$

Il se trouve dans ces deux exemples que les champs magnétiques tout comme les pulsations d'entraînement peuvent s'interpréter comme des sortes de résonance : après tout on ne ferait donc ici qu'appliquer la correction d'homogénéité de la section précédente au cas de la résonance cyclotron $\omega = qB/m$. Si en effet on cherche à expliciter les constantes localisées dont elle pourrait dépendre par comparaison à la résonance de Thomson, on trouve :

$$qB/m = 1 / \sqrt{(LC)}$$

C'est vrai mais ce n'est pas suffisant. Car à y regarder de près, la correction d'homogénéité tout à fait cohérente apportée au problème des résonances fait surgir maintenant une autre difficulté peut-être plus épineuse : on a résolu ici *le problème des radians* en les acceptant comme unités associés à des grandeurs à part entière (fondamentales) et l'on a ainsi fait disparaître des contradictions cachées dans les problèmes de résonance. Mais qu'en est-il alors des *stéradians, unités d'angle solide* ?

Ceux-ci se sont profilés en douce dès que nous avons abordé la question d'exhaustivité. Considérons à nouveau l'équation vectorielle :

$$ma_r = ma - m\, d\omega_e/dt \wedge r - m\omega_e \wedge v_e - 2\, m\omega_e \wedge v_r$$

Supposons que a soit une accélération absolue due à un champ de gravitation de source M à distance R, alors :

$$ma = -\, G\, Mm/\, R^2$$

Le théorème de Gauss nous enseigne que le flux de ce champ s'écrit :

$$\Phi = -\, 4\pi GM$$

Le facteur 4π résulte d'une intégration à tout l'espace, soit un angle solide de 4π stéradians. Dans la version électrique de ce théorème ($\Phi = Q/\varepsilon_0$) le facteur 4π n'apparaît pas, mais c'est parce qu'on l'a introduit dans la constante de Coulomb $1\,/(4\pi\varepsilon_0)$ de sorte que l'intégration neutralise ces 4π.
La question est donc la suivante : conviendrait-il d'introduire les stéradians aussi explicitement que les radians dans le système des unités sous peine de nouvelles incohérences ? Ou bien cela n'est-il pas nécessaire ? Voilà : j'ai posé la question, je laisse à d'autres le soin et le mérite d'y apporter une réponse appropriée. J'ai la présomption (mais peut-être que je me trompe ?) que radians et stéradians mènent une vie relativement indépendante. Mais l'homogénéité des équations vectorielles ci-dessus semble exiger qu'il y ait 2π radians cachés (non explicites) dans les constantes de Cavendish G et de Coulomb $K = 1/(4\pi\varepsilon_0)$: les stéradians, quant à eux, sont rendus explicites dans l'écriture usuelle de cette dernière en termes de permittivité. Il y a tout lieu de penser que la solution la plus générale au problème ici exposé doit être cherchée de ce côté, car elle ne semble pas entraîner d'incohérences : elle permet de définir la masse de Planck et la charge de Planck, comme il a été fait ci-dessus sans que des radians y soient cachés, en dépit de la présence de la constante de Planck réduite dans les formules de définition.
Je me borne dans ce qui suit à développer une solution qui convient à l'étude des résonances électriques, jusqu'à l'esquisse d'une conjecture permettant l'interprétation des formules.

3 – Convention et conversions d'unités électriques et signification des constantes de structure

Sauf dans un cas particulier, je n'ai pas fait apparaître dans les sections précédentes les constantes de structure. Ce cas particulier (une constante de structure fine modifiée, prise égale à 1) était là pour introduire la charge de Planck. Laissons encore un instant dans l'ombre le raisonnement plus général sur les constantes de structure, on peut noter déjà un résultat remarquable qu'on peut tirer des considérations précédentes : chacun pourra vérifier qu'avec la charge de Planck on peut toujours définir a priori une capacité idéale C et une inductance idéale L associées de façon rigide à une fréquence ν :

$$C = q_0^2 / (4\,\pi\, h\, \nu) = 1/\,(2368\, \nu)$$
$$L = h /(\, q_0^2\, \pi\, \nu) = 60 /\nu$$

On peut faire un calcul explicite (application numérique) pour des valeurs usuelles, par exemple pour ν = 100 MHz, on a C = 4,22 pF/rad et L = 0,599 μH/rad.

C'est la valeur optimale qu'on trouve sur les abaques de réactance adaptée à 377 ohms. On a donc ainsi trouvé une technique de calcul direct. (En dépit de la valeur pragmatique de ce calcul, sa signification n'est pas tout à fait claire : habituellement, l'impédance du vide se réduit à sa partie réelle, résistive ; or ce sont bien des réactances $L\omega$ et $1/(C\omega)$ qui sont ici comparées à 377 ohms). [VOIR EN ANNEXE : BRICOLAGE INSOLITE]

Revenons aux constantes de structure.

