ACCUEIL

Frédéric Elie on ResearchGate

Propulsion d'un navire par Turbovoile® et contrôle de la couche limite

Frédéric Élie

juillet 2010

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Equipant le navire de l'équipe du commandant Jacques-Yves Cousteau, « L'Alcyone » (la fille du vent), le système de propulsion par turbovoile permet, par un ingénieux moyen de contrôle de la couche limite développé par l'écoulement de l'air sur des cylindres métalliques, et donc par le contrôle de la traînée et de la portance, de diminuer de 30% l'énergie nécessaire à une propulsion par hélice au moyen de moteurs. C'est donc un auxiliaire prometteur pour économiser les besoins énergétiques en propulsion navale. Le principe n'est pas nouveau et, aujourd'hui, quelques prototypes de navires, plus imposants que l'Alcyone, sont en cours d'expérimentation.
Lorsque l'Alcyone est venu mouiller quelques jours dans le port de La Seyne-sur-Mer en avril 2010, j'ai pu le visiter et avec l'aimable autorisation de son skipper, prendre quelques photos.

SOMMAIRE

L'Alcyone avec ses deux cylindres « turbovoile » à La Seyne-sur-Mer
(photo : F. Élie, avril 2010)

1 - Principes du contrôle de l'écoulement autour d'un profil pour la propulsion par vent

Deux principes sont utilisés pour améliorer la portance aérodynamique de profils épais (mâts cylindriques) par action sur la couche limite et la traînée : l'effet Magnus et la turbovoile. Ces deux principes sont présentés ci-après.

1-1 - Effet Magnus

Le physicien Allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) a apporté le premier l'explication de la déviation d'un projectile en rotation se déplaçant dans l'air, effet qui porte désormais son nom.
Lorsqu'un corps est en rotation tout en se déplaçant dans l'air la vitesse d'écoulement le long de sa paroi n'est pas la même d'un point à l'autre de celle-ci. Elle résulte de la combinaison de la vitesse de rotation et de la vitesse propre de l'objet. Par conséquent elle sera moins importante sur les parties de la paroi où la vitesse de rotation est dans le sens opposé à la vitesse propre, et plus importante sur les parties de la paroi où les deux vitesses sont dans le même sens.
Or d'après le théorème de Bernoulli, le long d'un filet d'écoulement, la pression est plus élevée si la vitesse d'écoulement est petite, et plus faible lorsque la vitesse d'écoulement est plus grande. La pression sera donc plus importante du côté du corps où la vitesse de rotation est de sens inverse à la vitesse propre, et plus petite du côté où la vitesse de rotation et la vitesse propre sont de même sens. Entre ces deux zones, il apparaît alors une force, due à la différence des pressions (figure 1). On l'appelle ***force de Magnus*** : elle est dirigée suivant l'axe Oy passant par les deux points du profil où la vitesse d'écoulement est extrêmale (minimale et maximale) et, pour un profil supposé de longueur infinie suivant son axe Oz (approximation bidimensionnelle), on démontre que sa valeur algébrique s'exprime comme suit (v. Annexe 1) :

$$F_y = -\rho \Gamma U \qquad (1)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U est la vitesse de l'écoulement potentiel dirigée suivant l'axe Ox, c'est-à-dire la vitesse considérée en l'absence des parois et des effets de rotation (c'est donc la vitesse du corps dans le fluide). La quantité Γ s'appelle ***circulation*** : c'est l'intégrale du champ de vitesse d'écoulement le long du périmètre de l'objet (contour fermé C)

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} . d\,\boldsymbol{l} \qquad (2)$$

Le signe de la circulation, et donc de la force de Magnus, dépend du sens de rotation du mobile par rapport au sens de l'écoulement potentiel. En supposant U orientée suivant un axe Ox selon les x croissants, et que l'axe du cylindre supposé infini est Oz, si la rotation est dans le sens trigonométrique (contraire aux aiguilles d'une montre), la force de Magnus s'exerce dans le sens inverse de Oy car la circulation est positive, et la situation s'inverse pour une rotation dans le sens horaire (circulation négative, force de Magnus dirigée dans le même sens que Oy).

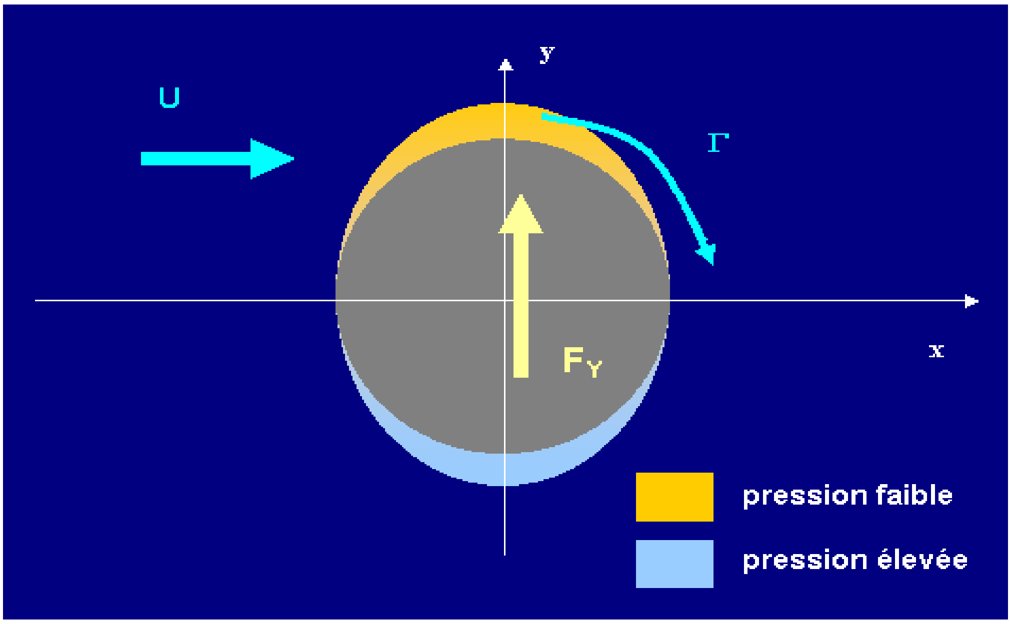


figure 1 – force de Magnus sur un cylindre infini en rotation horaire dans un écoulement

