



Frédéric Elie on
ResearchGate

La toupie symétrique : ses différents régimes de mouvement

Frédéric Elie
mars 2012

CopyrightFrance.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Dans cet article, les équations du mouvement d'une toupie symétrique, ainsi que ses solutions correspondant à différents régimes d'oscillations, sont présentées.

Lorsque l'on peut relier les grandeurs angulaires, qui caractérisent les degrés de liberté de la toupie, à leurs dérivées temporelles, on obtient les équations du mouvement. Pour cela, nous partons du formalisme hamiltonien dans lequel, après avoir établi simplement la fonction « hamiltonien » $H(p, q)$ du système, où p sont les moments et q les degrés de liberté, nous obtenons de manière quasi immédiate les relations entre les p et les dérivées temporelles $q^\circ = dq/dt$, et, après quelques manipulations simples, elles permettent de relier les q aux q° , ce qui donne les équations du mouvement.

Dans le cas de la toupie, ses positions sont données exclusivement par ses angles d'Euler, ce qui définit trois degrés de liberté q . On néglige par conséquent le cas où le point d'appui de la toupie se déplace sur la surface, par glissement par exemple.

Si les équations du mouvement sont simples à établir, il demeure cependant que leurs résolutions sont assez complexes. De sorte que les différentes familles de solutions ne sont pas données dans le détail, sous une forme analytique, mais en fonction des domaines de valeurs prises par les paramètres du problème, dont l'un est le « paramètre principal » $u = \cos \theta$, où θ est l'angle que fait avec le plan horizontal le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la toupie (angle de nutation).

SOMMAIRE

- 1 – Démarche de calcul
- 2 – Étape (a) : degrés de liberté de la toupie symétrique, angles d'Euler
- 3 – Étape (b) : énergie cinétique, énergie potentielle et lagrangien de la toupie
- 4 – Étape (c) : moments conjugués des variables de position
- 5 – Étape (d) : hamiltonien de la toupie symétrique
- 6 – Étape (e) : équations du mouvement (équations de Hamilton)
- 7 – Les différents régimes d'oscillation de la toupie symétrique

1 – Démarche de calcul

Elle suit les étapes suivantes :

a) – On identifie les degrés de liberté de la toupie (q), c'est-à-dire les angles qui permettent de repérer sa position à chaque instant : nous allons voir qu'il s'agit des angles d'Euler.

b) – On doit ensuite établir le lagrangien du système $L(q, \dot{q})$, où q sont les degrés de liberté (les angles) et $\dot{q} = dq/dt$ leurs dérivées temporelles. Or le lagrangien est donné par $L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q)$, dans lequel $T(\dot{q})$ est l'énergie cinétique de la toupie (qui dépend uniquement des \dot{q}) et $V(q)$ son énergie potentielle, ramenée à son centre d'inertie, qui dépend seulement des positions angulaires (q) (on néglige les forces de frottement et les mouvements sur le plan d'appui de la toupie).

c) – On calcule ensuite les moments conjugués des positions q , notés p , par les relations :

$$p = \partial L / \partial \dot{q}$$

d) – On peut alors exprimer les \dot{q} en fonction des p et des q . Il s'ensuit que l'hamiltonien du système, qui est défini par :

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$$

est une fonction uniquement des (p, q) (les \dot{q} ont disparu).

e) – La modélisation se termine alors par l'écriture des équations de Hamilton, qui fournissent des relations entre les \dot{q} , q et les p , q , c'est-à-dire les équations du mouvement :

$$\dot{p} = dp/dt = - \partial H / \partial q \qquad \dot{q} = dq/dt = \partial H / \partial p$$

De ces relations on tire des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire des invariants, qui permettent la fermeture et la résolution du problème.

2 – Étape (a) : degrés de liberté de la toupie symétrique, angles d'Euler

Dans un repère fixe de l'espace (galiléen) la position et la vitesse de la toupie sont définies à l'aide des angles d'Euler et de leurs dérivées temporelles.

Soit le repère orthonormé défini par $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ où les vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont des vecteurs unitaires portés par les axes orthogonaux Ox, Oy, Oz et définissant une base orthonormée du repère fixe où l'on va déterminer le mouvement de la toupie. Dans ce qui suit, l'origine du repère O est le point de contact de la toupie avec le plan horizontal (O, x, y) .