Il existe au moins un cas où la formule qu'on a proposée $LC = R^3 /(GM)$ peut conserver une signification physique, avec des constantes de structure modifiées (ni α_G ni α_{EM} ne sont plus égales à 1). Calculons d'abord L et C pour la fréquence $\nu = 1{,}235 \times 10^{20}$ Hz (fréquence de la raie gamma d'annihilation de paires électrons positrons) il vient $C = 3{,}418 \times 10^{-24}$ F/rad et $L = 4{,}86 \times 10^{-19}$ H/rad. Considérons alors $M = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg, la masse de l'électron ainsi que la grandeur :

$$G = c^5 /\hbar\omega^2 = 3{,}8099 \times 10^{34}$$

dont on verra ci-après ce qu'elle représente. Disons seulement tout de suite qu'en unités physiques, elle est homogène à la constante de gravitation. On tire alors de ce qui précède :

$$R = (L\, C\, G\, M)^{1/3} = 3{,}862 \times 10^{-13}$$

Avec la constante de structure fine $\alpha_{EM} = \alpha = 1/137$, ce dernier résultat est lié

a) à la longueur d'onde d'annihilation de paires $\lambda = 2\pi\, R = 2{,}426 \times 10^{-12}$ m
b) au rayon classique de l'électron $r_{classique} = \alpha\, R = 2{,}819 \times 10^{-15}$ m

On a donc $R = r_{classique} /\alpha = \lambda / 2\pi$.

En écrivant la constante de gravitation $G_0 = 6{,}674 \times 10^{-11}$ pour la distinguer de la fonction G introduite ci-dessus, on vérifie que la grandeur :

$$\alpha_G = G_0 / G = 1{,}751 \times 10^{-45}$$

n'est autre que la constante de structure de la gravitation associée à la masse de l'électron.

Il suffira donc de calculer G, L et C selon les formules ci-dessus et de déduire $M = h\nu / c^2$ pour résoudre en constantes localisées n'importe quelle fréquence du spectre électromagnétique. Curieuse retombée de l'analyse dimensionnelle de Planck qu'on n'accusera pas d'être trop spéculative ! En dépit de mes tentatives, je n'ai pu établir de conjecture cosmologique vérifiable à partir de l'analyse de Planck. Il est clair ici en revanche qu'on en tire des commodités de calcul utiles à l'électricité élémentaire.
Il est vain en revanche d'explorer mes quelques conjectures sans être familier de ce qu'on pourrait considérer ici comme trivial. Le combat contre l'obscurité et la recherche des Lumières ne saurait se faire sans familiarité minimale avec ce qu'il y a de trivial dans la physique du lycée, celle qui reste accessible à tous les expérimentateurs. Mais un questionnement mathématique du concept même de système d'unités (ou analyse dimensionnelle) paraît incontournable.

4 – Unités naturelles et unités conventionnelles

Les unités de Planck ne sont pas praticables parce qu'on ne peut en réaliser les étalons, ou parce qu'elles sont définies avec des constantes naturelles (G, ħ, c) connues avec une précision insuffisante. Il est possible en revanche de concevoir et réaliser d'autres unités naturelles avec la méthode de Planck, à partir de constantes réputées moins fondamentales mais mieux connues. On va considérer précisément deux cas intéressants et instructifs. Celui d'unités naturelles fondées sur l'électron. Et celui des unités conventionnelles basées sur un phénomène naturel moins évident et plus subtil : la transition hyperfine du césium 133. On verra à cette occasion à quel point nos unités conventionnelles se sont rapprochées d'un système d'unités naturelles.

Le principe est de conserver des formules de Planck où G devient *une fonction* de gravitation qui n'est égale à *la constante* de gravitation, notée G_0, que dans le cas des « vraies » unités de Planck. La variable dont il faut disposer est une fréquence ν ou une pulsation $\omega = 2\pi\nu$. On peut alors définir

$$G = c^5 / \hbar\, \omega^2 = G_0 / \alpha_G$$

où ħ est la constante de Planck réduite et c la vitesse de la lumière dans le vide, tandis que α_G est la constante de structure de la gravitation.

Si G n'est plus une constante mais une fonction, sa valeur étant fixée pour chaque phénomène pulsant, utilisé comme étalon, devient en quelque sorte une constante du phénomène en question et on pourra utiliser de façon inchangée les grandeurs de Planck, en ce qui concerne leur forme littérale. Simplement G_0 est remplacé par $G = G_0 / \alpha_G$

Formellement on utilisera ici :

$$\lambda /2\pi = \sqrt{(\hbar G/c^3)}$$
$$M = \sqrt{(\hbar c/G)}$$
$$T/2\pi = \sqrt{(\hbar G/c^5)}$$
$$Q = \sqrt{(4\pi\, \varepsilon_0\, \alpha\, c\hbar)} = M^A \exp(-B)$$
$$\theta = \sqrt{(\hbar c^5/Gk^2)}$$

