

Frédéric Elie on  
ResearchGate

## Tas de sable et parabole *Une introduction à la physique des milieux granulaires*

Frédéric Élie  
juillet 2014

CopyrightFrance.com

**La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.**

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : S'il existe un domaine omniprésent, tant dans les études théoriques que dans les applications pratiques, vaste et qui implique tous les savoirs en physique et en chimie, c'est bien celui des matériaux. Et à l'intérieur de ce domaine, celui des matériaux granulaires est lui aussi omniprésent, touche toutes les technologies, les applications, et les processus de la nature: par exemple, la construction (les mélanges utilisés pour les matériaux de construction utilisent des milieux granulaires), le packaging (le conditionnement des structures pulvérulentes, tant en cosmétique qu'en pharmacie nécessite de maîtriser le comportement de ces milieux...), les ouvrages du génie civil (digues, gestion des dunes...), la compréhension et la prévision des avalanches ou du recul des falaises et des zones côtières, la formation et la stabilité des dunes de sable dans le désert, ou des talus utilisés ou formés par des remblais (et les glissements de terrain), les techniques industrielles qui utilisent les milieux granulaires, telles celles des silos (et la prévention des dangers associés comme ceux liés aux explosions de poussière), les sables mouvants, etc., etc.

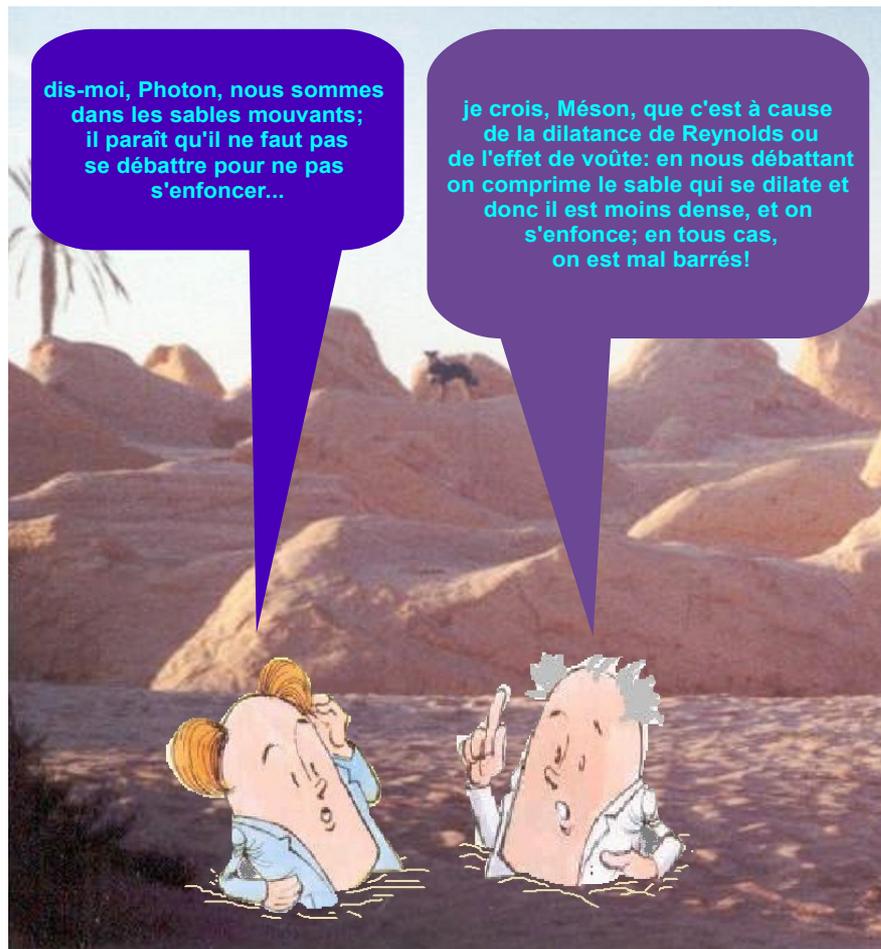
Les milieux granulaires sont caractérisés par deux choses: la portée des interactions internes mises en jeu, et leur comportement par rapport à la matière fluide et la matière solide. Pour la première caractéristique, les milieux granulaires existent sur des échelles allant du mésoscopique (quelques pouillèmes de millimètres) jusqu'aux macroscopiques (puisque des systèmes, comme les anneaux de Saturne, se comportent aussi, collectivement, comme des matériaux granulaires!), en passant par les échelles intermédiaires. Pour la deuxième caractéristique, les milieux granulaires, de par leurs comportements collectifs, ne se comportent ni comme des assemblages solides, ni comme des milieux continus fluides: bien que constitués d'éléments solides (les grains solides), les interactions entre ces éléments au sein des milieux granulaires sont des mécanismes collectifs; la compréhension détaillée de ces mécanismes font encore l'objet de recherches fondamentales, et l'enjeu est qu'elle permet de maîtriser les techniques de mise en œuvre des structures matérielles et aussi de comprendre et de prévenir les dysfonctionnements et accidents, parfois dramatiques, liés à ces structures (avalanches, explosions, effondrements, glissements de terrain, dispersion de nuages pulvérulents...).

Ni fluide, ni solide, un milieu granulaire, en effet ne se comporte pas comme un solide puisqu'il est déformable, dispersible et écouable, ni comme un liquide puisque, par exemple, lorsqu'on le comprime il se dilate (c'est le phénomène de dilatance de Reynolds)! En tant que milieu constitué d'un très grand nombre de grains solides, il n'est pas comme un solide, à cause par exemple de l'existence de l'effet de voûte. Cet effet est responsable d'un grand nombre de comportements des milieux granulaires: comportement singulier des écoulements dans un récipient à travers un orifice (silos, sabliers) où le matériau s'auto-bloque (effet Janssen) ou bien s'écoule régulièrement quel que soit son niveau comme dans un sablier (effet Beverloo); application de l'effet de voûte aux ballasts de chemins de fer (comment se fait-il qu'un train de plusieurs centaines de tonnes en mouvement ne provoque pas l'effondrement du ballast et des rails qui reposent dessus?), ainsi qu'aux constructions des aqueducs (exemple Pont du

Gard), viaducs, arches des cathédrales... Et, si nous comparons l'écoulement d'un milieu granulaire à celui d'un liquide, on voit aussi que la viscosité du milieu granulaire varie avec la vitesse de cisaillement due à l'écoulement, ce qui n'est pas le cas d'un liquide ordinaire (loi de Bagnold).

On peut signaler aussi que, tandis qu'un solide peut prendre une forme quelconque, un milieu granulaire qui repose sur un support, à l'état d'équilibre, prend une forme conique dont l'angle au sommet n'est pas quelconque: c'est l'angle de talus. Donc, si ce tas granulaire est formé près d'une arête délimitant une falaise abrupte, l'angle de talus se conservant, on observera l'écoulement d'un pan du talus, ce qui donnera lieu à l'intersection d'un plan avec un cône, l'inclinaison du plan étant égale à celle de l'angle au sommet du cône: on obtiendra ainsi une coupe de forme parabolique du talus.

Si l'on devait écrire toutes les propriétés, études et applications des milieux granulaires, je crois que les textes empliraient la bibliothèque nationale; ce n'est donc pas mon propos ici. Sur la base de quelques éléments simples, mais qui nécessitent déjà des développements en physique et en mécanique assez sophistiqués, j'aurais atteint mon but si, dans cet article, je parviens à faire toucher du doigt la richesse, la complexité et les problèmes encore ouverts relatifs aux milieux granulaires, dont l'exemple le plus courant, mais au final encore mystérieux, est un simple tas de sable!...



## SOMMAIRE

- 1 – Introduction
- 2 – Conditions pour qu'un milieu granulaire se mette en mouvement
- 3 – Formation du tas de sable
- 4 – Effet de voûte dans les milieux granulaires
- 5 – Frottement solide et modèle de Janssen
- 6 – Caractérisation des milieux granulaires
- 7 – Influences de l'humidité et des charges électriques
- 8 – Typologie des milieux granulaires et définitions
- 9 – Mouvements frustrés, stick-slip
- 10 – Chocs des grains et modèle de Hertz
- 11 – Une particule en interaction avec un milieu granulaire – Plusieurs particules en interaction (friction dans un granulaire, nombre de Bagnold)

- 12 – Statique d'un milieu granulaire, cheminement des contraintes, effet de voûte
- 13 – Dilatance de Reynolds
- 14 – Écoulement d'un milieu granulaire dans un silo: modèle de Janssen
- 15 – Écoulement granulaire sur une pente: modèle de Saint-Venant, coefficient de frottement effectif
- Annexe 1 – Écoulement granulaire sur un plan incliné: établissement des équations du mouvement moyenné dans l'épaisseur (ou équations dites de Saint-Venant)
- Annexe 2 – Vidange d'un récipient contenant un matériau granulaire, sablier et loi de Beverloo
- Annexe 3 – Rappels sur la théorie des chocs de billes élastiques, avec glissement et roulement à l'impact
- Références

## 1 – Introduction

a) Un tas de sable au repos a une structure conique d'angle à la base  $\theta$  imposée par des propriétés de dynamique et de statique des milieux granulaires.

On cherche à déterminer  $\theta$ . Chemin faisant, on est amené à s'intéresser à la dynamique des milieux granulaires et aux conditions d'équilibre des pentes.

Une digression en découle sur l'écoulement d'un ensemble granulaire:

- sur une pente inclinée;
- dans un silo;
- dans un sablier.

b) Lorsqu'un tas de sable conique est formé sur un plan dont l'un des bords donne sur le vide et est contenu dans la base du cône, on obtient une section parabolique dont on cherche à prédire les caractéristiques en fonction de l'angle de base du cône et de la distance entre le centre du cercle de base et le bord.

## 2 – Conditions pour qu'un milieu granulaire se mette en mouvement

- Principe de **dilatance de Reynolds** (1885) [1]:

*Pour se mouvoir, un milieu granulaire initialement au repos, doit d'abord se décompacter.*

*Dans un empilement compact le mouvement des particules est frustré par les exclusions stériques dues à leurs voisines: les billes doivent sortir des puits de potentiel où elles sont piégées (figure 1).*

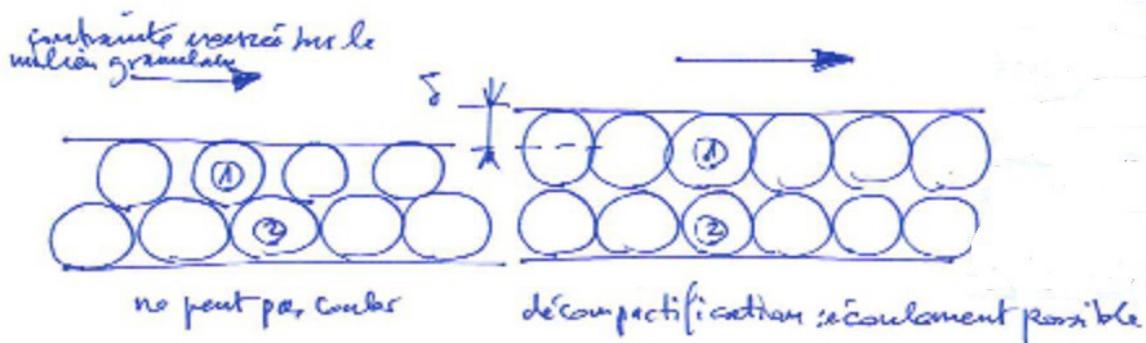


figure 1 – Dilatance de Reynolds: Sous l'effet de la contrainte de cisaillement le grain 1 est poussé vers la droite. Mais il ne peut se déplacer que s'il passe par dessus le grain 2: pour autoriser ce mouvement, le milieu se dilate et sa compacité diminue (donc la porosité à l'eau augmente, donc l'eau peut pénétrer dans le milieu granulaire)

- Exemples d'application de la dilatance [2]:

- **L'assèchement du sable sous la trace d'un pied:** formation d'une zone sèche autour du pied. Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce que l'eau emprisonnée dans les interstices entre les grains migre vers le pourtour de la surface pressante, comme le ferait l'eau dans une éponge comprimée. C'est l'inverse qui se produit avec le sable saturé en eau: en l'état initial, les grains de sable sont tellement proches qu'ils ne peuvent bouger qu'en s'écartant les uns des autres quand on appuie sur l'empilement; celui-ci se dilate (dilatance). Le volume individuel des grains de sable demeurant inchangé, c'est le volume des interstices qui augmente: l'eau est donc

aspirée sous la surface soumise à la pression, ce qui assèche la zone adjacente.

*expérience proposée n°1*: remplir une cuve avec du sable mouillé et suffisamment compacté. Poser un poids et constater l'assèchement.

*expérience proposée n°2*: remplir un ballon, une baudruche, avec du sable humide mélangé à de l'encre. L'embouchure du sac est prolongée d'un tube (en verre, ou une paille), dans lequel le liquide coloré est visible. Quand on comprime le sac, le liquide coloré dans le tube descend (alors que le « bon sens » s'attend à ce qu'il monte!).

- Réaliser des **empilements compacts** sert à la construction, tant pour assurer les performances mécaniques des matériaux que pour réduire leur perméabilité aux agents externes. Parmi les méthodes visant cet objectif: mélange de gros grains de tailles diverses et de poudres fines; les petits grains et les poudres remplissent les interstices entre les gros grains, mais il faut éviter la ségrégation provoquée par des chocs ou des vibrations pendant l'assemblage.
- Le principe des **matelas-coquilles** utilisés par les pompiers pour immobiliser un blessé s'appuie sur la dilatance: l'enveloppe contient des microbilles et de l'air. Sous le poids du blessé, l'enveloppe se déforme et on y fait le vide, ce qui augmente la compacité qui assure ensuite l'absence de déformation de l'enveloppe supportant le blessé lors du transport.
- **Avalanches**: un tas de grains forme avec l'horizontale un angle  $\theta$  (figure 2). Il existe un angle  $\theta_M$ , angle maximum de mise en mouvement, que peut former la pente du tas avec l'horizontale sans mise en mouvement spontané (avalanche).

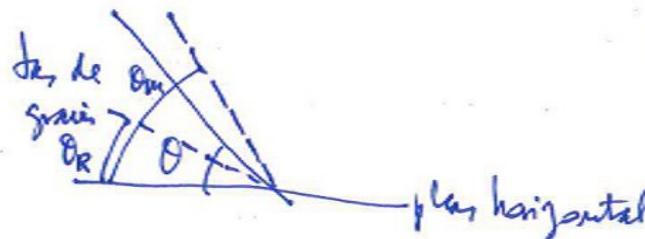


figure 2 – angle maximum de mise en mouvement et domaine métastable d'une pente de matériau granulaire

$\theta_M$  dépend du matériau (plus élevé pour les grains anguleux que pour les grains sphériques). Il existe un angle  $\theta_R < \theta_M$  en dessous duquel tout mouvement du tas (avalanche) est impossible. Pour  $\theta_R < \theta < \theta_M$  le tas est dans un équilibre métastable: les avalanches n'apparaissent pas spontanément mais, une fois provoquées même par une cause mineure, elles se propagent. Un skieur qui descend une pente  $\theta > \theta_R$  provoquera, s'il chute, une avalanche qui l'entraînera.

*expérience proposée n°3* (figure 3): mise en évidence de  $\theta_M$  (angle de mouvement) et  $\theta_R$  (angle de repos) – Soit un tambour cylindrique, pouvant tourner autour de son axe horizontal. Remplir ce tambour à moitié avec du sable sec. Tourner le tambour jusqu'à observer le glissement du sable (avalanche), obtenu pour  $\theta_M$ . Après glissement, le tas se stabilise à une pente d'angle  $\theta_R$ . Le tambour doit être entraîné avec une vitesse très lente: ordre de grandeur 1/100 de tour par seconde.

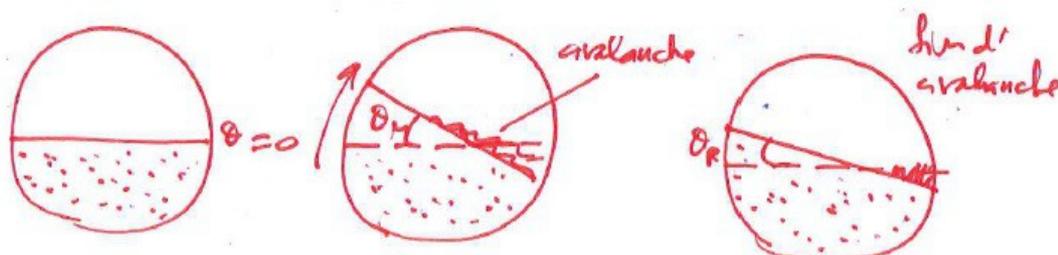


figure 3 – mise en évidence expérimentale de l'angle de mouvement et de l'angle de repos

- Application à la **larve du fourmilion**: le fourmilion creuse un trou de forme conique (en forme d'entonnoir) en éjectant les grains à l'extérieur. Il guette sa proie (fourmi, perce-oreille, etc.). Quand la proie aborde le trou, elle est entraînée par avalanche en son centre et le fourmilion la neutralise par une substance qui ne laisse que l'exosquelette. Si la proie tombe difficilement, le fourmilion envoie des grains dans l'ouverture conique pour augmenter  $\theta > \theta_M$  et donc favoriser l'avalanche.

### 3 – Formation du tas de sable

Grain à grain, le flux de sable s'écoule d'un réservoir percé d'un petit trou, et le tas commence à se générer (on l'appelle alors **générateur**). Le tas devient de plus en plus pentu et de petites avalanches (glissements de sable) se produisent, qui atteignent le bas du tas et qui élargissent son diamètre à la base.

Dès que les avalanches n'atteignent plus la base, le tas se régénère.

Au cours du processus, la pente du tas subit des modifications continues provoquées par la succession d'avalanches de tailles diverses. Observée de près, la pente n'est pas lisse, elle montre des creux et des bosses. Les grains roulent depuis le sommet et viennent combler ces irrégularités, jusqu'au moment où la pente devient lisse, sans creux qui puissent recevoir des grains supplémentaires: c'est l'**état critique**: tout nouveau grain ajouté ne peut plus se déplacer, car toutes les places sont déjà prises. Le grain dévale alors la pente en délogeant, par collision, d'autres grains qui sont alors emportés à leur tour. Le tas devient alors en phase d'**affaissement**: la hauteur du tas diminue. La pente redevient irrégulière, et le cycle recommence (expérience proposée n°4, figure 4).

expérience proposée n°4: formation d'un tas de sable

Faire couler du sable par un entonnoir et observer les différentes phases de formation du tas suivantes (figure 4):

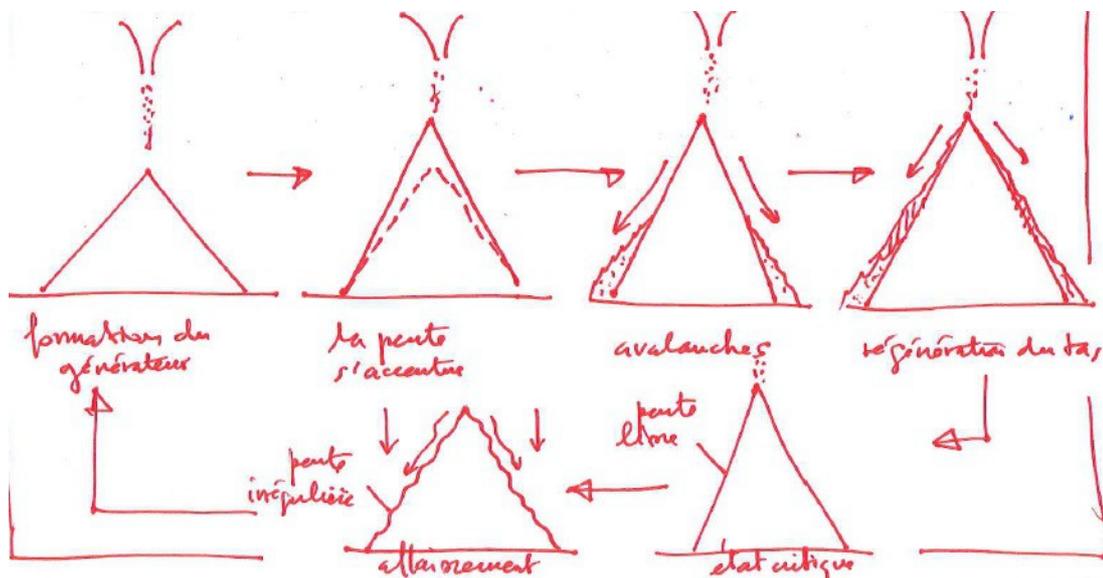


figure 4 – formation et évolution d'un tas de sable

### 4 – Effet de voûte dans les milieux granulaires

Observer un sablier: lorsqu'on le retourne, à l'inverse de la surface libre horizontale d'un liquide, la surface libre du sable dans le compartiment supérieur se creuse: l'écoulement est donc plus rapide dans la partie centrale<sup>1</sup>. dans le compartiment inférieur un tas conique se forme, centré sur la verticale du jet

<sup>1</sup> On objectera que l'écoulement d'un volume d'eau dans, par exemple, un évier, s'accompagne d'un creux centré sur l'orifice d'évacuation: mais il s'agit d'un écoulement tourbillonnaire (un « puits »), ce qui s'explique par des arguments très différents de ceux d'un volume de sable. Pour celui-ci, le creux formé au centre est formé par un écoulement radial, centré

de sable, dont l'angle que la pente forme avec la base ( $\theta_R \leq \theta \leq \theta_M$ ) ne varie pratiquement pas lorsque le tas grandit: les avalanches qui se déclenchent sur la pente du tas maintiennent par auto-régulation une valeur constante en moyenne.

Pendant la durée de l'écoulement, le débit du sablier reste pratiquement constant (d'où son emploi pour la mesure du temps). Cela se produit sous deux conditions:

- diamètre de l'orifice >> taille des grains → pas de blocage des grains;
- diamètre de l'orifice << hauteur du sable dans le compartiment supérieur.

A la différence d'une colonne d'eau qui se vide avec un débit qui diminue avec la vidange (car la pression d'évacuation diminue avec la hauteur d'eau dans le réservoir)<sup>2</sup>, l'écoulement dans le sablier est actionné par des forces de distribution différente:

- Au niveau de l'orifice les grains sont soumis uniquement à la force de pression des couches immédiatement supérieures;
- Le poids des grains loin de l'orifice est donc redirigé vers les parois par des chaînes de forces entre les grains: c'est l'**effet de voûte**;
- Donc, uniquement quand le réservoir est presque vide, la pression sur les grains dans l'orifice, et donc leur débit, diminuent;
- Le poids des grains loin de l'orifice est renvoyé en permanence vers les parois latérales par un réseau continu de lignes de forces. Ce réseau évolue en permanence durant l'écoulement, et dans certains cas, des voûtes stables peuvent se créer et provoquer un blocage complet (exemple de l'écoulement du riz bloqué dans un entonnoir).

**expérience proposée n°5: Vidange d'un sablier, et blocage du riz dans un entonnoir par effet de voûte.**

Exemples d'application de l'effet de voûte:

- **Ballasts de chemins de fer pour les trains:** Grâce à l'effet de voûte, la matière granulaire est un support idéal pour consolider les voies devant supporter des véhicules très lourds et très rapides comme les trains (ballasts). Le ballast est un milieu poreux, il assure donc l'infiltration de l'eau de pluie. L'empilement des grains (pierres dures ou porphyre de quelques centimètres de diamètre) tend, par effet de voûte, à rediriger vers l'horizontale les forces verticales appliquées en un point (théorie développée par l'ingénieur P. Dantu, vers 1950), les forces verticales sont alors transformées en contraintes horizontales plus faibles réparties sur une surface plus large. La pression au sol est diminuée de manière spectaculaire.
- **Écoulement dans les silos, effet Janssen** (1895): Mise en évidence expérimentale de l'effet de voûte dans les silos responsable du blocage de l'écoulement des grains (Roberts 1884, Janssen 1895):  
Soit un silo cylindrique dont le fond est un piston mobile suivant l'axe vertical. On verse une masse  $M$  de grains. Soit  $m$  la masse des grains au-dessus du piston responsable de son déplacement. Pour un liquide, on aurait  $m = M$ , mais pour un milieu granulaire, l'observation montre que  $m < M$ , la masse apparente  $m$  diffère de la masse totale  $M$  parce qu'une partie des grains a une masse écrantée par les parois verticales du silo, par effet de voûte.  $m$  dépend de  $M$  et croît avec elle, mais de façon non linéaire: une saturation de  $m$  apparaît,  $m_0$ , lorsque la hauteur  $H$  des grains dans le silo dépasse le diamètre  $D$  du silo (figure 5). C'est l'effet d'écrantage, ou **effet Janssen**, qui s'explique comme suit. Les lignes de contraintes qui propagent le poids des grains ne sont pas verticales mais sont déviées horizontalement vers les parois latérales et, par effet de frottement, transfèrent vers les parois une partie de la masse qu'elles véhiculent.

---

sur l'orifice, et non pas tangentiel, c'est-à-dire tourbillonnaire comme pour un liquide. Pour plus d'explications sur l'écoulement tourbillonnaire d'un liquide, voir l'article du même site: *Sphère en suspension dans un jet d'air vertical: une occasion de parcourir quelques effets et théorèmes en mécanique des fluides* (Frédéric Élie, mai 2014)

2 Voir l'article du même site: *Vidange d'un récipient* (Frédéric Élie, 27/02/2004)

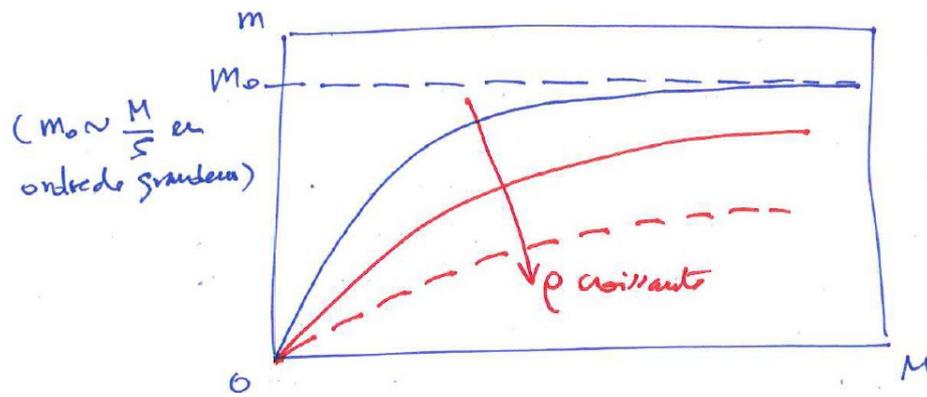


figure 5 – courbe de Janssen masse apparente  $m = f(M)$ ,  $M$  masse totale des grains dans un silo, avec  $M$  fonction de la hauteur  $H$  dans le silo pour une densité  $\rho$  donnée, que l'on peut changer en aérant plus ou moins le tas (modification de la compacité)

La théorie, que l'on verra plus loin, montre la **relation de Janssen**:

$$m = m_0 (1 - \exp(-M/m_0))$$

avec:  $m_0 = \frac{\rho \pi R^3}{2 K \mu_s}$  (1)

où:  $\mu_s$  coefficient de friction aux parois,  $\rho$  masse volumique du milieu granulaire (attention: à ne pas confondre avec la masse volumique individuelle des grains!),  $K$  coefficient de Janssen,  $R$  rayon du tube cylindrique (silo).

**expérience proposée n°6:** mise en évidence de la masse apparente  $m$  intervenant dans l'effet Janssen – On dispose du sable dans un cylindre dont le fond est relié à un piston mobile verticale. Le tout est posé sur le plateau d'une balance. L'équilibration de la balance s'obtient en ajoutant sur l'autre plateau une masse  $m$ , inférieure à celle du tas de sable  $M$ : c'est la masse apparente (figure 6).

