



Frédéric Elie on
ResearchGate

Essais d'une topographie très sommaire à Notre Dame du Mai

Frédéric Elie

mai 2012

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : C'est le mois de mai ! Quelle idée de vouloir essayer de déterminer, à l'aide de notre seule main (et un peu de raisonnement), l'altitude à laquelle culmine la chapelle de Notre Dame du Mai, tout près du Cap Sicié, côte varoise, commune de Six-Fours-lès-Plages? J'aurais pu me contenter d'admirer ce fabuleux paysage, lors de la tranquille montée vers la chapelle, d'où l'on voit, au sud, à l'est comme à l'ouest la mer Méditerranée assiéger la presqu'île que se partagent les communes de Six-Fours et de La Seyne.

Arrivé sur le promontoire, sur l'esplanade du parvis de la chapelle, la Méditerranée s'étend au sud à perte de vue, bleue et sereine, bordée des pins qui feignent de tomber vers elle, dans la garrigue environnante, c'est une explosion d'odeurs et de fleurs. L'horizon s'offre au regard.

Je me dis alors: si, avec une mesure angulaire faite sommairement avec la main, dont le pouce et l'auriculaire sont écartés au maximum, perpendiculairement à l'horizontale (cet écart s'appelle l'empan), je parviens à évaluer l'angle entre mes pieds et l'horizon, alors je peux relier cet angle avec la distance de l'horizon qui, comme on le sait (cf. article sur le [Phare de Contis](#)), est fonction de l'altitude des yeux (donc en gros, de la chapelle). Le calcul, qui sera développé dans l'article, me montre que l'altitude cherchée est inversement proportionnelle au carré de la tangente de l'angle ainsi évalué. Il suffit donc de connaître celui-ci, et on l'obtient en observant combien d'empan il faut entre mes pieds et l'horizon. Cela suppose de connaître la valeur angulaire de l'empan: celle-ci est d'environ 20° lorsque l'on tend les bras devant ses yeux avec les doigts écartés au maximum: ce constat est fait pour un adulte capable de tendre parfaitement son bras devant lui à l'horizontale, et les bâtisseurs de cathédrales ou de monastères l'utilisaient déjà!

Hélas, on verra que ma méthode, bien qu'irréprochable sur l'aspect mathématique, ne marche pas, et je montrerai pourquoi !

Pour ne pas rester "sec" sur cette expérience, j'essaie alors autre chose. Au lieu de l'horizon, j'utilise le sommet d'une montagne, derrière Toulon, dont je connais l'altitude: le mont Caume, altitude 804 mètres, et je connais sa distance (à vol d'oiseau) entre ND du Mai et lui (15,2 km). L'utilisation de la méthode de l'empan me permet alors une relation théorique entre l'altitude cherchée et les valeurs connues précédentes. Las! Pour les mêmes raisons que pour l'utilisation de l'horizon, la valeur de l'altitude obtenue souffre d'une imprécision supérieure à l'ordre de grandeur cherchée !

Conclusion: il est impossible d'évaluer l'altitude du lieu où l'on se trouve à l'aide de l'empan vertical!

Bon, avant de redescendre de cette colline, est-ce que je peux mesurer autre chose avec mon empan? Histoire de ne pas rentrer bredouille... Une idée: en utilisant mon empan dans le sens horizontal, je peux déterminer la distance qui me sépare de deux montagnes qui encadrent l'aire toulonnaise: le mont Caume et le mont Coudon, pourvu que je connaisse uniquement la distance qui les sépare (8,1 km). Ça y est, par de la trigonométrie élémentaire, cette fois j'ai un résultat qui marche, je l'ai vérifié sur une carte géographique locale.