Dans l'expression de Q, α est la constante de structure électromagnétique qu'on devra noter par la suite α_{EM}, k est la constante de Boltzmann, A et B sont des constantes qui seront définies dans la section suivante. Quant au rôle des 2π dans la définition de la longueur d'onde et de la période, déjà esquissé précédemment, il sera exposé plus loin. Sauf une ou deux allusions, on ne s'occupera pas ici de l'unité de charge électrique ni de celle de température. Pour les unités de longueur, de masse et de temps, on notera qu'il suffit de connaître la valeur de G du phénomène utilisé comme étalon pour accéder aux trois unités. Ou bien il suffit de connaître une des unités pour déterminer les deux autres ainsi que la fonction G. La charge électrique n'est pas prise en compte et ne peut pas l'être, sauf si on peut faire intervenir le rayonnement d'annihilation de paires, ce qui est le cas pour l'électron et seulement lui. En comparant la fréquence de ce rayonnement (ou de tout autre rayonnement) à celle du maximum de Wien, on peut toujours faire apparaître une définition de l'unité de température.

Bien que la présentation suivante soit artificielle (en ceci qu'elle procède à l'envers de la construction de la fonction G) elle est intéressante parce que très simple et révélatrice du caractère planckien de tous nos systèmes d'unités.

Commençons par l'électron. Supposons qu'on ait mesuré
$G = 3{,}809\ 947\ 0739 \times 10^{34}$

On en tire
$\lambda /2\pi = 3,\ 861\ 592\ 6438 \times 10^{-13}$
et $\lambda = 2{,}426\ 310\ 2162 \times 10^{-12}$

En outre :
$T/2\pi = 1{,}288\ 088\ 6563 \times 10^{-21}$
$T = 8{,}093\ 299\ 7193 \times 10^{-21}$

Avec $M = m_e = \sqrt{(\hbar c / G)}$ il vient :
$m_e = 9{,}109\ 382\ 15 \times 10^{-31}$

Enfin la mesure a fourni :
$Q = e = 1{,}602\ 176 \times 10^{-19}$

On retrouve donc à partir de G toutes les caractéristiques de l'électron (masse, longueur d'onde et fréquence) associées à la raie spectrale d'annihilation, complétées par la mesure de charge.

Pour le césium 133, on écrira :
$G = 6{,}883\,161\,619 \times 10^{54}$

On en tire
$\lambda /2\pi = 5{,}190\,401\,7028 \times 10^{-3}$
et $\lambda = 3{,}\ 261\,225\,5718 \times 10^{-2}$

En outre :
$T/2\pi = 1{,}731\,331\,6477 \times 10^{-11}$
$T = 1{,}087\,827\,757 \times 10^{-10}$

Enfin avec $M = \sqrt{(\hbar c / G)}$ il vient :
$M = 6{,}777\,264\,0951 \times 10^{-41}$

On reconnaît les caractéristiques de la transition hyperfine du niveau fondamental de l'atome de césium. Que représente ici la masse ? Ce n'est pas une annihilation mais la masse perdue par photon rayonné par l'atome. Bien sûr, faute d'annihilation de paires de charges, on ne définit pas de charge ici.

J'ai volontairement affiché une précision extrême, au-delà de toute précision raisonnablement accessible (sauf peut-être pour le césium 133 : mais dans ce cas, c'est que les valeurs affichées ont été fixées par convention). J'ai tout simplement voulu suggérer qu'on pourrait faire de même avec l'électron, en faisant comme si l'on parvenait à fixer la dernière décimale affichée.

Cependant le césium ne permet pas de définir la charge électrique, car le photon de la transition hyperfine n'est pas celui d'une annihilation de paire de charges. Il dépend de α, constante de structure fine, mais ne détermine pas une constante de structure fine qui lui serait propre. Et d'ailleurs, si c'était le cas, cela impliquerait l'existence de charges exotiques différentes de e, charge élémentaire, mais qu'on n'a jamais observées. Il faudrait remplacer $\alpha = e^2 /(4\pi\ \varepsilon_0\ c\ \hbar)$ par $\alpha = Q^2 /(4\pi\ \varepsilon_0\ c\ \hbar)$. Il faudrait que Q soit une charge exotique : or les seules charges exotiques connues à ce jour (celles des quarks) ne sont pas observables directement et surtout sont tributaires d'une autre interaction que l'électromagnétisme (l'interaction nucléaire forte, dite de couleur). On peut bien supposer une autre charge exotique, c'est celle qui donnerait $Q^2 = 4\pi\ \varepsilon_0\ c\ \hbar$ (ce qui équivaut à $\alpha = 1$). Associée à la masse de Planck, cette charge fournirait un trou noir de Planck chargé, objet intéressant mais encore plus conjectural que la charge des quarks. On pourrait encore supposer d'autres charges exotiques, indirectement observables comme celles des quarks…

Il ressort en tous cas de ce qui précède que, si on ne s'occupe pas des charges ni des températures, *tout système d'unités peut se mettre sous forme planckienne*. Il semble évident en outre qu'on peut toujours y rattacher une unité de température par la loi du maximum de Wien, par exemple.