D'autre part, pour vérifier, dans (1), que la masse de saturation  $m_0$  est proportionnelle à  $R^3$ , choisir plusieurs valeurs de  $R$  pour obtenir la courbe de Janssen  $m = f(M; R)$  et donc  $m_0 = g(R)$ .

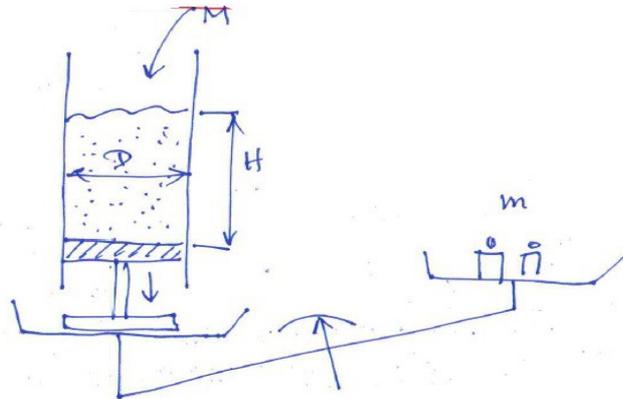


figure 6 – mise en évidence de l'effet Janssen

**expérience proposée n°7:** le bâton planté dans du sable (ou tout milieu pulvérulent), qui met en évidence l'effet de voûte:

- 1 – Planter le bâton dans du sable contenu dans un récipient en plastique;
- 2 – Ajouter un peu de sable et frapper plusieurs fois la paroi du récipient;
- 3 – Répéter 1 et 2 à plusieurs reprises;
- 4 – Essayer de retirer le bâton doucement: le récipient se soulève tout entier!
- 5 – Pour retirer le bâton il suffit de frapper sèchement le récipient.

Explication: les contraintes de chaque grain, véhiculées par leurs poids, se propagent suivant une ligne

et finissent par se concentrer sur la circonférence du bâton. C'est encore l'effet de voûte. Le récipient et son contenu se soulèvent parce que lorsque l'on tire le bâton on emmène les contraintes liées au bâton et celles liées aux parois, celles situées sur le fond demeurant plus faibles. On pourrait ainsi soulever une cathédrale en la tirant par sa voûte, son dôme, où se concentrent les contraintes.

NB: L'expérience marche d'autant mieux que les parois du récipient sont rugueuses, car une paroi lisse implique des frottements nuls.

Autres remarques ou exemples:

- Pour un milieu granulaire sous contraintes, son comportement quasi-statique résulte d'un équilibre à chaque instant des effets macroscopiques issus de la contribution de causes microscopiques. Ce point, non développé ici, est traité en [6].
- Obtention d'une **arête parabolique** avec un tas de sable: on a vu plus haut que l'angle à la base du cône formé par un tas de sable reste pratiquement constant et varie entre l'angle de mouvement et l'angle de repos, de valeurs très voisines. On obtient cette arête de la manière suivante:

*expérience proposée n°8* (figure 7): formons un tas de sable sur une plaque, à proximité de son bord rectiligne, de telle sorte que le rayon de la base du cône formé soit plus large que la distance entre le centre du disque de base et le bord de la plaque. Nous verrons plus en détail, dans cet article, que la pente du tas demeure pratiquement constante. Le fait que la pente reste constante entraîne que le sable supplémentaire qui atteint le bord est en avalanche dont l'angle est le même que celui de la pente du cône: on obtient l'intersection d'un plan incliné et du cône de même pente; l'arête formée par cette intersection est donc une parabole.

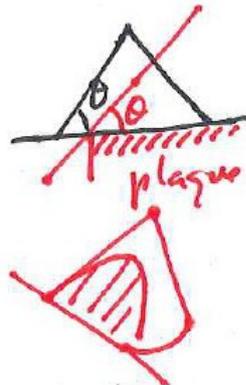


figure 7 – obtention d'une parabole par l'intersection d'un plan d'avalanche et d'un cône situé près du bord rectiligne d'une plaque

- Tas de sable au repos - Les forces entre les grains sont particulières. Les contacts entre grains sont « imparfaits »: pour les décrire on utilise des modèles non linéaires; souvent, même, les grains voisins ne se touchent pas (contacts ouverts). Mais en appuyant sur le tas de sable on peut les faire se toucher (contacts fermés). On montre que, pour cela, la force d'appui à exercer croît comme une puissance supérieure ou égale à 4. Par ailleurs la stabilité des pentes de remblais peut être étudiée par la **méthode de Bishop**, que l'on ne traitera pas ici: voir [10].
- Milieu granulaire comme **matériau dissipatif** – La plupart des milieux granulaires ont les propriétés et comportements mécaniques suivants:
  - Les chocs entre les grains ne sont jamais élastiques (on le verra plus loin);
  - A la surface des grains, les déformations sont plastiques;
  - L'énergie mécanique, due aux chocs, ne se conserve pas au niveau local (un grain et son voisinage immédiat);
  - Le milieu granulaire revient très vite au repos sans apport continu d'énergie;
  - Les zones spontanément denses deviennent encore plus denses;
  - Le milieu granulaire se comporte comme un fluide non newtonien (ses frottements varient

avec les contraintes): c'est la **loi de Bagnold**.

- Encore la **dilatance de Reynolds**:
  - Augmentation de volume d'un milieu granulaire au cours d'une déformation sous contraintes;
  - On a vu que l'origine de la déformation est dans l'empêchement stérique des grains (impossibilité de se déplacer librement à cause des grains voisins);
  - Leur mouvement n'est facilité que si l'on ouvre le volume;
  - La densité du milieu granulaire pour laquelle ce mouvement devient possible est la **densité de Reynolds**.
- Écoulement d'un milieu granulaire depuis un réservoir (silo ou sablier) [7]: **loi de Beverloo** (1961): le débit d'écoulement est constant à cause de l'effet de voûte au niveau du goulet (voir Annexe 2). L'expérience proposée suivante exploite cet effet:

**expérience proposée n°8bis: expérience de J. Duran avec le sablier** – Lorsqu'on serre les doigts au niveau du goulet d'un sablier indéformable, l'écoulement du sable s'arrête et reprend spontanément au bout d'une vingtaine de secondes. La chaleur apportée par les doigts et le courant d'air chauffé ascendant dans le tube supérieur ont modifié la compacité et donc la ligne des contraintes. Une fois l'équilibre thermique établi, l'écoulement reprend.

- Encore l'**effet ballasts des chemins de fer** (expérience proposée n°9) – Sous l'action d'une force quasi-statique la matière granulaire ne se comporte ni comme un solide ni comme un liquide qui transmettrait les pressions. Elle ne transmet pas la force, ici le poids, dans la seule direction d'application, mais la répartit dans plusieurs directions donc sur une surface plus large. Les paramètres a priori pertinents sont: épaisseur du matériau granulaire, granulométrie, densité (varie avec le tassement, donc la compacité).

**expérience proposée n°9: expérience simple pour mettre en évidence le poids apparent  $m$  qui intervient dans l'effet Janssen** (relations (1)): figure 8.

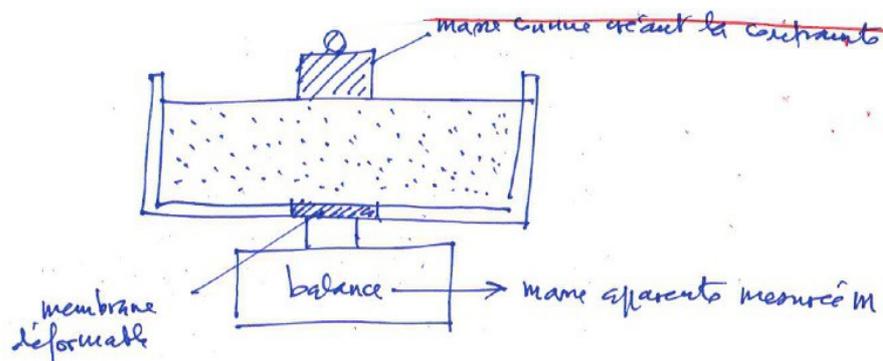


figure 8 – mesure de la masse apparente de l'effet Janssen

## 5 – Frottement solide et modèle de Janssen

### Comportement d'un milieu granulaire: entre celui des solides et celui des liquides:

- Quand on fait tourner dans un tambour un milieu granulaire, il tourne en bloc comme un solide;
- Mais lorsque sa surface libre a une inclinaison critique (angle d'avalanche) une couche de grains s'écoule le long de la pente (cf. expérience proposée n°3).

Cet angle maximum de stabilité est fonction des propriétés du frottement solide entre les grains. Nous allons donc étudier les frottements, en général, et leurs effets particuliers entre les grains d'un milieu granulaire.

### Frottement solide: loi de Guillaume Amontons (1699) et de Charles de Coulomb (1776):

Lorsque deux solides frottent l'un contre l'autre, une force de friction opposée au déplacement apparaît à la surface de contact (figure 9):

Soit un solide de poids  $P$  (en module) posé sur un plan horizontal rugueux.

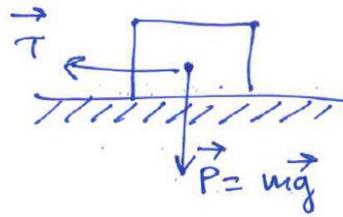


figure 9

La force tangentielle  $\vec{T}$  nécessaire pour mettre le solide en mouvement ne dépend pas de la surface de contact, mais est proportionnelle au module du poids  $\vec{P}$  : c'est la **loi d'Amontons**<sup>3</sup>.

Pour le frottement statique (solide initialement au repos), le résultat précédent prend la forme de la **loi de Coulomb**:

$$T = \mu_S P \quad (2a)$$

$\mu_S$  est le **coefficient de frottement statique**. En conséquence, sur un plan incliné, l'angle  $\phi$  à partir duquel le solide commence à glisser est tel que (figure 10):

$$N = P \cos \phi \quad T = \mu_S N \quad \text{donc:}$$

$$\mu_S = \tan \phi \quad (2b)$$

(en l'occurrence:  $T = P \sin \phi$  ).

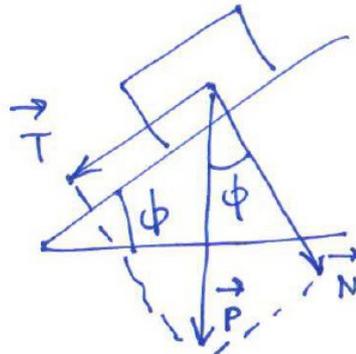


figure 10

expérience proposée n°10: vérification de la loi Da Vinci-Amontons (figure 11)

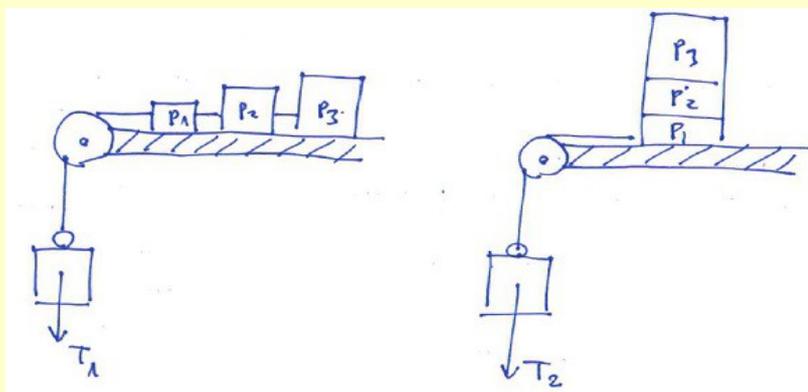


figure 11

<sup>3</sup> Cette observation a été faite la première fois par Leonardo da Vinci, reprise par Amontons, et vérifiée par La Hire. Euler (1750) introduit la notion de frottement statique et de frottement dynamique.

On observe que:  $T_1 = T_2 = T$  et:  $T = \mu_S \sum_k P_k = \mu_S P$

**Frottement dynamique:** il intervient lorsque le solide est déjà en mouvement. La traction nécessaire pour maintenir un mouvement à vitesse constante fait intervenir le coefficient de frottement dynamique  $\mu_D$  (Euler). On a toujours:

$$\mu_D \leq \mu_S < 1 \quad (3a)$$

(Il est plus facile de maintenir un objet en mouvement que de le mettre en mouvement) ainsi que:

$$T = \mu_D N \quad (3b)$$

Le coefficient de frottement dépend peu de la nature des matériaux en contact:

- friction métal/métal:  $\mu_S < ou \approx 1$
- friction roche/roche:  $\mu_S \approx 0,7$
- friction papier/papier:  $\mu_S \approx 0,4$

**Interprétation microphysique des lois du frottement** (figure 12): Les surfaces en contact ont, ont petites échelles, de très nombreuses aspérités, de la taille de l'ordre de 1 micron.

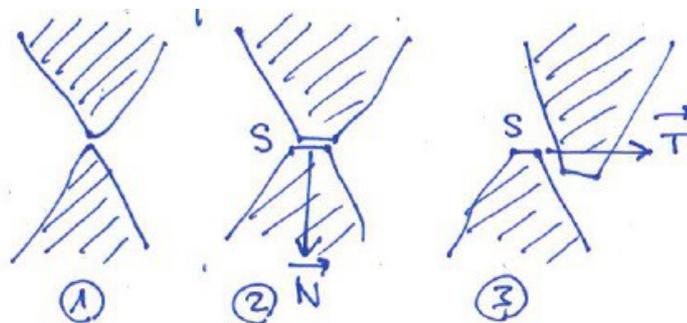


figure 12

D'après la loi de Coulomb, la traction  $T$  nécessaire pour mettre en mouvement le solide ne dépend pas de la surface de contact. On peut donc limiter le raisonnement au contact entre deux aspérités qui se font face:

- 1 – Avant que ne s'exerce la force entre les deux solides, les deux aspérités ne se touchent pas;
- 2 – Sous l'action de la force  $\vec{N}$  qui s'exerce entre les deux solides, les deux aspérités se touchent et se déforment au-delà de la limite d'élasticité, sous la contrainte normale  $\sigma_N$  exercée à la surface de contact  $S$ , donc:

$$N = \sigma_N S$$

- 3 – Sous l'action d'une force tangentielle  $\vec{T}$  les surfaces en contact et déformées se séparent, avec une contrainte tangentielle  $\sigma_T$  exercée sur la surface  $S$ :

$$T = \sigma_T S$$

Le coefficient de frottement statique  $\mu_S$  ne dépend donc pas de la surface de contact puisque

$$\mu_S = \frac{T}{N} = \frac{\sigma_T}{\sigma_N}$$

Pour les matériaux isotropes  $\sigma_T$  et  $\sigma_N$  sont pratiquement proportionnels et le coefficient de

proportionnalité varie peu avec la nature de ces matériaux. Pour les métaux:  $0,6 \leq \frac{\sigma_T}{\sigma_N} \leq 1,2$  .

**Transmission des forces dans un empilement granulaire: modèle de Janssen** (H. A. Janssen, 1895):

L'écoulement des grains d'un empilement est gouverné par la manière dont se répartissent les forces en son sein. L'observation montre que, dans un réservoir vertical (comme un silo à grains) les contraintes verticales dans un milieu granulaire tendent à être transférées vers les parois latérales, donc à prendre une direction horizontale: une masse M de grains dans un silo ne transmet vers le fond qu'une force mg où m est la masse apparente ( $m < M$ ) (cf. expérience proposée n°6).

La différence de masse ( $M - m$ ) produit une contrainte horizontale vers les parois (effet d'écrantage) et ne contribue pas à la force de pesée sur le fond.

Pour modéliser cet effet d'écrantage, la théorie de Janssen s'appuie sur les hypothèses suivantes (figure 13):

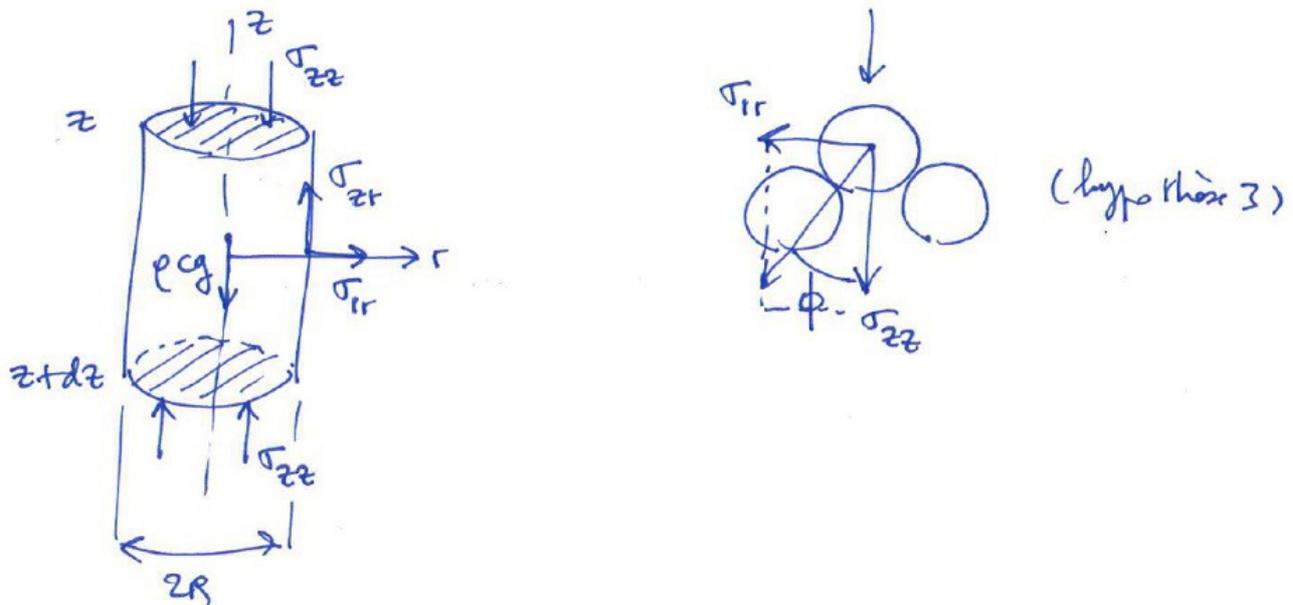


figure 13 – modèle de Janssen

- hypothèse 1: les contraintes sont indépendantes de la position radiale à l'intérieur du silo: elles sont uniformes pour une section de cote z (modèle en couches);
- hypothèse 2: sur les parois, le milieu granulaire est en tout point au seuil de glissement: la friction est totalement mobilisée sur les parois ( $\sigma_{zr}$  joue le rôle de T et  $\sigma_{rr}$  celui de N):

$$\sigma_{zr} = \mu_s \sigma_{rr}$$

- hypothèse 3: les contraintes radiales sont proportionnelles aux contraintes verticales  $\sigma_{zz}$  :

$$\sigma_{rr} = K_J \sigma_{zz}$$

où  $K_J$  est le **coefficient de Janssen**, caractéristique du milieu granulaire. Cette hypothèse 3 exprime l'**effet de voûte**: les efforts verticaux sont acheminés vers les parois par des chaînes de contraintes en suivant un angle  $\phi$  tel que:

$$K_J = \tan \phi \quad (4)$$

NB: pour un liquide on a  $K_J = 1$ .

Soit c la **compacité** du milieu granulaire:

$$c = \frac{\text{volume des grains}}{\text{volume total}}$$

En supposant que les grains sont des billes de même diamètre, l'entassement des billes le plus étroitement possible conduit à une structure cubique à faces centrées ou bien à un réseau hexagonal compact. dans ce cas, on montre que:

$$c = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} = 74\%$$

c'est la valeur maximale que l'on puisse obtenir avec des billes de même diamètre. Si l'empilement est aléatoire et statique, on montre que la compacité qui correspond à l'empilement le plus dense (**Random Close Packing**) est:  $c = 0,635$ .

Si  $\rho$  est la masse volumique des billes (et non du tas !), la masse d'une couche du cylindre d'épaisseur  $dz$  est corrigée de la compacité:

$$dm = \rho c \pi R^2 dz$$

où  $R$  est le rayon du cylindre. Le bilan des forces exercées sur cette couche, supposée à l'équilibre, exprime que son poids est compensé par les forces dues aux contraintes:

$$g dm = \pi R^2 \sigma_{zz}(z+dz) - \pi R^2 \sigma_{zz}(z) + 2\pi R \sigma_{zr} dz$$

Or, par hypothèse:  $\sigma_{zr} = \mu_S \sigma_{rr} = \mu_S K_J \sigma_{zz}$ , d'où:

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} + \frac{1}{l_J} \sigma_{zz} = \rho c g$$

où:

$$l_J = \frac{R}{2\mu_S K_J} \quad (5)$$

est la **longueur de Janssen**, ou d'écrantage.

L'intégration entre  $z = 0$  (surface libre) et le bas de l'empilement  $z = H$  donne:

$$\sigma_{zz}(H) = \rho c g l_J (1 - e^{-H/l_J}) \quad (6)$$

Le poids apparent  $m$  est associé à la force due à la contrainte exercée sur le fond:

$$\sigma_{zz}(H) \pi R^2 = m g = \pi R^2 \rho c g l_J (1 - \exp(-H/l_J))$$

donc:

$$m = \frac{\pi R^3 \rho c}{2\mu_S K_J} (1 - \exp(-H/l_J))$$

or:  $\frac{H}{l_J} = \frac{2\mu_S K_J H}{R}$  et  $m_0 = \frac{\pi R^3 \rho c}{2\mu_S K_J}$  (**masse de saturation**), d'où  $2\mu_S K_J = \frac{\pi R^3 \rho c}{m_0}$  et donc:

$\frac{H}{l_J} = \frac{M}{m_0}$ . Finalement on retrouve bien la formule (1) (où  $K$  joue le rôle de  $K_J$ ):

$$m = m_0 (1 - \exp(-M/m_0))$$

avec:  $m_0 = \frac{\rho \pi R^3}{2 K_J \mu_S} = \pi \rho c l_J R^2 \quad (7)$

Deux familles de comportements se présentent selon la valeur de la hauteur  $H$  vis-à-vis de  $l_J$  :

- $H \ll l_J \rightarrow \sigma_{zz}(H) \approx \rho c g H$  : la contrainte sur le fond de la colonne est proportionnelle à la hauteur de l'empilement  $\rightarrow$  le comportement du milieu granulaire est de type « **hydrostatique** » comme pour un liquide;
- $H \gg l_J \rightarrow \sigma_{zz}(\infty) \approx \rho c g l_J$  : la contrainte sur le fond devient indépendante de la hauteur de l'empilement lorsque celle-ci est déjà très grande devant la longueur d'écrantage  $l_J$  : phénomène de **saturation**. Tout ajout de matériau dans la colonne ne modifiera pas la contrainte sur le fond mais sera rejeté sur les frictions aux parois latérales (cf. expérience proposée n°6).

Si  $P = \sigma_{zz} \pi R^2$  est le poids apparent mesuré au fond de la colonne, la relation (6) s'écrit encore:

$$P / \pi R^2 = \rho c g l_J (1 - \exp(-H/l_J)) = m g / \pi R^2 \quad (8)$$

La courbe de la relation (6) est donnée à la figure 14: elle fait apparaître la contrainte de saturation atteinte lorsque la hauteur de l'empilement devient comparable à la longueur d'écrantage, soit:

$$(\sigma_{zz})_{\text{sat}} = \frac{m_0 g}{\pi R^2} = \rho c g l_J$$

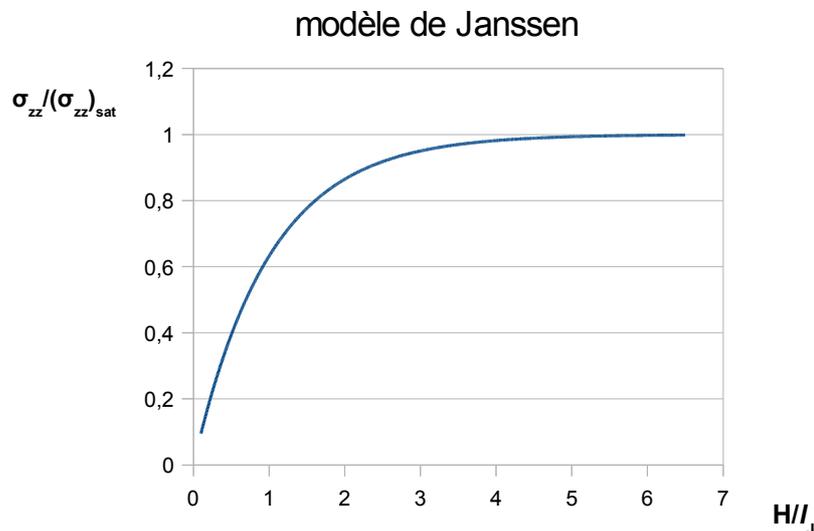


figure 14 – modèle de Janssen; NB: la courbe permet de déterminer  $l_J$  donc  $K_J$  et la compacité  $c$  si l'on connaît la masse volumique du milieu granulaire  $\rho$

## 6 – Caractérisation des milieux granulaires [3] [9]

Les échelles de longueur et de temps utilisées pour décrire le comportement des milieux granulaires sont du domaine macroscopique: ni les effets d'agitation thermique moléculaire, ni a fortiori les effets quantiques au niveau atomique, ne sont à prendre en considération dans cette description. La physique des milieux granulaires secs traite des comportements collectifs d'objets de taille caractéristique supérieure à 100 microns.

L'absence de mouvement brownien<sup>4</sup> des grains constitutifs d'un milieu granulaire, dans le rôle qu'il pourrait jouer dans la dynamique des grains, explique, contrairement à un liquide ou un gaz, que le milieu granulaire n'est pas le siège de mélanges spontanés. C'est l'agitation macroscopique qui peut provoquer dans un milieu granulaire la ségrégation ou le mélange des particules, car à cette échelle le libre parcours moyen des particules, les grains, est de l'ordre de grandeur des distances entre grains.

**NB:** L'observation montre que les lois physiques du comportement des milieux granulaires intéressent des objets dont les dimensions s'étendent sur plusieurs ordres de grandeur. Cela va du comportement

4 Dans un milieu granulaire la vitesse d'un grain est de l'ordre du cm/s. Un grain de verre silicaté (sable), de masse  $\sim 10^{-8}$  kg, a donc une énergie cinétique  $E_c = 1/2 m v^2 \sim 10^{-12}$  J. Si cette énergie était d'origine thermique, on aurait, selon la relation de Boltzmann,  $E_c \sim k_B T$  ( $k_B$  constante de Boltzmann =  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K) ce qui correspondrait à une température  $T$  de l'ordre de  $10^{11}$  K ! Invoquer le mouvement brownien dans la dynamique des milieux granulaires n'est donc pas réaliste.

collectif de grains de quelques centaines de microns, en passant par la dérive des blocs de glace sur les mers polaires sur des distances de la centaine de kilomètres, jusqu'aux anneaux de Saturne (particules de glace de quelques centimètres sur des distances de plusieurs kilomètres). Cela suggère que les milieux granulaires, quel que soit l'ordre de grandeur et la nature des objets, montrent des comportements universels. Autrement dit, on a affaire à une **invariance d'échelles** des comportements de milieux granulaires [11].

**Difficultés posées par la description des comportements des milieux granulaires:**

- Grand nombre de particules: une cuillère de sucre en poudre contient quelques 100000 particules; peut-on alors calculer des quantités moyennes et décrire le milieu granulaire comme un milieu continu?
- Les fluctuations thermiques sont négligeables, comme on l'a vu plus haut (dans un milieu granulaire les grains sont trop gros pour subir un mouvement brownien). Les fluctuations qu'il s'agit d'étudier se limitent donc à celles qui amènent le système dans différentes configurations où l'on peut définir des quantités macroscopiques.
- Granularité observable: en comparaison avec les fluides, la frontière entre échelles microscopiques et macroscopiques est floue pour un milieu granulaire.
- Interactions de contacts complexes: friction, chocs inélastiques...
- Milieu fortement dissipatif: un milieu granulaire dissipe facilement l'énergie. Dans le monde macroscopique granulaire, une boule de pétanque lâchée sur un tas de sable contenu dans un bac ne rebondit pas: toute l'énergie cinétique est dissipée par collisions et frictions entre tous les grains de sable.