Mes mascottes, Photons et Mésons, qui ne ratent pas une occasion, riront en disant que l'empan, ça marche quand on connaît déjà (presque) tous les résultats. Mais, en y réfléchissant, il était intéressant de se convaincre d'un autre résultat, méthodologique cette fois: le bon usage et les limites de l'empan pour évaluer une altimétrie locale. Sans cette expérience négative, je ne m'en serais jamais aperçu. Au fond, comme le disait mon estimé maître, le professeur Jacques Breuneval, "on ne se convainc soi-même d'un résultat qu'en le testant au brouillon: si vous ne dites rien au brouillon, le brouillon ne vous répondra rien; faites-en donc un usage constant!"... Et j'ajouterais: le brouillon, ce n'est pas uniquement sur le papier, l'ordinateur, au bureau ou dans les amphis; c'est aussi et surtout en toutes occasions, lors des promenades, des observations, des activités diverses, des expériences même les plus anodines en apparence. C'est l'esprit de la méthode expérimentale...

SOMMAIRE

- 1 - Évaluation de l'altitude du lieu d'observation grâce à sa relation avec la distance de l'horizon
- 2 - Évaluation de l'altitude du lieu d'observation par la hauteur angulaire apparente, obtenue par l'empan, d'une montagne d'altitude connue
- 3 - Évaluation de la distance entre l'observateur et deux sommets de montagnes dont on connaît la distance mutuelle et l'écartement angulaire apparent mesuré par l'empan
- 4 - Quelques photos et conclusion

1 - Évaluation de l'altitude du lieu d'observation grâce à sa relation avec la distance de l'horizon

Dans [l'article sur le Phare de Contis](#), j'ai présenté la distance de l'horizon. L'horizon est le lieu des points où la ligne des yeux de l'observateur est tangente à la surface de la Terre. Il décrit une calotte circulaire centrée en l'observateur. La distance de l'horizon, notée D , est la distance entre l'horizon et le point d'intersection de la verticale du lieu d'observation et la surface terrestre supposée d'altitude zéro (figure 1). Si l'observateur est situé à une altitude h de la surface terrestre, on montre qu'entre h et D existe la relation approchée (pour de faibles altitudes devant le rayon R de la Terre):

$$D = \sqrt{2R} \sqrt{h} \quad (1)$$

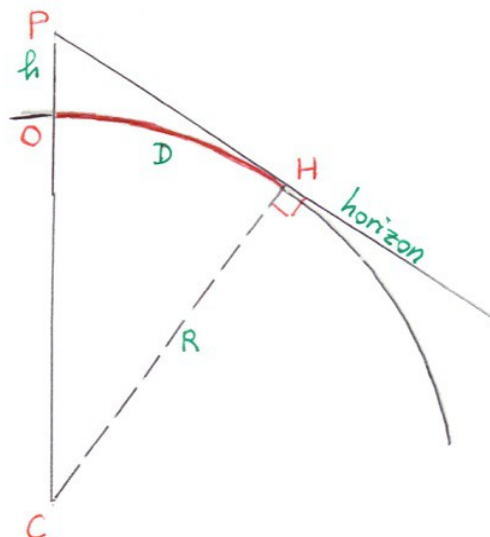


figure 1

Dans la relation (1) R , h et D sont exprimés en mètres. Si D est exprimée en milles marins (1 mille marin = 1852 m) et h en mètres, la relation (1) s'écrit encore:

$$D(\text{milles marins}) = 2,1 \sqrt{h(m)}$$

Si l'on assimile l'arc de cercle OH à un segment de droite, dans la figure 1, on a affaire à un triangle HOP , rectangle en O , avec pour relation fondamentale (figure 2):

$$D = h \tan a$$

et en remplaçant D par sa valeur donnée en (1), on obtient la relation entre l'altitude h cherchée et l'angle a:

$$h = \frac{2R}{\tan^2 a} \quad (2)$$

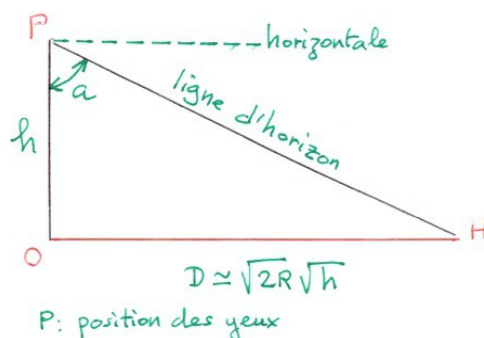


figure 2

L'angle a, compris entre la direction de l'horizon et la verticale passant par les yeux et les pieds de l'observateur (verticale du lieu) peut être obtenu à l'aide de l'empan.