Cependant, le problème posé par la charge conduit à un problème cosmologique. Ou bien il réduit au contraire la cosmologie à un problème de système d'unités.

On peut considérer que la cosmologie est la quête de l'unité conceptuelle de la physique (c'est-à-dire des lois de la nature). Même avec les vraies unités de Planck, il est notable que la charge électrique reste à part : c'est la seule unité qui ne fasse pas apparaître de constante de gravitation G dans sa définition et ce fait correspond à la non unification des deux interactions gravitationnelle et électromagnétique. Chacune reçoit sa propre constante de structure. Pour l'électron on écrit :

$$\alpha_{EM} = e^2 /(4\pi\, \varepsilon_0\, c\, \hbar) = 1/137$$

$$\alpha_G = G\, m_e^2 /(c\, \hbar) = 1{,}75 \times 10^{-45}$$

Cependant, avec les vraies unités de Planck, il est permis de conjecturer que la masse du trou noir de Planck, si elle existe, pourrait être porteuse exactement d'une charge de Planck, susceptible d'annihilations de paires, comme les charges élémentaires. On aurait alors :

$$\alpha_G = \alpha_{EM} = 1$$

Dans ce cas particulier, purement conjectural, les formules électriques et les formules gravitationnelles pourraient devenir directement comparables. C'est l'étude de ce cas particulier comparé à celui de l'électron qui conduit à statuer sur le facteur 2π dans l'expression de la constante de temps de Planck et de la longueur de Planck : car il est clair aussi bien dans le cas particulier de l'électron que celui du césium 133 que la constante de temps est l'inverse de la pulsation, non de la fréquence. Il est donc logique d'appliquer la même règle aux vraies unités de Planck, d'autant plus que cela suggère des comparaisons plus précises entre électron et trou noir de Planck chargé, et par suite, une interprétation de ce dernier comme particule.

5 – Constante de Rydberg et charge électrique : vers une conjecture

Il est possible d'établir un lien entre masse et charge.

Ce résultat, simple dans sa formulation, reste étonnant dans sa construction, mais évidemment conjectural du point de vue expérimental. Notons tout d'abord qu'on est conduit à associer à l'électron non pas une masse caractéristique mais deux. La première, appelons-là $M = m_e = 9{,}109\,382\,15 \times 10^{-31}$ kg est la masse rayonnée lors d'une annihilation de paire. La seconde qu'on pourrait appeler masse de Rydberg s'obtient par la formule de Rydberg :

$$\Delta E = R_H\, \alpha^2\, h\, c \text{ où } R_H = 1{,}0973731 \times 10^7 \text{ est la constante de Rydberg, d'où}$$

$$m_1 = \Delta E / c^2 = 1{,}2916 \times 10^{-39}$$

On étudie le rapport $m_1 / m_e = 1{,}4178 \times 10^{-9}$

et la grandeur $(m_1 / m_e)^{0{,}125} = 7{,}833 \times 10^{-2}$ dont la signification apparaîtra dans ce qui suit. On vérifie alors qu'on peut retrouver la charge de l'électron en écrivant :

$$Q = (32\, m_1 / m_e)^{1/8} \sqrt{(\varepsilon_0\, c\, h)} = 1{,}208 \times 10^{-1} \times 1{,}326 \times 10^{-18}$$

La masse m_1 n'est pas directement mesurable, mais aisément calculable. Elle fournit toutefois un ordre de grandeur de la fréquence hyperfine du positronium (acceptable à 15% près). On trouve en effet $\nu_1 = m_1 c^2 / h = 175{,}2$ GHz (la valeur mesurée étant $\nu_{hyper} = 203$ GHz et en substituant ν_{hyper} à ν_1, on retrouve Q à 2% près). En utilisant une correction empirique, on pourrait ajuster la formule précédente pour l'adapter à la fréquence mesurée, mais la formule serait moins remarquable.

Ce qui nous importe ici, c'est que nous avons une piste pour lier la charge et la masse avec les constantes naturelles habituelles. On verra plus loin comment ce résultat s'applique aussi aux grandeurs de Planck, moyennant quelques hypothèses. Il prendrait toutefois une portée plus significative en trouvant quelque phénomène nouveau à réguler. Par exemple le pion neutre pourrait être conçu comme une espèce de positronium lourd portant des charges

$Q = \pm 2{,}02 \times 10^{-19}$ C

et des masses $M = 1{,}2 \times 10^{-28}$ kg.

Il en résulterait $\nu_1 = m_1 c^2 / h = 143$ THz (et une transition hyperfine de l'ordre de 165 THz). On verra pour conclure sur quoi se fonde cette conjecture.