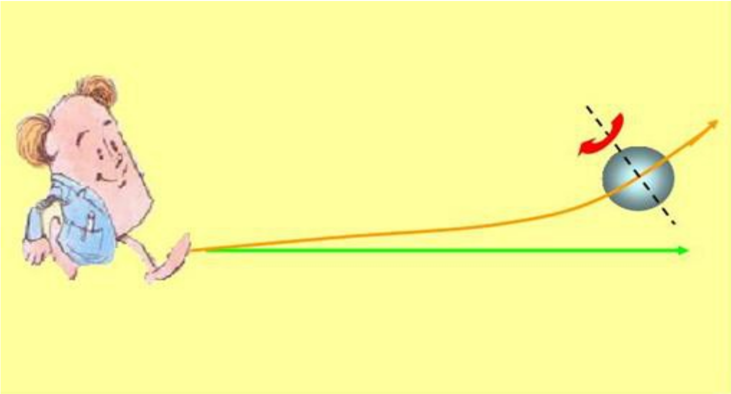
La force de Magnus est une portance, au sens où elle est une force exercée sur le mobile perpendiculaire à la direction de l'écoulement potentiel. Mais les forces qui s'exercent sur le corps ont aussi une composante suivant la direction Ox de l'écoulement potentiel : c'est la traînée. Elle est due à la viscosité du fluide donc elle n'est généralement pas nulle. Cependant pour un corps présentant une symétrie par rapport à l'axe de l'écoulement potentiel Ox elle s'annule : la composante de vitesse suivant Oy est égale et opposée pour deux points symétriques par rapport à Ox, elle agit donc de la même façon sur la pression en ces points puisque d'après le théorème de Bernoulli la somme de la pression et du carré du module est la même pour ces deux points symétriques :

$$v_x(x,y) \neq v_x(x,-y) \quad \text{(différence due à la rotation)}$$
$$v_y(x,y) = -v_y(x,-y) \quad \text{(symétrie par rapport à Ox)}$$
$$P(x,y) + \frac{1}{2}\rho(v_x^2(x,y) + v_y^2(x,y)) = P(x,-y) + \frac{1}{2}(v_x^2(x,-y) + v_y^2(x,-y)) \rightarrow$$
$$P(x,y) + \frac{1}{2}\rho v_x^2(x,y) = P(x,-y) + \frac{1}{2}\rho v_x^2(x,-y)$$

par conséquent les projections sur Ox des contributions des points symétriques s'annulent deux à deux.

La force de traînée est nulle aussi dans le cas d'un fluide parfait, c'est-à-dire dont la viscosité peut être négligée devant les forces d'inertie, et ceci, cette fois pour un corps géométriquement quelconque : les mécanismes de dissipation visqueuse peuvent être négligés.

L'effet Magnus est utilisé dans beaucoup de domaines, et particulièrement en sport : au ping-pong, au tennis (lift) ou au football, lorsqu'une tire une balle en lui donnant de l'effet, c'est-à-dire en la mettant en rotation sur elle-même, on lui fait parcourir une trajectoire incurvée. En revanche cet effet est gênant en sport de tir à l'arme à feu : lorsqu'une balle sort du canon elle subit un mouvement de rotation autour de son axe à cause des rayures du canon, celles-ci étant faites pour stabiliser sa dynamique (voir articles « *balistique extérieure* » et « *balistique intérieure* »), et cette rotation entraîne une déviation de la balle par effet Magnus qui introduit de l'imprécision dans le tir.



Méson tire une balle en lui donnant de l'effet, par une rotation anti-horaire : l'effet Magnus la fait dévier vers la gauche

1-2 - Principe de la turbovoile

Si, à la place d'une voile traditionnelle, on utilise un cylindre vertical épais (de section non forcément circulaire), l'écoulement de l'air autour du profil conduit au développement d'une ***couche limite*** au voisinage immédiat de la paroi. Loin de l'obstacle le fluide peut être considéré parfait (non visqueux), mais près de lui les effets de la viscosité deviennent comparables aux forces d'inertie et un gradient de vitesse longitudinale important apparaît sur une distance à la paroi appelée « épaisseur de couche limite » δ. Dans cette zone, la vitesse varie de zéro sur la paroi jusqu'à la valeur de la vitesse de l'écoulement potentiel à la distance δ.
En présence du vent la vitesse d'écoulement longitudinale au voisinage du profil n'est pas uniforme notamment à cause de la courbure de la paroi : l'écoulement ralentit le long d'un profil courbe jusqu'à s'annuler et inverser son sens. Cette variation a pour effet sur la couche limite de provoquer son décollement : les filets d'écoulement ne restent plus collés à la paroi. Le décollement contribue à l'augmentation de la traînée, laquelle, on le sait, défavorise l'avancée du navire (la pression associée à la traînée étant plus faible qu'à l'avant le profil a tendance à être attiré vers l'arrière).
Une façon d'empêcher le ***décollement de la couche limite*** consiste à maintenir les filets de l'écoulement pariétal collés à la paroi en aspirant dans la paroi les filets d'air. Pour être efficace, cette aspiration doit être réalisée avant la zone de décollement. Comme celle-ci varie avec la direction du vent, il faut pouvoir jouer sur la position des zones d'aspiration, par un système d'asservissement de leur position en fonction de l'orientation du cylindre par rapport au vent et en fonction de la vitesse.
Ce principe a fait l'objet de l'invention du professeur Lucien Malavard, du docteur Bertrand Charrier et, bien entendu, du commandant Jacques-Yves Cousteau.

Citons Bertrand Charrier : *« L'efficacité d'une voile est proportionnelle à sa surface et à la dissymétrie de l'air qu'elle provoque. Cette dissymétrie est exprimée par ce que les physiciens appellent un coefficient de portance. Les études d'aérodynamique ont montré que seuls des profils très épais, voire cylindriques, permettent d'atteindre des coefficients de portance élevés. Seuls, ils permettent de réduire la surface de la voile. Ils augmentent le rendement de la récupération de l'énergie du vent. En aspirant à l'intérieur du cylindre une partie de l'air* *extérieur, on aboutit au fait que les filets d'air qui s'écoulent autour du cylindre restent collés à la paroi de celui-ci. De cette façon, ils se trouvent très fortement défléchis du côté où l'aspiration se produit. Le fonctionnement de la Turbovoile est basé sur ce principe. »*

Les principes ci-dessus permettent de comprendre la structure d'une turbovoile (figure 2):

- structure verticale cylindrique creuse (en aluminium), la section du cylindre étant plus ovale que circulaire pour permettre un meilleur contrôle de la couche limite (celle-ci accélère moins sur une courbure elliptique que circulaire) ;
- vers la partie en aval (donc située avant la zone de décollement de la couche limite), la structure est équipée de deux zones d'aspiration, placées symétriquement par rapport à l'axe principal de l'ovale. Ces dispositifs sont des grillages le long desquels peuvent coulisser des volets de fermeture. Ces grillages terminent des tubulures par lesquelles l'air extérieur est aspiré au moyen d'une sorte de ventilateur placé au sommet de la turbovoile ;
- le déplacement des volets pour positionner différemment les points d'aspiration est assuré par un système d'asservissement piloté par un calculateur central.

La théorie de la couche limite, et les diverses façons de contrôler son décollement, sont présentés en Annexe 1.