Lors du mouvement de la torpille, le repère précédent est transformé en le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, à chaque instant, puisque le point O est resté fixe par hypothèse. Cette transformation est la combinaison de trois rotations décrites par les angles d'Euler (figure 1) :

- rotation d'un angle φ autour de la verticale (O, \mathbf{k}) dans le plan (Oxy) ramenant l'axe Ox et donc le vecteur \mathbf{i} sur l'axe (O, \mathbf{i}') , et l'axe Oy (vecteur \mathbf{j}) sur l'axe (O, \mathbf{j}') ;
- rotation d'un angle θ autour de l'horizontale (O, \mathbf{i}') dans le plan (Oyz) ramenant l'axe (O, \mathbf{j}') sur l'axe (O, \mathbf{j}'') , et l'axe (O, \mathbf{k}) sur l'axe (O, \mathbf{e}_3) ;
- rotation d'un angle ψ autour de l'axe (O, \mathbf{e}_3) dans le plan $(O, \mathbf{i}' \mathbf{j}'')$ ramenant l'axe (O, \mathbf{i}') sur l'axe (O, \mathbf{e}_1) et l'axe (O, \mathbf{j}'') sur l'axe (O, \mathbf{e}_2) .

Les angles de rotation (φ, θ, ψ) sont les angles d'Euler, appelés respectivement angle de précession φ , angle de nutation θ , et angle de rotation propre ψ .

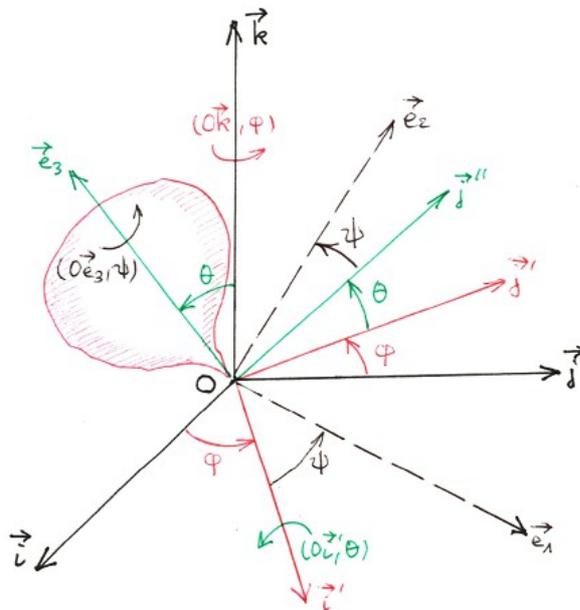


Figure 1 – Angles d'Euler

3 – Étape (b) : énergie cinétique, énergie potentielle et lagrangien de la toupie

Le vecteur vitesse angulaire instantanée a donc pour composantes, dans le repère défini par les trois axes de rotation \mathbf{k} , \mathbf{i}' , \mathbf{e}_3 :

$$\boldsymbol{\Omega} = \varphi^\circ \mathbf{k} + \theta^\circ \mathbf{i}' + \psi^\circ \mathbf{e}_3$$

où les $^\circ$ désignent la dérivée temporelle d/dt .

Il est possible d'exprimer $\boldsymbol{\Omega}$ dans le repère galiléen (O \mathbf{ijk}). Pour cela, on a les relations de passage :

$$\mathbf{i}' = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_3 = -\sin \theta \mathbf{j}' + \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}' = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{e}_3 = \sin \varphi \sin \theta \mathbf{i} - \cos \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$

Le remplacement des expressions de \mathbf{i}' et de \mathbf{e}_3 dans $\boldsymbol{\Omega}$ fournit finalement :

$$\boldsymbol{\Omega} = (\theta^\circ \cos \varphi + \psi^\circ \sin \varphi \sin \theta) \mathbf{i} + (\theta^\circ \sin \varphi - \psi^\circ \cos \varphi \sin \theta) \mathbf{j} + (\varphi^\circ + \psi^\circ \cos \theta) \mathbf{k} \quad (1)$$

c'est-à-dire, dans le repère galiléen O \mathbf{ijk} , $\boldsymbol{\Omega}$ a pour composantes $\boldsymbol{\Omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$, avec donc, d'après (1) :

$$\omega_1 = \theta^\circ \cos \varphi + \psi^\circ \sin \varphi \sin \theta$$

$$\omega_2 = \theta^\circ \sin \varphi - \psi^\circ \cos \varphi \sin \theta$$

$$\omega_3 = \varphi^\circ + \psi^\circ \cos \theta$$

L'énergie cinétique de la toupie fait intervenir le tenseur moment d'inertie [J]. Les axes principaux de la toupie sont $O\mathbf{e}_1$, $O\mathbf{e}_2$, $O\mathbf{e}_3$. La réduction du tenseur d'inertie sur ces axes principaux donne la matrice diagonale :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