Par défaut, ce résultat fournit au moins une relation empirique à l'usage de la métrologie. A défaut de signification physique directe, il a assurément une utilité conventionnelle, en laissant ouverte la question cosmologique de l'interprétation des unités de Planck. Pour obtenir ce résultat, il suffit de faire varier la constante de Rydberg :

$R_H = m_e e^4 / (8\, \varepsilon_0^2\, c\, h^3)$ où m_e et e sont remplacées par des variables M et Q : on a alors une « variable de Rydberg » :

$$R_H = M Q^4 / (8\, \varepsilon_0^2\, c\, h^3)$$

Les valeurs de Planck M_0 et Q_0 seront alors ici marquées par un indice.

Il faut supposer que (c'est-à-dire calculer comme si) les trous noirs de Planck pouvaient s'annihiler par paires, comme des électrons et positrons, en rayonnant des photons de fréquence :

$$\nu_0 = M_0\, c^2 / h = 2{,}952 \times 10^{42} \text{ Hz}$$

Alors on peut supposer, de plus, qu'avant annihilation, ils constituent une sorte de positronium lourd, avec une fréquence de structure fine :

$$\nu_1 = m_1\, c^2 / h$$

La variable de Rydberg permet d'évaluer ν_1 :

$$\nu_1 = R_H\, \alpha^2\, c, \text{ avec les valeurs de Planck : } \alpha_{EM} = 1 \text{ et } R_H = 4{,}9266 \times 10^{33}$$

Ceci donne, tous calculs effectués :

$\nu_1 = 1{,}476 \times 10^{42}$ Hz = $(\nu_0 / 2)$, alors que le même calcul effectué pour l'électron avait donné
$\nu_1 = 175{,}2$ GHz (soit la fréquence d'annihilation : $1{,}235 \times 10^{20}$ Hz divisée par 705 millions !

Quoi qu'il en soit, on peut comparer ces deux calculs avec une seule formule générale :

$$Q = (32\, m_1 / M)^{1/8} \sqrt{(\varepsilon_0\, c\, h)}$$

Ainsi la charge et la masse de Planck sont-elles reliées par la même formule que précédemment la charge et la masse de l'électron. Ce calcul ne dépend pas de l'existence effective des trous noirs de Planck, mais seulement des constantes naturelles.

Le système des unités physiques semble donc sous-tendu par la variabilité de α_{EM} et des autres constantes de structure, non pas dans le temps ni dans l'espace, comme on a cherché, mais en fonction de l'élémentarité des particules, le « trou noir de Planck » étant pris pour la plus fondamentale, à cause de son lien direct avec les constantes de la nature usuelles (G, c, h).
En introduisant A = 0,047739 et B = 39,97536 on vérifie qu'on peut écrire :

$$Q = M^A \exp(-B)$$

Pour s'en tenir ici à la métrologie, on peut donc rattacher les unités de Planck à un système d'unités fondé sur les propriétés de l'électron qui ont permis de construire la charge comme fonction de la masse.

6 – Pour conclure : réel et conventionnel

Ma correction du système des unités physiques présente des conséquences sur deux plans bien distincts et séparés, tout au moins à ce stade de leurs développements.

D'une part des conséquences physiques immédiatement vérifiables :

$$C = q_0^2 / (4 \pi h \nu) \text{ et } L = h /(q_0^2 \pi \nu)$$

On peut en tirer parti dans la pratique de la conception de circuits (remplacement des abaques dans la recherche d'impédances adaptées et, éventuellement étude de l'impédance de matériaux présentant des raies spectrales). [VOIR EN ANNEXE : BRICOLAGE INSOLITE]

D'autre part une conjecture cosmologique et quantique pour interpréter les unités de Planck, en vue de rattacher l'unité de charge à l'unité de masse ([1]) :

$$Q = (32 m_1 / M)^{1/8} \sqrt{} (\varepsilon_0 c h)$$

Avec A = 0,047739 et B = 39,97536

$$Q = M^A \exp (- B) \text{ avec } A = 0{,}047739 \text{ et } B = 39{,}97536$$

A la question « à quoi sert l'analyse de Planck ? », hormis la cosmologie, je peux répondre au moins ceci : à calculer les impédances réactives associées à des résonances, que le but poursuivi soit de les construire (en remplaçant des abaques et des formules empiriques plus ou moins compliquées par une formule simple) ou de les interpréter (interprétation en termes d'impédance des indices de matériaux diélectriques au voisinage des raies spectrales, comme pour la raie de rotation de l'eau à 22 GHz dont j'ai esquissé l'étude en 2004).

En ce qui concerne les conséquences vérifiables immédiatement, la démonstration est par ailleurs très simple : avec la charge de Planck $q_0 = \sqrt{(4\pi\varepsilon_0 c\hbar)}$ et l'impédance du vide donnée sous ses formes habituelles $Z_0 = \sqrt{(\mu_0 / \varepsilon_0)} = 1/(c\, \varepsilon_0)$, on aussi $Z_0 = 2h/q_0^2$.

On pose alors que les réactances optimales sont « adaptées au vide » soit :
$L\omega = 1/(C\omega) = Z_0$ d'où l'on tire
$C = q_0^2 / (4 \pi h \nu)$ et $L = h /(q_0^2 \pi \nu)$.