L'empan correspond à l'écartement maximum des doigts de la main lorsqu'elle est tendue devant nos yeux: statistiquement, il sous-tend un angle de 20° (figure 3).

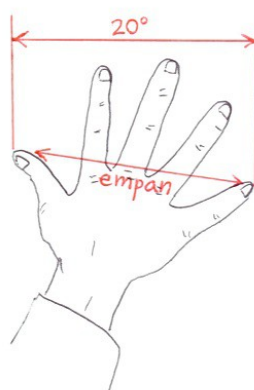


figure 3

Pour évaluer l'angle a, la méthode consiste alors à relever combien de fois il y a d'empan entre l'horizon et nos pieds, avec notre main tendue devant soi dans le sens vertical (figure 4).

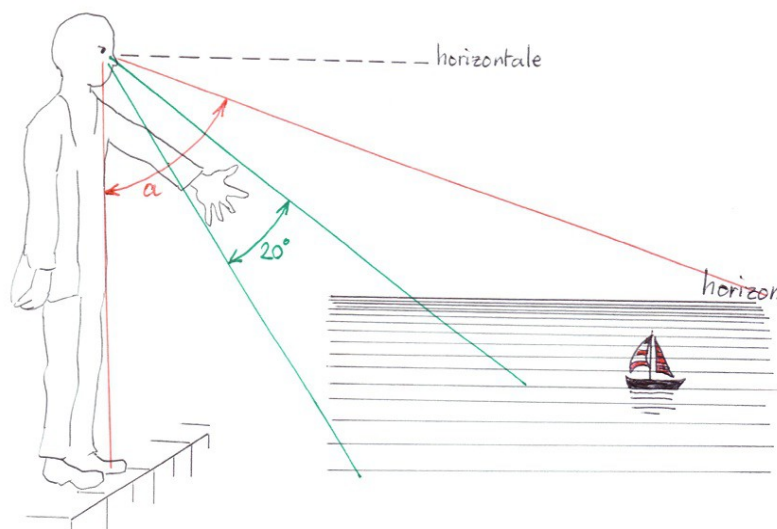


figure 4

C'est une "mesure" évidemment très sommaire, car il est difficile d'évaluer avec précision des fractions d'empan.

J'ai malgré tout obtenu une valeur de 4 fois d'empans, soit $a = 4 \times 20^\circ = 80^\circ$.

Avec comme rayon de la Terre $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, l'application de (2) donne alors comme altitude $h = 396 \text{ km}$, valeur extrêmement ridicule !!!

Évidemment, je connais la valeur réelle de l'altitude de ND du Mai: $h = 352 \text{ m}$. Pour obtenir une telle valeur il faudrait avoir:

$$\tan a = \sqrt{\frac{2R}{h}} = 190$$

soit $a = 89,699^\circ$. Essayez donc de mesurer avec une telle précision un angle au moyen de cet outil grossier qu'est l'empan, dont on peut espérer seulement une précision de l'ordre du demi-empan (10° maximum) !!!

A cause du comportement de la fonction tangente, qui tend rapidement vers l'infini au voisinage de 90° , la moindre variation de l'angle a donne des valeurs très différentes de h .

On se rend compte d'une telle sensibilité en calculant la dérivée logarithmique de la relation (2). Tout calcul fait (exercice !) on obtient:



$$\frac{\Delta h}{h} = -2 \frac{\Delta \tan a}{\tan a} = -2 \left(\frac{1}{\tan a} + \tan a \right) \Delta a \quad (3)$$

La relation (3) montre:

- si a est faible, l'imprécision sur l'altitude h est grande ($1/\tan(a)$ élevée);
- si a est grand, l'imprécision sur l'altitude h est grande aussi ($\tan(a)$ élevée);

donc dans tous les cas l'imprécision sur h est importante. De plus, la relation (2) montre que les faibles altitudes (comme celles de ND du Mai) se déterminent par des angles proches de $a = 90^\circ$, or vers ces valeurs $\tan(a)$ varie énormément.

On voit que, quelle que soit la configuration de la mesure, la méthode de l'empan n'est pas adaptée à cette sensibilité!