La toupie étant symétrique dans une rotation autour de Oe_3 , on a $J_1 = J_2$. Donc :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

L'énergie cinétique s'obtient par :

$$T = \frac{1}{2} {}^T\Omega [J] \Omega$$

où ${}^T\Omega$ est la transposée du vecteur vitesse angulaire, c'est-à-dire ce vecteur écrit sous forme d'une matrice ligne : ${}^T\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

D'après (1) et (2) il vient :

$$T = \frac{1}{2} [J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + J_3(\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta)] \quad (3)$$

L'énergie potentielle quant à elle, due seulement à la force de pesanteur, se ramène au centre d'inertie G de la toupie (ou barycentre). Par symétrie de révolution, G se trouve sur l'axe de rotation Oe_3 de la toupie (dans le référentiel mobile). Cet axe coupe le plan Oij en O, et le vecteur OG a un module constant $l = ||OG||$, or ce vecteur fait avec la verticale Ok l'angle θ . L'énergie potentielle en G est donc :

$$V(G) = mgl \cos \theta \quad (4)$$

où m est la masse totale de la toupie. Avec (3) et (4) le lagrangien $L = T - V$ s'écrit alors :

$$L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2} [J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + J_3(\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta)] - mgl \cos \theta \quad (5)$$

4 – Étape (c) : moments conjugués des variables de position

Le vecteur coordonnées correspondant aux 3 degrés de liberté de la toupie est :

$$q = (q_1, q_2, q_3) = (\theta, \phi, \psi)$$

avec donc : $q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$, $q_3 = \psi$. Les moments conjugués qui leur sont associés sont alors donnés par les dérivées partielles du lagrangien par rapport aux dérivées temporelles de ces coordonnées. Par conséquent :

$$p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1, \quad p_2 = \partial L / \partial \dot{q}_2, \quad p_3 = \partial L / \partial \dot{q}_3,$$

soit :

$$p_1 = \partial L / \partial \dot{\theta}, \quad p_2 = \partial L / \partial \dot{\phi}, \quad p_3 = \partial L / \partial \dot{\psi},$$

où le lagrangien L, donné par (5), dépend des coordonnées q et de leurs dérivées temporelles \dot{q} . Cela donne, tout calcul effectué (exercice!) :

Ça y est, encore le coup de l'exercice ! Mais cette fois j'ai compris cette obsession de Fred à nous faire faire les calculs: je suis sûr maintenant qu'il ne sait pas les faire lui-même!!!... Hi ! Hi ! Hi !



$$p_1 = J_1 \dot{\theta} \quad (6)$$

$$p_2 = J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \quad (7)$$

$$p_3 = J_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\psi} \cos^2 \theta + \dot{\varphi} \cos \theta) \quad (8)$$

Ces moments conjugués vont permettre d'établir les équations du mouvement par la définition de l'hamiltonien du système et les équations dites de Hamilton.

5 – Étape (d) : hamiltonien de la toupie symétrique

L'hamiltonien du système est défini par :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (9)$$

où le terme $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ désigne le produit scalaire du vecteur moments conjugués \mathbf{p} et du vecteur dérivée temporelle des coordonnées \mathbf{q} (l'hamiltonien est un scalaire, tout comme le lagrangien). Il n'a échappé à personne qu'à gauche de l'égalité (9) nous avons écrit que H dépend de \mathbf{q} et de \mathbf{p} , alors qu'à droite de cette égalité interviennent \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$, et non \mathbf{p} et \mathbf{q} . Cette écriture n'est donc pas correcte puisque l'on ne retrouve pas de part et d'autre de l'égalité les mêmes variables. En fait, dans le terme de droite les variables $\dot{\mathbf{q}}$ peuvent s'exprimer uniquement en fonction des moments conjugués \mathbf{p} , ce qui donne bien pour (9) un hamiltonien exprimé uniquement à l'aide des variables conjuguées \mathbf{q} et \mathbf{p} .