*expérience proposée n°11:* laisser tomber une bille sur un tas de sable plan et constater l'absence de rebond. Si on utilise une balance, essayer d'évaluer la décélération en comparaison d'un rebond.

- Les milieux granulaires peuvent exister sous les états:
  - solide: tas statique dominé par les interactions de contacts entre les grains;
  - type gazeux: dominé par les régimes collisionnels lorsque le milieu est sollicité par des vibrations importantes;
  - type liquide: écoulements type sablier ou silo, dominé par des interactions à la fois de contact et frictionnelles de longue durée.

**7 – Influences de l'humidité et des charges électriques [3]**

**Effets de l'humidité:**

Dans un milieu granulaire, l'humidité ambiante peut créer des agrégats de particules (collages): le sable mouillé est plus résistant que le sable sec qui s'effrite. Ces effets d'agrégation sont d'autant plus importants que les particules sont petites: les forces capillaires deviennent du même ordre que les forces de pesanteur.

Évaluons le rayon  $R$  que doivent avoir les particules pour rester collées entre elles par la force de capillarité introduite par une pellicule d'eau, donc la condition pour que cette force soit supérieure à la force de gravité (figure 15):

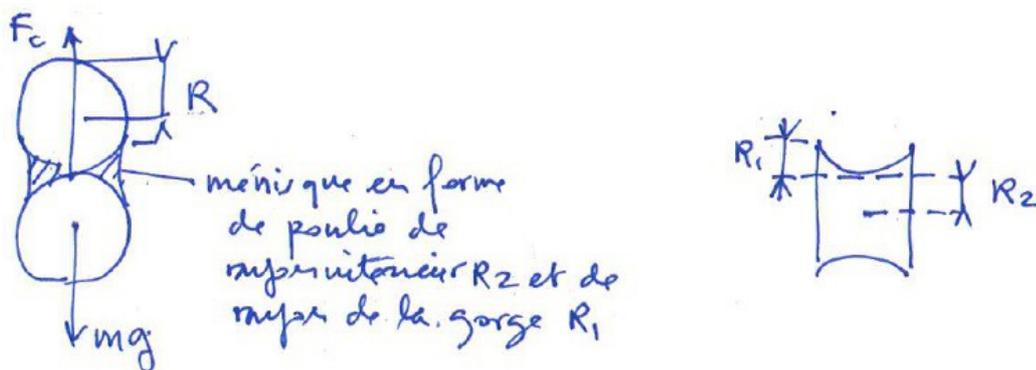


figure 15

Selon le modèle proposé par [12] le ménisque est assimilé à une poulie, et l'application de l'équation de Laplace conduit à l'expression de la force capillaire  $F_C$ :

$$F_C = \pi \gamma R_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

où  $\gamma$  tension de surface air-eau ( $\gamma = 73 \cdot 10^{-3}$  N/m),  $R_2$  est proportionnel à  $R$  (rayon du grain):  $R_2 = \alpha R$  et en ordre de grandeur  $R_2/R_1 \sim 5$ . Le seuil à partir duquel le poids l'emporte sur la force capillaire est donné par:

$$F_C = m g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$$

où  $\rho$  masse volumique individuelle des billes ( $\rho \sim 2,2$  g/cm<sup>3</sup> pour le verre silicate). D'où la taille maximale des billes:

$$R = \sqrt{\frac{4 \alpha \gamma}{\rho g}} \quad (9)$$

**Exemple:** surface complètement recouverte  $\alpha = 1 \rightarrow R \sim 1$  mm, les billes de l'ordre ou plus petites que 1 mm peuvent rester collées. Surface peu recouverte  $\alpha = 0,01 \rightarrow R \sim 100$   $\mu$ m, les billes de l'ordre ou plus petites que 100 microns peuvent rester collées.

Il est donc nécessaire de faire attention à l'humidité ambiante pour éviter l'agrégation des grains dans un milieu granulaire sec.

### Effets des charges électriques:

Lorsqu'un milieu granulaire est le siège de mouvements relatifs entre les grains, ou entre les grains et les parois, par suite par exemple d'une agitation du réservoir, des charges électrostatiques peuvent apparaître entre les grains et aussi entre les grains et les parois.

L'effet est moins important pour les billes en matériau organique. Les charges superficielles créées par friction sont à l'origine des **explosions de poussière** lorsque les gaz émanant des réactions chimiques entre grains sont explosibles.

On trouvera également en [30] comment se modifie la résistivité d'un milieu granulaire, à l'origine de l'effet Branly.

**expérience proposée n°12:** Dans un tube en plastique, empilement de petites billes en acier de diamètre 1,5 mm. On agite fortement le tube. A l'arrêt, quelques billes adhèrent aux parois, en équilibre sous les forces électrostatiques avec leurs voisines et la paroi (isolante car en plastique) (figure 16).



figure 16

La force électrostatiques est compensée par le poids de la bille, cette égalité fournit l'ordre de grandeur de la charge créée par frottement entre les grains et les parois:

$$q \sim 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

soit une densité massique de charge:

$$q/m \sim 300 \text{ } \mu\text{C/kg}$$

Les effets dus à l'humidité et aux charges électrostatiques ne seront pas pris en compte dans la suite de l'article.

## 8 – Typologie des milieux granulaires et définitions [3] [13]

- Matériau granulaire: matériau composé de constituants solides discrets qui restent en contact la plupart du temps. Sont exclus de cette définition: lits fluidisés, suspensions, etc.
- **Poudre**: matériau granulaire dont les particules sont plus petites que 100  $\mu\text{m}$ .
  - poudres granulaires: 10 à 100  $\mu\text{m}$
  - poudres superfines: 1 à 10  $\mu\text{m}$
  - poudres ultrafines: 0,1 à 1  $\mu\text{m}$
- **Solide granulaire**: matériau composé de granulés dont la taille est comprise entre 100 et 3000  $\mu\text{m}$  (3 mm).
- Solide brisé: matériau granulaire dont les particules ont des tailles plus grandes que 3 mm (éboulements rocheux, graviers pour les bétons, etc.).

**NB:** Les poudres, du fait de leurs très petites tailles, sont, comme on l'a vu, très sensibles aux effets de l'humidité et de l'environnement en général. Elles sont donc exclues de l'étude des matériaux granulaires secs.

Une présentation complète des milieux granulaires où l'on tient compte des effets de déformation, d'interactions non élastiques, de la présence du fluide interstitiel entre les grains est en référence [6].

## 9 – Mouvements frustrés, stick-slip [3] [9]

L'importance des frottements dans les milieux granulaires a déjà été évoquée plus haut. Leur modélisation détaillée est présentée dans ce paragraphe. Elle met en avant l'effet des mouvements frustrés et de coller-glisser (stick-slip).

Soient deux solides *indéformables* (S) et (S'), qui représentent deux grains, en mouvement autour de leurs points de contact C et C' (figure 17).

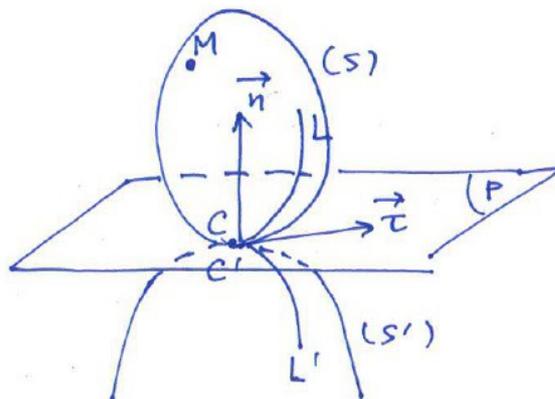


figure 17

Notations:

- (P) plan tangent à (S) et (S') au point de contact  $C = C'$
- $\vec{n}$  et  $\vec{\tau}$  normale et tangente à (P) en C et C'
- L et L' traces sur les solides (S) et (S') des points de contact C et C' lors de leurs déplacements
- M point quelconque du solide (S)

On étudie le mouvement de M, repéré dans le repère (R) lié à (S), par rapport au repère (R') lié au solide (S'):

Champ de vitesse en M dans le repère (R'):

$$\vec{V}_{(R')}(M) = \vec{V}_{(R')}(C) + \vec{MC} \wedge \vec{\omega}_n + \vec{MC} \wedge \vec{\omega}_\tau$$

où  $\vec{\omega}_n$  (pivotement) et  $\vec{\omega}_\tau$  (roulement) sont les composantes de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  sur  $\vec{n}$  et  $\vec{\tau}$  :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_\tau$$

Le solide (S') est supposé fixe.

$\vec{V}_{(R')}(C)$  : vitesse de glissement de (S) par rapport à (S');

$\vec{MC} \wedge \vec{\omega}_n = \vec{V}_P$  : vitesse de pivotement du solide (S) (rotation autour de  $\vec{n}$ ) par rapport à (S');

$\vec{MC} \wedge \vec{\omega}_\tau = \vec{V}_r$  : vitesse de roulement du solide (S) (rotation autour de  $\vec{\tau}$ ) par rapport à (S').

Les cas suivants se produisent:

**Roulement sans glissement:**  $\vec{V}_{(R')}(C) = \vec{V}_g = 0 \rightarrow$  L'axe instantané de rotation est la droite  $(C, \vec{\omega})$

$$\vec{V}_{(R')}(M) = \vec{MC} \wedge \vec{\omega}$$

Cette situation est celle où des particules restent en contact sans glisser mais roulent les unes sur les autres (cas de chaînes de particules présentant de grandes aspérités, comme des engrenages).

Cette condition conduit au phénomène de **mouvement frustré**: la rotation contraire de deux particules en contact entraîne une indétermination sur la rotation de la troisième (figure 18). A fortiori pour un empilement où les particules sont toutes en contact avec au moins une autre, certains mouvements individuels se trouvent interdits (**frustration**).

En conséquence, sont interdits les mouvements convectifs qui mettent en jeu les rotations relatives des particules dans l'édifice.

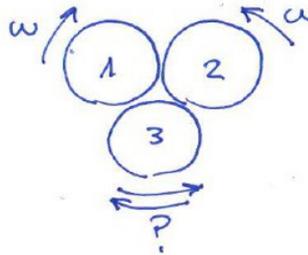


figure 18

**Glissement sans roulement:**  $\vec{V}_P = 0$  et  $\vec{V}_r = 0$

Concerne le cas d'empilements compacts où les mouvements de rotation sont gênés par des blocages stériques. Le glissement  $\vec{V}_g$  fait intervenir le frottement et est possible si l'inclinaison du plan tangent commun,  $\theta$ , reste inférieure ou égale à l'angle maximal de Coulomb (figure 19):

$$\tan \theta \leq \mu_s$$

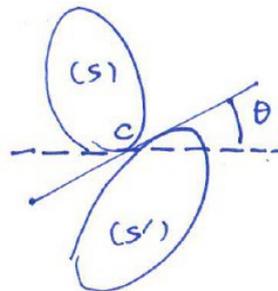


figure 19

L'angle  $\phi$  défini par  $\mu_s = \tan \phi$  définit un cône centré autour de  $\vec{n}$ , normale au plan tangent au point de contact C (**cône de frottement**) (figure 20):

- roulement sans glissement: si la réaction  $\vec{R}$  est dans le cône de frottement;

- glissement sans roulement: si la réaction  $\vec{R}$  est à l'extérieur du cône de frottement.

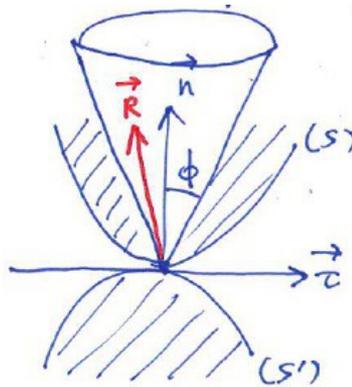


figure 20 – cône de frottement

### Stick-slip (coller-glisser):

Exemple très connu: grincement de porte, ou crissement de la craie sur le tableau noir, crissement d'un archet sur les cordes d'un violon, broutement des machines-outils, etc. Ce mouvement est très présent dans les milieux granulaires.

Modélisation (figure 21):

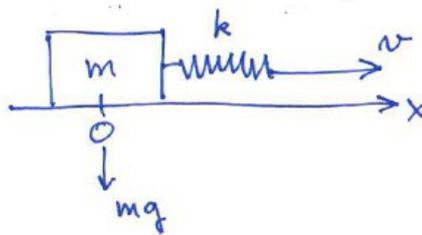


figure 21

Soit un bloc solide sur un substrat horizontal, et tiré par un ressort de raideur  $k$ , le long de l'axe  $Ox$ . A l'instant initial  $t = 0$ , le ressort est non tendu, de longueur initiale  $x = x_0$ . On tire le ressort avec une vitesse  $v$  (attention: ce n'est pas la vitesse du bloc !), ce qui crée la tension  $T$  du ressort (force tangentielle); une force de friction apparaît alors.

On note  $N = mg$  la force normale, qui se réduit ici au poids du bloc.

L'allongement du ressort est:  $\varepsilon = x - x_0 = vt$

- Au début, le bloc est à l'arrêt et ne glisse pas tant que  $T < T_C = \mu_S N$ , on alors  $\varepsilon = vt$  jusqu'à ce que, au bout d'un certain temps  $t_1$ , la force de traction, liée à l'allongement du ressort, atteigne la valeur critique  $T_C$ :  $T_C = k(x - x_0) = \mu_S N = k(vt_1) = \mu_S mg$  soit un temps  $t_1$  égal à

$$t_1 = \frac{\mu_S mg}{vk}$$

- Ensuite le bloc glisse et la force de friction est devenue  $F = \mu_D N$  (frottement dynamique), l'équation du mouvement est alors:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k(x - x_0) - \mu_D N$$

soit encore, puisque  $\varepsilon = x - x_0$ :

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{k}{m}\varepsilon = \frac{\mu_D}{m}N$$

On a donc un mouvement oscillatoire de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  où l'allongement oscille autour de la valeur  $\varepsilon_0 = \frac{\mu_D N}{k} = \frac{\mu_D m g}{k}$ . Cette équation du mouvement, compte tenu des conditions initiales  $t = t_1 \rightarrow \varepsilon(t_1) = vt_1$ , a pour solution:

$$\varepsilon(t) = \frac{\mu_D g}{\omega^2} + A \sin(\omega(t-t_1) + \varphi)$$

avec:  $A = \frac{v}{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega v}\right)^2 (\mu_S - \mu_D)^2}$  (10)

$$\tan \varphi = \frac{g}{\omega v} (\mu_S - \mu_D)$$

Lors des oscillations la vitesse du bloc repasse, à une date  $t_2$ , à une vitesse  $v$  pour laquelle l'allongement du ressort, qui s'est resserré, correspond à une tension insuffisante du ressort par rapport à la force de friction. A cette date  $t_2$ , on a donc:

$$T(t_2) = k \varepsilon(t_2) = T_C = \mu_S N = T(t_1)$$

et donc:  $\frac{d\varepsilon}{dt}(t_2) = \frac{d\varepsilon}{dt}(t_1) = v = A \omega \cos \varphi = A \omega \cos(\omega(t_2-t_1) + \varphi)$ , ce qui donne l'égalité  $\cos(\omega(t_2-t_1) + \varphi) = \cos \varphi$  qui est satisfaite pour:  $\omega(t_2-t_1) + \varphi = 2\pi - \varphi$  d'où  $t_2$  tel que:

$$t_2 - t_1 = 2 \frac{\pi - \varphi}{\omega} \quad (11)$$

A la date  $t = t_2$ , l'allongement du ressort est alors:

$$\varepsilon(t_2) = \frac{\mu_D g}{\omega^2} + A \sin(\omega(t_2-t_1) + \varphi) = \frac{\mu_D g}{\omega^2} - A \sin \varphi$$

Pour  $t > t_2$ , le bloc ne se déplace plus à cause de la supériorité du frottement, et la tension du ressort est assurée avec la vitesse constante  $v$ , jusqu'à ce que, de nouveau, à une date  $t_3$  l'allongement  $\varepsilon(t_3) = v(t_3 - t_2)$  soit suffisant pour que  $T = T_C$ :

$$T_C = \mu_S N = k \varepsilon(t_3) = k v(t_3 - t_2)$$

soit:

$$t_3 - t_2 = \frac{\mu_S N}{k v} = t_1 \quad (12)$$

et le cycle recommence.

Le mouvement du bloc est donc une succession de phases où il est « collé », pendant  $t_3 - t_2 = t_1$ , c'est-à-dire à l'arrêt, et de phases où il « glisse » suivant la loi horaire d'un mouvement oscillatoire du ressort, pendant  $t_2 - t_1$  (figure 22). La périodicité de cette succession est donc:  $t_0 = t_1 + (t_2 - t_1)$ , soit:

$$t_0 = \frac{\mu_S N}{k v} + 2 \frac{\pi - \varphi}{\omega} \quad (13)$$

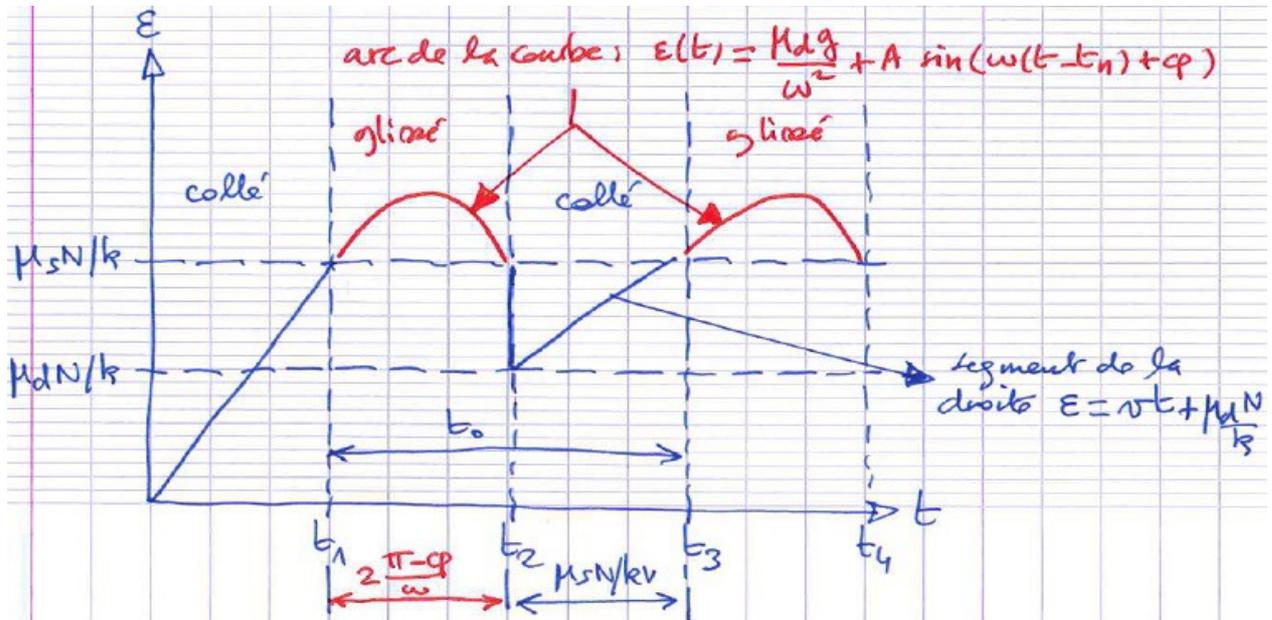


figure 22 – représentation simplifiée du phénomène stick-slip

## 10 – Chocs des grains et modèle de Hertz [3] [9]

L'importance des chocs entre grains dans un milieu granulaire a été aussi évoquée, pour la dissipation de l'énergie mécanique qu'ils entraîne, notamment basée sur le modèle de Hertz selon lequel les déformations des particules solides sont liées aux forces par une loi non linéaire. En voici un développement.

### Cas statique: force normale entre deux particules et loi de Hertz

Deux billes sphériques, de rayon R identique, en contact, sont soumises à une force normale  $\vec{F}$  (figure 23). Au niveau du contact, les deux billes se déforment: leur interface subit un écrasement  $\delta$  que l'on peut relier à la force F. On suppose les sphères élastiques (problème de Hertz, 1880).

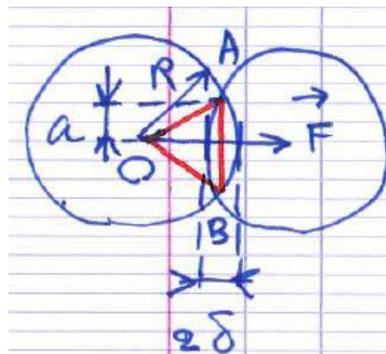


figure 23

Au niveau du contact, la **loi de Hooke** qui relie la contrainte  $\sigma$  à la déformation  $\varepsilon$  s'applique:

$$\sigma = E \varepsilon$$

où E est le module d'élasticité (ou module d'Young).  $\sigma$  est de l'ordre de la force par unité de la surface de contact:

$$\sigma \approx F/a^2$$

où a est le rayon de la surface de contact  $a \neq R$ .

La déformation  $\varepsilon$  est de l'ordre du déplacement  $u_x$  de la surface au contact par unité de longueur de la

zone où s'exerce la contrainte:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_X}{\partial x} \approx \frac{\delta}{a}$$

d'où  $\sigma = E \frac{\delta}{a} = \frac{F}{a^2} \rightarrow F \approx E a \delta$

Dans le triangle OAB (figure 24):

$$(R - \delta)^2 + a^2 = R^2 = R^2 + \delta^2 - 2\delta R + a^2 \rightarrow a^2 = 2\delta R - \delta^2 \approx 2\delta R$$

car  $\delta^2 \ll R^2$ , donc:

$$a \approx \sqrt{2\delta R} \rightarrow F \approx E \sqrt{2R\delta} \delta$$

soit encore:

$$F \approx k \delta^{3/2} \quad (14)$$

avec:  $k = E \sqrt{2R}$

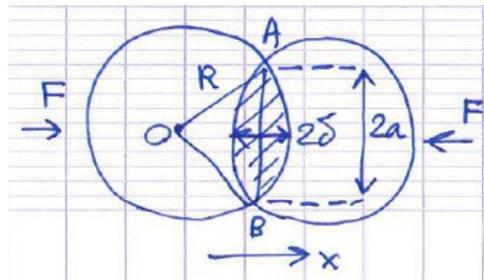


figure 24

Le calcul plus exact de Hertz donne:

$$k = \frac{\sqrt{2RE}}{3(1-\nu^2)}$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Malgré l'hypothèse d'un matériau parfaitement élastique (modèle linéaire de Hooke) le résultat fournit un comportement **non linéaire** en  $\delta$ : plus on appuie, plus le matériau devient dur (sa raideur augmente).

**Exemple:** billes de verre silicate:  $R = 2 \text{ mm}$ ,  $k = 1,4 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-2}$   $\rightarrow$  une masse de 1 kg qui appuie sur une bille crée un écrasement  $\delta = 3 \mu\text{m}$  très faible.

### Cas non statique: collisions entre les particules

En présence de collisions et de chocs entre les particules d'un milieu granulaire, le raisonnement précédent ne convient plus: il faut tenir compte du comportement partiellement inélastique des particules, qui est responsable de rebonds entre les particules, au cours desquels une partie de l'énergie est dissipée aux autres sous forme d'énergie thermique. Cette perte d'énergie est caractérisée par le **coefficient de restitution**  $\varepsilon$  (ou coefficient d'inélasticité)<sup>5</sup>: dans l'exemple d'une bille entrant en collision avec un plan, avec la vitesse d'impact  $V_i$ , elle va rebondir avec une vitesse de rebond  $V_r = -\varepsilon V_i$  (ordre de grandeur:  $\varepsilon = 0,9$  pour l'acier,  $0,6$  pour l'aluminium).

<sup>5</sup> Attention aux notations: cette fois  $\varepsilon$  désigne le coefficient de restitution et non plus la déformation introduite lors de la théorie de Hertz !

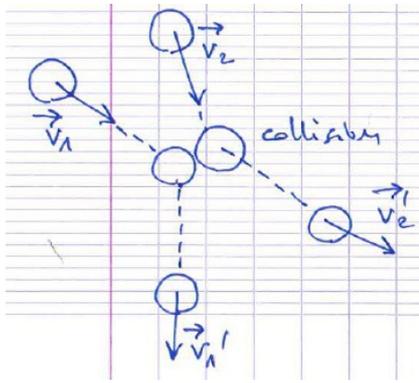


figure 25

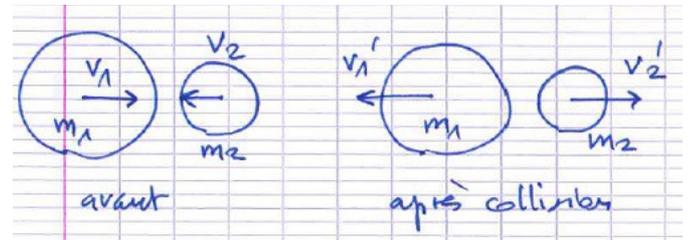


figure 26  
(les valeurs de  $V$  sont algébriques)

Dans le cas de deux particules en collision, 1 et 2, on a (figure 25):

$$\vec{V}'_2 - \vec{V}'_1 = -\varepsilon(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (15)$$

La relation (15) exprime l'**hypothèse de Newton**.

Si les particules qui s'entrechoquent, supposées sphériques, sont de même matériau, les exemples de valeurs de  $\varepsilon$  sont:

- billes de verre:  $\varepsilon = 15/16$
- billes d'ivoire:  $\varepsilon = 8/9$
- billes d'acier:  $\varepsilon = 5/9$  (noter la différence avec le cas d'un choc sur une paroi plane rigide)
- billes de liège:  $\varepsilon = 5/9$
- billes de bois:  $\varepsilon = 1/2$

Dans le cas d'une collision frontale (figure 26), on montre, à partir de la relation précédente, que le choc s'accompagne d'une perte d'énergie cinétique:

$$T' - T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \varepsilon)^2 (V_1 - V_2)^2 \quad (16)$$

et que les vitesses après le choc sont:

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2} V_1 + (1 + \varepsilon) \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ V'_2 &= (1 + \varepsilon) \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m_1 + m_2} V_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Les calculs détaillés sont présentés en Annexe 3, où sont également rappelés les principaux éléments de la théorie des chocs en présence de glissement et de roulement entre les billes lors de l'impact (voir aussi [14]).

La prise en compte du caractère partiellement élastique des billes dans les processus de dissipation d'énergie lors des chocs dans un milieu granulaire est très difficile, et en toute rigueur le modèle de Hertz est insuffisant. L'analyse complète n'est pas développée dans le présent article.

Si, toutefois, pour obtenir des ordres de grandeur, on maintient le modèle de Hertz au moment des collisions entre les sphères, on peut partir de l'hypothèse que, pendant une durée finie du choc, notée  $\tau$ , les deux billes se déforment puis retrouvent leurs formes initiales après leur séparation: cela revient à poser que l'énergie cinétique initiale se décompose, lors du choc, en une énergie potentielle de déformation (issue de la théorie de Hertz) et en une énergie cinétique résiduelle due à l'écrasement, et que, juste après la séparation l'énergie potentielle se restitue entièrement en énergie cinétique.

Le modèle ainsi simplifié est proposé ci-après et conduit à une estimation de la durée de collision entre

deux billes,  $\tau$ .

