Tuyaux sonores

Frédéric Élie

30 janvier 2004 et mai 2009

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : L'excitation de l'air dans les tubes peut générer des phénomènes de résonances acoustiques qui dépendent de la géométrie de ces tubes et des conditions imposées à leurs extrémités. C'est ce principe qui est utilisé pour les instruments de musique à vent (cuivres, bois…) Bien sûr, dans la réalité, les phénomènes physiques mis en œuvre par les musiciens pour produire des sons musicaux sont bien plus complexes et font intervenir des paramètres plus ou moins maîtrisables: nature des matériaux constituant le tube et leurs équipements, géométrie et qualité des trous que le musicien obture ou ouvre pour choisir les sonorités, géométrie des embouchures et du pavillon de sortie, procédé pour générer la pression et l'excitation de l'air, lié au savoir-faire du musicien… et même les conditions atmosphériques (température, hygrométrie, pression atmosphérique, agitation de l'air ou vent…) Concevoir et fabriquer les instruments à vent est toute une science qui utilise des mathématiques, de la physique et des technologies assez complexes! Pas question ici d'entrer dans ces difficultés. Je me bornerai à présenter quelques cas de figure qui illustrent le principe cité plus haut et que l'on pourra expérimenter soi-même simplement, et cela nous introduira aussi dans les notions fondamentales des fréquences musicales.

SOMMAIRE

orgues de l’église Saint-Louis à Aigues-Mortes (département de l’Hérault)
(photo : F. Élie)

1 - Description de l'expérience

Prenez un tube, en PVC ou en carton dur par exemple, de deux ou trois centimètres de diamètre maximum, suffisamment long pour pouvoir être raccourci successivement. Munissez-vous d'un diapason qui, frappé d'un coup sec contre un obstacle rigide, produit la note la3, référence musicale, qui vibre à 440 Hz.
Première étape: la longueur du tube est assez grande, disons 50 ou 60 cm. Portez une extrémité du tube à votre oreille (mais sans la coller), tapez le diapason et portez-le à l'entrée de l'autre extrémité en prenant soin de ne pas toucher le tube: vous entendez faiblement la vibration du diapason.
Deuxième étape: raccourcissez le tube à la longueur L = 39 cm, et recommencez comme ci-dessus. Cette fois la vibration du diapason s'entend clairement dans le tube.
Troisième étape: raccourcissez encore le tube jusqu'à, par exemple, 30 cm, et recommencez l'opération. De nouveau la vibration du diapason s'entend faiblement dans le tube.

2 - Analyse de l'expérience

Que s'est-il passé, dans ce que vous avez constaté ci-dessus?
Pour une fréquence de vibration donnée et fixée de l'excitation de l'air par le diapason, donc 440 Hz, le tube permet de l'entendre avec une intensité maximale pour une longueur particulière et privilégiée: L = 39 cm. Pour des longueurs plus grandes ou plus petites, le tube transmet très mal cette excitation. Pour cette valeur particulière de la longueur on dit qu'il y a résonance, c'est-à-dire accord entre la fréquence d'excitation et une fréquence propre à celle de l'air contenue dans le tube.
Ce qu'il faut comprendre par "excitation de l'air" c'est la variation très rapide de la pression dynamique de l'air, c'est-à-dire les écarts avec la pression de repos qui est la pression atmosphérique du lieu. Ces écarts oscillent f fois par seconde, f étant la fréquence en Hertz (Hz). Ici f = 440 Hz: une particule d'air dans le tube vibre 440 fois par seconde, ou ce qui revient au même, l'amplitude de sa pression dynamique change de signe 440 fois par seconde, mais selon la position qu'occupe cette particule dans le tube, l'amplitude instantanée de sa pression dynamique ne sera pas la même: elle varie aussi dans l'espace, donc avec l'abscisse sur l'axe du tube.
La théorie (voir plus loin) prévoit que la variation spatiale de l'amplitude est également sinusoïdale: l'amplitude redevient la même pour des points séparés par une même distance appelée longueur d'onde. Si ces points restent inchangés en fonction du temps, on a affaire à une onde stationnaire: le profil de l'amplitude suivant l'abscisse est une sinusoïde (ou une

superposition de sinusoïdes) qui ne bougent pas avec le temps. Si par contre ces points varient en fonction du temps, l'onde est progressive: la sinusoïde se décale avec le temps, vers l'avant (onde directe) ou vers l'arrière (onde réfléchie). La vitesse avec laquelle l'onde se décale est appelée célérité de l'onde, elle est liée aux propriétés physiques du milieu de propagation. Pour la propagation du son dans l'air cette célérité (encore appelée "vitesse du son") vaut environ c = 347 m/s aux conditions standard de l'atmosphère (1 atm et 25°C). Plus précisément, la célérité du son dans l'air change avec la température et on montre que pour -30°C < θ < +30°C, elle suit la loi:

$$c(\theta) = 331,4 + 0,607\,\theta$$

avec θ température en °C (le son se propage plus vite dans l'air chaud que dans l'air froid).