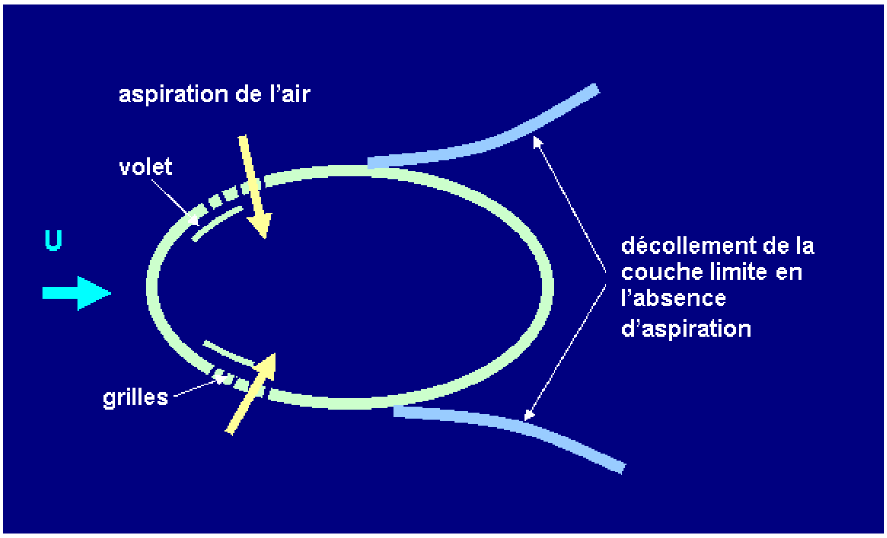
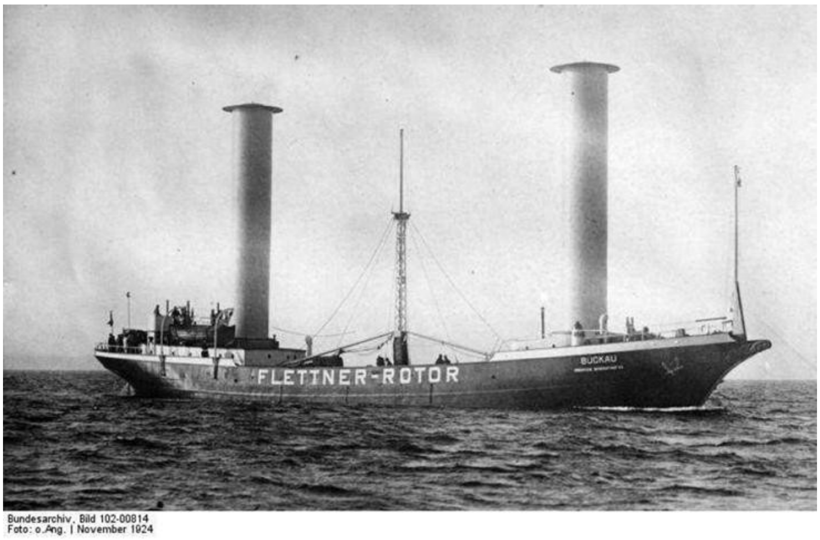


figure 2 – principe du contrôle de couche limite par turbovoile

2 - Bref historique de la propulsion par effet magnus et par turbovoiles

L'utilisation de l'effet Magnus pour la propulsion par vent d'un navire a été réalisée pour la première fois par l'Allemand Anton Flettner en 1924 dans les chantiers de Kiel. Elle fut appliquée au trois mâts *Buckau* transformé pour être équipé de deux gros cylindres verticaux en rotation, permettant une poussée longitudinale lorsque le vent souffle sur un côté du navire. Un moteur auxiliaire à hélice était mis en route en l'absence de vent ou pour des manœuvres portuaires. Après divers essais le *Buckau* fut rebaptisé le *Baden-Baden* et fit la traversée de l'Atlantique pour atteindre New York le 9 mai 1926.



Le Buckau en 1924, premier navire à utiliser l'effet Magnus pour sa propulsion (Anton Flettner)

Le même principe fut ensuite mis en œuvre à Brême en juillet 1926 par Robert M. Sloman junior pour la propulsion du navire de 2077 tonneaux le *Barbara*. Il était équipé de trois rotors Flettner destinés à compléter sa propulsion par moteur, qui lui permirent d'atteindre 4 à 9 nœuds.

Exploitant également le même principe, la société d'éoliennes Enercon développa un cargo de 130 m de long, et de 22,5 m de large, équipé de 4 rotors Flettner d'une hauteur de 25 mètres destinés à compléter sa propulsion diesel (2 moteurs diesel de 3,5 MW chacun). Sa construction fut réalisée par les chantiers navals Lindenau-Werft à Kiel et il fut mis à l'eau en août 2008, avec pour nom de baptême le *E-Ship I*. La réduction de carburant que permet ce système peut aller jusqu'à 30-40% sur des longs trajets.

Le E-Ship I de la société Enercon (2008)

Quant au principe de la turbovoile, le seul bateau qui l'utilise pour le moment est *l'Alcyone* du commandant Cousteau. Développé dès 1980, après des essais en soufflerie sur modèles réduits, puis en réel grâce à un catamaran (le *Moulin à Vent*) qui rallia Tanger à New York, l'Alcyone fit sa première traversée en 1985.
La coque de l'Alcyone est en aluminium et possède l'originalité d'être double à l'arrière, comme un catamaran, et monocoque à l'avant. Cette conception permet à la fois une grande stabilité (catamaran) et un bon profil hydrodynamique contre la houle.
Un projet d'un second bateau utilisant le principe de turbovoile était prévu, le Calypso II, mais

ne vit jamais le jour après la mort de J-Y. Cousteau.

(a) (b) (c)
(d) (e) (f)
(g) (h) (i)

L'Alcyone : (a) vue extérieure d'un des cylindres
(b) passerelle et poste de pilotage – (c) local télécoms
(d) local plongeurs – (e) base de l'une des turbovoiles
(f) l'ancienne cabine du commandant Cousteau – (g) coursive centrale
(h) locaux vie avec sa bibliothèque et sa cuisine – (i) moteur diesel Iveco
(photos F. Elie, avec l'aimable autorisation du skipper, avril 2010)

Annexe 1 : force de Magnus

Nous allons considérer un profil de largeur infinie suivant l'axe Oz, et de section régulière dans le plan xOy, l'écoulement incident (écoulement potentiel) étant dirigé parallèlement à l'axe Ox. Le profil est formé d'un contour fermé dont les dimensions suivant Ox et Oy sont finies : c'est la section droite d'un cylindre infini suivant Oz. L'écoulement peut donc être étudié selon un modèle bidimensionnel 2D (figure 3). Nous allons alors montrer que, en approximation 2D, même pour un fluide non visqueux s'écoulant autour d'un obstacle 2D il peut se créer une circulation le long de son contour ; cette circulation est responsable d'une portance, dirigée suivant Oy, appelée la force de Magnus.