Ce n'est pas avec l'empan que l'on obtient une tangente !...



Remarque: l'altitude de ND du Mai est $h = 352 \text{ m}$, la distance de l'horizon correspondante,

d'après (1), est égale à: $D = 27$ km.

2 - Évaluation de l'altitude du lieu d'observation par la hauteur angulaire apparente, obtenue par l'empan, d'une montagne d'altitude connue

Voyant que la méthode précédente ne marche pas, je me dis alors: peut-être que c'est à cause de la forme de l'équation (2) qui entraîne une grande imprécision sur la détermination de l'altitude h par l'évaluation de la distance angulaire apparente de l'horizon par l'empan. Il suffirait alors, peut-être, d'exploiter d'autres formes de relations entre h et une autre grandeur angulaire apparente, celle d'une hauteur de montagne connue par exemple.

Si je connais la distance à vol d'oiseau OB' entre mon lieu d'observation (ND du Mai et le sommet d'une montagne B d'altitude connue h_B dont la projection sur la surface terrestre est B'), la mesure de son angle apparent " a ", par la méthode de l'empan, me fournit alors directement mon altitude h (figure 5). J'ai choisi pour B le sommet de la montagne le Mont Caume, $h_B = 804$ m, et la distance, donnée par une carte, est $OB' = c = 15,2$ km.

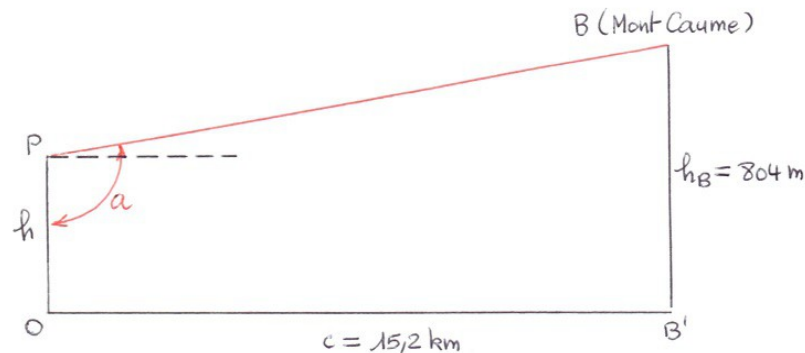


figure 5

Toujours en employant la méthode d'évaluation de l'angle a par l'empan, je trouve grossièrement que a vaut environ 5 empan, soit $a = 100^\circ$. Les relations élémentaires dans la figure 5 donnent:

$$h = h_B - c \tan(a - \pi/2) \quad (4)$$

par conséquent avec les valeurs précédentes j'obtiens la valeur absurde: $h = -1876$ m; le sommet de ND du Mai n'est pas enfoui sous le niveau de la mer, que je sache !...

La raison repose sur le même argumentaire qu'au paragraphe 1 à propos de l'horizon: l'intervention de la fonction tangente introduit une grande sensibilité sur les précisions. Pour obtenir la valeur exacte $h = 352$ m, (4) montre que l'angle mesuré devrait être: $a = 91,7^\circ$, proche de 90° , donc dans un domaine où la fonction tangente varie fortement, et par ailleurs impossible d'obtenir avec une telle précision au moyen de l'empan.

Nous voici alors définitivement convaincus que l'empan ne peut en aucun cas servir à évaluer, même très grossièrement, l'altitude du lieu où l'on se trouve.

3 - Évaluation de la distance entre l'observateur et deux sommets de montagnes dont on connaît la distance mutuelle et l'écartement angulaire apparent mesuré par l'empan

Soit A, B, C les projections sur la surface terrestre des sommets respectifs: ND du Mai, Mont Caume, Mont Coudon. Ces trois points A, B, C forment un triangle dont les angles au sommet sont encore notés A, B, C et les côtés opposés a, b, c (figure 6).