Cette adaptation est loin d'être rigoureuse mais fournit toujours un bon ordre de grandeur qu'on ajuste avec une inductance ou un condensateur variable.
Seule condition préalable : le passage de la pulsation à la fréquence (de ω à ν) présuppose des unités cohérentes et une attention égale portée au passage de la constante de Planck à sa valeur réduite (de h à ħ). Ce présupposé contient par conséquent une critique et une correction du système international des unités physiques, ainsi que je l'ai exposé précédemment.

Le problème philosophique du conventionnalisme, c'est sa part d'arbitraire, auquel on n'échapperait

1 NOTE du webmaster du site F. Elie: *Cette conjecture inédite, et aux conséquences fondamentales sur la cosmologie et la Physique quantique, prendra désormais le nom de « conjecture de Lahaeye ».*

(partiellement) que si les unités naturelles étaient praticables (c'est-à-dire si elles pouvaient servir d'étalon à la place de tout étalon humain) et c'est cette part d'arbitraire qui empêche de fait le rationalisme d'être univoque. A vrai dire, même si les unités naturelles étaient praticables, elles n'excluraient pas les conventions à prendre en arrière-plan, concernant le langage et les règles d'écriture, par exemple et, plus insidieusement, celles qui résultent des mécanismes de la volonté.

Le choix des unités est assurément conventionnel. Encore doit-il être cohérent. Sans quoi il est incapable de fournir une clé d'accès au réel, que celui-ci soit conjectural ou déjà avéré. Le meilleur des conventionnalismes est toujours celui qui approche de plus près la connaissance et la compréhension du réel ou qui, du moins, ne l'entrave pas. Une part d'arbitraire est irréductible puisque l'appréciation du « meilleur des conventionnalismes » qui guide un choix est dépendante autant de la volonté que de l'entendement : la volonté, c'est au moins la moitié du problème.
Le conventionnalisme de la volonté, tout aussi irréductible, est encore plus glissant sans aucun doute, que celui de l'entendement, car il n'existe pas de critère, ni *a priori*, ni *a posteriori*, de ce qui doit être voulu, alors qu'un verdict expérimental fixe au moins *a posteriori* ce qui doit être compris.
On glisse insidieusement des questions primordiales de l'éthique vers le terrain miné de la politique. C'est pourquoi je n'ai ici aucune règle à prescrire, hormis l'étude de la volonté et du langage.

Toute langue humaine est conventionnelle. La résonance de Thomson ayant une infinité de solutions pour ses composants discrets, la convention ici proposée permet d'en sélectionner une – quitte à ajuster, par exemple en fonction d'un facteur de qualité $Q_P = R \sqrt{(C/L)}$ pour un résonateur parallèle, ou simplement en fonction de composants disponibles dans un fond de tiroir.

L'étude qui précède n'est autre que celle (semi-quantique) de la dispersion de réfraction au voisinage des résonances quand des « forces d'oscillateur » sont remplacées par des oscillateurs à composants discrets. Cette étude revient aussi à considérer les inductances et capacités non plus comme des composants discrets (au sens de l'électronique) mais comme des dimensions (au sens physique du terme) aussi réelles que toute autre grandeur physique. Il ne s'agit pas de supposer qu'un oscillateur microscopique contient « réellement » un condensateur et une bobine, pas plus que le spin n'est un « vrai » moment cinétique. C'est seulement la dimension physique, la grandeur, qui conserve un sens, non sa représentation classique. C'est en ce sens qu'on peut associer une impédance à tout indice de réfraction et calculer L et C pour toute résonance au voisinage de cet indice (qui tend vers l'unité en allant vers les rayons X et gamma). Des mesures d'adaptation d'impédances dans des oscillateurs optiques donneraient ainsi accès aux variations d'indice au voisinage de l'oscillation.

On pourrait montrer d'autres conséquences de cette étude (notamment quelques relations partiellement indéterminées entre la constante de structure fine et la permittivité relative) mais pour l'instant, je les réserve encore au laboratoire ou à l'investigation mathématique.
6 février 2011

BRICOLAGE INSOLITE POUR AMATEUR ECLAIRE

Construire un tuner de radioastronomie avec quelques formules de cosmologie quantique (ou le rôle de π en physique)

1 – INTRODUCTION

Non, ce n'est pas de cosmologie spéculative qu'il s'agira ici, mais de cosmologie appliquée à des questions pratiques, voire de bricolage… Pas d'électronique non plus, *c'est la physique* du composant passif qui va nous occuper. Les amateurs de radioastronomie ont pu observer par eux-mêmes des siffleurs atmosphériques, des S.I.D. (sudden ionospheric disturbances) voire des émissions de Jupiter avec un simple récepteur de poche et une bonne antenne. Avec l'émergence du tout-numérique, ce matériel deviendra indisponible à relativement court terme. Il redevient donc intéressant de construire soi-même son récepteur. On va donc s'intéresser ici à une question fort simple mais fort utile : combien de tours de fil de cuivre faut-il bobiner pour obtenir un résonateur adapté à l'écoute de Jupiter sur 30 MHz ? Ou d'un siffleur sur 3 kHz ? Dans ce qui suit, ces deux exemples seront entièrement traités comme modèles d'application numérique.