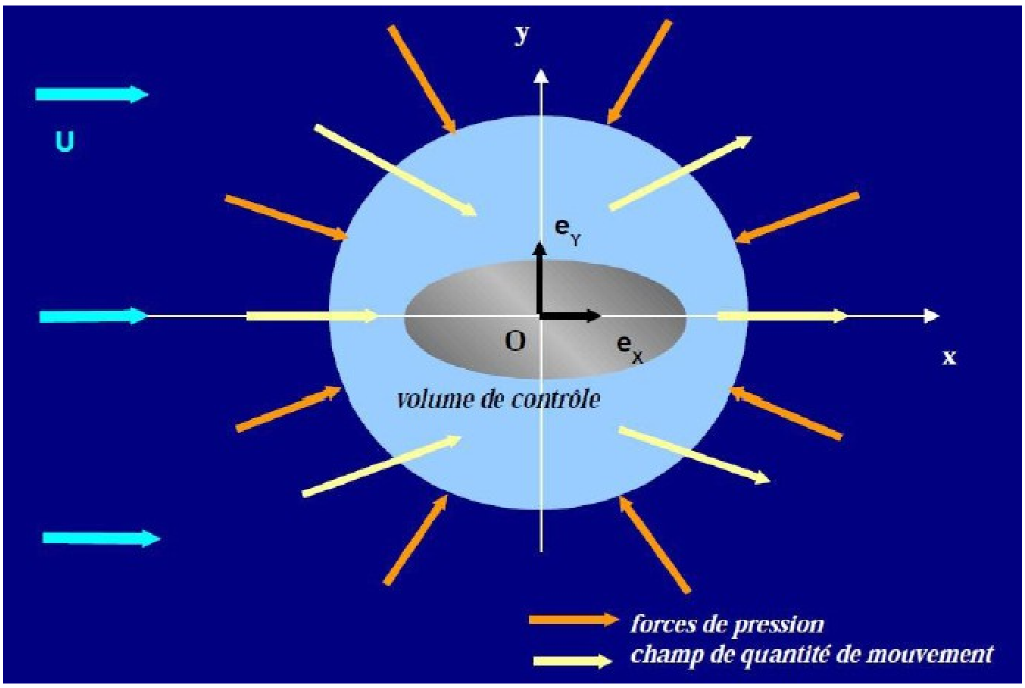


figure 3 – Bilan des forces de pression et de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle entourant un profil bidimensionnel soumis à un écoulement potentiel.

Loin de l'obstacle, l'écoulement est supposé uniforme et dirigé suivant Ox :

$$\boldsymbol{U} = U\,\boldsymbol{e_x}$$

(les vecteurs $\mathbf{e_X}$ et $\mathbf{e_Y}$ sont les vecteurs unitaires de la base du repère Oxy rattaché au solide).
Soit Φ le potentiel de vitesse ; on rappelle que ce potentiel n'existe que dans le cas d'un fluide parfait :

$$\boldsymbol{v}(x,y)=\boldsymbol{grad}\,\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{e_x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{e_y}$$

et que, le fluide étant supposé incompressible, la conservation de la masse se traduit par l'équation de Laplace :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(x,y)=0 \;\rightarrow\; \nabla^2\Phi=0 \qquad (3)$$

On obtient la force exercée sur l'obstacle grâce au bilan des forces et flux de quantité de mouvement dans le volume de contrôle entourant l'obstacle à une distance quelconque R.
Le volume de contrôle est en équilibre, il s'ensuit que la somme des forces et des flux de quantité de mouvement est nulle à l'intérieur de ce volume :

$$\mathbf{F}_{\mathrm{OBSTACLE/FLUIDE}}+\mathbf{F}_{\mathrm{PRESSION}}+\mathbf{F}_{\mathrm{FLUX\ MATIERE}}=0$$

d'où on déduit la force exercée sur l'obstacle de la part du fluide :

$$\mathbf{F}_{\mathrm{OBSTACLE/FLUIDE}}=-(\mathbf{F}_{\mathrm{PRESSION}}+\mathbf{F}_{\mathrm{FLUX\ MATIERE}})$$

En exprimant cela puis en faisant tendre R vers l'infini nous obtiendrons la force de Magnus.
Nous employons les coordonnées polaires (r, θ), avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Dans tout ce qui suit, les forces sont des forces par unité de largeur du profil puisque nous nous limitons à ce qui se passe dans le plan Oxy passant par l'une de ses sections z = cste, donc sont exprimées en (N/m).
Le flux de quantité de mouvement (ou flux de matière) entrant dans le volume de contrôle s'exprime par :

$$\boldsymbol{F}_{FLUX\ MATIERE}=-\int_0^{2\pi}\rho\,\boldsymbol{v}\,v_r\,R\,d\theta \qquad (4)$$

tandis que la résultante des forces de pression est :

$$\boldsymbol{F}_{PRESSION}=-\int_0^{2\pi}P\,\boldsymbol{e_r}\,R\,d\theta \qquad (5)$$

où v_r est la composante radiale de la vitesse d'écoulement, P la pression, $\mathbf{e_r}$ le vecteur unitaire radial, c'est-à-dire normal au cercle délimitant le volume de contrôle. La pression P est reliée à la vitesse par le théorème de Bernoulli :

$$P=P_0-\frac{1}{2}\rho v^2$$

P_0 étant la pression très loin de l'obstacle. Pour terminer le calcul, on voit qu'il faut une expression de la vitesse **v** en fonction de la circulation Γ. Pour cela nous savons que la vitesse s'obtient en résolvant l'équation de Laplace (3) compte tenu des conditions aux limites suivantes :

- composante de la vitesse normale à l'obstacle nulle (**n** est la normale au contour):

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{grad}\,\Phi=0$$

- à l'infini la vitesse est égale à **U** :

$$\boldsymbol{grad}\,\Phi = U\,\boldsymbol{e}_x \quad \text{pour} \quad r=\infty$$

On démontre (et on vous fait grâce de la démonstration !) que la solution générale de l'équation de Laplace qui vérifie ces conditions aux limites s'exprime en coordonnées polaires par une somme de termes unipolaire et de termes multipolaires qui tiennent compte de la géométrie précise du solide :

$$\Phi(r,\theta) = U\,r\cos\theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\exp jn\theta}{r^n}}_{\text{termes multipolaires}}$$

La série des termes multipolaires a une contribution nulle lorsqu'on fait r = ∞, on peut donc ne pas l'expliciter dans tout ce qui suit. Le champ de vitesse s'obtient par le gradient de l'expression précédente en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{grad}\,\Phi = U\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} - U\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta + \ldots \qquad (6)$$

où $\mathbf{e}_\theta$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{e}_r$ et formant donc avec lui une base orthonormale en coordonnées polaires. Dans (6) on a laissé de côté les termes multipolaires qui n'interviendront plus dans le calcul du bilan de forces et de quantité de mouvement.
L'utilisation de (6) pour (4) et (5) donne respectivement :

$$\boldsymbol{F}_{FLUX\ MATIERE} = -\frac{1}{2}\rho\,\Gamma\,U\,\boldsymbol{e}_y \qquad (7)$$

$$v^2 = U^2 - \frac{\Gamma}{\pi r} U\sin\theta + \ldots$$

d'où les forces de pression

$$\boldsymbol{F}_{PRESSION} = -\frac{1}{2}\rho\,\Gamma\,U\,\boldsymbol{e}_y \qquad (8)$$

En ajoutant (7) et (8) on obtient la force exercée par le fluide sur le solide, c'est-à-dire la force de Magnus :

$$\boldsymbol{F}_{OBSTACLE/FLUIDE} = \text{force de Magnus} = -\rho\,\Gamma\,U\,\boldsymbol{e}_y = -\rho\,\boldsymbol{\Gamma}\wedge\boldsymbol{U} \qquad (9)$$

Selon le sens de la circulation, qui dépend de la géométrie et du sens de rotation de l'obstacle, la force de Magnus est dirigée dans le même sens ou dans le sens opposé de Oy. Cette force est perpendiculaire au mouvement relatif de l'obstacle dans le fluide, elle joue donc le rôle de portance et n'oppose aucune résistance à l'avancement contrairement à la traînée.