Soient donc deux billes sphériques se dirigeant l'une vers l'autre à la vitesse relative  $V$  (choc frontal). De la relation de Hertz (14) on déduit l'énergie élastique  $E_e$  stockée lors de la collision (énergie potentielle):

$$E_e = \int_0^{\delta} F d\delta = \frac{2}{5} k \delta^{5/2}$$

Par commodité, on remplace  $k$  par  $k' = \frac{4}{5}k$  pour écrire l'énergie potentielle avec un facteur 1/2 lors du bilan d'énergie ci-après, soit  $E_e = \frac{1}{2} k' \delta^{5/2}$

Durant le choc, l'énergie cinétique initiale,  $1/2.mV^2$  est transformée en énergie cinétique résiduelle (due à la vitesse de l'écrasement  $\delta$ ) et en énergie potentielle:

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} k' \delta^{5/2} + \frac{1}{2} m \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2$$

d'où l'équation du mouvement de la déformation lors du choc:

$$\left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 = V^2 - \frac{k'}{m} \delta^{5/2}$$

Cette équation permet de déterminer la durée de la collision,  $\tau$ , qui comprend la pénétration jusqu'à la fin de l'écrasement (déformation maximale  $\delta_0$ ) et le rebond (d'où le facteur 2):

$$\tau = 2 \int_0^{\delta_0} \frac{d\delta}{\sqrt{V^2 - \frac{k'}{m} \delta^{5/2}}}$$

Il faut donc déterminer l'écrasement maximal  $\delta_0$ . Or celui-ci est atteint lorsque la vitesse résiduelle ( $d\delta/dt$ ) s'annule, c'est-à-dire à la fin du choc:

$$m V^2 = k' \delta_0^{5/2} \quad \text{donc:} \quad \delta_0 = \left( \frac{m}{k'} \right)^{2/5} V^{4/5}$$

Par le changement de variable:  $u = \left( \frac{k'}{m V^2} \right)^{2/5} \delta$  l'expression précédente fait intervenir l'intégrale

elliptique  $I_2(n) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^n}} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/n)}{n \Gamma(1/2+1/n)}$  où  $\Gamma(x)$  est la fonction d'Euler:

$$\tau = \frac{2}{V} \left( \frac{m}{k'} V^2 \right)^{2/5} I_2(n) = \frac{2}{V} \left( \frac{m}{k'} V^2 \right)^{2/5} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2/5)}{\frac{5}{5} \Gamma(1/2+2/5)} = \frac{2}{V} \left( \frac{m}{k'} V^2 \right)^{2/5} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2/5)}{\frac{5}{5} \Gamma(9/10)}$$

Or:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(2/5) = 2,218$ ,  $\Gamma(9/10) = 1,069$  on a donc:

$$\tau = 2,94 \left( \frac{m^2}{k' V} \right)^{1/5} \quad (18)$$

Avec des billes de l'ordre de  $2R = 4 \text{ mm}$ ,  $k = 1,4 \cdot 10^9 \text{ kg.m}^{-1/2}.\text{s}^{-2}$ , donc  $k' = 4k/5 = 1,12 \cdot 10^9 \text{ kg.m}^{-1/2}.\text{s}^{-2}$ , et de masse  $m = 3 \cdot 10^{-9} \text{ g}$ , on trouve  $\tau = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

**NB:** Le modèle simplifié ci-dessus n'est plus valable lorsque:

- la limite d'élasticité est franchie: on a donc des déformations plastiques;
- le choc se dissipe partiellement en ondes élastiques transmises au matériau;
- les sphères ne sont pas homogènes.

## 11 – Une particule en interaction avec un milieu granulaire – Plusieurs particules en interaction (friction dans un granulaire, nombre de Bagnold) [3]

### *Interaction d'une seule particule avec la pente d'un milieu granulaire:*

Ralph A. Bagnold (1896-1990) a montré en 1954, que pour un milieu granulaire:

- la viscosité d'un milieu granulaire n'est pas constante;
- elle croît avec la vitesse de cisaillement.

En voici une explication:

- Commençons par étudier l'interaction d'une seule particule avec un milieu granulaire supposé indéformable. Soit une particule dévalant une pente d'une surface rugueuse délimitant le volume d'un milieu granulaire. Le long de son parcours, la trajectoire de la particule va être une succession de:

- segments de courbes paraboliques, lorsque la particule est dans une phase balistique (elle saute au-dessus des aspérités);
- segments de courbes correspondant à la forme de la surface lorsque la particule roule, avec ou sans glissement, ou glisse, avec ou sans roulement, sur cette surface.

Le comportement erratique de la particule fait donc intervenir les caractéristiques mécaniques suivantes:

- Coefficients de frottement
- Coefficients de restitution  $\epsilon$  lors des chocs

ce qui montre l'utilité de toutes les études élémentaires faites précédemment. L'approche du modèle de comportement ne peut qu'être faite en moyenne.

- Soit une particule de masse  $m$  et de diamètre  $D = 2R$  qui dévale une pente inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. Soit  $\gamma$  l'accélération de la particule,  $F$  est la force de frottement subie par elle due aux interactions avec la surface qui présente des aspérités. le bilan des forces donne:

$$m \gamma = m g \sin \theta - F$$

où l'axe de la verticale est comptée vers le bas. On introduit alors l'accélération réduite

$\Gamma = \gamma / g$ , d'où:

$$\Gamma = \sin \theta - \frac{F}{m g} \quad (19)$$

L'énergie mécanique totale  $W$  de la particule est la somme de:

- son énergie cinétique  $T$  qui diminue au cours des chocs et des frottements sur un trajet de longueur caractéristique  $L$ ;
- son énergie potentielle  $U$  qui diminue progressivement à chaque chute dans des puits de profondeur du même ordre que la taille de la particule:  $D$

$$T = \frac{1}{2} m V^2$$

$$U = m g z \cos \theta$$

où  $z$  est l'altitude de la particule par rapport à un plan horizontal de référence.

- Estimons la diminution de l'énergie cinétique sur une longueur caractéristique  $L$ . La force associée à cette perte d'énergie cinétique,  $F_T$ , est telle que:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m V^2 = F_T L \quad \text{soit:} \quad F_T = \frac{m V^2}{2 L}$$

Le parcours caractéristique L est de l'ordre de quelques diamètres de la particule, ce que l'on exprime par:

$$L = a_T D$$

La force F résulte de la contribution de deux comportements de la particule au cours de sa trajectoire le long de la pente:

– une force  $F_1$  responsable de la phase où la particule a un comportement balistique: d'une aspérité à l'autre, elle est en chute libre d'une hauteur  $\Delta z$ , correspondant à une variation d'énergie potentielle:

$$\Delta U = m g \Delta z$$

La hauteur parcourue pendant le laps de temps  $t_1$  est donc de l'ordre:

$$\Delta z = \frac{1}{2} g t_1^2$$

pendant ce laps de temps  $t_1$ , la longueur L parcourue par la particule à la vitesse à laquelle elle dévale la pente, V, est:  $L = V t_1$  soit  $t_1 = L/V$ , d'où:  $\Delta U = m g \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} m g^2 \frac{L^2}{V^2}$ .

$\Delta U$  est égale au travail de la force  $F_1$  sur le parcours L:  $\Delta U = F_1 L$  d'où

$$F_1 = \frac{\Delta U}{L} = \frac{1}{2} m g^2 \frac{L}{V^2} = a_T \frac{1}{2} m g^2 \frac{D}{V^2}$$

Cette phase balistique a lieu pour des régimes de vitesse élevée, parce qu'à ces vitesses les rebonds sur les aspérités sont importants.

– une force  $F_2$ , qui apparaît aux faibles vitesses V, et donc où la particule dévale la pente en restant en contact avec elle. C'est donc le frottement qui prédomine, lequel est normalement indépendant de la vitesse. Dans ce cas la variation d'énergie potentielle est égale au travail de la force de frottement:

$$\Delta U = m g \Delta z = \mu m g L = F_2 L \quad \text{soit} \quad F_2 = \mu m g \quad \text{avec} \quad \Delta z = \mu L = \mu a_T D$$

Le dévalement de la particule le long de la pente est en fait une succession erratique de phases balistiques et de phases de frottement. La force totale  $F_U$ , associée à la perte d'énergie potentielle, prend alors une expression qui tient compte des deux comportements limites  $F_1$  et  $F_2$  selon la valeur de la vitesse:

$$V \ll 1 : F_U \rightarrow F_2 = \mu m g$$

$$V \gg 1 : F_U \rightarrow F_1 = a_T \frac{1}{2} m g^2 \frac{D}{V^2}$$

Entre ces deux extrêmes, la force  $F_U$  doit donc avoir une expression de la forme:

$$F_U(V) = \frac{m g}{A + B V^2}$$

$$\text{Pour } V \ll 1 : F_U \approx m g / A = \mu m g \rightarrow A = 1/\mu$$

$$\text{Pour } V \gg 1 : F_U \approx m g / B V^2 = a_T \frac{1}{2} m g^2 \frac{D}{V^2} \rightarrow B = \frac{2}{a_T g D}$$

Finalement:

$$F_U(V) = \frac{\mu m g}{1 + \frac{2\mu}{a_T} \frac{V^2}{g D}}$$

La force totale F est donc:

$$F = F_T + F_U = \frac{1}{2} \frac{m V^2}{L} + \frac{\mu m g}{1 + \frac{2\mu}{a_T} \frac{V^2}{g D}} \quad \text{où } L = a_T D$$

donc de la forme:

$$F = m g \left( \frac{1}{a_T} \frac{V^2}{g D} + \frac{b_T}{1 + c_T \frac{V^2}{g D}} \right) \quad (20)$$

avec:  $b_T = \mu$ ,  $c_T = \frac{2\mu}{a_T}$

L'accélération de la particule est alors:

$$\Gamma = \frac{y}{g} = \sin \theta - \left( \frac{1}{a_T} \frac{V^2}{g D} + \frac{b_T}{1 + c_T \frac{V^2}{g D}} \right) \quad (21)$$

Ces relations (20) et (21) permettent de prévoir les conditions de la mise en mouvement de la particule selon l'angle de la pente  $\theta$  et de la vitesse de dévalement  $V$ .

En effet, examinons les cas où il n'y pas ou plus de mouvement après une phase de mouvement, c'est-à-dire les cas où  $\Gamma = 0$ : ces phases sans mouvement sont donc caractérisées par une relation entre l'angle de la pente  $\theta$  et la vitesse  $V$ :

$$\sin \theta = \frac{F(V)}{m g}$$

Au départ, lorsque  $V = 0$  (pas de mouvement initial), on a:

$$\sin \theta_M = b_T = \mu \quad (22)$$

$\theta_M$  est par définition l'**angle de mouvement** (angle à partir duquel le mouvement commence,  $\theta \geq \theta_M$ ).

L'examen de la courbe  $F(V)/m g = f(V/\sqrt{g D})$  donnée par (20) montre que, pour  $V = 0$ , la configuration est instable car la concavité de la courbe est orientée vers le bas: la moindre perturbation fera dévaler la particule et le mouvement s'amorce (figure 27).

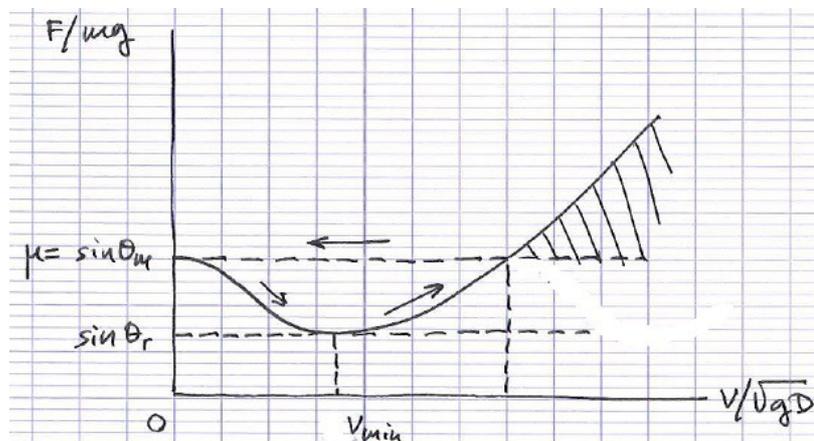


figure 27 – force d'interactions entre une particule et un tas granulaire

La vitesse augmente alors, ce qui entraîne, dans un premier temps, la diminution de F jusqu'à une

valeur minimale atteinte pour  $V_{\min}$ .

Posons  $u = V/\sqrt{gD}$  et  $f = F/mg$  :  $f(u) = \frac{1}{a_T} u^2 + \frac{b_T}{1+c_T u^2}$  sa dérivée est:

$\frac{df}{du} = 2u \left( \frac{1}{a_T} - \frac{b_T}{(1+c_T u^2)^2} \right)$  qui s'annule pour deux valeurs:  $u = 0$  (cas précédent) et

$u_{\min} = \sqrt{\frac{\sqrt{a_T b_T} - 1}{c_T}}$  et pour cette valeur  $f$  est égale à:

$$f_{\min} = f(u_{\min}) = \frac{\sqrt{a_T b_T} - 1}{a_T c_T} + \sqrt{\frac{b_T}{a_T}} = \sin \theta_R \quad (23)$$

qui définit un angle, appelé, **angle de repos**  $\theta_R$ , pour la pente, telle que la particule dévale la pente avec une vitesse minimale  $V_{\min}$ , après une phase de mouvement. Pour  $V > V_{\min}$  la force  $F$  augmente rapidement et atteint de nouveau une valeur correspondant à l'angle de mouvement  $\theta_M$  où la force est compensée par le frottement et donc où la particule s'arrête.

Et le cycle recommence.

Le mouvement de la particule sur la pente d'un tas granulaire est donc possible pour des pentes:

$$\theta_R \leq \theta \leq \theta_M \quad (24)$$

### **Interaction de plusieurs particules dans un milieu granulaire et nombre de Bagnold:**

Les lois de friction dans un milieu granulaire n'ont pas de raison a priori d'être les mêmes que pour des matériaux solides. Pourtant Dawes [13] a montré expérimentalement que, pour un volume de granulaires soumis à une force normale  $\vec{N}$ , sur lequel on exerce aussi une force latérale  $\vec{T}$ , le mouvement se produit dès que:

$$T = \mu_S N$$

comme pour les lois de Coulomb pour les frottements solide/solide, avec en outre des valeurs du même ordre pour  $\mu_S$ :  $\mu_S \approx 0,7$  (soit un cône de frottement d'angle  $\theta = \arctan \mu_S \approx 35^\circ$ ). De plus, la force de cisaillement  $T$  nécessaire pour démarrer le mouvement est, comme pour les lois de Coulomb, indépendante de la surface de frottement, comme l'ont montré des expériences récentes. Les explications qui permettent de prédire un tel comportement pour la friction dans un milieu granulaire à partir des structures et comportements complexes dans ce milieu, font encore l'objet de recherches !

Comme le montre l'expérience proposée n°3, lorsqu'un récipient qui contient un milieu granulaire est incliné au-delà d'un certain angle limite, il se produit l'écoulement sous forme de 6 à 10 nappes supérieures de l'empilement (idem que les phénomènes d'avalanche): chaque nappe a une vitesse propre dont le profil croît en allant vers la surface de l'empilement.

Une expérience qui illustre ce phénomène consiste en ceci:

Un mélange de particules granulaires en suspension dans un fluide visqueux (liquide) est placé dans un cylindre dans lequel un autre cylindre, moins large, avec d'importantes aspérités aux parois, est disposé sur le même axe que le grand cylindre (les deux cylindres sont donc coaxiaux) (figure 28). On fait tourner le cylindre central à une vitesse angulaire constante  $\Omega$  (on réalise ainsi une expérience du type de celle de Couette). On observe que l'écoulement du mélange s'effectue en nappes: le champ de vitesse de l'écoulement se distribue suivant des strates concentriques tangentes à la direction globale de l'écoulement, et chacune des nappes, à la distance  $z$  de l'axe de rotation) possède une vitesse propre  $V(z)$  différente de la vitesse des nappes voisines  $V(z+dz)$ . Le mélange s'organise en une juxtaposition de couches freinées par leur frottement avec les couches voisines. Il y a donc un gradient des vitesses suivant l'axe radial  $z$ :

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial z}$$

appelé **taux de cisaillement**.

Évaluons la perte d'énergie cinétique  $T$  d'une particule de masse  $m$  et de diamètre  $D$  due aux effets du cisaillement du champ de vitesse d'une nappe à une autre adjacente. La vitesse relative ( $v$ ) de cette particule par rapport à la nappe immédiatement voisine, située en  $z+dz$ , est de l'ordre de  $D \nabla V$ . Si l'on suppose que la perte d'énergie cinétique s'effectue sur une distance caractéristique  $\lambda_e$ , de l'ordre de quelques  $D$ , alors celle-ci vaut:

$$dT = F_f dz$$

où  $F_f$  est la force de friction.

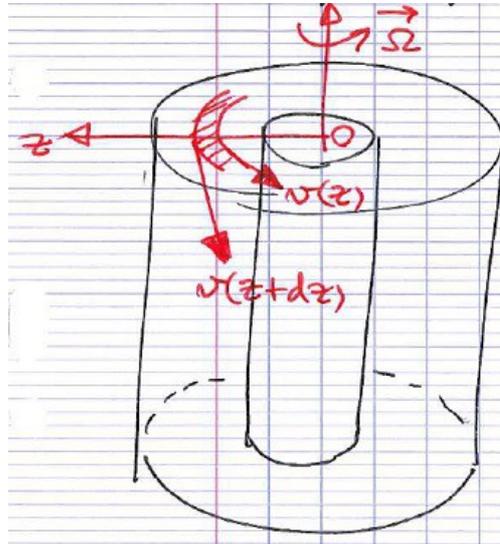


figure 28 – expérience « à la Couette » avec un mélange granulaire + liquide

Or:  $F_f = \frac{dT}{dz} \approx \frac{1}{2} \frac{m}{\lambda_e} \langle v \rangle^2$  où  $\langle v \rangle^2 \approx (D \nabla V)^2$ , soit:  $F_f = \frac{m D^2}{2 \lambda_e} (\nabla V)^2$

Comparons cette force de friction du mélange granulaire en suspension dans le fluide, avec la force de viscosité du fluide, notée  $F_v$ . Celle-ci vaut:

$$dF_v = \eta \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} d\tau$$

où  $d\tau$  volume élémentaire du fluide et  $\eta$  sa viscosité dynamique; en ordre de grandeur:  $d\tau \approx D^2 dz$  volume balayé par la section de la particule sur le parcours  $dz$  séparant deux nappes adjacentes. Il vient alors:

$$dF_v = \eta \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) D^2 dz \approx \eta \nabla V D^2$$

L'importance relative des deux forces, celle de friction  $F_f$  et celle de viscosité  $F_v$ , est définie par le **nombre de Bagnold** [16] (Ralph Alger Bagnold, 1896-1990):

$$B = \frac{F_f}{F_v} = \frac{m \nabla V}{2 \lambda_e \eta} \quad (25)$$

Selon l'importance relative de la viscosité du fluide interstitiel (y compris l'air) et de la friction dans le mélange granulaire, deux régimes distincts ont pu être dégagés par des simulations numériques où le paramètre  $B$  était changé:

- $B < 40$ : le régime d'écoulement est dominé par les effets de viscosité (cas des pâtes, boues...)
- $B > 450$ : le régime d'écoulement est dominé par les effets de dissipation de l'énergie par frottements et chocs solide-solide entre les grains. Le mélange est macroscopiquement sec (milieu granulaire sec)

- Entre ces deux extrêmes, les choses sont plus complexes; c'est le domaine de la **loi de Bagnold** (1954): la viscosité d'un milieu granulaire n'est pas constante, elle croît avec la vitesse de cisaillement.

## 12 – Statique d'un milieu granulaire, cheminement des contraintes, effet de voûte [3] [1]

L'état dynamique d'un milieu granulaire dépend de l'histoire des évolutions successives de ce milieu, lesquelles sont descriptibles en termes de désordre dans les contacts mécaniques entre grains, et de désordre de la répartition des forces. Sans développer les arguments de [3], on arrive à la conclusion que le désordre des contacts et le désordre des forces de friction dans les milieux granulaires conduisent à l'indétermination de la friction solide entre grains, et au comportement de type hystérésis de leur état dynamique. En particulier, on montre que les positions d'équilibre dépendent de la manière dont les contacts ont été réalisés (donc de l'histoire). Ainsi, le désordre des contacts et des forces de frottement, propres aux structures granulaires, conduisent à constater que, dans leur comportement élastique, ces milieux présentent des comportements inhabituels et complexes.

Par exemple, sous l'action d'une contrainte normale, les chemins de contraintes sont renvoyés vers les parois verticales du milieu granulaire, contrairement à ce que l'on observe pour un solide homogène: un matériau granulaire tend à rediriger les forces verticales (i.e. normales) dans des directions perpendiculaires à celles de la contrainte initiale. Cette propriété est à l'origine de l'effet de voûte, utilisé par exemple dans la conception des ballasts de chemins de fer: les ballasts présentent des propriétés d'élasticité non linéaire; plus ils sont comprimés, plus ils deviennent résistants et supportent plus facilement les contraintes élevées comme un train en circulation.

Nous arrêtant à l'exemple de l'effet de voûte, nous en donnons ci-après une « démonstration » élémentaire.

L'effet de voûte résulte de la redistribution des contraintes dans une direction horizontale sous l'action d'une contrainte verticale, telle que le poids d'éléments en contact. On peut se demander alors quelle est la forme d'équilibre d'un tel ensemble? Depuis longtemps, la solution pratique était empirique, en témoignent les voûtes et les dômes des constructions parfois millénaires <sup>6</sup>.

On peut justifier mathématiquement ces solutions pour une voûte en équilibre sous son propre poids (figure 29):

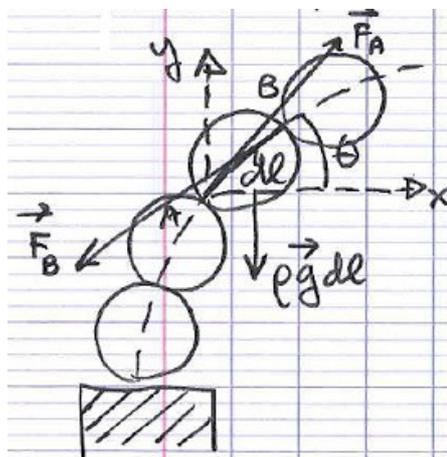


figure 29 – équilibre d'un arc de voûte

Soit le segment curviligne élémentaire AB de longueur  $dl$  et de masse linéique  $\rho$ : son poids est donc égal à  $\rho \vec{g} dl$ .

<sup>6</sup> On objectera que les monuments, bâtiments, aqueducs, viaducs, etc. qui comportent des voûtes et des dômes ne ressemblent pas à des milieux granulaires, comme par exemple un tas de sable, et donc que le calcul proposé ici ne devrait pas s'y appliquer. Cette objection peut être rejetée si l'on considère que, comme nous l'avons auparavant mentionné, un matériau granulaire, considéré à une échelle suffisante, peut aussi être un milieu de très grandes dimensions et dont les éléments constitutifs sont des gros blocs en contacts et frottements mutuels. L'échelle d'observation est choisie selon le rapport relatif entre les dimensions caractéristiques de la structure et celles de ses éléments constitutifs. D'ailleurs, dans le calcul proposé, aucune condition sur la taille des « grains » (qui peuvent être des blocs) ne vient restreindre leur application.

Les forces qui s'exercent aux extrémités A et B du segment élémentaire sont  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ .

Le segment curviligne AB est en équilibre si:

- pas de moment de flexion en A et B;
- pas de force de cisaillement au niveau des contacts (donc frottement sec).

Cela implique que  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  sont colinéaires avec la tangente de la courbe en A et en B. La condition d'équilibre s'écrit donc:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \rho \vec{g} dl = 0$$

Soit  $\theta$  l'angle entre le segment élémentaire  $\overline{AB}$  et l'horizontale Ox, on a donc:

$$dx = dl \cos \theta, \quad dy = dl \sin \theta, \quad dl^2 = dx^2 + dy^2$$

La projection de l'équation d'équilibre sur Ox et Oy donne:

- sur Ox :  $F_A \cos \theta_A = F_X$  où  $F_X$  composante horizontale de la tension de la chaîne, donnée a priori des conditions externes, soit:  $F_A \left( \frac{dx}{dl} \right)_A = F_X$

- sur Oy:  $F_A \sin \theta_A - F_B \sin \theta_B - \rho g dl = 0$  soit:  $\left( F \frac{dy}{dl} \right)_A - \left( F \frac{dy}{dl} \right)_B - \rho g dl = 0$  qui s'écrit

$$\text{encore: } \frac{d}{dl} \left( F \frac{dy}{dl} \right) + \rho g = 0$$

Comme  $F \frac{dy}{dl} = F \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dx} F_X$  il vient:  $\frac{d}{dl} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\rho g}{F_X} = 0$  soit:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\rho g}{F_X} \frac{dl}{dx} = - \frac{\rho g}{F_X} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

qui s'intègre en:

$$y(x) = - \frac{F_X}{\rho g} \left( \cosh \left( - \frac{\rho g}{F_X} x \right) - 1 \right) \quad (26)$$

C'est l'équation d'une chaînette inversée, (26) fournit la forme de la voûte, c'est-à-dire la ligne où chaque segment élémentaire qui la compose est en équilibre statique.

**NB:** Si la voûte supporte une charge de masse linéique  $\mu$  uniformément répartie (par exemple une structure de toit), alors on a:

$$\mu g dx = \rho g dl$$

et l'équation  $\frac{d}{dl} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\rho g}{F_X} = 0$  doit être remplacée par:  $\frac{d}{dl} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\mu g}{F_X} \frac{dx}{dl} = 0$  ou encore:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\mu g}{F_X} = 0$$

qui s'intègre en:

$$y(x) = - \frac{1}{2} \frac{\mu g}{F_X} x^2 \quad (27)$$

La voûte est un paraboloïde de révolution de concavité tournée vers le haut, autrement dit un dôme. En un point d'abscisse  $x$ , la tension supportée peut être déduite:

$$F(x) = F_X \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{F_X^2 + \mu^2 g^2 x^2}$$

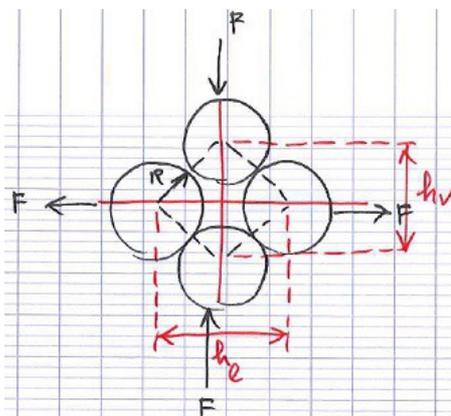


*une illustration d'équilibre de voûte: le Pont du Gard (1er siècle de notre ère), patrimoine mondial de l'humanité (photo: Frédéric Élie, avril 2005)*

### 13 – Dilatance de Reynolds [3][1][6][9]

En 1885, O. Reynolds observe qu'un matériau granulaire préalablement compacté, placé dans une enveloppe flexible, a son volume qui augmente lorsqu'on appuie sur l'enveloppe (cf. expérience proposée n°2). C'est le principe de dilatance, propre aux milieux granulaires.

Ce phénomène repose, de manière élémentaire, sur la déformation relative d'un ensemble de grains disposés en losange (voir figure 30). Répété à l'infini, cet arrangement correspond à un empilement bidimensionnel régulier de petites billes identiques (on dit aussi « monodispersées ») constituant le milieu granulaire.



*figure 30 – dilatance de Reynolds*

Soient  $h_v$  et  $h_h$  respectivement les longueurs des diagonales verticale et longitudinale du losange formé par le centre de 4 grains sphériques identiques. Sous l'action d'une force  $F$  appliquée comme indiqué sur la figure, le losange se déforme: il s'ensuit que la surface totale  $S_t$  occupée par le volume intérieur et extérieur délimitant l'ensemble varie également. On vérifie aisément que cette surface vaut:

$$S_t = 3 \pi R^2 + \frac{1}{2} h_l h_v$$

(R est le rayon de chaque sphère), avec:  $R^2 = \frac{h_l^2 + h_v^2}{16}$

On en déduit que l'on a obligatoirement:  $2R \leq h_l \leq 4R \cos \frac{\pi}{6}$

Compte tenu des relations précédentes, la surface est:  $S_t = 3 \pi R^2 + \frac{1}{2} h_l \sqrt{16R^2 - h_l^2}$

En dérivant cette expression et en se limitant au premier ordre en  $h_l$ , que l'on assimile à  $dh_l$ , la variation de surface est:

$$\Delta S_t \approx \frac{1}{2} h_l \sqrt{16R^2 - h_l^2} = 2R h_l \sqrt{1 - \left(\frac{h_l}{2R}\right)^2}$$

En traçant le graphique  $\Delta S_t / f(h_l/2R)$  (figure 31), on s'aperçoit que, contrairement au régime de déformation solide, le milieu granulaire connaît une augmentation de  $\Delta S_t$  lorsque  $h_l$  augmente sous l'effet de la contrainte, jusqu'à  $h_l = 2R$ : c'est le **régime de Reynolds**.