Dans le cas de la toupie symétrique, cette ré-expression s'obtient en inversant les relations (6), (7), (8), ce qui donne :

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{J_1} \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_3 - p_2 \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} \quad (11)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_2}{J_3} - \frac{\cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} (p_3 - p_2 \cos \theta) \quad (12)$$

L'expression (9) de l'hamiltonien, qui s'explicite en :

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = p_1 \dot{\theta} + p_2 \dot{\varphi} + p_3 \dot{\psi} - L(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$$

devient, à partir de (10), (11), (12) :

$$H = \frac{p_1^2}{2J_1} + \frac{(p_3 - p_2 \cos \theta)^2}{2J_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_2^2}{2J_3} + mgl \cos \theta \quad (13)$$

Remarque : On constate que l'hamiltonien est égal à $H = T + V$, où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle respectivement données par (3) et (4). Pour s'en convaincre, il suffit de remplacer dans (3) les dérivées θ° , ϕ° , ψ° par leurs expressions (10), (11), (12). Or pour un système non dissipatif comme la toupie symétrique où les forces de frottement ont été négligées, l'énergie $E = T + V$ se conserve. L'égalité $H = T + V$ prouve donc que l'on a affaire ici à un système conservatif.

6 – Étape (e) : équations du mouvement (équations de Hamilton)

Elles s'écrivent :

$$p_k^\circ = dp_k / dt = - \partial H / \partial q_k \qquad q_k^\circ = dq_k / dt = \partial H / \partial p_k \quad (14)$$

où ici $k = 1, 2, 3$ (trois degrés de liberté). A partir de (13) elles s'explicitent en :

$$p_1^\circ = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = - p_2 \frac{p_3 - p_2 \cos \theta}{J_1 \sin \theta} + \frac{(p_3 - p_2 \cos \theta)^2 \cos \theta}{J_1 \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta \quad (15)$$

$$p_2^\circ = - \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \rightarrow p_2 = cste = A \quad (16)$$

$$p_3^\circ = - \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \rightarrow p_3 = cste = B \quad (17)$$

$$\theta^\circ = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{J_1} \quad (18)$$

$$\phi^\circ = \frac{\partial H}{\partial p_2} = - \frac{(p_3 - p_2 \cos \theta) \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_2}{J_3} \quad (19)$$

$$\psi^\circ = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3 - p_2 \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} \quad (20)$$

On voit que (18), (19) et (20) ne sont rien d'autre que (10), (12) et (11). En particulier (18) entraîne que :

$$p_1^\circ = J_1 \theta^\circ$$

Par ailleurs, (16) et (17) sont deux intégrales premières du mouvement, elles traduisent la conservation de la projection sur l'axe de révolution du moment cinétique et de la projection sur l'axe vertical du moment cinétique. En les injectant dans (15), (19) et (20), on obtient l'expression brute des équations différentielles du mouvement, dans lesquelles les vitesses et accélérations angulaires dépendent uniquement de l'angle de nutation θ , lequel varie avec le temps :

$$\theta^{\circ\circ} = - A \frac{B - A \cos \theta}{J_1^2 \sin \theta} + \frac{(B - A \cos \theta)^2 \cos \theta}{J_1^2 \sin^3 \theta} + \frac{mgl \sin \theta}{J_1} \quad (21)$$

$$\phi^{\circ\circ} = - \frac{(B - A \cos \theta) \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} + \frac{A}{J_3} \quad (22)$$

$$\psi^{\circ\circ} = \frac{B - A \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} \quad (23)$$

Telles quelles, ces équations ne sont pas solubles en l'état, non seulement parce qu'elles sont non linéaires, mais surtout parce qu'elles sont constituées d'une équation différentielle de second ordre qui nécessite deux constantes d'intégration, et de deux équations différentielles du premier ordre qui nécessitent chacune une constante d'intégration, ce qui fait 4 constantes d'intégration au total. Comme deux intégrales premières ont déjà permis de les établir, il manque une troisième intégrale première, ce qui porte le nombre à 3, c'est-à-dire autant que de

degrés de liberté, pour fermer le problème. Or cette troisième intégrale première vient de la remarque vue plus haut sur la conservation de l'énergie mécanique du système E:

$$H = E$$

(13) donne alors cette troisième intégrale première :

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(B - A \cos \theta)^2}{2J_1 \sin^2 \theta} + \frac{A^2}{2J_3} + mgl \cos \theta$$

d'où la relation entre la vitesse angulaire de précession et l'angle de précession :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{J_1} - \frac{(B - A \cos \theta)^2}{J_1^2 \sin^2 \theta} - \frac{A^2}{J_1 J_3} - \frac{2mgl \cos \theta}{J_1} \quad (24)$$

Finalement les équations du mouvement font intervenir uniquement l'angle de nutation par l'intermédiaire de $\cos \theta$, appelé paramètre principal u : $u = \cos \theta$.