Si je connais la distance entre les deux montagnes B et C , $a = BC$, et si j'évalue leur écart angulaire apparent, c'est-à-dire l'angle A , alors les relations dans un triangle me permettent de calculer b et c , c'est-à-dire les distances entre mon point d'observation et les montagnes B et C . Les calculs, quoique relevant de la trigonométrie élémentaire, sont assez lourds pour un

triangle quelconque, car ils font appel à plusieurs équations du second degré à résoudre. Pour vous en convaincre, vous pouvez commencer à écrire les relations fondamentales du triangle quelconque:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a \text{ (et les deux autres relations analogues)}$$

$$(\sin A)/a = (\sin B)/b = (\sin C)/c$$

$$A + B + C = \pi$$



Heureusement, le cas de nos trois sommets, ND du Mai (A), Caume (B) et Coudon (C), offre une configuration intéressante qui simplifie le problème: il se trouve que le triangle ABC est rectangle en B! (figure 6)

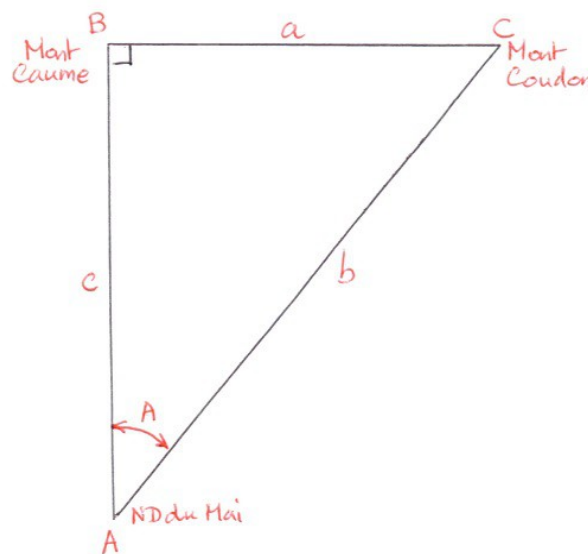


figure 6

On obtient immédiatement:

$$c = \frac{a}{\tan A} \quad b = \frac{a}{\sin A} \quad (5)$$

Une carte de la région fournit:

- distance entre les projections des sommets du mont Caume et du mont Coudon: $a = 8,1$ km;

Quant à la mesure de l'angle A, distance angulaire apparente entre les deux sommets, je l'obtiens en utilisant l'empan, et même mieux, à l'aide de la photographie. En effet, sur la figure 7 j'obtiens sur la même image les deux sommets B et C. En comparant l'ouverture angulaire apparente de l'image avec l'empan, dans le sens horizontal cette fois, je m'aperçois que cette

ouverture est de l'ordre de 59° (cette valeur assez précise est en fait obtenue par une mesure plus poussée par une règle graduée tendue à bout de bras). L'écartement angulaire entre les deux sommets s'obtient tout simplement par l'emploi d'une règle: l'écart mesuré à la règle entre B et C est proportionnel à cet écartement angulaire, le coefficient de proportionnalité étant donné par le rapport entre la largeur de l'image et 59° . J'obtiens l'écart angulaire apparent $A = 28^\circ$.