Annexe 2 : couche limite et son contrôle

A2.1 – Généralités, ordres de grandeur

La couche limite laminaire intervient dans l'écoulement laminaire autour et au voisinage d'un solide lorsqu'on a affaire à des nombres de Reynolds élevés. On rappelle que le ***nombre de Reynolds*** évalue la contribution relative des effets d'inertie et des effets de viscosité :

$$Re = \frac{\text{effets d'inertie}}{\text{effets de viscosité}} = \frac{U\,D}{\nu}$$

où D est une dimension caractéristique de la géométrie de l'écoulement (par exemple l'épaisseur de l'obstacle) et ν la viscosité cinématique du fluide mesurée en m²/s. On suppose que l'écoulement incident n'est pas turbulent (il est laminaire, i.e. les lignes de courant sont localement tangentes mutuellement), dans ce cas, lorsqu'on est loin de l'obstacle ce sont les termes de force d'inertie qui prédominent devant les forces de viscosité et le fluide peut être considéré comme parfait : on parle alors d'écoulement potentiel (on peut définir un potentiel d'où dérive le champ de vitesse). Dans un écoulement potentiel il n'est pas imposé d'avoir la composante longitudinale de vitesse nulle à la frontière de la paroi de l'obstacle supposé rigide (seule la composante normale s'annule), ce qui est physiquement inacceptable. Il faut donc bien qu'il y ait un raccordement entre la solution de vitesse de l'écoulement potentiel et la condition de vitesse nulle sur les parois : ce raccordement se fait dans une zone appelée couche limite dont l'épaisseur, notée δ, est d'autant plus faible que le nombre de Reynolds Re est élevé. Dans la couche limite les contributions des forces de viscosité et de forces d'inertie deviennent comparables et l'approximation des fluides parfaits n'est plus valable. Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par L. Prandtl en 1905. Il a été vérifié expérimentalement par Burgers en 1924.

Avant d'aller plus dans le détail de la théorie, évaluons déjà quelques ordres de grandeur.
Pour cela on considère un écoulement incident laminaire uniforme, de vitesse **U** arrivant parallèlement à Ox sur un profil semi-infini, dont le bord d'attaque est parallèle à l'axe Oz lui-même perpendiculaire au plan de la figure (voir figure 4). Les axes Ox, Oy, Oz forment un trièdre direct définissant un repère lié au solide.

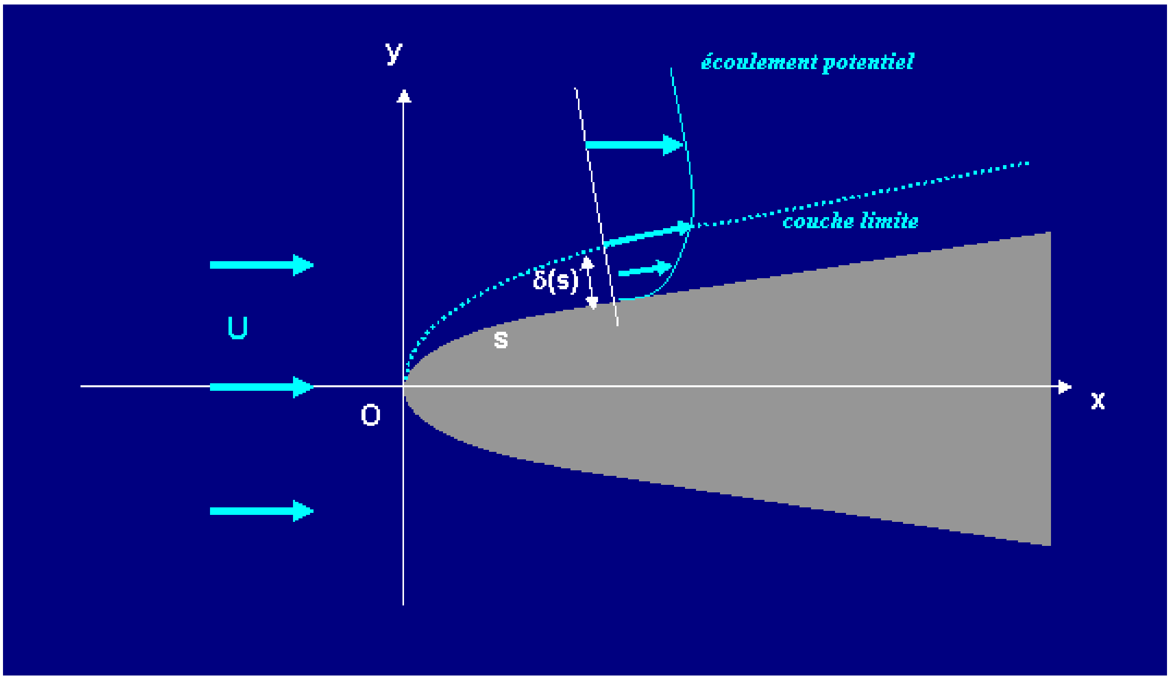


figure 4 – développement d'une couche limite laminaire sur la paroi d'un profil semi-infini dont le bord d'attaque est porté par l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure. Le raccordement entre la condition de vitesse nulle sur la paroi et la vitesse de l'écoulement potentiel impose l'existence d'un gradient de vitesse assez prononcé à l'intérieur de la couche limite, sur une épaisseur δ(s) qui varie avec l'abscisse curviligne s comptée depuis O. Ce gradient de vitesse est diffusé dans la couche limite perpendiculairement à la paroi et, simultanément, est convecté par l'écoulement.

Si la vitesse incidente U est suffisamment grande, la présence du profil n'apportera pas de perturbation en amont car les gradients de vitesse le long de la paroi seront entraînés par

convection vers l'aval plus rapidement qu'ils ne diffusent.
A l'intérieur de la couche limite la diffusion de la vitesse s'effectue par viscosité avec une durée caractéristique de l'ordre de :

$$t_D \approx \frac{\delta^2}{\nu}$$

Mais dans le même temps le fluide est transporté parallèlement à la paroi, sur une distance s depuis le bord d'attaque, avec une vitesse de l'ordre de U si l'on est à la frontière de la couche limite ; la durée caractéristique de ce transport convectif est donc de l'ordre de :

$$t_C \approx \frac{s}{U}$$

ces temps étant égaux on a l'expression approchée de l'épaisseur de la couche limite à l'abscisse curviligne s :

$$\delta(s) \approx \sqrt{\frac{\nu s}{U}} \qquad (10)$$

Le fait d'avoir une vitesse qui varie de 0 à U entre la paroi et l'écoulement potentiel, donc un fort gradient de vitesse sur l'épaisseur de couche limite à cause des effets de viscosité, entraîne que dans la couche limite les effets de viscosité dominent les effets d'inertie, autrement dit le nombre de Reynolds dans la couche limite est grand :

$$\mathrm{Re}_{CL} = \frac{U\delta}{\nu} >> 1$$

Avec (10), cette condition devient :

$$\sqrt{\frac{U s}{\nu}} \equiv \sqrt{\mathrm{Re}_s} >> 1 \quad (11)$$

où apparaît le nombre de Reynolds local défini sur la distance s au bord d'attaque prise comme échelle de longueur :

$$\mathrm{Re}_s = \frac{U s}{\nu}$$

Lorsque le nombre de Reynolds local Re_S devient très grand l'épaisseur de la couche limite devient très petite en comparaison aux dimensions caractéristiques du profil, et l'écoulement proche de la paroi se rapproche de celui d'un fluide parfait parce que les effets de viscosité sont confinés sur une épaisseur très mince sur la paroi. Cette situation a lieu pour des vitesses d'écoulement potentiel importantes.
Remarquons que pour des Re_S trop élevés le régime de couche limite devient turbulent : la diffusion turbulente de la quantité de mouvement modifie l'épaisseur de la couche limite et le comportement (10) ne convient plus.