Pour une onde progressive, une particule d'air située en un point fixe dans le tube aura son amplitude de pression qui changera avec le décalage de l'onde le long de l'abscisse: celle qu'elle a à l'instant t est celle qu'avait une autre particule fixe distante de d à un instant antérieur égal à (t-d/c), et pour un même instant t, toutes les particules éloignées de celle-ci d'une distance égale à un multiple entier de la longueur d'onde possèdent le même état d'amplitude de pression. Pour le milieu non dispersif que l'on suppose ici, la longueur d'onde est donc la distance parcourue avec la célérité du son pendant la durée d'une oscillation:

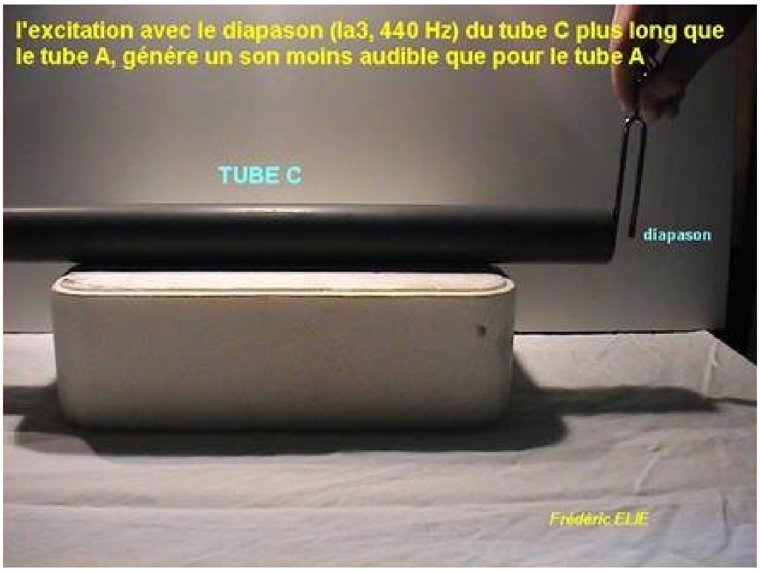
$$\lambda = cT = c/f$$

si la fréquence f est exprimée en Hz (ou si la période T=1/f est en secondes) la longueur d'onde est exprimée en m.

Ceci posé, revenons à notre tube. Quel type d'onde avons-nous à l'intérieur? Le tube étant ouvert aux deux extrémités, pour une excitation faible de l'air due au diapason, il n'y a pas d'écoulement de masse d'air, c'est-à-dire pas d'air qui entre ni d'air qui sort, mais seulement une oscillation des particules d'air autour de leur position d'équilibre à l'entrée (ou débit acoustique) qui génère une variation de pression dynamique de la colonne d'air interne.
Ainsi, aux deux extrémités il n'y a pas d'écart entre la pression de l'air du tube et la pression atmosphérique externe (donc l'amplitude de la pression dynamique est nulle).
Il ne peut pas non plus y avoir d'onde progressive qui se propage dans le tube, sinon aux extrémités l'amplitude cesserait d'être nulle au cours du temps du fait du décalage de l'onde le long du tube: on a un régime d'onde stationnaire. La sinusoïde qui représente la variation de l'amplitude de pression dynamique avec l'abscisse s'annule une première fois pour l'entrée d'abscisse x = 0 puis lorsque le point est à une distance de l'entrée égale à une demi-longueur d'onde: il suffit donc que l'entrée x=0 et l'autre extrémité x=L soient les deux lieux où la pression dynamique est nulle, donc que l'on ait une longueur du tube égale à la moitié de la longueur d'onde, et comme celle-ci est liée à la fréquence par c/f, pour une fréquence d'excitation f l'air contenu dans le tube sera le siège d'onde stationnaire de pression dynamique si la longueur du tube vérifie:

$$L = \lambda/2 = c / 2f$$

On dit que dans ce cas que le la longueur du tube est accordée en demi-onde sur la fréquence d'excitation. Pour la fréquence du diapason 440 Hz, la longueur du tube accordée est bien 39 cm. Pour des longueurs plus grandes ou plus petites, l'excitation par le la3 ne permet pas l'instauration correcte des ondes stationnaires dans le tube, par contre d'autres fréquences accordées sur ces longueurs le pourront. La relation ci-dessus montre que les tubes longs sont associés aux basses fréquences (notes graves) et les courts aux fréquences élevées (notes aiguës).