Le problème théorique a été résolu par le physicien japonais Nagaoka au début du vingtième siècle. Ce qui est ici proposé n'est donc pas nouveau quant au résultat mais par la méthode. On aura en effet ici à se servir des unités de Planck :

La masse de Planck :
$m_{planck} = m_0 = \sqrt{(\hbar c/ G)} = 2,176 \times 10^{-8}$ kg
La charge de Planck :
$q_{planck} = q_0 = \sqrt{(4 \pi \varepsilon_0 \hbar c)} = 1,875 \times 10^{-18}$ C
Le rayon de Planck :
$r_{planck} = r_0 = \sqrt{(\hbar G/ c^3)} = 1,616 \times 10^{-35}$ m.rad $^{-1}$
La constante de temps de Planck :
$\tau_{planck} = \tau_0 = \sqrt{(\hbar G/ c^5)} = 5,391 \times 10^{-44}$ s.rad $^{-1}$
Et corrélativement la pulsation de Planck
$\omega_{planck} = \omega_0 = 1/\tau_0 = 1,85 \times 10^{43}$ radians par seconde.

C'est surtout la charge de Planck q_0 qui nous intéressera ici ainsi que, plus accessoirement, le temps de Planck, ou plutôt son interprétation : il ne s'agit pas d'un prétendu temps du big bang, mais de l'inverse d'une pulsation ω reliée à une fréquence ν par la relation $\omega = 2\pi\nu$. Diverses considérations heuristiques conduisent en effet à introduire des unités de Planck dites ici *non réduites* :

La longueur d'onde de Planck :
$\lambda_0 = 2\pi\ r_0 = 1,015 \times 10^{-34}$ m
La période de Planck :

$T_0 = 2\pi\ \tau_0 = 3{,}387 \times 10^{-43}$ s

Et corrélativement la fréquence de Planck

$\nu_{planck} = \nu_0 = 1//T_0 = 2{,}95 \times 10^{42}$ Hz.

Ecrivons la constante de gravitation $G = G_0 = 6{,}674 \times 10^{-11}$, alors il existe une fonction de gravitation $G = G_0/\alpha_G = c^5 / \hbar\omega^2$ applicable à n'importe quelle fréquence ou pulsation, où α_G est la constante de structure de la gravitation. Pour retrouver les unités de Planck, il suffit de poser $\alpha_G = 1$ et $G = G_0$. Dès lors les unités de Planck s'adaptent à toutes les fréquences en remplaçant G_0 par la fonction G (c'est-à-dire en lisant G comme une fonction dans les unités de Planck et non plus comme la constante de gravitation).

Notons en passant que pour la fréquence d'annihilation de paires électron-positron, on a :

$\nu = 1{,}235 \times 10^{20}$ Hz.

$\omega = 7{,}759 \times 10^{20}$ radians par seconde.

$G = 3{,}815 \times 10^{34}$

$\alpha_G = 1{,}749 \times 10^{-45}$

Avec $M = \hbar\omega / c^2$ on retrouve bien la valeur standard de α_G pour l'électron dont la masse est emportée par un photon de pulsation ω

$\alpha_G = G_0\ M^2 / \hbar c = 1{,}749 \times 10^{-45}$

2 – CALCUL DES CONDENSATEURS ET DES BOBINES

A partir de ce qui précède, on peut montrer que la capacité et l'inductance peuvent être liées, idéalement, à une fréquence ν telle que :

$C = e^2 / (4\pi\ \alpha\ h\ \nu) = q_0^2 / (4\pi\ h\nu)$
$L = \alpha\ h / (e^2\ \pi\ \nu) = h / (q_0^2\ \pi\ \nu)$

où α est la constante de structure fine de l'interaction électromagnétique (α = 1/137). En pratique on peut simplifier : en calculant dans le système international sans multiples ni sous-multiples, on trouve, avec ν en hertz :

C (en farads) = 1/ (2368 ν)
L (en henrys) = 60 / ν

Ainsi pour ν = 30 MHz, C = 14 pF et L = 2 μH.

Et pour ν = 3 kHz, C = 140 nF et L = 20 mH.