A2.2 – Équations du mouvement dans la couche limite (théorie de Prandtl)

Pour simplifier le problème on suppose que la couche limite se développe sur une plaque plane par laquelle passe l'axe Ox. Les conclusions resteront valables pour un profil courbe dont le rayon de courbure est plus grand que l'épaisseur de couche limite (et l'abscisse x est remplacé par l'abscisse curviligne s). La géométrie du problème est représentée à la figure 5. La théorie de Prandtl utilise le fait que sur les directions Ox et Oy, parallèles et perpendiculaires à la paroi, les échelles caractéristiques de longueurs sont très différentes, et l'application aux équations de

Navier-Stokes aboutira aux équations de Prandtl.

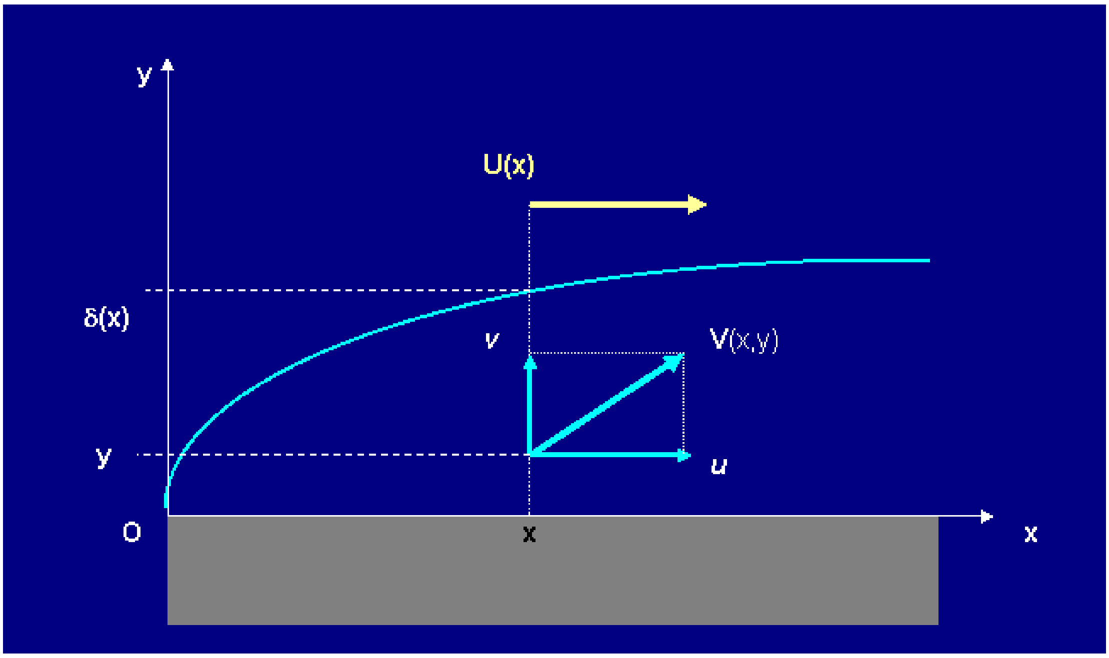


figure 5 – géométrie de la couche limite développée sur plaque plane

La vitesse **V**(x,y) dans la couche limite a pour composantes suivant x et y : **V** = (u, v). Nous allons appliquer les équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse en considérant que les composantes de la vitesse ont des ordres de grandeurs différents compte tenu de (11) :

- pour la conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow v \approx u\frac{\delta(x)}{x}=\frac{u}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} << u \qquad (12)$$

- d'autre part dans les équations de Navier-Stokes, les termes de dissipation visqueuse et de convection (non linéaires) interviennent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u}{\delta^2(x)} >> \frac{u}{x^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (13)$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} \approx u\frac{\delta(x)}{x}\frac{u}{\delta(x)}=\frac{u^2}{x} \approx u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (14)$$

De (12), (13), (14) les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (15a)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad (15b)$$

On déduit aussi que dans la couche limite le gradient de pression suivant Oy a une contribution négligeable, soit :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0 \rightarrow P=P(x) \qquad (16)$$

La pression ne dépendant que de l'abscisse x, elle ne change pas suivant y donc est la même en-dehors de la couche limite (dans l'écoulement potentiel de vitesse U(x)) où elle vérifie la relation de Bernoulli :

$$P(x)-\frac{1}{2}\rho U^2(x)=constante \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}+\rho U(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x}=0 \qquad (17)$$

Les équations (15) et (17) aboutissent finalement à :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U(x)\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (18)$$

On peut réécrire les équations du mouvement (12) et (18) avec des variables sans dimensions afin d'en déduire l'autosimilitude des vitesses dans la couche limite pour le cas d'un écoulement potentiel où U(x) est uniforme et constante (U = constante). Pour cela les échelles de référence seront :

- l'abscisse X depuis le bord d'attaque, pour les longueurs dans la direction Ox :

$$x^*=\frac{x}{X}$$

- l'épaisseur de couche limite δ(X) donnée par (10) (avec X = s ici), pour les longueurs dans la direction Oy :

$$y^* = y/\delta(X)$$

  soit :

$$y^*=\frac{y}{\delta(x)}=\frac{y}{\left(\frac{X}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\right)}$$

- la vitesse U de l'écoulement externe, parallèle à la plaque, pour la composante de vitesses dans la direction Ox :

$$u^*=\frac{u}{U}$$

- la vitesse v donnée par (12), perpendiculaire à la plaque, pour la composante de vitesses dans la direction Oy :

$$V=\frac{U}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \rightarrow v^*=\frac{v}{V}=\frac{v}{\left(\frac{U}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\right)}$$

Les équations (12) et (18) se transforment alors en :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \quad (19a)$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (19b)$$

L'équation (19b) montre que, dans la couche limite, les termes de dissipation visqueuse jouent un rôle comparable à ceux de la convection, ce qui correspond bien à ce que nous avions supposé dans la phénoménologie d'une couche limite.
Comme les solutions de (19) sont :

$$u^* = F(x^*, y^*)$$
$$v^* = G(x^*, y^*)$$

on montre (exercice !) qu'elles vérifient une relation d'autosimilitude :

$$\frac{u}{U} = F(w^*) \qquad (20a)$$

$$\frac{v}{U} = \sqrt{\frac{\nu}{U x}} H(w^*) \qquad (20b)$$

avec :

$$w^* = \frac{y^*}{\sqrt{x^*}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} \qquad (20c)$$

A2.3 – Loi de vitesse dans une couche limite

Pour une couche limite développée sur une plaque plane et une vitesse uniforme et constante U de l'écoulement potentiel, on peut résoudre les équations (19) en y injectant les relations d'autosimilitude (20).