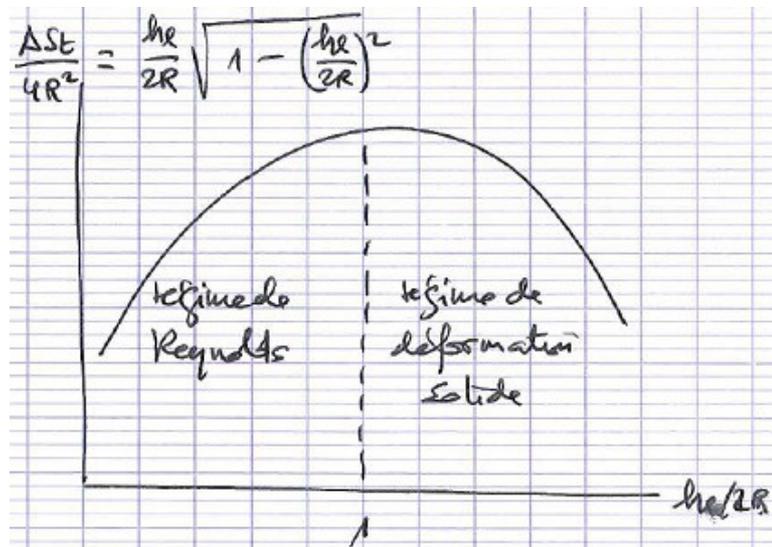


figure 31 – les deux régimes de déformation d'un milieu granulaire

Lorsque la compacité du milieu granulaire est minimale aucune augmentation du volume interstitiel entre grains n'est possible, et le comportement correspond au régime de déformation solide.

A l'inverse, un empilement de compacité maximale ne peut que voir le volume interstitiel se dilater sous l'action d'une contrainte: c'est le régime de Reynolds.

**Remarque importante: lien entre la dilatace de Reynolds et l'effet de voûte** - La dilatace de Reynolds ne peut s'expliquer que si les parois verticales empêchent le fuite des grains latéraux vers l'extérieur et en présence de frottement sec, qui permet l'équilibre mécanique de l'empilement. A partir de ce constat, et de l'introduction d'un **coefficient de redirection**, défini à partir d'une sorte de **coefficient de Poisson** des milieux granulaires (qui apparaîtra naturellement par la suite), on aboutit au phénomène d'effet de voûte (où les contraintes normales sont rejetées latéralement vers les parois), et le **modèle de Janssen** pour l'écoulement des grains en silo s'en déduit.

En effet, en élasticité des milieux solides déformables, le coefficient de Poisson  $\nu$  intervient dans la déformation obtenue dans le sens du cisaillement (ici latérale) consécutive à une déformation dans le sens de la compression (ici normale). De même, pour un élément du milieu granulaire affecté par les déformations du losange, le rapport de la déformation longitudinale relative  $u_l = dh_l / h_l$  à la déformation verticale relative  $u_v = dh_v / h_v$  définit l'équivalent d'un coefficient de Poisson:

$$\nu = -\frac{u_l}{u_v} = -\frac{dh_l}{dh_v} \frac{h_v}{h_l}$$

Or dans le losange les déformations sont reliées par:  $h_l dh_l + h_v dh_v = 0$ , ce qui donne:

$$\nu = \left(\frac{h_v}{h_l}\right)^2$$

Or on a vu que:  $S_t = 3\pi R^2 + \frac{1}{2}h_l h_v$  dont la différentielle vaut:

$$dS_t = \frac{1}{2}h_l(1-\nu)dh_l \quad (27)$$

On déduit alors de (27) que  $dS_t > 0$  (régime de Reynolds) pour  $\nu < 1$  et que  $dS_t < 0$  (régime solide) pour  $\nu > 1$ . La valeur  $\nu = 1$  ( $h_v = h_l$ ) est une valeur de transition entre le régime de dilatance et celui de la déformation solide.

Ceci posé, la présence de parois latérales déformables, mais imperméables aux grains (par exemple un sac), va entraîner un phénomène de redirection des contraintes normales responsable de l'effet de voûte. En effet, seules les composantes tangentielles (ici horizontales) du tenseur des contraintes,  $\sigma_l$ , ont une action sur les parois latérales. Si celles-ci ont pour module d'élasticité E, la déformation horizontale induite est, en élasticité linéaire:

$$u_l = \frac{dh_l}{h_l} = \frac{\sigma_l}{E}$$

Mais ces déformations horizontales sont liées à la composante verticale du tenseur des contraintes,  $\sigma_v$ , par l'intermédiaire du « coefficient de Poisson » qui vient d'être introduit:

$$\sigma_l dh_l = \sigma_v dh_v$$

soit:

$$\sigma_l = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\sigma_v = K\sigma_v \quad (28)$$

où  $K = -1/\sqrt{\nu}$  est le coefficient de redirection des contraintes verticales vers la direction horizontale donc vers les parois latérales, autrement dit c'est le coefficient de Janssen (**effet de voûte**).

#### 14 – Écoulement d'un milieu granulaire dans un silo: modèle de Janssen [3] [1] [9]

Si l'on réécrit la relation (28), qui exprime la redirection des contraintes, en utilisant de manière plus générale les composantes radiales (ici horizontales)  $\sigma_r$  et verticales  $\sigma_z$  sous la forme:

$$\sigma_{rr} = K_J \sigma_{zz}$$

où  $K_J = \tan \phi$  est le coefficient de Janssen de redirection des chaînes de contrainte selon l'angle  $\phi$  ( $K_J$  joue le rôle de K vu précédemment), on peut calculer la contrainte verticale  $\sigma_{zz}(H)$  au niveau inférieur d'un silo rempli d'un milieu granulaire de hauteur H, et constater qu'elle est plus petite que la pression exercée par le poids total du milieu granulaire (effet Janssen).

On retrouve alors les conclusions énoncées au paragraphe 5, ainsi que la **loi de Beverloo** (1961) relative à l'écoulement d'un sablier comme conséquences de l'effet de voûte (Annexe 2, voir aussi [7]).

#### 15 – Écoulement granulaire sur une pente: modèle de Saint-Venant, coefficient de frottement effectif [5] [3] [8]

A quelles conditions une couche granulaire cesse-t-elle de couler le long d'une pente, autrement dit,

quel est l'angle minimal que doit faire cette couche avec l'horizontale pour que cesse son glissement sur un substrat incliné?

L'épaisseur de la couche en écoulement varie avec la position de la section à laquelle on la considère, et, du coup, la question précédente conduit aussi à se demander quelle est l'épaisseur de la couche lorsque cesse son écoulement?

Or l'écoulement d'une couche granulaire est différent de celui d'une couche liquide: des effets de cisaillement, impliquant des effets de frottement entre grains, interviennent et dépendent du gradient de vitesse des grains dans chaque section de la couche, ainsi que de la dilatance de Reynolds (variation de la compacité avec les contraintes imposées au milieu granulaire).

On a vu au paragraphe 11 que l'écoulement se produit pour des inclinaisons comprises entre l'angle de repos et l'angle de mouvement. Le démarrage de l'écoulement ne se produit pas à un angle identique à celui où il s'arrête, et ceci par effet d'hystérésis: les épaisseurs de la couche correspondantes sont donc différentes et dépendent directement de la taille des grains et respectivement de l'angle de démarrage et de l'angle d'arrêt.

Sous des conditions simplifiées, le modèle classique pour décrire l'écoulement d'une couche granulaire repose sur un modèle de type Saint-Venant, mais où intervient un coefficient de frottement effectif qui dépend du gradient de vitesse, ou d'un paramètre défini à partir de lui, appelé **nombre inertiel**.

Il y a d'abord ce constat général: on ne peut jamais, avec du sable sec, créer des parois présentant de fortes inclinaisons avec l'horizontale: il existe un angle d'inclinaison au-delà duquel l'empilement granulaire coule. Cet angle critique est, très souvent pour divers types de matériaux granulaires, de l'ordre de  $35^\circ$ , on l'appelle angle limite de stabilité de talus, ou plus simplement **angle de talus**.

Cet angle de talus  $\theta$  dépend directement du coefficient de frottement solide-solide  $\mu_s$  entre deux couches voisines du volume granulaire (théorie de Coulomb):  $\tan \theta = \mu_s$  (cf. paragraphe 5).

Or, comme vu au paragraphe 5, ce coefficient mesure le rapport entre une contrainte tangentielle et une contrainte normale, ici le poids de la couche de granulaire. Mais la notion de poids d'une couche granulaire est difficile à définir, à cause notamment de l'effet de voûte présent dans cette couche: le poids apparent, qui détermine directement la composante normale de la contrainte, n'est pas le poids total de la couche mais en est seulement une fraction.

Des observations plus détaillées montrent que, en fait, il y a plusieurs angles de talus pour un milieu granulaire donné: on dit que l'angle de talus est une grandeur multivaluée. Sa valeur dépend de l'histoire de la formation du talus, ceci du fait du caractère hystérésis de la relation entre l'écoulement et la géométrie (la pente) du talus. Ce caractère hystérésis se traduit par des relaxations quasi-périodiques de l'empilement entre une valeur maximale et une valeur minimale de l'angle que le tas forme avec l'horizontale: ce caractère est l'un de ceux propres aux comportements des milieux granulaires, par opposition aux milieux classiques homogènes (un liquide homogène s'écoule et un solide homogène glisse, pour une inclinaison donnée généralement invariable).

Déjà, on peut observer que l'angle de talus, pour un matériau granulaire choisi, n'est pas le même selon que le tas soit concave (comme un cratère qui se forme au-dessus du goulot d'un sablier) ou bien convexe (comme un tas conique qui se forme sur un plan). Soit  $\alpha$  et  $\beta$  ces deux angles de talus respectifs (figure 32) ( $\alpha$ : concave, ou « angle cratère »;  $\beta$ : convexe, ou « angle montagne »). On a toujours  $\alpha > \beta$ .

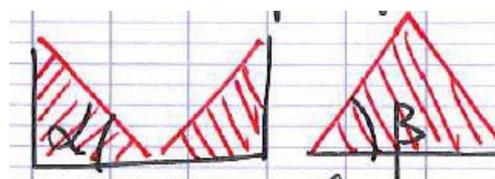


figure 32

En outre, ces angles diffèrent aussi de l'« **angle dynamique** »  $\theta$  à partir duquel le tas de grains s'écoule dans l'expérience du tambour en rotation (expérience proposée n°3).

Mais, comme déjà signalé dans l'expérience proposée n°3,  $\theta$  n'est pas unique: il varie entre l'angle de mouvement  $\theta_M$  avant relaxation, et l'angle de repos  $\theta_R$ , après relaxation. La différence ( $\theta_M - \theta_R$ ) est l'**angle de relaxation** et est de l'ordre de  $2^\circ$ :  $\theta_M - \theta_R \approx 2^\circ$

Selon l'histoire de l'empilement,  $\theta$  sera proche de  $\theta_M$  ou de  $\theta_R$ : si le tas vient de couler, on a plutôt  $\theta = \theta_R$ , si au contraire le tas est dans une situation métastable, on aura plutôt  $\theta = \theta_M$  (ces angles dépendent,

entre autres, de la géométrie élémentaire des grains). Le tableau suivant donne quelques ordres de grandeur:

matériau	$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	$\theta$ ( $\pm 2^\circ$ )
tapioca	37,5	30	32
sable	39	37	36,5
charbon	41	37,5	34

*angles de talus de quelques matériaux granulaires*

Dans l'ignorance sur la façon dont s'est formé le tas de granulaire en situation métastable, l'angle de talus  $\theta$  est donc déterminé avec une imprécision égale à l'angle de relaxation ( $\theta_M - \theta_R$ ). Cette disparité sur  $\theta$  peut s'expliquer qualitativement par la **dilatance de Reynolds**, elle-même responsable de l'effet de voûte, comme on l'a vu: en situation métastable  $\theta = \theta_R$ , les grains peuvent bouger seulement si leur compacité diminue (le volume interstitiel augmente). Pour cela, il faut une inclinaison  $\theta_M > \theta_R$ , ce qui fait que l'angle de relaxation correspond à l'inclinaison supplémentaire pour provoquer la dilatation de l'espace entre les grains de la couche supérieure de l'empilement.

Ceci étant posé, on va quantifier le mouvement d'une couche de granulaire sur un plan incliné, sous des hypothèses simples: grains sphériques identiques de masse individuelle  $m$  et de diamètre  $D$ , absence de cohésion entre eux (milieu sec...). On ne considère donc pas la polydispersité (grains différents), la rugosité, et la cohésion des grains (pour cela, voir par exemple [5]).

Soit donc une couche de matériau granulaire sur une pente d'inclinaison variable  $\varphi$  (figure 33): une section de cette couche est au contact de la pente en un point M, de coordonnée  $x$ , où l'angle  $\varphi$  dépend donc de  $x$ , et un point quelconque de cette section est repéré par sa cote ( $y$ ) au-dessus de M, un point de la surface libre est à la cote  $H(x)$ ,  $H(x)$  est donc l'épaisseur locale de la section en ( $x$ ). le profil de vitesse, supposé parallèle à l'axe  $Mx$ , dépend de la cote ( $y$ ):  $v(y)$ . Il est plus commode d'exprimer les épaisseurs et vitesses avec l'abscisse curviligne  $s$  ( $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ).

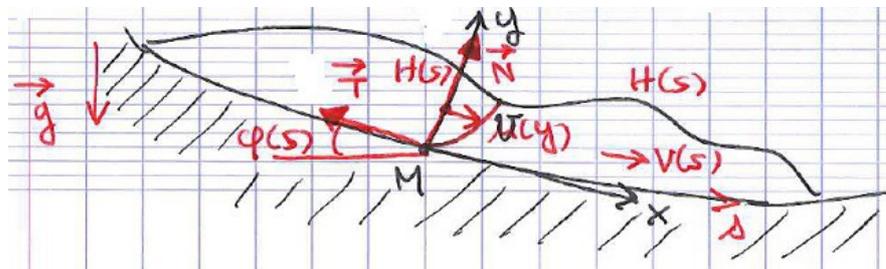


figure 33

On note la vitesse moyenne dans la section à l'abscisse  $x$ :

$$V(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^{H(x)} v(y) dy$$

Au niveau du contact M entre la couche et la pente, le matériau est soumis aux forces  $\vec{N}$  (normale à la pente en M) et  $\vec{T}$  (cisaillement, tangentielle à la pente en M); le **coefficient de frottement effectif** est par définition:

$$\mu_{eff} = \frac{T}{N}$$

Lorsque l'on intègre sur la section  $0 \leq y \leq H(x)$  les équations de conservation de la masse (flux de matière à travers la section) et de la quantité de mouvement, on obtient l'équation de mouvement moyen dans l'épaisseur de la section, ou **équation de type Saint-Venant**, introduite par Savage et Hutter, 1989 [24]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(HV) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(HV^2) = g H \cos \varphi (\tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{\partial H}{\partial x})$$

où  $\alpha$  est lié à la forme du profil de vitesse dans la section (généralement,  $\alpha \sim 1$ , plus précisément:  $\alpha = 4/3$  pour un profil linéaire,  $\alpha = 5/4$  pour un profil parabolique), et  $K \sim 1$  est lié aux contraintes normales dans l'écoulement. Une démonstration de (29) est proposée en Annexe 1.

La première équation de (29) exprime la conservation de la masse. La deuxième est le bilan de quantité de mouvement pour une tranche d'épaisseur  $H(x)$ . Son membre de gauche est l'accélération de cette tranche, et son membre de droite contient les forces extérieures auxquelles la tranche est soumise. Ces forces sont de trois sortes: la gravité  $\rho g H \sin \varphi$ , une force d'étalement  $K(\partial H / \partial x) \rho g H \cos \varphi$  dont l'origine provient des forces de pression de part et d'autre de la tranche, et la contrainte tangentielle de fond  $\mu_{eff} \rho g H \cos \varphi$  exprimée comme un coefficient de friction à la base multipliée par la contrainte normale (le poids).

La résolution de (29) nécessite de connaître la loi rhéologique, c'est-à-dire  $\mu_{eff}$ , lequel n'est pas constant car il dépend du gradient normal de vitesse dans la section (ou **taux de cisaillement**):

$$\nabla_v = \frac{\partial v(y, t)}{\partial y}$$

(Cependant,  $\mu_{eff}$  est constant pour les pentes de forte inclinaison  $\varphi$ ).

La détermination de  $\mu_{eff}$  a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux et numériques listés dans [5] (voir aussi [17] [18] [19] [21] [22] [23] [26] [25]), et montre un comportement assez complexe en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement, ou du taux de cisaillement, selon les différents régimes rencontrés, lesquels sont liés à divers paramètres: épaisseur de la couche  $H$ , inclinaison  $\varphi$ , débit massique  $Q$ , rugosité de la pente, caractéristiques et polydispersité du matériau, etc.

Limitons-nous au cas du régime stationnaire uniforme où le glissement est obtenu pour un angle d'inclinaison assez faible d'un plan incliné homogène  $\varphi$  exactement égal au coefficient de frottement effectif  $\mu_{eff}$ :

$$\tan \varphi \approx \varphi = \mu_{eff}$$

Nous verrons plus loin, sous ces conditions, que l'expérience et une modélisation simplifiée montrent que la vitesse moyenne  $V$  varie avec l'épaisseur  $H$  de la couche et l'inclinaison  $\varphi$  selon:

$$V(H, \varphi) = cste \times H^{3/2} (\varphi - \theta) \quad (30)$$

où  $\theta$  est l'angle de blocage de l'écoulement, ou l'**angle de talus** qui, comme vu précédemment, est multivalué et prend ses valeurs entre l'angle de repos  $\theta_R$  et l'angle de mouvement  $\theta_M$ .

Introduisons les grandeurs réduites:

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{gD}} \quad H^* = \frac{H}{D}$$

L'expérience et la théorie montrent aussi que  $\mu_{eff}$  suit la loi rhéologique (loi du frottement):

$$\mu_{eff}(V, H) = \theta + a \frac{V^*}{H^{*3/2}} \quad (31)$$

où « a » est un coefficient empirique qui dépend du matériau. En ordre de grandeur, on a bien sûr, compte tenu des hypothèses adoptées:  $\mu_{eff} \approx \theta$ . De façon générale, pour une couche granulaire sur un plan incliné, le coefficient de frottement effectif n'est pas constant mais varie avec l'épaisseur de la couche, selon (31), ce qui fournit donc une gamme d'écoulements stationnaires en fonction de l'inclinaison  $\varphi$ , puisque  $V^*$  dépend de  $\varphi$ .

### Modèle plus complet de la loi de frottement:

Les lois de comportement global ci-dessus ne permettent pas d'établir la rhéologie dans la couche granulaire, c'est-à-dire le lien entre les contraintes (normale  $N$ , tangentielle  $T$ ), le taux de cisaillement  $\nabla v$  et la compacité «  $c$  » du milieu.

Des études d'expérimentation numérique (Frédéric da Cruz) rapportées dans [5], où la contrainte normale et la contrainte tangentielle pouvaient être contrôlées, ont permis de mettre en évidence deux temps caractéristiques:

- l'un, dit **temps inertiel**  $\tau_i$ : il caractérise la durée de la chute d'un grain dans la couche sous l'action de la contrainte normale  $N$ , ou pression, qu'exerce la couche sur lui. Dans sa chute, le grain, de masse volumique  $\rho_s$ , parcourt une distance de l'ordre de son diamètre  $D$  pendant  $\tau_i$ , avec une vitesse  $v_i \approx D/\tau_i$ . Cette vitesse est telle que, en ordre de grandeur, l'énergie cinétique volumique du grain soit égale à la pression qu'il subit:  $\rho_s v_i^2 \approx N$ , d'où le temps inertiel:

$$\tau_i = D \sqrt{\frac{\rho_s}{N}} \quad (32)$$

NB: en ordre de grandeur, la pression exercée par la couche à la profondeur  $H$  (épaisseur) est du type hydrostatique:  $N \approx \rho g H$  où  $\rho$  est la masse volumique de la couche, différente de celle du grain  $\rho_s$  à cause de la compacité «  $c$  »:  $\rho = \rho_s c$ . En injectant cette expression de  $N$  dans celle de  $\tau_i$  (32) on obtient une vitesse de chute de type loi de Torricelli comme pour les liquides <sup>7</sup>:  
 $v_i = D/\tau_i \approx \sqrt{gH}$

- l'autre, dit **temps de cisaillement**  $\tau_s$ : il caractérise la tendance d'un grain à être entraîné dans le sens tangential (écoulement global) dû au gradient de vitesse, ou taux de cisaillement dans la couche, au lieu de suivre la chute due à la seule contrainte normale:

$$\tau_s = \frac{1}{\nabla v} \quad (33)$$

NB: en ordre de grandeur  $\nabla v \approx V/H$  donc  $\tau_s \approx H/V$ .

La compétition entre ces deux tendances, l'une de chute, l'autre d'entraînement tangential, est caractérisée par le nombre sans dimension, dit **nombre inertiel**, introduit dans [5]:

$$I = \frac{\tau_i}{\tau_s} = D \nabla v \sqrt{\frac{\rho_s}{N}} \quad (34)$$

NB: l'expression (34) peut se généraliser à tous types de grains, selon [8]:

$$I = D \nabla v \sqrt{\frac{\rho_s}{N}} - \beta \frac{D}{H}$$

(par exemple, pour les billes de verre on a  $\beta = 0$ ).

Selon différentes valeurs de  $I$ , l'écoulement s'effectue suivant différents régimes:

- $I < 10^{-3}$ : régime quasistatique. Les déformations du matériau granulaire sont petites et le matériau est dans un état élasto-plastique.
- Quand  $I$  augmente jusqu'à 0,1, c'est-à-dire quand le cisaillement devient important, la durée des contacts entre grains diminue et le milieu se dilate par dilatance de Reynolds. On montre d'ailleurs que la compacité «  $c$  » diminue pratiquement linéairement quand  $I$  augmente [27]

<sup>7</sup> Noter que cette approximation est autorisée puisque, pour un granulaire sur un plan incliné, les effets de parois latérales (rigides ou déformables) ne sont pas pris en compte ici et donc que la contrainte ne suit pas la relation de Janssen

[28] (figure 34):

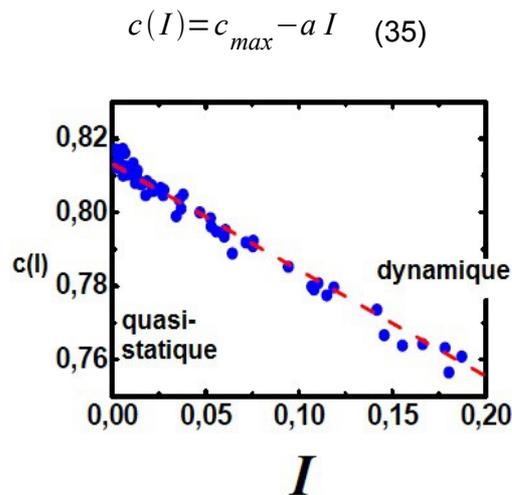


figure 34 – évolution de la dilatance avec le nombre inertiel (d'après [5])

En ordre de grandeur la valeur maximale de « c » est  $c_{max} = 0,82$ . De la loi de dilatance (35), compte tenu de (34), on a la relation entre la contrainte normale, le taux de cisaillement et la compacité:

$$N = \rho_S (D a)^2 \frac{(\nabla v)^2}{(c_{max} - c)^2} \quad (36)$$

Pour les grands  $I$  le régime dynamique est caractérisé par la prédominance des collisions, et le milieu peut être assimilé à un gaz dense.

- Entre ces deux extrêmes,  $10^{-3} < I < 10^{-1}$ , l'écoulement est dense, le matériau est bien au-dessus de son seuil d'écoulement ( $\theta$ ) dans un état plus proche du liquide que du gaz. Dans ce régime intermédiaire, les mouvements de chaque grain sont fortement corrélés à ceux de ses voisins (voir par exemple [23]). Les expérimentations physiques et numériques ont pu établir une relation entre  $\mu_{eff}$  et  $I$ , sous la forme linéaire (Chevoir et al. citée dans [5] et [8]):

$$\mu_{eff}(I) = \mu_{eff}^0 + b I \quad (37)$$

où  $\mu_{eff}^0$  est le coefficient de frottement dans le régime quasistatique ( $I < 10^{-3}$ ) qui correspond au frottement minimal (figure 35).

Puisque l'on a par définition:

$$T = \mu_{eff}(I) N$$

la relation (37) montre que la contrainte de cisaillement T est la somme de deux termes:

$$T = \mu_{eff}^0 N + b I N \quad (38)$$

**Remarque:** compte tenu de la relation (36) obtenue entre N,  $\nabla v$  et c et de la loi de dilatance c(I) (35), la relation (38) s'écrit aussi, en régime viscoplastique:

$$T = \mu_{eff}^0 N + a b \rho_S D^2 \frac{(\nabla v)^2}{c_{max} - c} \quad (39)$$

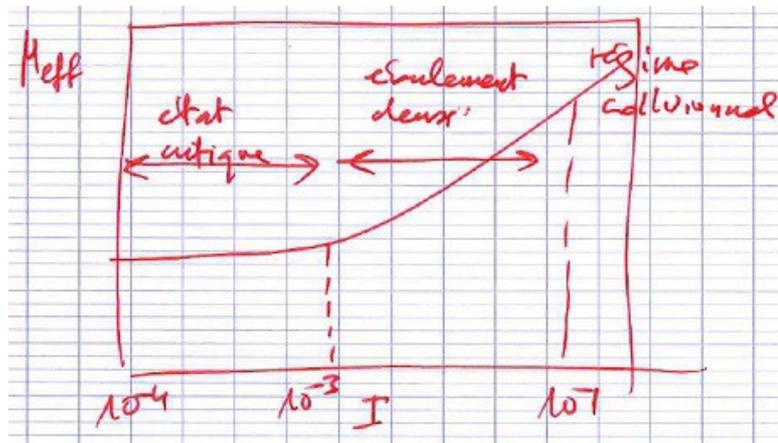


figure 35 – loi rhéologique en fonction du nombre inertiel et différents régimes correspondants

Le premier terme  $\mu_{eff}^0 N$  est associé aux frottements qui suivent la loi de Coulomb lorsque le matériau est dans l'état plastique. Quant au second terme,  $b I N$ , il s'écrit encore, compte tenu de la définition du nombre inertiel (pris pour  $\beta = 0$ ):

$$b I N = b D \nabla v N \sqrt{\frac{\rho_S}{N}}$$

soit:

$$b I N = b D \nabla v \sqrt{\rho_S N} \quad (40)$$

Ce terme correspond à la contribution « visqueuse » due aux collisions entre grains (régime à grand nombre inertiel) et pour laquelle tout se passe comme si la viscosité varie comme  $\sqrt{N}$ . Ainsi le matériau granulaire en écoulement dense se comporte comme un liquide viscoplastique:

- visqueux aux grands  $I$ , où  $b I N$  prédomine dans  $T$  qui varie comme  $\sqrt{N}$
- plastique aux faibles  $I$ , où  $\mu_{eff}^0 N$  prédomine dans  $T$  qui varie proportionnellement à  $N$  conformément à la loi de Coulomb.

Finalement, la contrainte de cisaillement s'écrit, en écoulement dense (loi de frottement):

$$T = \mu_{eff}^0 N + b D \sqrt{\rho_S} \nabla v \sqrt{N} \quad (41)$$

Si l'on connaît la relation entre la vitesse moyenne d'écoulement dans une section de la couche en fonction de son épaisseur  $H$  et de l'inclinaison  $\varphi$ ,  $V(H, \varphi)$ , alors les équations de Saint-Venant (29) permettront de prédire la variation de l'épaisseur en fonction de l'abscisse  $x$  le long de la pente, autrement dit la forme du profil du front de la masse granulaire en écoulement,  $H(x, \varphi)$ .