La relation (24) peut se réécrire en faisant apparaître l'énergie potentielle effective $E'(u)$:

$$\dot{\theta}^2 (u) = (2/J_1)(E - E'(u)) \quad (25)$$

avec:

$$E'(u) = mgl u + \frac{(B - Au)^2}{2J_1(1-u^2)} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{J_3} \quad (26)$$

puisque $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - u^2$.

De $u = \cos \theta$, il vient, en dérivant: $u^\circ = -\sin \theta \cdot \dot{\theta}$, donc $u^{\circ 2} = \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 = (1 - u^2) \dot{\theta}^2$, d'où:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^{\circ 2}}{1 - u^2}$$

en remplaçant dans (25):

$$u^{\circ 2} = \frac{2}{J_1} (1 - u^2) (E - E'(u)) \quad (27)$$

où $E'(u)$ est donné par (26).

Par ailleurs les équations sur la précession et la rotation propre (22) et (23) deviennent immédiatement:

$$\dot{\phi} = \frac{A}{J_3} - \frac{1}{J_1} u \frac{B - Au}{1 - u^2} \quad (28)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{J_1} \frac{B - Au}{1 - u^2} \quad (29)$$

Les équations (27), (28), (29) sont les équations du mouvement de la toupie symétrique, sans frottement ni glissement du point de contact O, issues des équations de Hamilton et de la conservation de l'énergie, et exprimées uniquement en fonction du paramètre principal u .

A défaut d'une résolution numérique complète de ces équations, une discussion sur u permet de prévoir certains régimes d'oscillation de la toupie. C'est l'objet du paragraphe 7 suivant.

7 – Les différents régimes d'oscillation de la toupie symétrique

D'abord, par définition de u , on a obligatoirement $1 - u^2 \geq 0$. D'après l'équation (27) il ressort donc déjà que les mouvements possibles sont tels que:

$$E - E'(u) \geq 0 \quad (30)$$

Pour identifier une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'un mouvement de la torpille soit possible, on est donc amené à étudier la variation de $E'(u)$ en fonction de u .

(26) montre que $E'(u) = +\infty$ si $u^2 = 1$, donc pour $u = 1$ ou -1 , soit pour $\theta = 0$ ou π . Il existe donc un minimum $E' = E'_0$ sur l'intervalle $-1 < u < +1$, donc sur ce même intervalle l'énergie mécanique totale E doit être supérieure au minimum de l'énergie potentielle effective (figure 2):