On démontre que la solution, exprimée avec les variables réduites, obéit à ***l'équation de Blasius*** :

$$\frac{d^2 F(w^*)}{d w^{*2}} = -\frac{1}{2} \frac{d F(w^*)}{d w^*} \int_0^{w^*} F(q)\, dq \qquad (21)$$

On trouvera la démonstration de (21) dans tout bon ouvrage de mécanique des fluides (voir bibliographie), à moins que vous vous sentiez de taille, ami visiteur, de l'établir comme exercice.

On démontre aussi qu'une solution approchée de l'équation de Blasius est :

$$F(w^*) \approx w^* F'(0) + b w^{*4} + o(w^{*5}) \qquad (22)$$

avec :

$$F'(0) = 0{,}332 \quad \text{et} \quad b = -\frac{F'^2(0)}{48}$$

où F(w*) est défini par (20a). Voir figure 6.

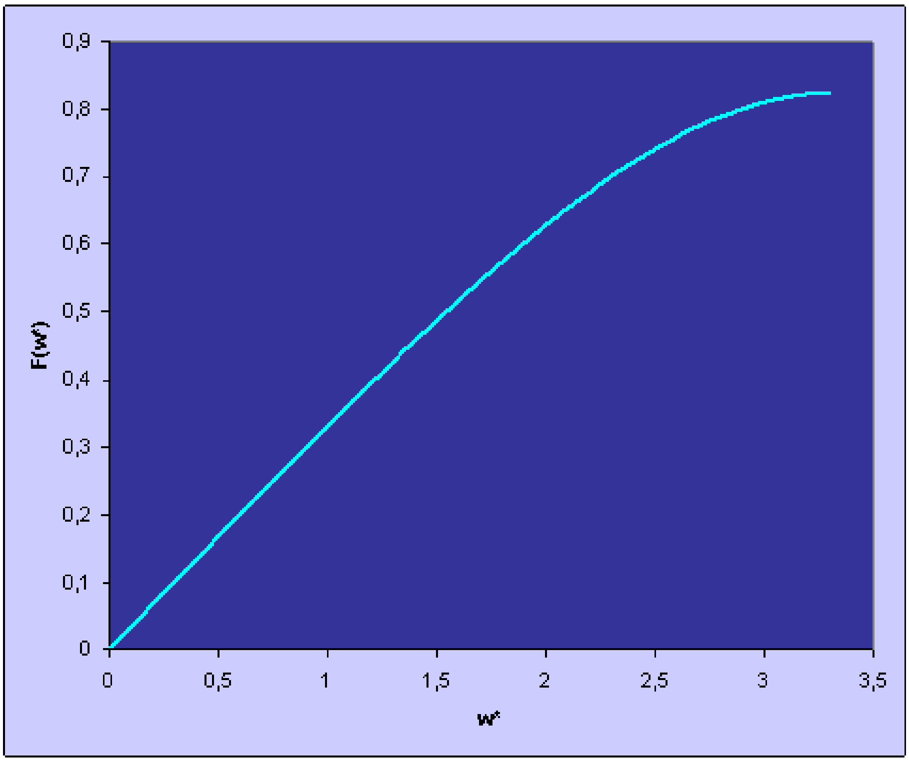


figure 6 – profil de vitesse normalisée selon le modèle de Blasius

Connaissant l'expression approchée de la vitesse longitudinale dans la couche limite, u(x,y), on peut déduire la force de frottement exercée sur la plaque par le fluide. Cette force est l'intégrale sur la longueur de la plaque de la composante de contrainte visqueuse :

$$\sigma_{xy}=\rho\,\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=\rho\,\nu\,U\,F'(0)\frac{\partial w^*}{\partial y}=\rho\,U^2 F'(0)\sqrt{\frac{\nu}{U\,x}}$$

d'où la force de frottement sur une face de la plaque de longueur L:

$$F_f=\int_0^L \sigma_{xy}(x)\,d\,x=\rho\,U^2 F'(0)\sqrt{\frac{\nu}{U}}\int_0^L \frac{d\,x}{\sqrt{x}}=2\,\rho\,U^2 F'(0)\sqrt{\frac{\nu\,L}{U}}$$

Introduisons le nombre de Reynolds relatif à la plaque :

$$\mathrm{Re}_L=\frac{U\,L}{\nu}$$

et réécrivons la force de frottement avec un ***coefficient de frottement*** C_f par analogie avec les forces exercées par un fluide en écoulement sur un obstacle :

$$F_f=C_f\frac{1}{2}\rho\,U^2 L \qquad (23)$$

on a donc :

$$C_f=\frac{1{,}33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad (24)$$

L'épaisseur de couche limite correspond à la distance y de la paroi où la vitesse d'écoulement dans la couche limite est égale à 1% près à la vitesse U de l'écoulement potentiel, soit u* = u/U = F(w*) compris entre 0,99 et 1. L'approximation (22) n'est valide que pour w* < 3,44 comme le montre la figure 6, au-delà de cette valeur il faut affiner le modèle pour obtenir une condition de raccordement avec l'asymptote u* = 1 (u = U). L'affinement du développement (22) à des ordres supérieurs à w^{*4} aboutit à une valeur de w* à partir de laquelle l'asymptote u* = 1 est atteinte égale à w* = 5. Il correspond alors la valeur de l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta(x)=5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad (25)$$

valeur du même ordre de grandeur que (10).

A2.4 – Décollement des couches limites laminaires

Une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour qu'il y ait décollement de la couche limite est que, contrairement au modèle de Blasius, le champ de vitesse de l'écoulement potentiel ne soit plus uniforme dans la direction longitudinale Ox : U = U(x).
Si U(x) diminue le long du profil x alors, d'après le théorème de Bernoulli, la pression augmente vers l'aval (relation (17)):

$$\frac{dU}{dx}<0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}=-\rho U(x)\frac{dU(x)}{dx}>0$$

Ce gradient de pression suivant x se retrouve à l'intérieur de la couche limite le long de la paroi puisque la variation de P suivant Oy est supposée négligeable. Donc près de la paroi, où u(x) est très faible, le gradient de pression suivant Ox y est très élevé, et si dU/dx est très fort en valeur absolue, donc si le gradient de pression est très grand, la vitesse pariétale ralentit, et la couche limite s'épaissit considérablement, jusqu'à ce que le signe de la vitesse pariétale puisse s'inverser : il y a alors décollement de la couche limite.
La couche limite décolle lorsque la vitesse pariétale u(x) dans la couche limite ralentit fortement, par suite d'une décélération de l'écoulement potentiel, et change de signe.
Cette décélération est privilégiée le long des profils courbes à courbure positive, c'est-à-dire tels que la surface de la paroi s'évase à la manière d'une tuyère divergente. C'est le cas d'un profil cylindrique.
A l'inverse, en présence d'un écoulement potentiel qui accélère le long du profil, le gradient de pression longitudinal diminue, la vitesse pariétale accélère et la couche limite s'amincit. Le décollement ne peut pas se produire.
Une façon donc d'empêcher le décollement de la couche limite sur une paroi à courbure positive consiste à maintenir constante son épaisseur par aspiration au niveau de la paroi de la couche de fluide en écoulement. Nous y reviendrons.