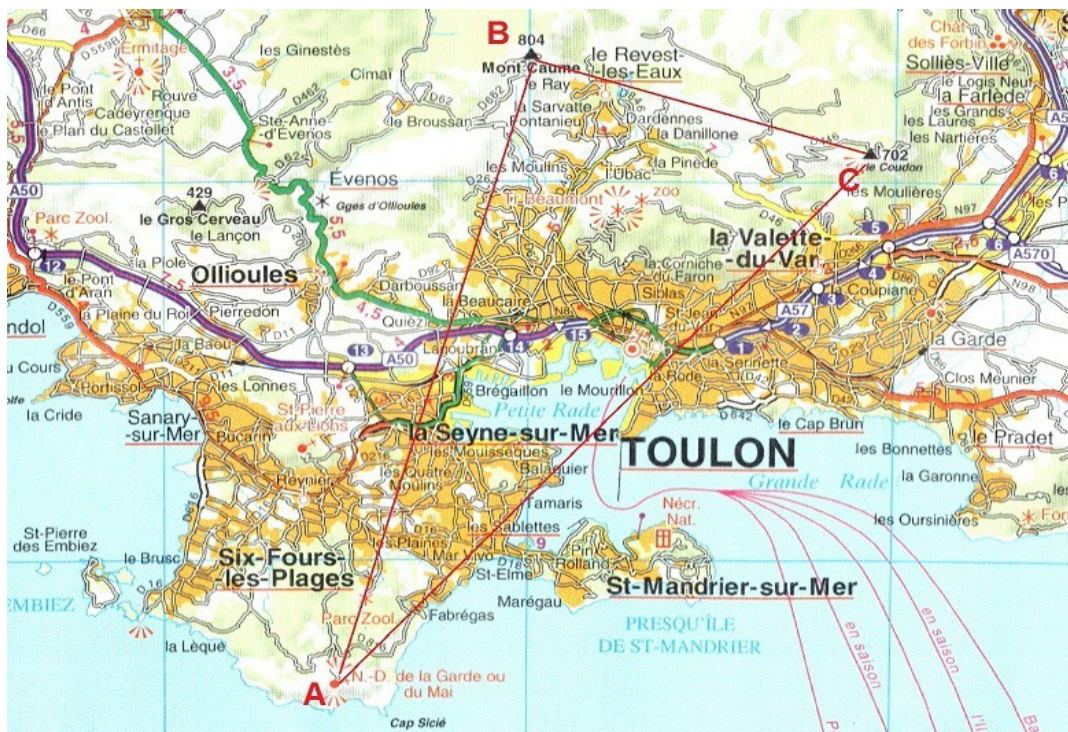
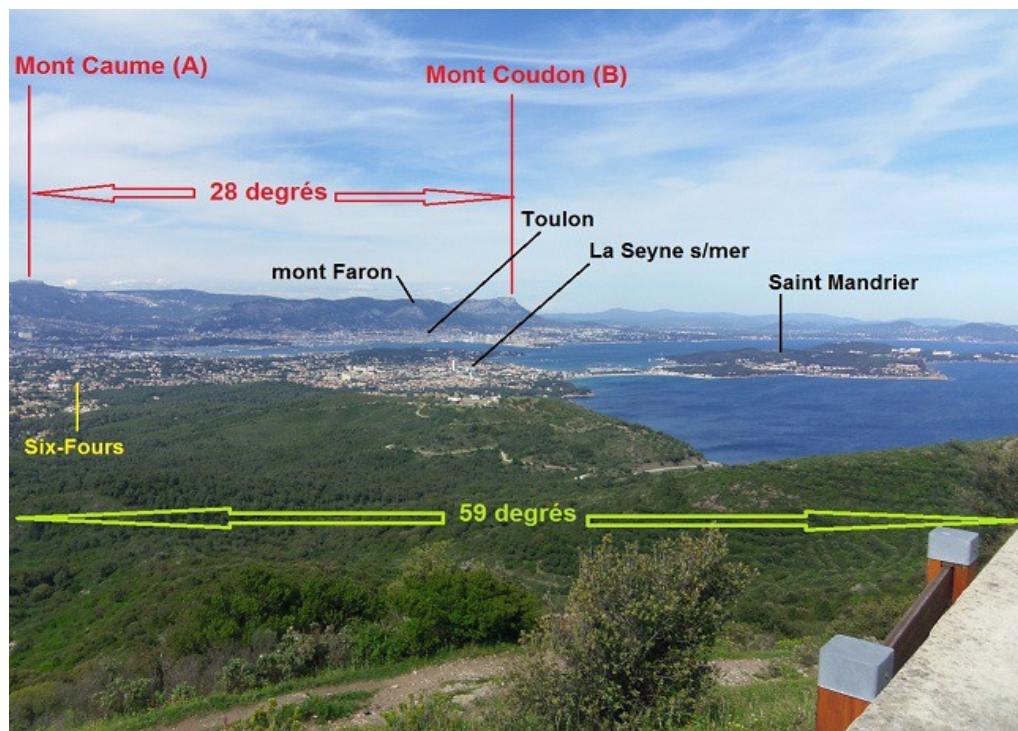


figure 7

Des relations (5) on déduit immédiatement: $c = 15,2$ km et $b = 17,3$ km, valeurs très proches de la réalité.