En réalité, pour une longueur donnée du tube L, la condition d'annulation des amplitudes de pression dynamique pour une onde stationnaire sinusoïdale s'écrit $\sin(2\pi L/\lambda) = 0$ et admet comme solutions (en théorie en nombre infini) des longueurs d'onde plus petites que 2L et égales à ses sous-multiples entiers:

$$\lambda_n = 2L/n \text{ avec } n = 1, 2, 3, 4\ldots$$

et les fréquences correspondantes sont multiples entiers de la fréquence fondamentale obtenue pour n=1:

$$f_n = n\, f_1 \text{ avec } f_1 = c/2L \text{ fréquence fondamentale (ici 440 Hz pour 39 cm)}$$

Si l'on n'entend pas bien ces autres fréquences plus élevées (appelées harmoniques de la fréquence fondamentale) c'est parce que leurs amplitudes décroissent très rapidement avec leur ordre n. Pour n=2 on obtient la fréquence fondamentale à l'octave, soit $f_2 = 880$ Hz. On appelle ***octave*** un intervalle de fréquences dont la plus haute est égale au double de la plus petite: $f_{max}=2f_{min}$.

Maintenant, que se passe-t-il si l'on bouche le côté opposé à l'entrée du tube? A-t-on toujours un accord en demi-onde? Réponse: non. Car sur le fond obturé on n'a plus de raison d'avoir une pression dynamique nulle, par contre elle le reste à l'entrée, et le débit des déplacements d'air doit par contre s'annuler sur le fond supposé rigide, alors qu'il est non nul à l'entrée du fait de l'excitation. Donc les amplitudes de la pression et du débit sont en quadrature: aux extrémités lorsque l'une s'annule l'autre et maximale et cette situation doit se conserver dans le tube. Pour le débit, sur le fond, puisque son amplitude est en quadrature ($-\pi/2$) par rapport à celle de la pression, sa nullité entraîne en x=L: $\sin(2\pi L/\lambda - \pi/2) = 0$, donc la condition

$$L = (2n+1)\lambda/4 \;;\; f = (2n+1)f_0 \text{ , avec } n=0,1, 2, 3, 4\ldots$$

Pour n=0 on obtient la fréquence fondamentale f_0 et la longueur est accordée sur elle en quart d'onde (et non plus en demi-onde). On voit tout de suite que pour L = 39 cm cette fréquence est à l'octave inférieure de celle du la3 (440 Hz): c'est le la2 à 220 Hz.

3 - Théorie (très) élémentaire des tuyaux sonores

Considérant des conditions très simplifiées pour représenter la réponse acoustique des tubes à une excitation exercée à leurs extrémités, je vais présenter tout de suite une modélisation de ce comportement. Les contraintes imposées soit à la pression, soit au débit acoustique, permettent dans ces limites de calculer simplement le champ en pression ou bien, respectivement, le champ en vitesse de la colonne d'air dans le tube. Mais pour passer d'un type de champ à l'autre il faut rappeler ici les liens qui existent entre la pression dynamique (acoustique) et la vitesse (débit), ces liens reposant sur l'***équation de Helmholtz***.

3-1 - Relation entre la pression acoustique et le débit acoustique (ou la vitesse)

Dans tout ce qui suit, les grandeurs p, v, q représentent respectivement:

- p: la pression dynamique ou acoustique, c'est-à-dire l'écart (ou fluctuation) de la pression de l'air par rapport à sa pression d'équilibre (généralement la pression atmosphérique) développé suite à une excitation mécanique des particules d'air;
- v: la vitesse de déplacement d'une particule d'air par rapport à sa position de repos, sous l'effet d'une excitation mécanique
- q: le débit acoustique, c'est-à-dire le volume d'air par unité de temps qui traverse une surface donnée sous l'action d'un déplacement acoustique effectué à la vitesse **v**. Si dans l'unité de temps dt le déplacement effectué élémentaire est d***u***, le volume traversé pendant cette durée est dV = S d*u*, où S est la surface de la section traversée. Or d***u*** = **v** dt, donc dV = vSdt, et par définition le débit est **q** = **v**S (m^3/s).