$$E \geq E'_0 \quad (31)$$

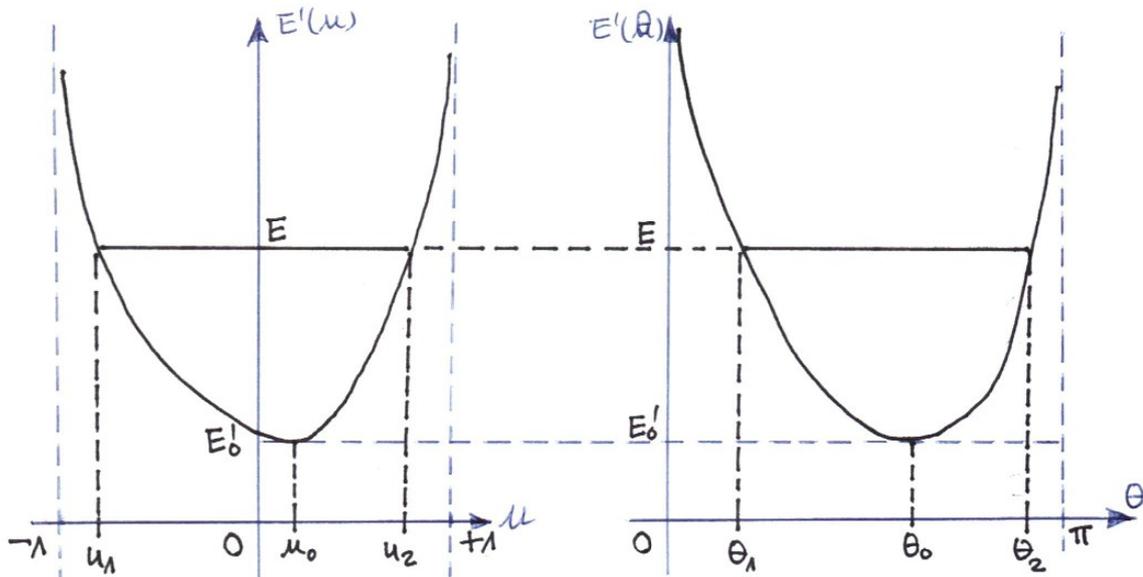


Figure 2 - Variation de E' en fonction de u ou de θ

Deux cas se présentent alors: $E > E'_0$ et $E = E'_0$.

1 - Cas $E > E'_0$: pour une énergie mécanique fixée, la nutation peut varier entre deux extrêmes θ_1 et θ_2

Dans ce domaine d'énergie, une condition nécessaire du mouvement est que l'angle de nutation θ varie entre les deux angles extrêmes: $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ (ou encore $u_1 \leq u \leq u_2$). A ces extrémités du domaine de variation de la nutation on a $E = E'$ donc $\dot{\theta} = 0$.

Selon le signe de la vitesse de précession $\dot{\varphi}$, différents régimes ont lieu. Au changement de signe, cette vitesse $\dot{\varphi}$ passe par zéro: soit donc U la valeur de u qui annule $\dot{\varphi}$: $\dot{\varphi}(U) = 0$. On calcule aisément cette valeur U en annulant l'expression (28). On obtient une équation du second degré en u dont les racines sont, sous certaines conditions pour lesquelles le discriminant Δ existe, sont:

$$U = \frac{B \frac{J_3}{J_1} \pm \sqrt{\Delta}}{2 \left(A \frac{J_3}{J_1} - 1 \right)}$$

avec:

$$\Delta = B^2 \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 - 4 \left(A \frac{J_3}{J_1} - 1 \right)$$

relations que l'on établira facilement en exercice!

L'angle de nutation correspondant à U est Θ : $U = \cos \Theta$.

1.1 - Cas $E > E'_0$ avec conservation du signe de la vitesse de précession: $\dot{\varphi} > 0$ ou $\dot{\varphi} < 0$:

On est dans la situation où $u < U$ ou $u > U$.

Le centre d'inertie G de la toupie décrit une courbe sur la sphère de rayon $l = \|\mathbf{OG}\|$ qui oscille entre les extrêmes θ_1 et θ_2 , tandis que la toupie précessionne dans le même sens (puisque la précession conserve un signe constant), on obtient la courbe de la figure 3.

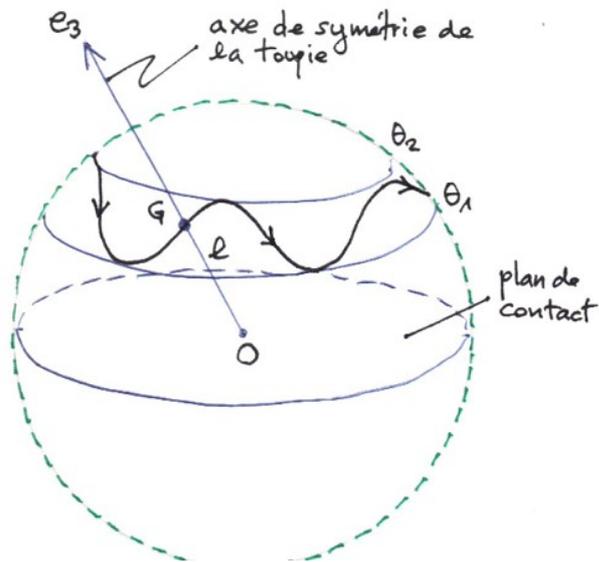


Figure 3 - Précession dans le même sens, nutation oscillant entre les deux extrêmes

1.2 - Cas $E > E'_0$ avec annulation de la vitesse de précession qui change de signe: $u = U$ (ou $\theta = \Theta$)

Dans ce cas la nutation oscille entre les extrêmes mais en suivant une précession qui change périodiquement de sens le long d'un parallèle.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que G décrit sur la sphère une courbe formée d'une succession de festons bouclés le long d'un parallèle dans le sens de la nutation (figure 4).