3 – FABRICATION D'UNE BOBINE DE DIAMETRE 2a ET DE LONGUEUR b

La formule classique pour une bobine longue fournit l'inductance en fonction du nombre n de spires :

$$L = (n^2 \times 4\ \pi^2 \times a^2 \times 10^{-7}) / b$$

En combinant avec ce qui précède, on a donc :

$$h/ (q_0^2 \pi \nu) = (39,5\, n^2 a^2 \times 10^{-7}) /b$$

Premier réglage : la correction de Nagaoka remplace 10^{-7} par

$$K = 10^{-7} /(1 + (0,9a/b))$$

On en tire donc le nombre de spires en fonction de l'inductance :

$$\boxed{n (L) = \sqrt{[Lb / (39,5\, K a^2)]}}$$

et le nombre de spires en fonction de la fréquence :

$$\boxed{n (\nu) = \sqrt{[hb / (39,5\, K \pi \nu q_0^2 a^2)]} = \sqrt{[1,52\, b / (K \nu a^2)]}}$$

Second réglage : en règle générale, afin d'améliorer le facteur de qualité, pour une résonance parallèle on cherche à réaliser un circuit « trop » capacitif (ou « pas assez » inductif). On introduit alors un facteur correctif β tel que

$$\boxed{n' (\nu) = \sqrt{[1,52\, b / (\beta K \nu a^2)]}}$$

Ce réglage réduit le nombre de spires et β peut varier de 1 à 10 environ (on prendrait $1/\beta$ pour un circuit trop inductif).

Applications numériques :

Avec le premier réglage, pour 30 MHz et une bobine de dimensions a = 0,005 m et b = 0,015 m, on trouve K = $0,77 \times 10^{-7}$ et L = 2 μH. On calcule alors n (L) = n (ν) = 20 spires.
Pour 3 kHz et une bobine de dimensions a = 0,02 m et b = 0,06 m, on trouve : K = $0,77 \times 10^{-7}$ et L = 20 mH. On calcule alors n (L) = n (ν) = 994 spires. On vérifie bien sûr que les deux calculs, en fonction de la fréquence ou de l'inductance, sont équivalents.

Pour le second réglage, on prend par exemple $\beta = 5$.
Pour 30 MHz on trouve n' = 9 spires et pour 3 kHz, n' = 444 spires.

Ces derniers résultats reviennent à calculer avec $L' = 60 / (\beta\nu)$ soit aussi $\nu' = \beta\nu$ ou

$$\boxed{n' (L') = \sqrt{[L'b / (39,5\, K a^2)]}}$$

Après ce second réglage, la formule de Thomson fournira facilement la capacité associée à la fréquence nominale de travail.

4 – CONCLUSION

Les démonstrations qui précèdent ne sont pas vraiment complètes et n'en ont pas la prétention. J'ai voulu ici donner une démonstration heuristique à l'usage de quiconque aurait essayé de vérifier la théorie avec les mains (sans métaphore) : en construisant lui-même son instrument de laboratoire. Toute démonstration plus formelle fait intervenir une subtile mais inévitable correction du système des unités physiques. Je tiens cette démonstration[2] plus complète à disposition de quiconque aurait fait quelques expériences… avec ses mains. Ou de mathématiciens intéressés par la théorie des groupes et ses applications en physique.

Comme on peut voir en tous cas, on ne s'est pas soucié de l'interprétation cosmologique des unités de Planck, mais seulement de ce qui pouvait en être tiré dans l'usage et la pratique : aucun ordinateur ne révèlera par lui-même une anomalie du système des unités, il faut plutôt une bonne tête, de bonnes mains et du tout analogique plutôt que du tout-numérique.

Pourtant la portée des considérations qui précèdent sur les unités naturelles relève plutôt des mathématiques, et même plus précisément de la théorie des groupes : les unités de Planck (mais aussi l'analyse dimensionnelle en général) constituent un groupe multiplicatif abélien.

Une correction sur le nom des unités est nécessaire et inévitable pour assurer la cohérence des unités électriques (mais aussi les unités mécaniques). Les unités de Planck non réduites présentées en introduction en sont le témoignage et l'esquisse. L'efficacité des calculs d'application en est la légitimité. Tout traitement incorrect des unités réduites (qu'elles soient naturelles de Planck ou conventionnelles) entraîne des calculs aberrants. C'est évidemment le facteur 2π dans les formules qui est l'arbitre de la cohérence cherchée. On notera tout de même ici la nécessité d'introduire des radians dans la constante de gravitation pour justifier la définition de la masse de Planck… Des raisons analogues conduiraient à introduire des radians dans les farads. On trouvera un exposé plus complet dans ma réflexion sur les systèmes d'unités ainsi que sur le conventionnalisme et le réalisme en philosophie des sciences.

Constantes utilisées :

G (ici noté G_0) = $6{,}674 \times 10^{-11}$ $m^3/(kg\ s^2.rad)$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m

c = 299792458 m/s

h = $6{,}626 \times 10^{-34}$ J.s

ħ = $1{,}054 \times 10^{-34}$ J.s

e = $1{,}602 \times 10^{-19}$ C

J-F, 6 février 2011 - Jean-François Lahaeye – 120 avenue Alsace-Lorraine – 33200 BORDEAUX

2 Le premier exposé que j'ai rédigé sur cette question, en 2004, peut être lu à la Bibliothèque Nationale en annexe dans un opuscule édité par l'association Le Graviton Evanescent : *Introduction à la quête des introuvables objections à la physique quantique*.