La théorie élémentaire montre que la variation du champ de pression dynamique dans l'espace (ou gradient de pression **grad** p) est directement reliée à l'accélération particulaire:

$$\mathbf{grad}\, p = - \rho\, d\mathbf{v}/dt$$

(où ρ masse volumique du milieu acoustique, ici de l'air: ρ = 1,3 kg/m^3); cette relation est ni plus ni moins une conséquence de la loi fondamentale de l'hydrostatique… (exercice: s'en convaincre). Compte tenu de ce que **q** = **v**S et que, en régime d'oscillations harmoniques de fréquence $f = \omega / 2\pi$ (ω : pulsation c'est-à-dire nombre de rotation de phase par seconde) l'équation précédente équivaut à:

$$\mathbf{grad}\, p = - j\omega\, \rho\, \mathbf{q}/S$$

D'autre part, on montre aussi (exercice!…) que la conservation de la quantité de matière pendant ces fluctuations par unité de temps suit l' "équation de continuité":

$$\partial \rho/\partial t + \rho_0 \,\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$$

Or, pour de petites fluctuations en déplacement, celles-ci suivent une loi phénoménologique où les fluctuations de pression sont proportionnelles aux fluctuations de densité:

$$p = K\rho/\rho_0$$

K étant assimilé à l'inverse d'une élasticité, c'est-à-dire une raideur caractérisant la tendance de l'air à s'opposer à toute variation de volume sous l'effet d'une pression (c'est une donnée physique du milieu de propagation). Pour un gaz parfait soumis à des fluctuations isentropiques, on vérifie aisément que $K = \gamma p_0$, où γ est l'exposant adiabatique qui vaut 1,4 pour un gaz parfait. La combinaison des équations précédentes conduit facilement à la relation entre la pression et le débit:

$$j\, \omega\, p = -(K/S)\, \mathrm{div}\, \mathbf{q} \quad \text{(avec } j^2 = -1\text{)}$$

Dans le cas d'une propagation acoustique suivant un seul axe (Ox), cas monodimensionnel, comme première approximation dans les tubes, les relations précédentes deviennent:

$$\partial p/\partial x = - j\omega\, (\rho /S) q$$

$$\partial q/\partial x = - j\omega\, (S/K) p$$

Remarque: ce système d'équations constitue les ***équations de Helmholtz***, elles donnent des équations différentielles sur la pression et le débit en fonction des coordonnées d'espace (ici x); en effet en dérivant l'une d'entre elles on obtient:

$$\partial^2 p/\partial x^2 + \omega^2 (\rho /K)\, p = 0$$

$$\partial^2 q/\partial x^2 + \omega^2 (\rho /K)\, q = 0$$

ces équations différentielles du second ordre, de même forme pour p comme pour q, permettent de calculer séparément ces grandeurs à partir des contraintes qui leur sont imposées: elles décrivent une propagation suivant une célérité c (vitesse du son) telle que:

$$c^2 = K/\rho_0$$

Remarquer que, pour des alternances de compression et de dilatation de l'air sans échange de chaleur (cas adiabatique), la raideur de l'air K est directement reliée à sa pression (généralement sa pression atmosphérique p_0 autour de laquelle oscille la pression dynamique), par l'intermédiaire de la constante γ , encore appelée exposant adiabatique du gaz, valant γ = 1,4 pour les gaz parfaits:

$$c^2 = \gamma p_0 / \rho_0$$ (***loi de Laplace***)

Pour l'air aux conditions standard c = 330 m/s. Les équations du second ordre offrent l'intérêt d'avoir éliminé l'amplitude de déplacement u, donc de s'être affranchi des valeurs de section S: elles sont valables pour toutes sections de conduit pourvu que l'approximation monodimensionnelle soit encore valide (conduits longs par rapport à leurs sections). D'autre part les équations du premier ordre reliant p et q ci-dessus et faisant intervenir cette section S, montrent que, au final, la pression est proportionnelle au débit par l'intermédiaire d'une grandeur appelée ***impédance acoustique*** $Z_a(x)$ qui dépend de la position x dans le tube, de la fréquence et de la section S (comme dans les lignes électriques):

$$p(x,t) = Z_a(x)\, q(x,t)$$

Dit très sommairement, le mérite de l'impédance acoustique est non seulement d'être une grandeur mesurable, mais aussi, pour une fréquence donnée, d'être une caractéristique du milieu de propagation indépendamment du mode d'excitation acoustique générant q et p, ce qui fait d'elle une grandeur permettant de comparer entre eux les systèmes acoustiques tels que les instruments de musique par exemple. On peut expliciter un peu plus l'expression de cette impédance: si l'on suppose connu le débit acoustique q(x,t) en fonction de l'emplacement x dans le tube, et si on suppose qu'il est une superposition d'une onde progressive directe et d'une onde progressive réfléchie, on note:

$$q\,(x,t) = q_{+0}(t) \exp -jkx + q_{-0}(t) \exp jkx$$

(désormais la dépendance en temps t, du type exp $j\omega t$, sera implicite pour simplifier les écriture). L'équation du premier ordre entre p et q donne ensuite p:

$$p = - (K/jS\omega\,)\, \partial q/\partial x = (kK/\omega\, S)(q_{+0} \exp -jkx - q_{-0} \exp jkx)$$

où $k = \omega /c$ est le nombre d'onde de la propagation, c'est-à-dire l'inverse de la périodicité spatiale des amplitudes de pression ou de débit (tout comme la fréquence est l'inverse de la périodicité temporelle). L'impédance acoustique s'obtient alors immédiatement par:

$$Z_a(x) = Z_{ac}\, (q_{+0} \exp -jkx - q_{-0} \exp jkx)/(q_{+0} \exp -jkx + q_{-0} \exp jkx)$$

La quantité $Z_{ac} = \rho\, c/S$ est ***l'impédance caractéristique*** du milieu (unité: $kg/m^4/s$), elle dépend des caractéristiques physiques et géométriques.
L'impédance acoustique ci-dessus peut se simplifier plus ou moins selon les valeurs des conditions aux limites sur p et q qui donnent q_{+0} et q_{-0}. Une impédance acoustique infinie correspond à un débit de déplacement de la particule d'air nul à un endroit du tube, c'est le cas par exemple d'une paroi rigide où par définition la vitesse s'annule. par contre, une impédance acoustique nulle signifie que la pression dynamique en l'endroit considéré s'annule, comme ce peut être le cas par exemple lorsque la pression à l'intérieur du tube est la même que la pression atmosphérique (pas de fluctuation de pression). Par conséquent, comme je vais l'illustrer dans les cas de figure ci-après, les conditions aux limites vont induire des valeurs d'impédances en ces limites qui vont définir directement les modes de propagation acoustique

dans le tube (en demi-onde, en quart d'onde, etc…).

Deux mots encore sur les paramètres énergétiques des ondes acoustiques dans les tubes.

Il est souvent intéressant de savoir si la pression acoustique générée dans le tube se transmet à l'extérieur, et d'en évaluer l'intensité. Les débit (ou la vitesse) et la pression dynamique étant des grandeurs périodiques avec le temps (de période T=1/f), définissons d'abord leurs valeurs ***RMS*** ("root mean square"), c'est-à-dire leurs valeurs effectivement mesurées sur une période; pour la pression on a :

$$p_{RMS}=\left(\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

(définition similaire pour la vitesse ou le débit), tandis que la ***valeur moyenne*** est:

$$<p>=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

La puissance instantanée de l'onde acoustique est l'énergie développée par unité de temps, or l'énergie est le travail d'une force (ici celle due à la pression acoustique) pour le déplacement acoustique du = vdt, ce qui donne pSdu = pSvdt. La puissance acoustique instantanée est donc:

$$P_a(t) = p(t)v(t)S \text{ (en watts W)}$$

soit encore, puisque q = vS est le débit: P_a (t) = p(t)q(t). Le flux instantané de puissance qui traverse une section de surface S est donné par la quantité $P_a(t)/S = p(t)v(t)$. Sa moyenne sur une période est par définition ***l'intensité acoustique*** *I*:

$$I=<pv>=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)v(t)\,dt \quad \text{(unité: W/m²)}$$

La puissance acoustique moyenne transmise est la moyenne de $P_a(t)$ donc:

$$P_{am} = <pv>S = IS$$

Il est facile de faire le lien entre la puissance acoustique moyenne et la pression RMS. En effet, partant de la définition de la puissance moyenne ci-dessus, et remplaçant v par v = q/S, on obtient sous le signe intégral le produit pq, et comme p et q sont reliés par l'impédance acoustique p = $Z_a(x)q$, on obtient:

$$p_{am}=\frac{1}{Z_a}\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)\,dt$$

c'est-à-dire finalement:

$$P_{am} = p^2_{RMS}/Z_a$$

relation tout à fait analogue à celle que l'on rencontre en électricité, reliant la puissance au carré de la valeur RMS de la tension (qui correspond ici à la pression): P = U²/Z (U valeur RMS de la tension et Z impédance électrique). On trouverait de la même manière la puissance acoustique en fonction de la valeur RMS du débit (qui est analogue en électricité à l'intensité du courant):