4 - Quelques photos et conclusion

Voici quelques photos prises lors de cette promenade: le chemin qui mène à la chapelle, l'esplanade et le parvis, l'intérieur de la chapelle (exceptionnellement ouverte tous les jours du moi de mai, qui est le mois de Marie) et qui laisse découvrir des témoignages intéressants...



en montant vers la chapelle de Notre Dame du Mai...



...On découvre un somptueux paysage: sur le versant ouest, la baie de Sanary, avec au premier plan les îles des Embiez...



... à quelques dizaines de mètres de la chapelle, une prodigieuse antenne de télécommunication s'élève au-dessus du sommet...



... à ses côtés, au tournant du chemin, une autre sorte d'antenne se dresse aussi vers le ciel: un calvaire avec sa croix, un ange et Marie...



... au sommet, c'est le parvis de la chapelle, avec sa croix plein sud, devant la Méditerranée, bleue et infinie!...



... Dans la chapelle, ouverte un mois par an, c'est un spectacle étonnant: un nombre considérable d'ex-voto, en remerciement de la Vierge Marie, témoignage d'une foi et d'une espérance vivantes, sincères et humbles, et des maquettes de bateaux au-dessus de l'entrée du chœur, en signe de reconnaissance de la part des pêcheurs et de leurs familles...



... le chœur, avec son autel bleu, qui entre en résonance avec la mer et ses miraculés, est à la hauteur de cet appel à l'humilité jointe à une saine contemplation...



... et je ressors sur la face sud du parvis, d'où j'aperçois 300 mètres plus bas, les superstructures, fondues dans la falaise, de la toute moderne station d'épuration du Cap Sicié. Ce lieu, quel étonnant mélange de modernité et de spiritualité intemporelle, sempiternelle et toujours présente! C'est cela, Notre dame du Mai !...

(photos: Frédéric Élie, mai 2012)

Et avant de redescendre vers Six-Fours, voici quelques leçons à tirer de cette promenade brouillon vivant:

- Inutile d'espérer pouvoir déterminer à l'aide de ses seules mains (l'empan), dans le sens vertical, l'altitude du lieu où l'on se trouve, que ce soit en référence à l'horizon ou à des sommets de montagnes d'altitude connue. En effet, les relations que cette méthode utilise font intervenir la tangente de l'écart angulaire apparent, dans le sens vertical: comme la tangente varie fortement et tend vers l'infini près de l'horizontale, l'imprécision de la mesure est supérieure à l'ordre de grandeur de l'angle cherché.

- L'argument se comprend encore mieux quand on cherche à faire des mesures par rapports à des sommets d'altitude connue. En effet, de la relation (4), on tire que la hauteur angulaire apparente d'un sommet, a , est reliée aux hauteurs du sommet h_B et du lieu h par:

$$a = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{h_B - h}{c}$$

où c est la distance à vol d'oiseau entre le lieu et le sommet de la montagne observée. On s'aperçoit alors que, pour des distances c très grandes devant les altitudes h et h_B , l'argument de $\tan^{-1}$ est pratiquement égal à zéro, et donc que la hauteur angulaire apparente d'un sommet lointain reste proche de 90° quel que soit son éloignement.

C'est une chose que l'on constate aisément: toute personne qui se déplace sur des hauteurs, même relativement faibles, observera que les sommets qu'elle observe au loin, semblent toujours à la même hauteur, à l'horizontale de ses yeux.

On ne peut donc pas mesurer des hauteurs de montagnes avec l'empan: par lui, on obtient toujours une mesure grossière de l'ordre de 90° , ce qui ne renseigne sur rien, en définitive.

Cette situation se voit bien avec la photo de la figure 7: le mont Caume (804 m) et le mont Coudon (702 m) semblent, au loin, être sur une même ligne horizontale, donc de même hauteur angulaire apparente.

- Il reste que la méthode de l'empan, même mieux, à l'aide de l'écran photographique, fonctionne bien dans le sens horizontal pour obtenir des distances entre le lieu d'observation et des sommets éloignés, pourvu que l'écart angulaire reste bien intérieur à 90° .

Beaux constats en promenade dans un lieu insolite, où l'observation expérimentale, aussi insignifiante soit-elle, s'allie bien avec la spiritualité et la beauté du lieu, non?