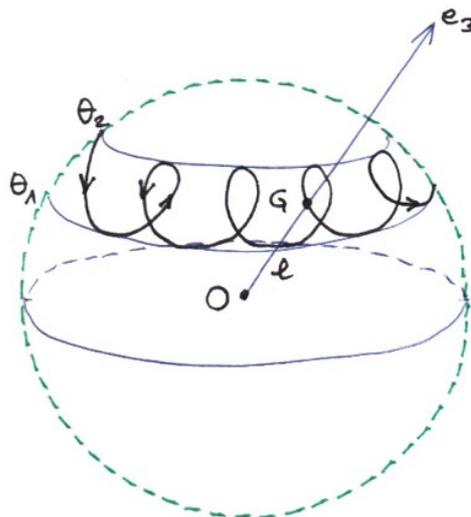


Figure 4 - Précession avec changement de sens, nutation oscillant entre les deux extrêmes

1.3 - Cas $E > E'_0$ avec annulation simultanée des vitesses de nutation et de précession

On a donc simultanément a priori $u = u_1$ ou u_2 et $u = U$ (donc $u_1 = U$ ou $u_2 = U$), alors $\theta^\circ = 0$ et $\phi^\circ = 0$ simultanément: en ces points G a donc une vitesse de précession et une vitesse de nutation nulles, mais il possède une vitesse de rotation propre car la toupie continue de tourner autour de son axe **OG** avec la vitesse (relation (29)):

$$\psi^\circ = \frac{1}{J_1} \frac{B - AU}{1 - U^2}$$

La courbe décrite par G présente alors des points de rebroussement (figure 5). En ces points de rebroussement l'énergie potentielle effective E' est maximale, car égale à E , puisque la vitesse y est nulle: ils sont donc situés sur le cercle parallèle de latitude θ_2 les points de rebroussement correspondant à $u_2 = U$ (la solution $u_1 = U$ étant exclue) (figure 5).

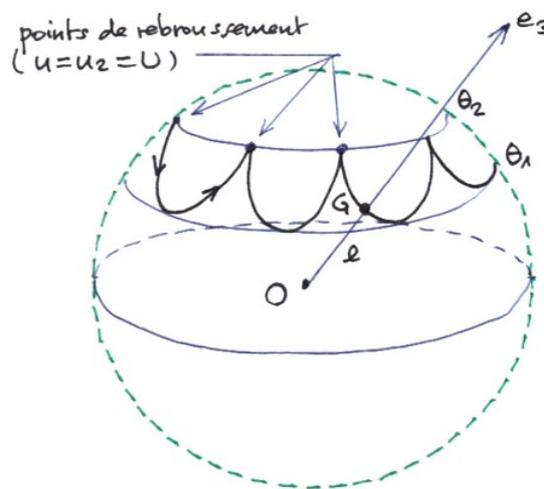


Figure 5 - Annulation périodique des vitesses de précession et de nutation

2 - Cas $E = E'_0$: l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective et donc la nutation reste la même

L'égalité $E = E'_0$ entraîne $u^{\circ 2} = 0$ donc $\theta^\circ = 0$, d'où $\theta = \theta_0$ (constante), soit $u = u_0$ (cf. figure 2): le mouvement suivant la nutation θ est alors stationnaire (le mouvement est à nutation constante θ_0). Il s'ensuit que les vitesses de précession et de rotation propre sont constantes (relations (28) et (29)):

$$\phi_0^\circ = \frac{A}{J_3} - \frac{1}{J_1} u_0 \frac{B - Au_0}{1 - u_0^2}$$

$$\psi_0^\circ = \frac{1}{J_1} \frac{B - Au_0}{1 - u_0^2}$$

Comme $\theta = \theta_0$ et donc $\theta_0^\circ = 0$, et par conséquent $\theta_0^{\circ \circ} = 0$, (21) donne l'équation qui détermine u_0 (ou θ_0):

$$-(B - A \cos \theta_0) A + \frac{(B - A \cos \theta_0)^2}{\sin^2 \theta_0} \cos \theta_0 + J_1 mgl \sin^2 \theta_0 = 0$$

en remplaçant par $u_0 = \cos \theta_0$, l'équation précédente devient:

$$J_1 mgl u_0^4 - (AB + 2J_1 mgl) u_0^2 + (A^2 + B^2) u_0 + (J_1 mgl - AB) = 0 \quad (31)$$

(31) est une équation du 4e degré en u_0 dont la détermination des conditions d'existence des racines est difficile à établir.