$$P_{am} = Z_a\, q^2_{RMS}$$

A priori, dans un tube, l'onde acoustique est la superposition d'une onde progressive se propageant dans un sens donné, disons Ox, notée $p_+(x,t)$, et d'une onde progressive se propageant en sens inverse, dite réfléchie, notée $p_-(x,t)$, de même pour le débit $q(x,t)$. L'onde directe et l'onde réfléchie suivent une loi respectivement de la forme:

$$p_+(x) = p_{+0} \exp -jkx, \text{ et } p_-(x) = p_{-0} \exp jkx$$

et c'est ce qui justifie la forme générale de la propagation présentée plus haut. Rappelons que les expressions exponentielles complexes représentent des fonctions trigonométriques (formules d'Euler) telles que:

$$\exp -jkx = \cos kx - j \sin kx, \text{ et } \exp jkx = \cos kx + j \sin kx$$

et par conséquent il revient au même de chercher des solutions de la forme:

$$p(x) = A \cos kx + j\, B \sin kx$$

dans lesquelles les constantes A et B sont reliées aux amplitudes maximales p_{+0} et p_{-0} par :
$A = p_{+0} - p_{-0}$ et $B = p_{+0} + p_{-0}$.
Mais grâce aux notations en exponentielles complexes on peut immédiatement faire apparaître quelle est la situation en terme de réflexion de l'onde, de l'établissement d'une onde stationnaire, et de la puissance acoustique transmise. En effet, en chaque point on définit la proportion d'onde directe et d'onde réfléchie par le coefficient de réflexion:

$$r(x) = p_-(x)/p_+(x) = (p_{-0}/p_{+0}) \exp j2kx$$

de module:

$$r = |r(x)| = |\, p_{-0}/p_{+0}\, |$$

Si l'amplitude de l'onde directe est la même que celle de l'onde réfléchie, on a dans le tube une onde stationnaire.
Dans le cas contraire, l'onde totale est composée d'une certaine proportion d'onde directe et d'onde réfléchie, et sa valeur RMS présente un maximum $p_{RMS,\,max}$ et un minimum $p_{RMS,min}$, qui dépendent de cette proportion. Il est donc naturel d'introduire le taux d'onde stationnaire s comme le rapport entre ces extrêmums et on démontre facilement que (exercice !…):

$$s = p_{RMS,max}/p_{RMS,min} = (1 + r)/(1 - r)$$

ainsi pour une onde complètement réfléchie $r = 1$ et $s = \infty$: l'onde totale est stationnaire. Comment les valeurs de r influencent-elles la transmission de l'énergie acoustique à l'extérieur? Pour répondre, il suffit de constater que la puissance acoustique de l'onde totale est d'autant plus faible que la puissance acoustique de l'onde directe tend à compenser celle de l'onde réfléchie:

$$P_a = P_{a+} - P_{a-}$$

Expression qui s'écrit, compte tenu des relations introduites plus haut:

$$P_a = (I_+ - I_-)S = (p^2_{+0RMS} - p^2_{-0RMS})/Z_{ac} = p^2_{+0RMS}(1 - r^2)/Z_{ac}$$

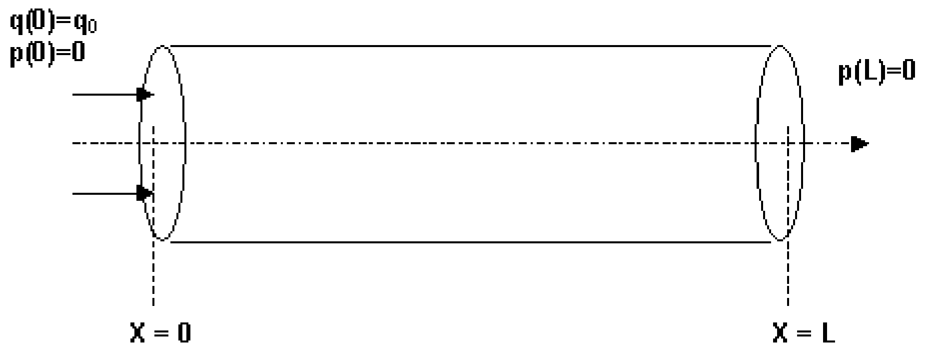
Par la seule connaissance de l'impédance acoustique on va pouvoir déterminer le comportement du tuyau en terme de proportion relative d'onde réfléchie et de transmission de l'énergie acoustique, car (le démontrer en exercice!…):

$$Z_a(x) = Z_{ac}(1 + r(x))/(1 - r(x))$$

3-2 - Ondes acoustiques dans un tube ouvert aux deux extrémités et excité à l'une d'elles (modèle de la flûte)