### **Expression de la vitesse moyenne d'une section de couche granulaire en fonction de l'épaisseur locale et de la pente du plan incliné (démonstration de la relation (30)):**

On peut calculer  $V(H, \varphi)$  à partir de l'estimation du taux de cisaillement  $\nabla v = \frac{\partial v(y, t)}{\partial y}$  moyennant les hypothèses suivantes:

- le milieu granulaire s'écoule sur un plan incliné, d'inclinaison constante  $\varphi$ , et rugueux;
- la contrainte normale  $N(y)$  à une profondeur  $(H - y)$  de la couche est de type hydrostatique:

$$N(y) = \rho g \cos \varphi (H - y)$$

où  $\rho = \rho_{sc}$  est la masse volumique du milieu granulaire compte tenu de sa compacité « c »;

- le coefficient de frottement effectif est assimilé à la tangente de l'angle d'inclinaison,  $\tan \varphi$ , (hypothèse d'un écoulement uniforme stationnaire):

$$\mu_{eff}(I) \approx \tan \varphi$$

- le coefficient de frottement en régime plastique,  $\mu_{eff}^0$ , est assimilé à la tangente de l'angle de blocage ou angle de talus,  $\tan \theta$ :

$$\mu_{eff}^0 \approx \tan \theta$$

- en outre, les angles sont petits, de sorte que  $\tan \varphi \approx \varphi$ ,  $\tan \theta \approx \theta$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  :

$$N(y) \approx \rho_S c g (H - y)$$

$$\mu_{eff}(I) \approx \varphi$$

$$\mu_{eff}^0 \approx \theta$$

Dans l'expression (37) de  $\mu_{eff}(I)$ , le terme  $bI$  est égal, d'après l'expression (40) de  $bIN$ , à:

$$bI = bD \nabla v \frac{1}{N} \sqrt{\rho_S N} = bD \nabla v \frac{\sqrt{\rho_S}}{\sqrt{N}}$$

On a donc:  $\mu_{eff}(I) = \mu_{eff}^0 + bI = \varphi = \theta + \frac{bD \sqrt{\rho_S}}{\sqrt{\rho_S c g (H - y)}} \nabla v$  d'où le taux de cisaillement:

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sqrt{c g}}{bD} (\varphi - \theta) \sqrt{H - y} \quad (42)$$

Avec pour condition aux limites, pas de glissement sur la pente en  $y = 0$ ,  $v(0) = 0$ , l'équation (42) s'intègre immédiatement et donne comme profil de vitesse (ou **profil de Bagnold**):

$$v(y) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{c g}}{bD} (\varphi - \theta) (H^{3/2} - (H - y)^{3/2}) \quad (43)$$

La vitesse moyenne dans la section d'épaisseur  $H$  est donc:  $V(H, \varphi) = \frac{1}{H} \int_0^H v(y) dy$  soit:

$$V(H, \varphi) = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{c g}}{bD} (\varphi - \theta) H^{3/2} \quad (44)$$

Cette expression est de la même forme que (30), avec  $H$  qui dépend de l'abscisse  $x$  le long de la pente.

Compte tenu de l'expression de la contrainte normale  $N$  sur la pente,  $N = \rho g H \cos \varphi$ , le nombre inertiel donné par (34) se réécrit:

$$I = D \nabla v \sqrt{\frac{\rho_S}{N}} = D \nabla v \sqrt{\frac{\rho_S}{\rho g H \cos \varphi}} = D \nabla v \frac{1}{\sqrt{c g H \cos \varphi}} \quad (45)$$

Or d'après (43), en  $y = 0$  (sur la pente) on a:  $\nabla v(y=0) = \frac{\sqrt{c g}}{bD} (\varphi - \theta) \sqrt{H}$ , ce qui devient d'après (44):

$$\nabla v(y=0) = \frac{5}{2} \frac{V}{H} \quad (46)$$

(remarquer donc que l'on n'a pas  $\nabla v = V/H$  sur la pente !). En remplaçant (46) dans (45) il vient:

$$I = \frac{5}{2} D \frac{V}{H} \frac{1}{\sqrt{c g H \cos \varphi}} \quad (47)$$

De même qu'il existe un angle d'inclinaison  $\theta_{\text{stop}}$  pour lequel, en fonction de l'épaisseur de la couche sur le plan incliné, l'écoulement s'arrête, réciproquement, il existe une épaisseur, notée  $H_{\text{stop}}$ , pour laquelle l'écoulement s'arrête, en fonction de l'inclinaison.

On peut établir la relation entre  $H_{\text{stop}}$  et l'inclinaison de la pente  $\varphi$ , grâce à la « loi d'échelle » suivante, par laquelle la dépendance entre la vitesse moyenne d'écoulement  $V$ , l'épaisseur  $H$  de la couche et  $H_{\text{stop}}(\varphi)$  est établie expérimentalement.

**Loi d'échelle:** Pour un écoulement stationnaire au-dessus du seuil de démarrage, les mesures expérimentales montrent que la dépendance entre le vitesse moyenne  $V$  et  $H$  et  $\varphi$  fait intervenir  $H_{\text{stop}}$  selon la relation:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g H}} = \beta \frac{H}{H_{\text{stop}}(\varphi)} \quad (48)$$

$\beta$  est un coefficient empirique qui dépend du matériau et des propriétés de la pente.  $Fr = V / \sqrt{g H}$  est le **nombre de Froude**, par analogie avec l'hydrodynamique des écoulements à surface libre. La relation (48) indique que le nombre de Froude est directement proportionnel au rapport de l'épaisseur et de l'épaisseur d'arrêt  $H_{\text{stop}}$ , pour une inclinaison donnée  $\varphi$ . La validité de (48) est principalement assurée pour de grands  $H/H_{\text{stop}}$  plus précisément pour  $H/H_{\text{stop}} > 2$  (figure 36).

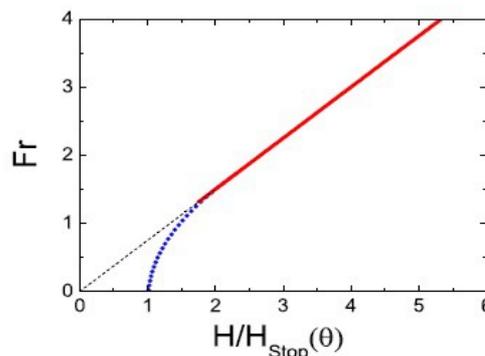


figure 36 – loi d'échelle (d'après [27])

L'utilisation de (44) dans (48) conduit à la détermination de  $H_{\text{stop}}(\varphi)$  en fonction de l'inclinaison  $\varphi$  et de l'angle de talus  $\theta$ :

$$\frac{1}{\beta} H_{\text{stop}}(\varphi) = \frac{5}{2} \frac{b D}{\sqrt{c}} \frac{1}{\varphi - \theta} \quad (49)$$

### Rhéologie avec prise en compte des processus de blocage:

Les relations précédentes s'appuient sur la loi rhéologique (37):

$$\mu_{\text{eff}}(I) = \mu_{\text{eff}}^0 + b I$$

et conduisent, compte tenu de la loi d'échelle, à déterminer  $H_{\text{stop}}$  par (49).

Or, ces relations sont approximatives, puisque l'expérience montre:

- l'angle  $\theta_{\text{start}}$  à partir duquel l'écoulement se produit est différent de l'angle  $\theta_{\text{stop}}$  pour lequel le matériau cesse de couler;
- ce phénomène d'hystérésis, où  $\theta_{\text{stop}} < \theta_{\text{start}}$  est lié à l'existence d'une contrainte seuil: lorsque la contrainte de cisaillement est inférieure à cette contrainte seuil l'écoulement est bloqué;
- les angles  $\theta_{\text{start}}$  et  $\theta_{\text{stop}}$  dépendent de l'épaisseur  $H$ . Mais, inversement, pour une inclinaison de la pente  $\varphi$  fixée, il existe une épaisseur  $H_{\text{stop}}(\varphi)$  en-dessous de laquelle l'écoulement s'arrête. L'expérience montre que l'on a, au lieu de (49):

$$H_{stop}(\varphi) = B D \frac{\tan \theta_M - \tan \varphi}{\tan \varphi - \tan \theta_m} \quad (50)$$

$\theta_m$  est l'angle où  $H_{stop}$  diverge ( $H_{stop} = \infty$ ): c'est l'angle limite où il n'y a plus d'épaisseur critique;  $\theta_M$  est l'angle où  $H_{stop} = 0$ , c'est-à-dire le matériau coule quelle que soit son épaisseur.  $B$ ,  $\theta_m$ ,  $\theta_M$  dépendent du matériau granulaire et de la rugosité de la pente.

L'origine du blocage semble être double (voir par exemple [5]):

- piégeage des grains par la rugosité de la pente;
- effets des corrélations entre les mouvements des grains.

Suite au fait que la relation (50) doit plutôt être prise en compte à la place de (49), la loi rhéologique (37) doit être remplacée par une nouvelle loi rhéologique qui tienne compte du phénomène de blocage. C'est ce qui va être présenté dans la suite.

La relation (50) peut être inversée pour faire apparaître l'inclinaison d'arrêt en fonction de l'épaisseur  $H$  (cf. figure 37):

$$\varphi_{stop}(H) = \frac{\theta_m \frac{H}{D} + B \theta_M}{\frac{H}{D} + B} \quad (51)$$

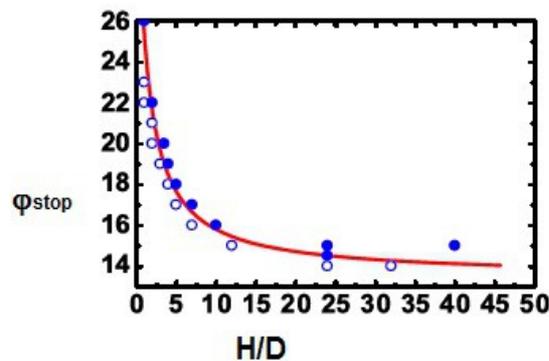


figure 37 – mesure de  $\varphi_{stop}$  en fonction de l'épaisseur  $H$  (d'après [27])

**NB:** la relation donnée pour  $H_{stop}$  (50) pourrait être tout aussi bien être appliquée à  $H_{start}$ , la hauteur à partir de laquelle l'écoulement se produit pour une inclinaison donnée  $\varphi$  (avec, naturellement des coefficients différents):

$$H_{start}(\varphi) = B' D \frac{\theta'_M - \varphi}{\varphi - \theta'_m}$$

Cherchons la nouvelle loi rhéologique qui tienne compte de la relation (50) au lieu de (49):  $\mu_{eff} = f(I)$

Les hypothèses suivantes sont adoptées:

- écoulement stationnaire uniforme:  $\tan \varphi \approx \varphi = \mu_{eff}$
- loi d'échelle (48):  $Fr = \frac{V}{\sqrt{g H}} = \beta \frac{H}{H_{stop}(\varphi)}$
- relation (50):  $H_{stop}(\varphi) = B D \frac{\tan \theta_M - \tan \varphi}{\tan \varphi - \tan \theta_m} \approx B D \frac{\tan \theta_M - \mu_{eff}}{\mu_{eff} - \tan \theta_m} = \frac{\beta H}{Fr}$  d'après (48)

Il s'ensuit que, en inversant (50),  $\mu_{eff}$  s'exprime en fonction du nombre de Froude  $Fr$ , de l'épaisseur  $H$  de

la couche, et des angles  $\theta_m$  et  $\theta_M$  (figure 38):

$$\mu_{eff}(Fr/H) = \frac{\theta_m + \frac{BD}{\beta} \theta_M \frac{Fr}{H}}{1 + \frac{BD}{\beta} \frac{Fr}{H}} \quad (52)$$

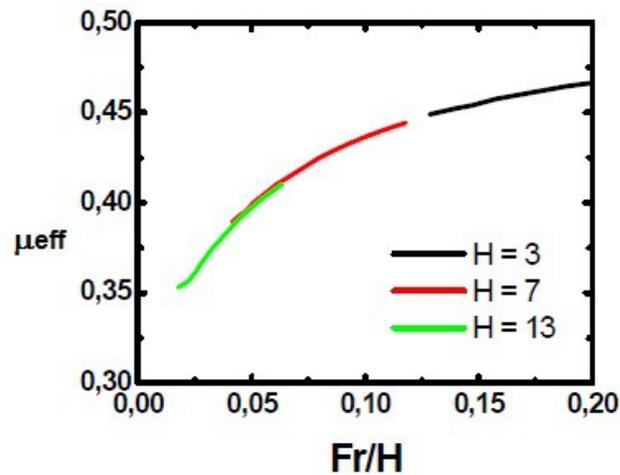


figure 38 – loi rhéologique avec blocages (d'après [27])

Mais d'après (47), on a aussi:

$$I = \frac{5}{2} D \frac{1}{H} \frac{V}{\sqrt{gH}} \frac{1}{\sqrt{c \cos \varphi}} = \frac{5}{2} \frac{Fr}{H} \frac{1}{\sqrt{c \cos \varphi}} \quad (53)$$

et en posant  $h^* = \frac{H}{D}$  la relation précédente s'écrit aussi:

$$\frac{Fr}{h^*} = \frac{2}{5} I \sqrt{c \cos \varphi} \quad (54)$$

ce qui permet d'exprimer la loi rhéologique (52) en fonction du nombre inertiel:

$$\mu_{eff}(I) = \frac{\theta_m + AI \theta_M}{1 + AI} \quad (55)$$

où  $A = \frac{2}{5} \frac{B}{\beta} \sqrt{c \cos \varphi}$ . La loi rhéologique (55) est différente de celle (37):  $\mu_{eff}(I) = \mu_{eff}^0 + bI$ , elle tient compte de l'existence d'un  $H_{stop}$  ou, de manière équivalente, de celle d'un  $\varphi_{stop}$  (avec  $\varphi_{stop} \neq \varphi_{start}$  par hystérésis). Pour comparer la nouvelle loi rhéologique (55) avec l'« ancienne » (37), on met encore (55) sous la forme:

$$\mu_{eff}(I) = \theta_m + \frac{(\theta_M - \theta_m)I}{\frac{1}{A} + I} = \mu_{eff}^0 + \frac{(\theta_M - \theta_m)I}{\frac{1}{A} + I} \quad (55)$$

avec  $\mu_{eff}^0 = \theta_m$ : quand  $I = 0$  (pas de cisaillement, régime quasistatique), on a  $\mu_{eff}(0) = \theta_m$ . Rappel: ces relations donnant  $\mu_{eff}(I)$  ne sont plus valables pour  $H < H_{stop}$  !  
En remplaçant dans (55) le nombre inertiel  $I$  par son expression (53), il vient:

$$\mu_{eff}(V, H) = \mu_{eff}^0 + \frac{\theta_M - \theta_m}{\frac{2I_0}{5D} \sqrt{c g \cos \varphi} \frac{H^{3/2}}{V} + 1} \quad (56)$$

avec  $I_0 = \frac{5}{2} \frac{\beta}{B} \frac{1}{\sqrt{c \cos \varphi}}$

**Front d'avalanche d'une couche de matériau granulaire sur un plan incliné [17]:**

Il est possible, à partir des équations de Saint-Venant et de la loi rhéologique (56), de prédire la forme du front d'avalanche d'une couche de matériau granulaire s'écoulant à vitesse constante sur un plan incliné.

Puisqu'il y a avalanche, et donc une dynamique de la couche granulaire d'où résulte un écoulement non uniforme et non stationnaire, il est clair que nous ne sommes plus dans la condition d'équilibre  $\tan \varphi = \mu_{eff}$  qui nous avait servi à établir la loi rhéologique (56) pour un écoulement stationnaire uniforme. Mais celle-ci reste une donnée d'entrée, dans les équations de Saint-Venant, en tant que l'une des forces imposée au système et responsables de son évolution dynamique décrite par ces équations. Écrivons les équations de Saint-Venant (29):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(HV) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(HV^2) = g H \cos \varphi (\tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{\partial H}{\partial x})$$

où le terme  $(\tan \varphi - \mu_{eff})$  n'est pas nul, et cherchons une solution sous la forme d'une onde progressive se propageant à la vitesse C qu'il s'agira de déterminer. Avec les changements de variables adaptés:

$$X = x - Ct, H(x,t) = H(X), V(x,t) = V(X)$$

avec  $dt = -1/C \cdot dX$  et  $dx = dX$ , la première équation devient:

$$-C \frac{dH}{dX} + \frac{d}{dX}(HV) = \frac{d}{dX}(H(V - C)) = 0$$

soit:  $H(x)(V(x) - C) = cste = H(0)(V(0) - C)$  où  $x = 0$  est l'abscisse du front d'avalanche, où, par définition, l'épaisseur est nulle  $H(0) = 0$ , par conséquent:

$$H(x)(V(x) - C) = 0 \quad \text{quelle que soit } x$$

Comme  $V(x) = V$  est supposée constante, il vient:

$$C = V \quad (57)$$

Ainsi: le front d'avalanche se propage avec la vitesse d'écoulement V. La seconde des équations de Saint-Venant se réécrit, quant à elle:

$$-C \frac{d}{dX}(HV) + \alpha \frac{d}{dX}(HV^2) = g H \cos \varphi (\tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{dH}{dX})$$

V étant constante et d'après (57), il vient:

$$(\alpha - 1) V^2 \frac{dH}{dX} = g H \cos \varphi (\tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{dH}{dX})$$

soit encore:  $(\alpha - 1) \frac{V^2}{g H \cos \varphi} \frac{dH}{dX} = \tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{dH}{dX}$

Or  $\frac{V^2}{g H \cos \varphi} = Fr^2$  où  $Fr$  est le nombre de Froude (48), d'où l'équation de la quantité de mouvement moyennée dans l'épaisseur d'une section, en régime propagatif:

$$(\alpha - 1) Fr^2 \frac{dH}{dX} = \tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{dH}{dX} \quad (58)$$

Avec les hypothèses  $\alpha \approx 1$  et  $K \approx 1$  (pression isotrope), l'équation du front d'onde (58) se simplifie et fait intervenir directement le coefficient de friction  $\mu_{eff}(V, H)$  à l'interface couche/pente :

$$\frac{dH}{dX} = \tan \varphi - \mu_{eff}(V, H) \quad (59)$$

Soit  $H_\infty$  l'épaisseur de la couche très loin en amont du front. Loin du front, l'épaisseur est constante, donc  $dH/dX(X_\infty) = 0 \rightarrow \tan \varphi = \mu_{eff}(V, H_\infty)$  : loin en amont du front, la connaissance de l'inclinaison de la pente et de l'épaisseur de la couche permet alors, par la relation (56), de déduire la vitesse  $V$ .

En réduisant les variables par rapport à celles loin du front,

$$H^* = H / H_\infty \quad X^* = X / X_\infty$$

l'équation (59) prend la forme adimensionnelle:

$$\frac{dH^*}{dX^*} = \tan \varphi - \mu_{eff}(V, H^*) \quad (60)$$

Le coefficient de friction  $\mu_{eff}(V, H)$  est donné par la loi rhéologique (56) que l'on réécrit avec les variables réduites:

$$\mu_{eff}(V, H) = \theta_m + \frac{\theta_M - \theta_m}{\frac{2 I_0 \sqrt{c g \cos \varphi}}{5 D} \frac{H_\infty^{3/2}}{V} H^{*3/2} + 1}$$

puisque  $\mu_{eff}^0 = \theta_m$ . Introduisons le nombre de Froude en amont loin du front:  $Fr_\infty = \beta \frac{H_\infty}{H_{stop}}$ , et

comme on a aussi  $\frac{2 I_0 \sqrt{c \cos \varphi}}{5 D} = \frac{\beta}{BD}$

ainsi que  $\frac{\beta}{BD} \sqrt{g} \frac{H_\infty^{3/2}}{V} = \frac{\beta}{BD} \sqrt{g H_\infty} \frac{H_\infty}{V} = \frac{\beta}{BD} \frac{H_\infty}{Fr_\infty} = \frac{H_{stop}}{BD}$

et posant:  $\gamma = \frac{H_{stop}}{BD} = \frac{\theta_M - \varphi}{\varphi - \theta_m}$

la loi rhéologique se réécrit avec l'épaisseur réduite  $H^*$ :

$$\mu_{eff} = \theta_m + \frac{\theta_M - \theta_m}{\gamma H^{*3/2} + 1} \quad (61)$$

et l'équation du front d'avalanche (60) a la forme adimensionnelle:

$$\frac{dH^*}{dX^*} = \varphi - \theta_m - \frac{\theta_M - \theta_m}{\gamma H^{*3/2} + 1} \quad (62)$$

Pour intégrer (62), on la réécrit aussi sous cette forme:

$$\frac{dH^*}{dX^*} = \gamma(\varphi - \theta_m) \frac{H^{*3/2} - 1}{1 + \gamma H^{*3/2}} \quad (63)$$

Or près du front, l'épaisseur est beaucoup plus faible qu'en amont, donc  $H^* \ll 1$ . Par ailleurs, on a approximativement  $\gamma \approx 1$ , (63) se simplifie en:

$$\frac{dH^*}{1 - H^{*3/2}} \approx -(\varphi - \theta_m) dX^*$$

Le sens des abscisses est pris de  $-\infty < X \leq 0$ , d'où l'équation de la forme du front d'avalanche:

$$\int_{H^*}^0 \frac{dH^*}{1 - H^{*3/2}} = -(\varphi - \theta_m) X^* \quad (64)$$

Le résultat numérique de (64) est donné figure 39 pour une inclinaison de  $24^\circ$  (réf. [31]).

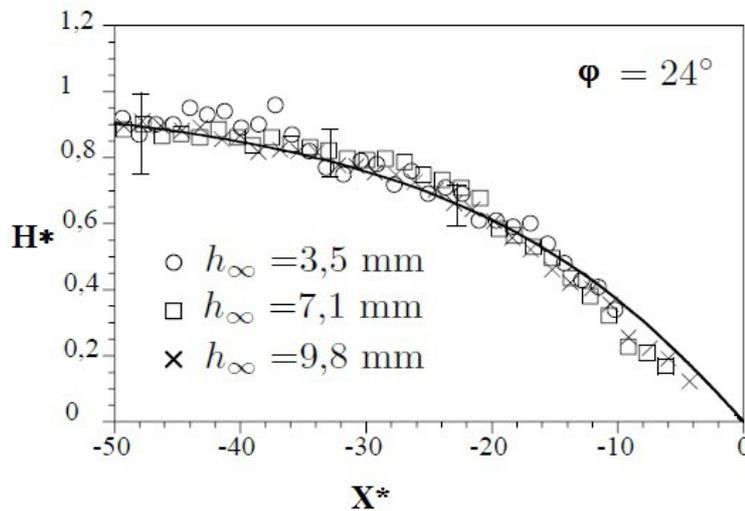


figure 39 – front d'avalanche de billes de verre sur un plan incliné rugueux: théorie et expériences (d'après Pouliquen, 1999, [31])

Comme remarqué dans [8], on notera que:

- les équations de Saint-Venant prévoient que, pour une inclinaison fixée, la forme du front d'avalanche reste homothétique lorsque l'on change l'épaisseur à l'infini en amont  $H_\infty$ : en effet comme le montre la figure 39, les points s'accroissent sur une même courbe lorsque l'on emploie les variables réduites  $X^*$  et  $H^*$ ;
- la pente du front où l'épaisseur s'annule ne diverge pas: cela provient de ce que la loi rhéologique (56) ne diverge pas (reste finie) lorsque l'épaisseur tend vers zéro, contrairement à la loi rhéologique (37), compte tenu de (45), établie sans tenir compte du phénomène d'hystérésis du blocage;
- en conséquence, la théorie prévoit aussi que l'angle de contact  $\delta$  que fait le profil du front avec le plan est fini et est directement relié à l'angle  $\theta_M$  pour lequel  $H_{\text{stop}} = 0$ . En effet, sur le front:

$$\tan \delta = \left| \frac{dH^*}{dX^*} \right| \approx |\varphi - \mu_{\text{eff}} - \theta_M + \theta_m| \quad \text{quand } H^* \approx 0$$

or  $\mu_{\text{eff}} \approx \theta_m$  quand  $H^* \approx 0$ , donc:

$$\tan \delta = |\varphi - \theta_M| \quad (65)$$

Cette valeur finie de l'angle de contact  $\delta$  provient du fait que le profil ne diverge pas au voisinage du front. Ce n'est pas le cas pour des liquides où l'on démontre que ce profil diverge,  $dH^*/dX^* = \infty$  quand  $H^* \rightarrow 0$ , le front présente une pente infinie donc  $\delta = \pi/2$  (voir par exemple [32]). La relation (65) montre que, pour une couche granulaire en écoulement sur un plan incliné rugueux, l'angle de contact  $\delta$  renseigne directement sur  $\theta_M$ , l'inclinaison  $\varphi$  étant connue. Ce résultat se vérifie moyennant le dispositif utilisé par O. Pouliquen [8] (figure 40).

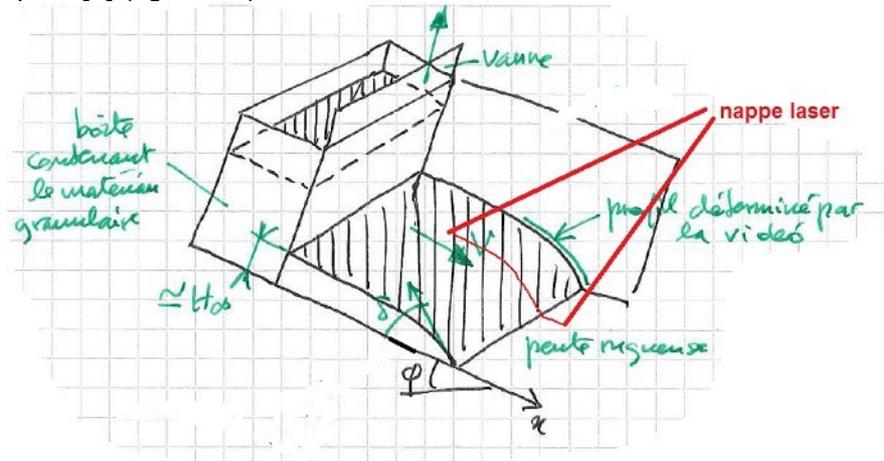


figure 40 – détermination expérimentale du profil du front d'avalanche (cf. [8], [31])



(d'après les photos de Scott Robinson, Wikipedia – les dimensions ont été modifiées, la larve du fourmilion étant à peine plus grosse qu'une tête d'allumette, et le cratère qu'elle a creusé a un diamètre de l'ordre de la longueur d'un bois d'allumette. Si vous voulez tout savoir sur le fourmilion – une sorte de libellule – et sa larve, consulter « les pages entomologiques » d' André Lequet sur le site: <http://www.insectes-net.fr>)

## Annexe 1 – Écoulement granulaire sur un plan incliné: établissement des équations du mouvement moyenné dans l'épaisseur (ou équations dites de Saint-Venant) [17] [24]

Les équations du mouvement moyennées dans l'épaisseur d'une section de couche de matériau granulaire en écoulement sur un plan incliné ont été introduites par Savage et Hutter, en 1989 [24]. On les appelle « équations de Saint-Venant » car elles procèdent de la même technique pour le calcul d'un écoulement moyen en mécanique des fluides pour de faibles profondeurs (cf. [32]).