Examinons ce qui se passe pour une couche limite dans le cas d'une vitesse de l'écoulement potentiel non uniforme, variant avec x. Nous choisissons un profil de vitesse potentielle autosimilaire, qui vérifie une loi générale de la forme :

$$U(x)=C x^p$$

la constante C pouvant être positive ou négative, et l'exposant p étant un nombre réel quelconque. Nous allons voir que l'équation de Blasius est un cas particulier de cette approche plus générale.
L'injection de cette loi de vitesse dans (20c) donne :

$$w^*=y\sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}}=y\sqrt{\frac{C x^{p-1}}{\nu}} \qquad (26)$$

L'expression (26) pour w* utilisée dans l'équation de Prandtl (18) conduit à ***l'équation de***

Falkner-Skan :

$$p(1-F^2(w^*))+\frac{d^2F(w^*)}{dw^{*2}}=-\frac{p+1}{2}\frac{dF(w^*)}{dw^*}\int_0^{w^*}F(q)\,dq \qquad (27)$$

On voit tout de suite que (27) redonne l'équation de Blasius (21) pour p = 0.
On vérifie que l'épaisseur de couche limite est d'autant plus mince que p est grand. Réciproquement, il existe une valeur critique de p pour laquelle le gradient de vitesse pariétale s'annule : p_C = -0,0905, et pour des p inférieurs à p_C le sens de l'écoulement pariétal s'inverse : la couche limite décolle.

Supposons que l'on effectue une aspiration de la couche limite le long de la paroi, de façon comparable à ce qui se fait pour la turbovoile. Dans ce cas les composantes horizontale et verticale u et v de la vitesse dépendent uniquement de y. Or l'équation de conservation de la masse (12), où $\partial u/\partial x = 0$ conduit à $\partial v/\partial y = 0$, donc à v = constante = -V dans tout le volume de la couche limite, où V est la vitesse d'aspiration de la couche limite. Soit $\omega_Z = \partial u/\partial y$ la composante suivant Oz de la vorticité. On déduit que, avec les hypothèses précédentes, les équations de Navier-Stokes se réduisent à l'équation suivante pour le transport de la vorticité (les tourbillons) :

$$-V\frac{\partial \omega_Z}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2\omega_Z}{\partial y^2} \qquad (28)$$

Son intégration donne :

$$-V(\omega_Z-\omega_0)=\nu\frac{\partial\omega_Z}{\partial y}$$

équation qui s'intègre à son tour, avec comme condition aux limites u = U loin de la plaque et u = 0 sur la plaque, en :

$$\omega_Z=\frac{UV}{\nu}\exp\left(-\frac{Vy}{\nu}\right)$$
$$u=U\left(1-\exp\left(-\frac{Vy}{\nu}\right)\right)$$

On déduit alors (exercice !) que l'épaisseur de couche limite est constante et est imposée par l'aspiration :

$$\delta=\frac{\nu}{V}=constante \qquad (29)$$

Nous venons de voir, de manière heuristique, comment l'aspiration de la couche limite à la paroi conduit à maintenir une épaisseur constante de couche limite et donc d'empêcher son décollement, même lorsqu'on est en présence d'un écoulement potentiel où U = U(x) selon une loi d'autosimilitude. La relation (29) s'interprète ainsi : à la frontière de la couche limite il y a équilibre entre les effets de transport convectif et les effets de transport par diffusion de la vorticité, autrement dit entre des effets d'ordres de grandeur suivants :

$$\frac{V\omega_Z}{\delta}\approx\frac{\nu\,\omega_Z}{\delta^2} \qquad (30)$$

qui correspond bien à (29).
Dans un écoulement potentiel autosimilaire, de loi $U(x) = Cx^p$, le décollement de la couche limite s'effectue simultanément le long de tout le profil : il n'est pas localisé. En revanche, pour un écoulement potentiel non autosimilaire, par exemple du genre $U(x) = U_0 - x/L$, qui ralentit vers l'aval, le décollement a lieu en un point appelé point de décollement. La localisation de ce point de décollement dépend uniquement de la longueur caractéristique L qui intervient dans la

loi de vitesse, notamment L est de l'ordre de la longueur du profil. L'équation de Prandtl (18) admet comme solution une expression de la forme :

$$\frac{u(x,y)}{U(x)}=f\left(\frac{x}{L},\frac{y}{\delta}\right)$$

pour la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite. Or le critère de décollement est :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \qquad (31)$$

(on rappelle en effet que le décollement se produit lorsque le sens de la vitesse longitudinale s'inverse, ce qui donne (31) compte tenu de (14)), la relation (31) fournit la position du point de décollement, et d'après la forme de la solution précédente il correspond à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{L},0\right)=0 \qquad (32)$$

(32) montre que la position cherchée x du point de décollement ne dépend que de la longueur caractéristique L, et non du nombre de Reynolds dès lors que celui-ci est suffisamment élevé.
En aval du point de décollement s'installe une zone de recirculation qui est très instable : le régime laminaire subit facilement une transition vers le régime turbulent qui est le siège d'une dissipation d'énergie importante. La force de traînée qui en résulte est relativement élevée par rapport à la force de portance. Cette zone de turbulence, consécutive au décollement ne doit pas être confondue avec le régime turbulent qui peut se développer dans une couche limite instable : le nombre de Reynolds local Re_X augmentant vers l'aval, la couche limite suit progressivement une évolution l'amenant du régime laminaire, puis oscillatoire (***ondes de Tollmien-Schlichting***, voir bibliographie), puis de turbulence pleinement développée. Pour certains profils on a même affaire à des zones d'intermittence (***bouffées d'Emmons***) qui s'installent entre le régime oscillatoire et le régime turbulent. Curieusement, on démontre que pour une couche limite turbulente le décollement est retardé, ou qu'il est impossible, ou encore qu'il a pour effet de recoller sur la paroi une couche limite laminaire décollée en amont.
On a vu plus haut qu'une façon d'empêcher le décollement de la couche limite est d'assurer une aspiration de la couche limite à la paroi. La vitesse pariétale ne diminue plus vers l'aval donc la circulation de la vitesse autour du profil reste élevée ce qui entraîne une portance par la force de Magnus élevée. C'est le principe de la turbovoile du professeur Malavard, de l'ingénieur Charrier et du commandant Cousteau. Une technique prometteuse !

Bibliographie

Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit : *Hydrodynamique physique* – Savoirs actuels, CNRS éd., EDP Sciences, 2001

Frédéric Élie : *Instabilité de l'écoulement de Poiseuille* – site fred.elie.free.fr, juin 1981

Michel Rieutord: *Une introduction à la dynamique des fluides* – Masson, Paris, 1997