Tout ce qui précède peut paraître imbuvable, mais peut maintenant être éclairé par les deux exemples concrets qui suivent.
Commençons par le modèle du tube ouvert aux deux bouts et excité à son entrée x = 0. C'est le principe basique de la flûte. Comme vu précédemment, le fait d'être ouvert aux deux bouts entraîne pour la pression acoustique les conditions aux limites:

$p(x = 0) = 0$ et $p(x = L) = 0$, où L est la longueur du tube (voir figure ci-dessous)



tandis que l'excitation en déplacement d'air est imposée en x=0 par $q(x = 0) = q_0$. A partir de ces contraintes, et utilisant les expressions de la pression et du débit suivant x obtenues par les équations de Helmholtz plus haut, on va pouvoir déterminer les amplitudes maximales p_0 et q_0 de la pression et du débit ainsi que l'impédance acoustique, et par suite les paramètres énergétiques:

$$q(x) = q_{+0} \exp -jkx + q_{-0} \exp jkx$$

$$p(x) = Z_{ac}(q_{+0} \exp -jkx - q_{-0} \exp jkx)$$

les conditions aux limites entraînent:

$$\text{en } x = 0\text{: } p(0) = 0 \Rightarrow q_{+0} = q_{-0}$$

$$\text{en } x = L\text{: } p(L) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0$$

la voilà notre condition d'accord demi-onde introduite plus haut de manière heuristique !!! en effet l'argument d'un sinus nul doit vérifier: $kL = n\pi$, soit, pour les fréquences:

$$f_n = n\, c/2L, \text{ où } n \text{ est un entier} \geq 1$$

par ailleurs, les relations sur les amplitudes permettent d'exprimer en définitive le champ de pression et le champ de débit le long de l'abscisse x du tube, ainsi que l'impédance acoustique:

$$q(x) = 2q_{+0} \cos kx$$

$$p(x) = 2j\, Z_{ac}\, q_{+0} \sin kx$$

$$Z_a(x) = Z_{ac} \tan kx$$

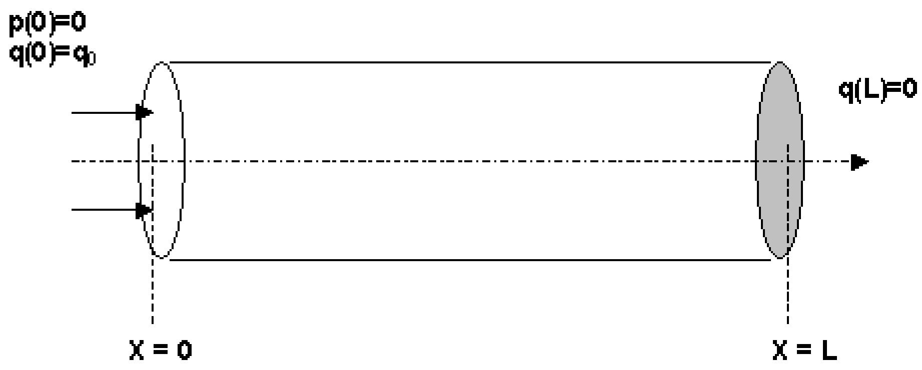
Ces relations fournissent l'emplacement des ***nœuds*** (p ou q = 0) et des ***ventres*** (p ou q = max) et montrent que ceux du débit et ceux de la pression sont décalés de $\pi/2$, soit un écart en distance: $\Delta x = c/4f$.
Remarquer que la condition p(L) = 0 équivaut à une impédance ramenée à l'entrée nulle : $Z_a(L) = 0$.
L'égalité des amplitudes maximales des débits directs et réfléchis laisse pressentir une onde stationnaire: c'est effectivement le cas puisque l'on vérifie facilement que r = 1 (avec r(L) = -1 qui traduit une réflexion avec changement en opposition de phase en x = L), donc que $s=\infty$, et donc que la puissance transmise à l'extérieure est nulle: $P_a = 0$.