Les hypothèses pour les établir sont (figure A1.1):

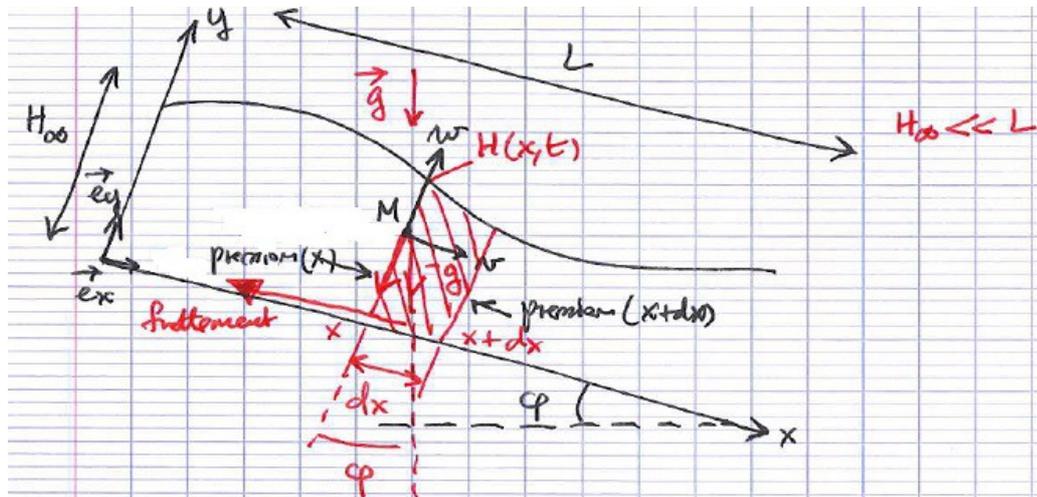


figure A1.1

- milieu incompressible: sa masse volumique  $\rho$  est constante;
- milieu continu: on ne s'intéresse pas au milieu comme un ensemble de constituants discrets en interaction;
- épaisseur de la couche fine devant les autres longueurs caractéristiques de l'écoulement: en conséquence on est en approximation 2D. La grandeur caractéristique de l'épaisseur de la couche,  $H_\infty$ , est petite devant sa longueur caractéristique  $L$ :  $H_\infty \ll L$ .

En local, le champ de vitesse en un point  $M(x,y)$  de la section de la tranche a pour coordonnées, sur les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  :  $\vec{u}(x, y, t) = v(x, y, t)\vec{e}_x + w(x, y, t)\vec{e}_y$

La surface libre, à l'abscisse  $x$ , est définie par  $y = H(x,t)$ , le fond, surface de la pente, correspond à  $y = 0$ . Par rapport à la surface libre, le point  $M(x,y)$  est donc à la profondeur  $H(x,t) - y$ .

Compte tenu de la première hypothèse (incompressibilité) la conservation de la masse s'exprime par l'équation de continuité:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

Le bilan de la quantité de mouvement s'obtient en écrivant que les termes sources sont donnés par le tenseur des contraintes:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

et par la pesanteur  $\rho \vec{g}$ , il vient donc:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g \sin \varphi + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \quad (\text{A1.2})$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \varphi + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \quad (\text{A1.3})$$

Le but est de déduire de (A1.1), (A1.2), (A1.3) les équations du mouvement moyennées dans l'épaisseur, c'est-à-dire des équations reliant les grandeurs moyennes: vitesse moyenne dans la tranche  $V(x,t)$ , épaisseur de la surface libre  $H(x,t)$ , avec les contraintes et les forces de frottement sur le fond. Les moyennes se calculent par intégration suivant l'épaisseur de la tranche, c'est-à-dire suivant ( $y$ ) avec  $0 \leq y \leq H(x,t)$ .

Pour cela, il faut évaluer l'importance relative des différents termes en les exprimant sous forme adimensionnelle, c'est-à-dire dans une échelle utilisant des grandeurs de référence (longueur  $L$ , épaisseur  $H_\infty$ , vitesse caractéristique  $U$ ): posant  $\varepsilon = H_\infty / L \ll 1$ , il vient:

$$x^* = x/L \quad y^* = y/H_\infty \quad t^* = t U/L \quad (\text{A1.4})$$

$$v^* = v/U \quad w^* = w/\varepsilon U \quad (\text{A1.5})$$

$$\sigma_{xx}^* = \sigma_{xx}/\rho g H_\infty \cos \varphi \quad \sigma_{yy}^* = \sigma_{yy}/\rho g H_\infty \cos \varphi \quad \sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}/\rho g H_\infty \sin \varphi \quad (\text{A1.6})$$

L'échelle de vitesse est  $U = \sqrt{g H_\infty \cos \varphi}$  : elle représente la chute des grains suivant la direction verticale  $\vec{e}_y$  due à la pression hydrostatique engendrée par la gravité.

L'équation de continuité (A1.1), en ordre de grandeur, est:

$$\frac{U}{L} + \frac{W}{H_\infty} = 0$$

d'où l'échelle de vitesse verticale (en valeur absolue)  $W = U H_\infty/L = \varepsilon U$  qui justifie l'emploi de la vitesse verticale réduite  $w^* = w/W = w/\varepsilon U$  dans (A1.5). Avec les variables réduites (A1.4) à (A1.6), les équations (A1.1), (A1.2) et (A1.3) prennent la forme adimensionnelle:

$$\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{A1.7})$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = \tan \varphi + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x^*} + \tan \varphi \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y^*} \quad (\text{A1.8})$$

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) = -1 + \varepsilon \tan \varphi \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y^*} \quad (\text{A1.9})$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  étant négligeables, (A1.9) donne pour  $\sigma_{yy}^*$ :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y^*} \approx 1$$

dont la solution dimensionnelle est, sous la condition  $\sigma_{yy}(x,0) = 0$  à la surface, de type hydrostatique:

$$\sigma_{yy}(x, y, t) = -\rho g \cos \varphi (H(x, t) - y) \quad (\text{A1.10})$$

(on note  $N(y) = -\sigma_{yy} = \rho g \cos \varphi (H(x, t) - y)$  la pression à la profondeur (y) dans la couche).

Restent donc les équations (A1.7) et (A1.8) à moyenner sur l'épaisseur.

Soit la vitesse moyennée sur l'épaisseur de la tranche à l'abscisse (x):

$$V(x, t) = \frac{1}{H(x)} \int_0^{H(x)} v(x, y, t) dy \quad (\text{A1.11})$$

Dans la tranche d'épaisseur  $H(x)$ , comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , le bilan de masse entrante et sortante est:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H dx) = \int_0^{H(x)} [\rho v dy]_x - \int_0^{H(x+dx)} [\rho v dy]_{x+dx}$$

$$\text{soit: } \frac{\partial}{\partial t} (H dx) = H(x)V(x) - H(x+dx)V(x+dx)$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{H(x)V(x) - H(x+dx)V(x+dx)}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} (HV)$$

c'est-à-dire l'équation de continuité moyennée sur l'épaisseur:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H V) = 0 \quad (\text{A1.12})$$

On définit aussi le carré de la vitesse moyenné sur l'épaisseur:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{H(x)} \int_0^{H(x)} v^2(x, y, t) dy \quad (\text{A1.13})$$

qui va être utilisé pour exprimer le bilan de quantité de mouvement dans la tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ . Celui-ci donne:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H V dx) = \int_0^{H(x)} \{\rho v^2 dy\}_x - \int_0^{H(x+dx)} \{\rho v^2 dy\}_{x+dx} + df$$

où  $df$  est le bilan des forces extérieures exercées sur la tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ . De (A1.13) il suit que:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t}(H V) + \frac{\partial}{\partial x}(H \langle v^2 \rangle) \right) = \frac{df}{dx} \quad (\text{A1.14})$$

(A1.14) est une équation en  $V$  et en  $\langle v^2 \rangle$  alors que l'on cherche une équation uniquement en  $V$ . Il faut donc relier  $\langle v^2 \rangle$  à  $V$  par une équation de fermeture. Pour cela, on introduit un paramètre de forme du profil de vitesse,  $\alpha$ , utilisable seulement sous l'hypothèse que le profil de  $v(y)$  suivant la verticale  $\vec{e}_y$  est établi pour une même section:

$$\langle v^2 \rangle = \alpha V^2 \quad (\text{A1.15})$$

Pour un profil « droit » (ou « bouchon »), on a  $\alpha = 1$ . Pour un profil linéaire,  $\alpha = 4/3$ , et pour un profil parabolique,  $\alpha = 5/6$ .

On montre aussi que pour un profil de type Bagnold, où

$$v(y) \sim (H^{3/2} - (H - y)^{3/2})$$

on a  $\alpha = 5/4$ . Tout ceci n'est qu'une approximation, sachant que pour les écoulements instationnaires et non uniformes, les effets inertiels peuvent modifier le profil de vitesse en une section donnée.

(A1.14) devient:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t}(H V) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(H V^2) \right) = \frac{df}{dx} \quad (\text{A1.16})$$

La force exercée sur la tranche de longueur  $dx$ , se décompose en trois termes:

- la composante de la gravité suivant  $\vec{e}_x$  :  $\rho g H dx \sin \varphi$
- la force exercée sur le fond, liée à la contrainte tangentielle (suivant  $\vec{e}_x$ ), ou contrainte de cisaillement à l'interface matériau granulaire/fond:  $\sigma_{xy} dx = -T dx$ . La connaissance de  $T$ , c'est-à-dire de la rhéologie de l'écoulement, est essentielle pour fermer le problème.
- la force de pression latérale de part et d'autre de la tranche entre  $x$  et  $x+dx$ :

$$\int_0^{H(x+dx)} \{\sigma_{xx} dy\}_{x+dx} - \int_0^{H(x)} \{\sigma_{xx} dy\}_x$$

On a donc:

$$df = \rho g H(x) dx \sin \varphi - T dx + \int_0^{H(x+dx)} \{\sigma_{xx} dy\}_{x+dx} - \int_0^{H(x)} \{\sigma_{xx} dy\}_x$$

Mais  $\sigma_{xx}$  est a priori inconnue. Or on peut le relier à la composante  $\sigma_{yy}$  donnée par (A1.10), par le **coefficient de redirection**, on constante de Janssen, traduisant l'**effet de voûte** dans les milieux granulaires:

$$\sigma_{xx} = K_J \sigma_{yy} \quad (\text{A1.17})$$

En ordre de grandeur  $K_J \approx 1$  ce qui correspond à l'hypothèse d'une pression isotrope, assez justifiée en écoulement mince (ce ne serait pas exact pour un écoulement en silo où l'effet Janssen est significatif). Il vient donc pour  $df$ :

$$df = \left( \rho g H \sin \varphi - T - K \rho g H \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx$$

et (A1.16) donne la deuxième équation de Saint-Venant:

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(HV^2) = g H \cos \varphi \left( \tan \varphi - \frac{T}{\rho g H \cos \varphi} - K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (\text{A1.18})$$

La résolution des équations de Saint-Venant (A1.12) et (A1.18) dépend directement de la connaissance du terme de friction  $T$  qui contient la rhéologie du matériau. De nombreuses études théoriques et expérimentales cherchent à déterminer la loi rhéologique  $T$  qui est complexe et fait intervenir de nombreux paramètres: compacité, nombre inertiel, taux de cisaillement, angles de départ et d'arrêt de l'écoulement (hystérésis de blocage), rugosité du fond, polydispersité du milieu granulaire, etc.

Remarque: L'équation adimensionnelle (A1.8) montre que la contrainte de cisaillement réduite  $\sigma_{yy}^*$  doit être du même ordre que les termes multipliés par  $\varepsilon$ , donc  $T$  doit être exprimée jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$ .

Comme principe à la base de la loi rhéologique, on remarque, dans l'équation (A1.18), que  $\rho g H \cos \varphi$  est la pression (ou contrainte normale) à l'interface milieu granulaire/plan incliné, donc pour  $y = 0$ :

$$N(0) = N = \rho g H \cos \varphi$$

Les frottements sur le fond s'expriment par une transformation de la contrainte normale  $N$  en une contrainte tangentielle  $T$  sur le fond, par l'intermédiaire du coefficient de frottement, comme pour les frottements de Coulomb. Mais a priori rien n'indique qu'il s'agisse de frottement de Coulomb car ce coefficient de frottement peut ne pas être constant (il peut dépendre de beaucoup de paramètres: la vitesse, la rugosité, la compacité, etc.). C'est pourquoi on l'appelle **coefficient de frottement effectif**  $\mu_{eff}$  et l'on a:

$$\mu_{eff} = \frac{T}{N} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \quad (\text{A1.19})$$

et (A1.18) prend alors la forme définitive:

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(HV^2) = N \left( \tan \varphi - \mu_{eff} - K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (\text{A1.20})$$

avec:  $N = \rho g H \cos \varphi$

Comme on est dans l'approximation couche mince, le terme  $\partial H / \partial x$  est faible, de l'ordre de  $\varepsilon$ . Il s'ensuit que, si l'écoulement est stationnaire ( $\partial / \partial t = 0$ ) et uniforme ( $\partial / \partial x = 0$ ), (A1.20) entraîne que, dans ce cas:

$$\mu_{eff} \approx \tan \varphi$$

Cela implique que, si l'on fixe une inclinaison de la pente, alors  $\mu_{eff}$  est constante. Réciproquement, si  $\mu_{eff}$  est constante ( $\mu_{eff} = \mu_{eff}^0$ ), i.e. si l'on est dans une configuration de frottement de Coulomb, alors il n'existe qu'un seul angle d'inclinaison  $\varphi$  pour lequel se produit l'écoulement stationnaire et uniforme.

Une telle approximation,  $\mu_{eff} = \mu_{eff}^0$ , reste valable et est confirmée expérimentalement pour des plans lisses et fortement inclinés (Savage et Hutter, 1989 [24]). Mais dans beaucoup de cas (fond rugueux,

faibles inclinaisons, écoulement fortement cisailé,...) l'expérience montre non seulement que l'on observe des écoulements stationnaires et uniformes pour une gamme de valeurs de  $\phi$ , mais encore que certains écoulements sont instationnaires, et qu'il existe des phénomènes de blocage de l'écoulement en fonction de l'épaisseur de la couche  $H$ .

La contribution du cisaillement étant représentée par le nombre inertiel  $I$  (sans dimension), et les blocages étant liés aux angles de démarrage  $\phi_{\text{start}}$  et d'arrêt  $\phi_{\text{stop}}$ , les lois rhéologiques consistent à exprimer  $\mu_{\text{eff}}$  en fonction de ces grandeurs:  $\mu_{\text{eff}}(I, H, \phi, \phi_{\text{stop}}, \dots)$ .

## Annexe 2 – Vidange d'un récipient contenant un matériau granulaire, sablier et loi de Beverloo

Un sablier se vide avec une vitesse constante, quelles soient les dimensions de sa chambre supérieure. C'est d'ailleurs pourquoi il sert à repérer le temps. Cela indique que le débit d'écoulement est indépendant de la hauteur du tas de sable restant dans la chambre supérieure. En revanche, on observe que le débit dépend directement de la taille de l'orifice qui sépare les deux chambres.

Il en va autrement pour la vidange d'un récipient qui contient un liquide (cf. [33]): la vitesse d'écoulement  $v$  est reliée à la hauteur restante du liquide  $h$  par la loi de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

ce qui correspond à une chute par gravité d'une particule depuis une hauteur  $h$ . Comme  $h$  diminue au cours de la vidange, la vitesse, et donc le débit, diminue aussi: l'écoulement n'est pas constant. Pour obtenir un écoulement constant d'un liquide lors de la vidange d'un récipient il faut jouer sur la section de celui-ci en fonction de la hauteur: on obtient alors un clepsydre (horloge à eau). Supposons le récipient de révolution autour de l'axe d'écoulement  $Oy$ , et si  $R(y)$  est le rayon d'une section à la cote  $y$  du liquide dans le récipient, alors sa section  $S(y)$  est, à cette cote:  $S(y) = \pi R^2(y)$ . Le débit à cette cote  $y$  est  $Q = vS = \sqrt{2gy} \pi R^2(y)$ . Si l'on veut  $Q$  constant, on obtient la relation donnant le profil d'une génératrice du récipient:

$$R(y) = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \frac{1}{(2gy)^{1/4}}$$

Revenons à l'écoulement d'un matériau granulaire à travers l'orifice situé au fond du récipient, que l'on supposera cylindrique (exemple: un silo à grains). L'indépendance du débit vis-à-vis du diamètre du cylindre et de la hauteur de la surface libre du matériau encore présent dans le cylindre, est une conséquence de l'**effet de voûte** dans les matériaux granulaires.

Par l'effet de voûte, la contrainte normale exercée sur le fond par la colonne de matériau est redirigée en partie vers les parois latérales sous forme de contrainte tangentielle. Au niveau de l'orifice, de diamètre  $L$ , il se forme donc une voûte, que l'on suppose hémisphérique, également de diamètre  $L$ : une particule située sur cette voûte près de l'orifice tombe alors dans celui-ci d'une hauteur de chute  $L/2$ , et prend donc la vitesse:

$$v = \sqrt{gL}$$

laquelle est donc indépendante des autres paramètres de l'installation (figure A2.1).

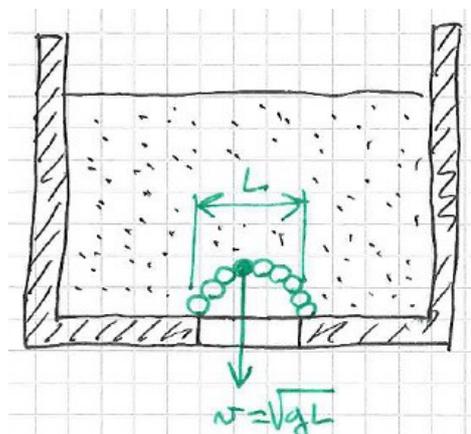


figure A2.1 – formation d'une voûte au niveau de l'orifice d'un récipient contenant un matériau granulaire

D'ailleurs, comme L est le seul paramètre du problème restant, l'analyse aux dimensions conduit à poser aussi  $v \sim \sqrt{gL}$ .

La surface de la section de l'orifice, supposée circulaire, étant  $S = \pi L^2/4$ , le débit massique à travers l'orifice est  $Q = \rho Sv$ :

$$Q = \rho \sqrt{g} L^{5/2}$$

où  $\rho = \rho_s c$  est la masse volumique du matériau granulaire tenant compte de sa compacité c,  $\rho_s$  étant la masse volumique de chaque grain.

En fait, l'expérience et une analyse plus fine conduisent à corriger le diamètre de l'orifice L d'une quantité kD, où D est le diamètre des grains (milieu supposé homogène et monodispersé) et k un facteur  $k \geq 1,5$ . Cela donne le **diamètre effectif**:

$$L^* = L - kD$$

qui intervient dans l'expression du débit (**loi de Beverloo**, 1961):

$$Q = \rho_s c \sqrt{g} L^{*5/2} \quad (\text{A2.1})$$

(A2.1) peut se réécrire:

$$\frac{Q^{2/5}}{(\rho_s c \sqrt{g})^{2/5}} = L - kD = L \left(1 - k \frac{D}{L}\right)$$

En posant le débit massique sous la forme adimensionnelle:

$$q = \frac{Q}{\rho_s c \sqrt{g} L^{5/2}}$$

(A2.1) devient:

$$q^{2/5} = 1 - k \frac{D}{L} \quad (\text{A2.2})$$

On obtient la droite de la figure A2.2 pour diverses tailles de grains D et orifices L (droite de Beverloo). D, L,  $\rho_s$  étant connus, l'expérience fournit k et q: on peut donc remonter à la compacité c.

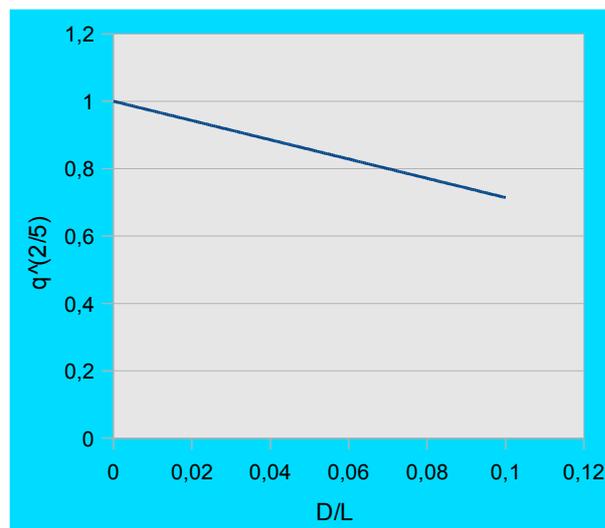


figure A2.2 – Loi de Beverloo

Ainsi un moyen de déterminer la compacité d'un milieu granulaire consiste à utiliser la loi de Beverloo.

**Limites de la loi de Beverloo:**

Elle est vérifiée pour des grains de diamètres tels que  $0,02 \leq \frac{D}{L} \leq 0,07$ .

Le débit Q s'annule pour  $kD/L = 1$ , on doit donc avoir un orifice suffisamment grand  $L > kD$  pour obtenir l'écoulement. Réciproquement, la taille D des grains ne doit pas être trop faible ( $D/L > 0,02$ ) car d'autres phénomènes deviennent prépondérants par rapport au seul phénomène d'effet de voûte.

### Annexe 3 – Rappels sur la théorie des chocs de billes élastiques, avec glissement et roulement à l'impact [14]

#### A3.1 – Choc frontal

La géométrie du problème et les notations adoptées sont celles de la figure 26.

a) Si les billes sont **parfaitement élastiques**, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique totales se conservent avant et après le choc:

$$\begin{aligned} m_1 V'_1 + m_2 V'_2 &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 V'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 V'^2_2 &= \frac{1}{2} m_1 V^2_1 + \frac{1}{2} m_2 V^2_2 \end{aligned}$$

Les vitesses après le choc sont alors reliées à celles d'avant le choc par:

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ V'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

Exemple:

- $m_2$  infinie et  $V_2 = 0$  (mur rigide)  $\rightarrow V'_1 = -V_1, V'_2 = 0$  (rebond)
- $m_1 = m_2 \rightarrow V'_1 = V_2, V'_2 = V_1$  (échange des vitesses)

b) Si le choc est **incomplètement élastique**, introduction du coefficient de restitution  $\varepsilon$  (**hypothèse de Newton**):

Il n'y a plus conservation de l'énergie cinétique (laquelle se calcule a posteriori). La quantité de mouvement se conserve et on a, par définition, la relation de restitution entre les vitesses:

$$\begin{aligned} m_1 V'_1 + m_2 V'_2 &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ V'_1 - V'_2 &= -\varepsilon (V_1 - V_2) \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire donne:

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2} V_1 + (1 + \varepsilon) \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ V'_2 &= (1 + \varepsilon) \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m_1 + m_2} V_2 \end{aligned} \quad (\text{A3.2})$$

qui sont les relations (17). Le choc s'accompagne d'une perte d'énergie cinétique:

$$T' - T = \left( \frac{1}{2} m_1 V'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 V'^2_2 \right) - \left( \frac{1}{2} m_1 V^2_1 + \frac{1}{2} m_2 V^2_2 \right)$$

ce qui, compte tenu de (A3.2), donne:

$$T' - T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \varepsilon)^2 (V_1 - V_2)^2 \quad (\text{A3.3})$$

qui est la relation (16).

Cas remarquables:

- corps parfaitement mous:  $\varepsilon = 0 \rightarrow$ 

$$\left| \begin{array}{l} V'_1 = V'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ T' - T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2 \end{array} \right. \text{ les deux corps ont la}$$

même vitesse en module et direction après le choc.
- corps parfaitement élastique:  $\varepsilon = 1 \rightarrow$ 

$$\left| \begin{array}{l} V'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2 \\ V'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_2 \end{array} \right. \text{ et } T' - T = 0 \text{ (pas de}$$

perte d'énergie cinétique; on retrouve les relations du choc parfaitement élastique (A3.1).

Quelques valeurs de  $\varepsilon$ :

- billes de verre: 15/16
- billes en ivoire: 8/9
- billes en acier: 5/9
- billes de liège: 5/9
- billes de bois: 1/2

c) **Remarque: traduction des relations précédentes dans le repère du centre de masse ( $R_C$ ), pour les chocs parfaitement ou partiellement élastiques frontaux**

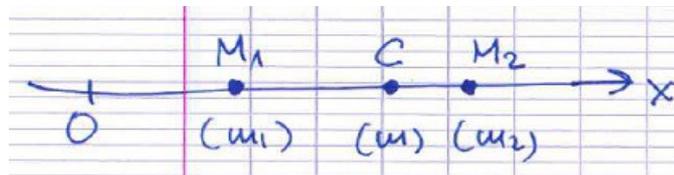


figure A3.1

Le centre de masse C des billes  $M_1$ , de masse  $m_1$ , et  $M_2$ , de masse  $m_2$ , est défini par (figure A3.1):

$$\begin{aligned} mOC &= mx_C = m_1OM_1 + m_2OM_2 \text{ (avec } m = m_1 + m_2) \\ &= m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(OC + CM_1) + m_2(OC + CM_2) \\ &= (m_1 + m_2)OC + m_1CM_1 + m_2CM_2 = mx_C + m_1x^*_1 + m_2x^*_2 \end{aligned}$$

où  $x^*_1 = CM_1$  et  $x^*_2 = CM_2$  sont les coordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  dans le repère du centre de masse ( $R_C$ ), c'est-à-dire où C est pris comme origine. D'où:

$$\begin{aligned} m_1x^*_1 + m_2x^*_2 &= 0 \\ x_C &= \frac{m_1}{m}x_1 + \frac{m_2}{m}x_2 \end{aligned} \quad (A3.4)$$

Quantité de mouvement de l'ensemble des deux billes  $M_1$  et  $M_2$ :

$$p = p_1 + p_2 = m_1V_1 + m_2V_2 = mV_C = p_C$$

où  $V_C = dOC/dt$  vitesse de C par rapport au repère galiléen d'origine O, d'où:

$$V_C = \frac{m_1}{m} V_1 + \frac{m_2}{m} V_2 \quad (\text{A3.5})$$

Dans (R<sub>C</sub>), en dérivant (A3.4) par rapport au temps, on obtient, puisque par définition  $x_C^* = 0$ :

$$p_C^* = p_1^* + p_2^* = 0 \text{ avec } p_1^* = m_1 V_1^* \text{ et } p_2^* = m_2 V_2^*, \text{ donc } p_1^* = -p_2^*$$

Or:  $p_1^* = m_1 V_1^* = m_1 \frac{d}{dt} CM_1 = m_1 \frac{d}{dt} (CO + OM_1) = m_1 \left( \frac{d}{dt} OM_1 - \frac{d}{dt} OC \right) = m_1 (V_1 - V_C)$

donc:

$$V_1^* = V_1 - V_C$$

de même:

$$V_2^* = V_2 - V_C$$

En développant l'expression de  $V_C$ :

$$p_1^* = m_1 (V_1 - V_C) = m_1 \left( V_1 - \frac{m_1}{m} V_1 - \frac{m_2}{m} V_2 \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} p_1^* = \mu (V_1 - V_2) \\ p_2^* = -p_1^* = -\mu (V_1 - V_2) \end{cases} \quad (\text{A3.6})$$

où la masse réduite est:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m} \quad (\text{A3.6bis})$$

A partir des relations (A3.5) et (A3.6) on démontre le **théorème de König** pour l'énergie cinétique:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (V_1^* + V_C)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^* + V_C)^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{*2} + \frac{1}{2} m V_C^2 + (m_1 V_1^* + m_2 V_2^*) V_C$$

posant:

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 V_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{*2} \quad \text{énergie cinétique dans (R}_C\text{)}$$

$$\frac{1}{2} m V_C^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \text{énergie cinétique de translation de (R}_C\text{) par rapport au repère galiléen}$$

et puisque  $m_1 V_1^* + m_2 V_2^* = p_1^* + p_2^* = p_C^* = 0$  il vient:

$$T = T^* + \frac{p^2}{2m} \quad (\text{A3.7})$$

De:  $p_1^* = \mu (V_1 - V_2) = m_1 V_1^*$  et  $p_2^* = -\mu (V_1 - V_2) = m_2 V_2^*$  on tire

$$V_1^* = \frac{\mu}{m_1} (V_1 - V_2)$$

$$V_2^* = -\frac{\mu}{m_2} (V_1 - V_2)$$

Ces relations sont valables aussi après le choc:

$$\begin{aligned}
V'^*_1 &= V'_1 - V'_C \\
V'^*_2 &= V'_2 - V'_C \\
V'^*_1 &= \frac{\mu}{m_1}(V'_1 - V'_2) \\
V'^*_2 &= -\frac{\mu}{m_2}(V'_1 - V'_C)
\end{aligned}$$

Mais  $V'_C = V_C$ ; en effet, la conservation de la quantité de mouvement conduit à:

$$p_C = m_1 V_1 + m_2 V_2 = m V_C = m_1 V'_1 + m_2 V'_2 = m V'_C$$

donc:

$$\begin{aligned}
V'^*_1 &= V'_1 - V_C \\
V'^*_2 &= V'_2 - V_C
\end{aligned}$$

En remplaçant  $V'_1$  et  $V'_2$  par leurs expressions en fonction de  $V_1$  et  $V_2$  (relations (A3.2)) ainsi que  $V_C$  (relation (A3.5)), les deux relations précédentes donnent:

$$\begin{aligned}
V'^*_1 &= \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m} V_1 + (1 + \varepsilon) \frac{m_2}{m} V_2 - \left( \frac{m_1}{m} V_1 + \frac{m_2}{m} V_2 \right) = -\varepsilon \frac{m_2}{m} (V_1 - V_2) = -\frac{\mu}{m_1} \varepsilon (V_1 - V_2) \\
V'^*_2 &= (1 + \varepsilon) \frac{m_1}{m} V_1 + \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m} V_2 - \left( \frac{m_1}{m} V_1 + \frac{m_2}{m} V_2 \right) = \varepsilon \frac{m_1}{m} (V_1 - V_2) = \varepsilon \frac{\mu}{m_2} (V_1 - V_2)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}
V'^*_1 &= -\varepsilon V^*_1 \\
V'^*_2 &= -\varepsilon V^*_2
\end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$

Ces expressions (A3.8) sont évidemment équivalentes à l'expression de l'hypothèse de Newton dans le référentiel du centre de masse.