Pour contourner la difficulté, on utilise l'astuce suivante pour rabaisser le degré de l'équation:

On exploite la relation (22) en remarquant que:

$$\phi_0^\circ = -\frac{(B - Au_0)u_0}{J_1(1 - u_0^2)} + \frac{A}{J_3}$$

donc:

$$(B - Au_0) = J_1 \left(\frac{A}{J_3} - \phi_0^\circ \right) \frac{1 - u_0^2}{u_0}$$

que l'on réinjecte dans (31) afin d'obtenir une équation en ϕ_0° :

Tout calcul fait, en posant $X = A/J_3 - \phi_0^\circ$, l'équation (31) se ramène à l'équation du second degré dont il est plus aisé de discuter de l'existence des racines:

$$J_1 X^2 - AX + mgl u_0 = 0 \quad (32)$$

Les racines de (32), si elles existent, sont:

$$X = \frac{A}{2J_1} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J_1}{A^2} mgl u_0} \right] \quad (33)$$

La condition d'existence des racines est donc:

$$1 > \frac{4J_1}{A^2} mgl u_0$$

Cette condition est toujours satisfaite si $u_0 < 0$ (donc pour $\pi/2 \leq \theta_0 \leq \pi$).

Par contre, pour $u_0 \geq 0$ (donc $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$) elle est satisfaite seulement pour

$$A \geq \sqrt{4J_1 mgl u_0}$$

c'est-à-dire pour un moment cinétique de précession suffisant. Or d'après (7) le minimum de A est donné par $A = J_3 \phi_0^\circ$, la condition conduit donc à une valeur minimale de la vitesse de précession:

$$\phi_0^\circ \geq \frac{\sqrt{4J_1 mgl \cos \theta_0}}{J_3} \quad (33)$$

Pour une nutation presque nulle (l'axe de nutation s'écarte peu de la verticale) la condition (33) se simplifie en:

$$\phi_0^\circ \geq \frac{\sqrt{4J_1 mgl}}{J_3} \quad (34)$$

Cette configuration, où la toupie tourne sur elle-même suivant presque la verticale, et avec une vitesse initiale de précession suffisante pour que la nutation ne change pas, correspond à la "toupie dormante" (verticale, rotation uniforme). Cette configuration est détruite lorsque, suite aux ralentissements apportés par les frottements, la vitesse de précession est trop faible pour maintenir une nutation constante. Celle-ci change alors rapidement et la toupie, manquant d'énergie cinétique, s'arrête et tombe.

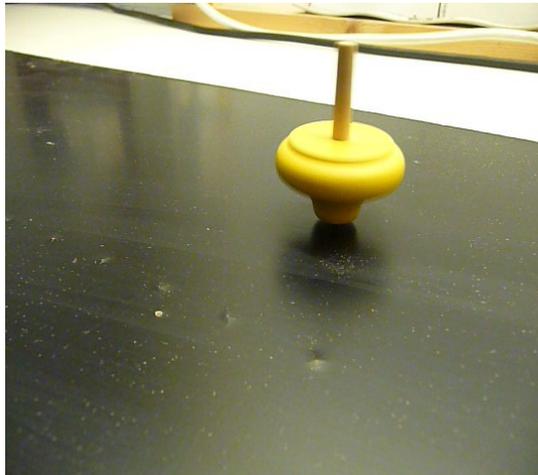
Évaluons un ordre de grandeur pour (34). Les moments d'inertie sont de l'ordre de mR^2 , où m est la masse de la toupie et R son rayon (symétrie cylindrique). Donc pour une toupie

caractérisée par $R = 1,5 \text{ cm}$ et $\ell = 1 \text{ cm}$, on obtient:

$$\frac{\sqrt{4J_1 mgl}}{J_3} = \frac{mR\sqrt{gl}}{mR^2} = \frac{\sqrt{gl}}{R} = (9,81 \times 0,01)^{(1/2)} / 0,015 = 20 \text{ rad/s}$$

donc on doit avoir $\varphi_0 \geq 20 \text{ rad/s} = 20/2\pi \text{ tours/s} = 3,2 \text{ tours/seconde}$, pour qu'une telle toupie soit en régime "toupie dormante".

Les photos suivantes montrent la toupie en mode "toupie dormante" et en nutation variable:



(photos: Frédéric Élie)

En cliquant sur [ce lien](#) vous pourrez voir une vidéo sur le mouvement de cette toupie.