Dans le repère du centre de masse ( $R_C$ ) on a donc une relation matricielle qui ne fait intervenir que le coefficient de restitution  $\varepsilon$ :

$$\begin{bmatrix} V'^*_1 \\ V'^*_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^*_1 \\ V^*_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.9})$$

tandis que dans le référentiel galiléen ( $R_O$ ) d'origine O, les relations (A3.2) entre  $V'_1$ ,  $V'_2$  et les vitesses  $V_1$ ,  $V_2$ , s'expriment par une matrice dont les coefficients dépendent de  $\varepsilon$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ :

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} m_1 - \varepsilon m_2 & (1 + \varepsilon) m_2 \\ (1 + \varepsilon) m_1 & m_2 - \varepsilon m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.10})$$

Pour  $m_1 = m_2$ , (A3.10) ne fait intervenir que  $\varepsilon$ :

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & 1 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Remarquons aussi que le coefficient de restitution  $\varepsilon$  est le rapport entre les quantités de mouvement après et avant le choc exprimées dans le référentiel du centre de masse ( $R_C$ ):

$$p^*_1 = \mu (V_1 - V_2) \quad \text{et} \quad p'^*_1 = \mu (V'_1 - V'_2)$$

donc:

$$\frac{p'^*_1}{p^*_1} = \frac{V'_1 - V'_2}{V_1 - V_2} = -\varepsilon \quad (\text{A3.11a})$$

de même:

$$\frac{p'^*_2}{p^*_2} = -\varepsilon \quad (\text{A3.11b})$$

### A3.2 – Choc non frontal de deux billes élastiques frottantes

On rappelle ici l'approche générale pour deux solides quelconques en mouvement (voir par exemple réf. [14]).

La géométrie du problème est représentée à la figure A3.2.

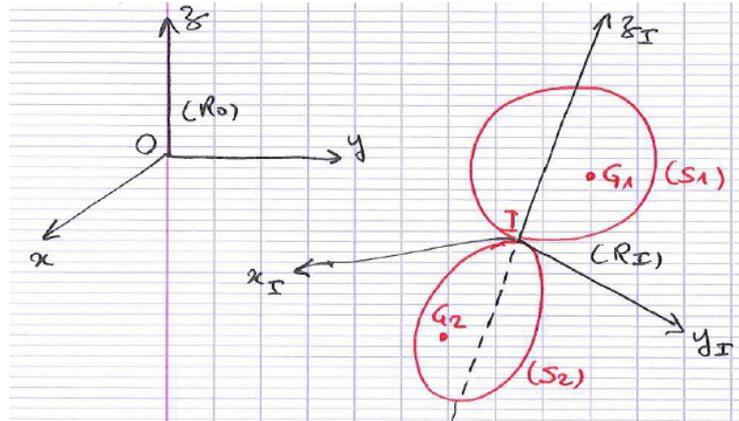


figure A3.2

(R<sub>0</sub>): repère galiléen  $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

(R<sub>1</sub>): repère lié au point d'impact I  $\{I, \vec{x}_I, \vec{y}_I, \vec{z}_I\}$

L'axe  $I\vec{z}_I$  est porté par la normale commune aux deux solides (S<sub>1</sub>), (S<sub>2</sub>) en I.

Centre d'inertie G<sub>1</sub> de (S<sub>1</sub>) dans (R<sub>0</sub>):  $I\vec{G}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$  (m<sub>1</sub>: masse du solide (S<sub>1</sub>))

Tenseur d'inertie de (S<sub>1</sub>) dans (R<sub>0</sub>):

$$[J_1]_{R_0} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

Torseur de vitesse du centre d'inertie de (S<sub>1</sub>) dans le repère (R<sub>0</sub>):

$$\vec{V}_1(G_1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}_{R_0}, \quad \vec{\Omega}_{1(R_0)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_{R_0}$$

Pour le solide (S<sub>2</sub>), de masse m<sub>2</sub>, on a les définitions équivalentes:

centre d'inertie:  $\vec{IG}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

tenseur d'inertie dans (R<sub>0</sub>):  $[J_2]_{R_0} = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}$

torseur de vitesse dans (R<sub>0</sub>):  $\vec{V}_2(G_2) = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}_{R_0}$ ,  $\vec{\Omega}_{2(R_0)} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}_{R_0}$

On définit la **percuSSION au contact** de (S<sub>1</sub>) sur (S<sub>2</sub>):

$$\vec{P}_{12} = m_1 (\vec{V}'_1(G_1) - \vec{V}_1(G_1)) = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

où  $\vec{V}'_1(G_1) = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \beta'_1 \\ \gamma'_1 \end{bmatrix}$  est la vitesse de (S<sub>1</sub>) après le choc.

De même pour (S<sub>2</sub>) sur (S<sub>1</sub>):  $\vec{P}_{21} = -\vec{P}_{12}$  de coordonnées:

$$\begin{cases} -X_1 = m_1 (\alpha'_1 - \alpha_1) \\ -Y_1 = m_1 (\beta'_1 - \beta_1) \\ -Z_1 = m_1 (\gamma'_1 - \gamma_1) \end{cases} \quad (\text{A3.12})$$

Moment de la percusion par rapport à I :

$$\vec{G}_1 \vec{I} \wedge \vec{P}_{21} = \vec{\sigma}'(G_1)_{R_0} - \vec{\sigma}(G_1)_{R_0} \quad (\text{A3.13})$$

où  $\vec{\sigma}'$  et  $\vec{\sigma}$  sont les moments cinétiques après et avant le choc.

Or le moment cinétique de (S<sub>1</sub>) par rapport à G<sub>1</sub> avant le choc est:

$$\vec{\sigma}(G_1)_{R_0} = [J_1]_{R_0} \vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 p_1 - F_1 q_1 - E_1 r_1 \\ -F_1 p_1 + B_1 q_1 - D_1 r_1 \\ -E_1 p_1 - D_1 q_1 + C_1 r_1 \end{bmatrix}$$

et relations analogues pour  $\vec{\sigma}'(G_1)_{R_0} = [J_1]_{R_0} \vec{\Omega}'_1$  où  $\vec{\Omega}'_1 = \begin{bmatrix} p'_1 \\ q'_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}$

Mais on a aussi:  $\vec{G}_1 \vec{I} \wedge \vec{P}_{21} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -X_1 \\ -Y_1 \\ -Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 Z_1 - c_1 Y_1 \\ c_1 X_1 - a_1 Z_1 \\ a_1 Y_1 - b_1 X_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.14})$

En égalant (A3.13) et (A3.14) on obtient une première série de relations entre les composantes de la percussion et celles de la vitesse angulaire de (S<sub>1</sub>) avant et après le choc:

$$\left. \begin{aligned} b_1 Z_1 - c_1 Y_1 &= A_1(p'_1 - p_1) - F_1(q'_1 - q_1) - E_1(r'_1 - r_1) \\ c_1 X_1 - a_1 Z_1 &= -F_1(p'_1 - p_1) + B_1(q'_1 - q_1) - D_1(r'_1 - r_1) \\ a_1 Y_1 - b_1 X_1 &= -E_1(p'_1 - p_1) - D_1(q'_1 - q_1) + C_1(r'_1 - r_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.15})$$

De même pour le solide (S<sub>2</sub>), avec des notations analogues:  $\overrightarrow{G_2} \vec{I} \wedge \overrightarrow{P}_{12} = \vec{\sigma}'(G_2)_{R_O} - \vec{\sigma}(G_2)_{R_O}$  et

$$\vec{\sigma}(G_2)_{R_O} = [J_2]_{R_O} \vec{\Omega}_2 \quad \text{où} \quad \vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}'(G_2)_{R_O} = [J_2]_{R_O} \vec{\Omega}'_2 \quad \text{où} \quad \vec{\Omega}'_2 = \begin{bmatrix} p'_2 \\ q'_2 \\ r'_2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne une deuxième série de relations entre la percussion et les composantes de la vitesse angulaire de (S<sub>2</sub>) avant et après le choc:

$$\left. \begin{aligned} -b_2 Z_1 + c_2 Y_1 &= A_2(p'_2 - p_2) - F_2(q'_2 - q_2) - E_2(r'_2 - r_2) \\ -c_2 X_1 + a_2 Z_1 &= -F_2(p'_2 - p_2) + B_2(q'_2 - q_2) - D_2(r'_2 - r_2) \\ -a_2 Y_1 + b_2 X_1 &= -E_2(p'_2 - p_2) - D_2(q'_2 - q_2) + C_2(r'_2 - r_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.16})$$

auquel on ajoute la définition de la percussion pour (S<sub>2</sub>) sur (S<sub>1</sub>):

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= m_2(\alpha'_2 - \alpha_2) \\ Y_1 &= m_2(\beta'_2 - \beta_2) \\ Z_1 &= m_2(\gamma'_2 - \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.17})$$

Les équations du choc sont (A3.12), (A3.15), (A3.16), (A3.17): ce sont 12 équations à 15 inconnues:

- $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ : composantes de  $\vec{V}'_1(G_1)$  après le choc de (S<sub>1</sub>)
- $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ : composantes de  $\vec{V}'_2(G_2)$  après le choc de (S<sub>2</sub>)
- $p'_1, q'_1, r'_1$ : composantes de  $\vec{\Omega}'_1$  après le choc de (S<sub>1</sub>)
- $p'_2, q'_2, r'_2$ : composantes de  $\vec{\Omega}'_2$  après le choc de (S<sub>2</sub>)
- $X_1, Y_1, Z_1$ : composantes de la percussion  $\vec{P}_{12}$

Pour fermer le problème, on dispose de:

- la loi de fin de choc (restitution):

$$\gamma'_2 - \gamma'_1 = -\varepsilon(\gamma_2 - \gamma_1) \quad (\text{A3.18})$$

- la loi de Coulomb sur le glissement: vitesse de glissement de (S<sub>2</sub>) sur (S<sub>1</sub>):

$$s_{21}^{\rightarrow}(I) = \vec{n} \wedge \vec{V}_{21}^{\rightarrow} \wedge \vec{n} \quad (\text{A3.19})$$

où  $\vec{V}_{21}^{\rightarrow}(P) = \vec{V}_2^{\rightarrow}(P) - \vec{V}_1^{\rightarrow}(P)$  vitesse relative du solide (S<sub>2</sub>) par rapport au solide (S<sub>1</sub>), et  $\vec{n}$  normale

commune de (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) en I. Si  $s_{21}^{\vec{I}}(I)=0$  il y a roulement sans glissement.

- application du principe fondamental de la dynamique à la percussion:  
Il y a choc ou percussion lorsqu'il y a *discontinuité de vitesse sans modification de la position*:

$$\vec{P}_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21} dt$$

où  $\vec{F}_{21} = \begin{bmatrix} -X \\ -Y \\ -Z \end{bmatrix}_{R_O}$  est la force subie par le solide (S<sub>1</sub>) de la part du solide (S<sub>2</sub>) lors de la percussion pendant la durée t<sub>2</sub>-t<sub>1</sub>. Le principe fondamental de la dynamique donne alors:

$$\vec{F}_{21} = m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt}$$

donc:

$$\left. \begin{aligned} -X &= m_1 \frac{d\alpha_1}{dt} \\ -Y &= m_1 \frac{d\beta_1}{dt} \\ -Z &= m_1 \frac{d\gamma_1}{dt} \end{aligned} \right| \quad (\text{A3.20})$$

- théorème du moment cinétique:  $\vec{G}_1 \vec{I} \wedge \vec{F}_{21} = \frac{d}{dt} (\vec{G}_1 \vec{I} \wedge \vec{P}_{21})$  , soit:

$$\left. \begin{aligned} b_1 Z - c_1 Y &= A_1 \frac{dp_1}{dt} - F_1 \frac{dq_1}{dt} - E_1 \frac{dr_1}{dt} \\ c_1 X - a_1 Z &= -F_1 \frac{dp_1}{dt} + B_1 \frac{dq_1}{dt} - D_1 \frac{dr_1}{dt} \\ a_1 Y - b_1 X &= -E_1 \frac{dp_1}{dt} - D_1 \frac{dq_1}{dt} + C_1 \frac{dr_1}{dt} \end{aligned} \right| \quad (\text{A3.21})$$

De même pour (S<sub>2</sub>):  $\vec{F}_{12} = m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} X &= m_2 \frac{d\alpha_2}{dt} \\ Y &= m_2 \frac{d\beta_2}{dt} \\ Z &= m_2 \frac{d\gamma_2}{dt} \end{aligned} \right| \quad (\text{A3.22})$$

et:  $\vec{G}_2 \vec{I} \wedge \vec{F}_{12} = \frac{d}{dt} (\vec{G}_2 \vec{I} \wedge \vec{P}_{12}) \rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} -b_2 Z + c_2 Y &= A_2 \frac{dp_2}{dt} - F_2 \frac{dq_2}{dt} - E_2 \frac{dr_2}{dt} \\ -c_2 X + a_2 Z &= -F_2 \frac{dp_2}{dt} + B_2 \frac{dq_2}{dt} - D_2 \frac{dr_2}{dt} \\ -a_2 Y + b_2 X &= -E_2 \frac{dp_2}{dt} - D_2 \frac{dq_2}{dt} + C_2 \frac{dr_2}{dt} \end{aligned} \right| \quad (\text{A3.23})$$

– expression de la vitesse de glissement en I :

\* pour (S<sub>2</sub>):  $\vec{V}_{21}(I) = \vec{V}_{21}(G_2) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{G_2I}$

–

or:  $\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{G_2I} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -a_2 \\ -b_2 \\ -c_2 \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} -q_2 c_2 + r_2 b_2 \\ -a_2 r_2 + c_2 p_2 \\ -b_2 p_2 + a_2 q_2 \end{bmatrix}$

d'où:  $\vec{V}_{21}(I) = \begin{bmatrix} \alpha_2 - q_2 c_2 + r_2 b_2 \\ \beta_2 - a_2 r_2 + c_2 p_2 \\ \gamma_2 - b_2 p_2 + a_2 q_2 \end{bmatrix}$

\* pour (S<sub>1</sub>) on a de même:  $\vec{V}_{12}(I) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - q_1 c_1 + r_1 b_1 \\ \beta_1 - a_1 r_1 + c_1 p_1 \\ \gamma_1 - b_1 p_1 + a_1 q_1 \end{bmatrix}$

La vitesse de glissement en I est par définition:  $\vec{V}(I) = \vec{V}_{21}(I) - \vec{V}_{12}(I) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$  et d'après ce qui précède:

$$\vec{V}(I) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 - q_2 c_2 + r_2 b_2 + q_1 c_1 - r_1 b_1 \\ \beta_2 - \beta_1 - a_2 r_2 + c_2 p_2 + a_1 r_1 - c_1 p_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 - b_2 p_2 + a_2 q_2 + b_1 p_1 - a_1 q_1 \end{bmatrix}$$

Les positions des centres d'inertie par rapport au point d'impact I étant invariables lors du choc,  $\vec{G_1I}$  et  $\vec{G_2I}$  étant donc constantes, il vient, en dérivant  $\vec{V}(I)$  par rapport au temps:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{d\alpha_1}{dt} - c_2 \frac{dq_2}{dt} + b_2 \frac{dr_2}{dt} + c_1 \frac{dq_1}{dt} - b_1 \frac{dr_1}{dt}$$

et relations du même type pour dv/dt et dw/dt.

Chacune des dérivées, dα<sub>k</sub>/dt, dβ<sub>k</sub>/dt, dγ<sub>k</sub>/dt, dq<sub>k</sub>/dt, dr<sub>k</sub>/dt, dp<sub>k</sub>/dt, k = 1,2 dépendent linéairement des composantes X, Y, Z de la force de percussion  $\vec{F}_{12}$  (en inversant les relations (A3.21) et (A3.23)), on a donc pour  $d\vec{V}(I)/dt$  un système d'équations linéaire de la forme:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z \\ \frac{dv}{dt} &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z \\ \frac{dw}{dt} &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z \end{aligned} \right\} \quad (A3.24)$$

où X, Y, Z sont reliées par les lois de Coulomb du frottement.

– La fermeture du problème dépend ensuite des conditions de glissement:

\* soit on a  $s_{21}^{\vec{v}}(I) \neq 0$  (glissement), or  $s_{21}^{\vec{v}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$  et donc  $\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = K < 0$  ; comme en présence de frottement, la composante tangentielle de la force est reliée à la composante

normale par:  $\sqrt{X^2+Y^2}=\mu_S Z > 0$  alors il vient:

$$\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = K = -\mu_S \frac{Z}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad (\text{A3.25}) \text{ à joindre aux équations (A3.24)}$$

\* soit on a glissement nul:  $s_{21}^{\vec{}}(I)=0, u=0, v=0$  donc  $du/dt = dv/dt = 0$  qui définit la trajectoire comme étant suivant l'axe  $(O, \vec{n})$ , donc d'après (A3.24):

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z = 0 \\ a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z = 0 \\ \sqrt{X^2+Y^2} < \mu_S Z \text{ avec } Z > 0 \end{array} \right\} (\text{A3.26})$$

Ces considérations générales se simplifient considérablement dans le cas simple où les deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont des sphères de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , en collision élastique (avec restitution) et frottement:

Vitesse relative des deux sphères au point d'impact I :

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 - (R_1 \vec{\Omega}_1 + R_2 \vec{\Omega}_2) \wedge \vec{n}$$

$\vec{V}_{12}$  se décompose en composante normale (portée par  $\vec{n}$ ) et composante tangentielle:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{12}^{(n)} &= (\vec{V}_{12} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{V}_{12}^{(\tau)} &= \vec{V}_{12} - \vec{V}_{12}^{(n)} \end{aligned}$$

Angle d'impact  $\theta$  : angle entre la normale  $\vec{n}$  et  $\vec{V}_{12}$  :  $\theta = (\vec{n}, \vec{V}_{12})$  avec  $\pi/2 < \theta \leq \pi$

Percussion:  $\vec{P}_{21} = m_1 (\vec{V}'_1 - \vec{V}_1) = -m_2 (\vec{V}'_2 - \vec{V}_2)$

Seule la composante tangentielle de  $\vec{P}_{21}$  entraîne un changement du moment cinétique lors du choc:

$$-\vec{n} \wedge \vec{P}_{21} = \frac{I_1}{R_1} (\vec{\Omega}'_1 - \vec{\Omega}_1)$$

où  $I$  moment d'inertie autour du centre de la sphère ( $S_1$ ). D'où l'expression des vitesses  $\vec{V}'_1$  et  $\vec{V}'_2$  après le choc en fonction des vitesses initiales  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  et de la percussion:

$$\begin{aligned} \vec{V}'_1 &= \vec{V}_1 + \frac{\vec{P}_{21}}{m_1} \\ \vec{V}'_2 &= \vec{V}_2 - \frac{\vec{P}_{21}}{m_2} \\ \vec{\Omega}'_1 &= \vec{\Omega}_1 - \frac{R_1}{I_1} \vec{n} \wedge \vec{P}_{21} \\ \vec{\Omega}'_2 &= \vec{\Omega}_2 - \frac{R_2}{I_2} \vec{n} \wedge \vec{P}_{21} \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de Newton:

$$\vec{V}_1^{(n)} = \vec{V}_1^{(n)} - \vec{V}_2^{(n)} = -\varepsilon (V_1^{(n)} - V_2^{(n)}) = -\varepsilon V_{12}^{(n)}$$

d'où:

$$P_{21}^{(n)} = -\mu(1 + \varepsilon) V_{12}^{(n)}$$

avec:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  masse réduite.

Par ailleurs, la loi de Coulomb permet de relier les composantes tangentielle et normale de la percussion:

$$|P_{21}^{(\tau)}| = \mu_s |P_{21}^{(n)}|$$

d'où:

$$P_{21}^{(\tau)} = \mu_s \mu(1 + \varepsilon) V_{12} \cos \theta \vec{\tau}$$

puisque  $V_{12}^{(n)} = -V_{12} \cos \theta$  et  $\vec{\tau} = V_{12}^{(\tau)} / V_{12} \sin \theta$ . Finalement:

$$\vec{P}_{21} = \mu(1 + \varepsilon) (\mu_s V_{12}^{(\tau)} \cotan \theta - V_{12}^{(n)}) \quad (\text{A3.27})$$

Remarque: Dans le cas d'une collision centrale où  $\theta = \pi$ , et donc  $\cotan \theta = \infty$ , on aurait  $\vec{P}_{21}$  infinie ce qui est physiquement impossible. Ce paradoxe est levé si l'on considère que le choc s'accompagne aussi, en plus du frottement et de la restitution, du roulement sans glissement ou bien du glissement sans roulement. Il a été montré en [15] que cela revient à introduire un **coefficient de restitution tangentielle**  $\beta$  qui représente la capacité des sphères à briser les microcontacts au moment du choc tangential et donc à passer au régime de glissement: (A3.27) est alors remplacé par:

$$\vec{P}_{21} = -\frac{2}{7} \mu(1 + \beta) V_{12}^{(\tau)} - \mu(1 + \varepsilon) V_{12}^{(n)} \quad (\text{A3.28})$$

## Références

- [1] Yann Bertho: Dynamique d'écoulements gaz-particules en conduite verticale – Thèse de doctorat, École Polytechnique, 29 septembre 2003
- [2] Lycée J-J. Henner: la physique des milieux granulaires – Olympiades de Physique 2010 – Althirch, 2010
- [3] Jacques Duran: Sable, poudres et grains: introduction à la physique des matériaux granulaires – 12 novembre 1996
- [4] Philippe Claudin: Tas et dunes de sable – Thèse d'habilitation à diriger les recherches de l'Univ. Pierre et Marie Curie, 20 mai 2009
- [5] F. Chevoir, E. Azanza, F. Da Cruz, G. Koval jr, M. Prochnow, P. Rognon, Ph. Coussot, P; Moucheron, J-N. Roux, L. Tocquer: Ecoulements granulaires, physique et applications – LMSGC, Institut Navier, Champs-sur-Marne, 2009
- [6] Pierre Evesque: Éléments de mécanique quasi-statique des milieux granulaires mouillés ou secs – Poudres&Grains NS1, 1-60, (2000)
- [7] Christophe Perge: Contraintes et débit lors de la vidange d'un silo de grains – Master Recherche 2e année, École Centrale de Lyon, Univ. Claude Bernard Lyon 1 – INSA Lyon – ENTPE, stage 2010-2011
- [8] Olivier Pouliquen: Écoulements granulaires secs – Mémoire pour obtenir l'habilitation à diriger les

recherches, Laboratoire IUSTI, Technopôle Château-Gombert, Marseille, 13 février 2004

[9] Olivier Pouliquen: Les milieux granulaires, entre fluide et solide – Cours ENSTA, 2001

[10] G. Pilot, S. Kacmaz: Abaques de calcul de stabilité des talus de remblais sur sols mous – Bull. Liaison Labo. Routiers P. et Ch. n°29, jan-fév. 1968 – réf. 398

[11] Michel Laguès, Annick Lesne: Invariance d'échelle, des changements d'états à la turbulence – Belin, 2008

[12] K. Hotta, K. Takeda, K. Iino: Powder Technol. 10; 231, 1974

[13] R.L. Brown, J.C. Richards: Principles of Powder Mechanics – Pergamon Press, Oxford, 1970

[14] Jean-Pierre Brossard: Dynamique: théorie classique du choc – Techniques de l'Ingénieur n°A1 668

[15] S.F. Foester, M.Y. Longe, H. Chang, K. Allix: Measurements of the collision properties of small spheres – Phys. Fluids, 6(3) 1108-1115, 1994

[16] R.A. Bagnold: Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear – Proc. Royal Soc. London, 225: 49-63, 1954

[17] B. Andreotti: Géomorphogénèse, chap. 5: écoulements gravitaires et rivières – Notes de Cours 2010/2011, ENS

[18] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen: Les milieux granulaires, entre fluide et solide – Livre numérique Google, EDP Sciences, 3 décembre 2012

[19] O. Pouliquen, C. Cassar, P. Jop, Y. Forterre, M. Nicolas: Flow of dense granular material: toward simple constitutive laws – J. of Stat. mech.: Theory and Experiment, vol. 2006 nb.07 (site [iopscience.iop.org](http://iopscience.iop.org))

[20] Adrian Daerr: Dynamique des avalanches – Thèse de doctorat présentée au Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, 23 novembre 2000

[21] Stéphanie Deboeuf: Transitions et coexistence solide-liquide dans les milieux granulaires – Thèse de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris, décembre 2005

[22] Merline Flore Djouwe Meffeja: Simulation et modélisation des milieux granulaires confinés – Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1, 20 janvier 2012

[23] R. Delaunay: Modélisation des écoulements granulaires gravitaires – 1ère École EGRIN, 2-4 avril 2013

[24] S.B. Savage et K. Hutter: The motion of a finite mass of granular material down a rough inclined plane – J. Fluid Mech., 199; 177, 1989

[25] S. Douady, B. Andreotti, A. Daerr: On granular surface flow equations – Euro. Phys. J., 11; 131-142, 1999

[26] O. Pouliquen et Y. Forterre: Friction law for dense granular flow: application to the motion of a mass down a rough inclined plane – J. Fluid mech., 453: 133-151, 2002

[27] F. Da Cruz: Écoulement de grains secs: frottement et blocage – Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004 – site: <http://pastel.paristech.org/archive/00000946>

[28] F. Da Cruz, S. Emam, M. Porchnow, J-N. Roux, F. Chevoir: Rheophysics of dense granular flows: Discrete simulation of plane shear flows – Phys. Rev. E, 72: 0213309, 2005

- [29] Cours Moodle Cours: Stabilité des pentes – site <http://www.geotech-sn/MoodleCours.15/10/2012>
- [30] Frédéric Élie: L'effet Branly : électrocinétique des milieux granulaires – site <http://fred.elie.free.fr>, septembre 2013, édité en mai 2014
- [31] Pouliquen, O. 1999b On the shape of granular fronts down rough inclined planes. Phys. Fluids 11 (7), pp. 1956-1958
- [32] Frédéric Élie: Canaux, rivières et crues – site <http://fred.elie.free.fr>, juin 2014
- [33] Frédéric Élie: Vidange de réservoir - site <http://fred.elie.free.fr>, 27/02/2004