Ce point mérite d'ailleurs une explication: d'abord il faut préciser que, pour produire un son dans un tube il ne faut pas souffler dedans comme un ventilateur, cela aurait pour effet un déplacement en masse de l'ensemble de la colonne d'air du tube, comme un écoulement. Ici, il s'agit de faire osciller chaque tranche d'air du tube autour de sa position d'équilibre mais l'ensemble de la colonne reste confinée entre les extrémités du tube. Dans ce cas vous avez remarqué, probablement, que lorsque vous provoquez une légère perturbation de l'air à l'entrée du tube, par exemple en soufflant au-dessus mais tout près à côté de façon tangentielle, vous ne sentez pratiquement pas d'air qui sort sur votre main placée près de la sortie.
Vous allez alors peut-être me demander comment cela fait-il que l'on entende quelque chose, donc qu'il y a source d'énergie, alors que la puissance acoustique ne se transmet pas en-dehors du tube?
La réponse est très simple en principe: d'abord au niveau de la sortie, même si la puissance acoustique reste confinée aux tranches d'air qui oscillent autour de leur position de repos, ces oscillations excitent à leur tour la tranche d'air extérieure voisine qui va transmettre de proche en proche ces oscillations à ses autres voisines. Ce phénomène s'accompagne donc d'une dissipation d'énergie acoustique et génère localement de la chaleur (très très faible toutefois!). D'autre part, l'oscillation de la colonne d'air confinée dans le tube exerce des contraintes longitudinales sur les parois du tube, qui vont se mettre à vibrer suivant leurs modes élastiques, processus très différent de la vibration de l'air dans le tube car mettant en jeu la réponse mécanique des parois à une excitation par le fluide (air): on est alors dans le domaine des ***interactions fluide-structure*** et non plus des modes de vibration d'une colonne fluide seule! C'est nettement plus compliqué, et la réponse élastique des parois du tube à cette sollicitation de la colonne d'air, quoique directement liée à sa fréquence donc à la géométrie demi-onde, quart d'onde, ou autre du tube, fait intervenir des déformations modales dont la modélisation fait appel aux ondes élastiques dans les matériaux.
On comprend alors pourquoi la sonorité dépend aussi de la nature du matériau et de la géométrie de l'enveloppe de la colonne d'air qu'on excite: un hautbois ne vibre pas comme un basson même si on les excite avec la même fréquence! Et c'est tant mieux pour la beauté musicale.
La flûte fonctionne suivant le principe d'un tube accordé en ***demi-onde*** sur sa fréquence fondamentale. Plus celle-ci sera basse (note grave) plus le tube sera long. Si par exemple on choisit une ***flûte en do3***, la fréquence fondamentale sera: f_1 = 261,63 Hz et par conséquent la longueur de la flûte devra être $L = c/2f_1$ = 66,3 cm, ce qui correspond à la longueur de la flûte

traversière réelle. Si par contre la fondamentale est le do4, situé à l'octave supérieure (523,25 Hz) la flûte sera deux fois plus courte (L = 33 cm). Comment peut-on alors produire différents sons avec un même tube accordé en demi-onde sur sa fondamentale, et à quoi servent les trous sur la flûte pour cela? Je présenterai une réponse simplifiée plus bas, tout en proposant une façon de fabriquer une flûte avec les moyens du bord.

3-3 - Ondes acoustiques dans un tube ouvert d'un côté et fermé de l'autre et excité du côté ouvert (cas de la clarinette)

On examine cette fois le cas d'un tube de longueur L ouvert en x = 0 (entrée) où s'exerce une excitation en volume $q(0) = q_0$, et fermé de l'autre côté (fond) x = L où le débit d'air doit être évidemment nul: q(L) = 0. Rappelons qu'à l'entrée la pression acoustique doit être nulle (faible perturbation): p(0) = 0 (voir figure ci-dessous).



Si vous avez bien suivi cet exposé quelque peu pénible, vous vous attendez à quoi?… bien sûr, à avoir une condition d'accord quart d'onde du tube sur sa fréquence fondamentale. On l'avait devinée au début de manière heuristique. Quantitativement, on la retrouve en utilisant les expressions de la pression et du débit identiques à celles du cas précédent, auxquelles on applique les conditions aux limites qui viennent d'être mentionnées. On obtient sur les amplitudes: $q_{+0} = q_{-0}$ et sur les champs de pression et de débit suivant x, ainsi que l'impédance:

$$q(x) = 2q_{+0} \cos kx$$

$$p(x) = 2jZ_{ac}\, q_{+0} \sin kx$$

$$Z_a(x) = jZ_{ac} \operatorname{tg} kx$$

La condition en x = L de nullité du débit entraîne cette fois la condition en $\lambda /4$:

$$\cos kL = 0 \Rightarrow kL = (2n+1)\pi /2, \text{ soit } f_n = (2n+1)\, c/4L \text{ où n entier} \geq 0$$

Les coefficients relatifs à la réflexion et à la transmission d'énergie donnent immédiatement:
r (L) = -1 (réflexion totale), r = 1, s = ∞ (onde stationnaire), $P_a = 0$ (pas de transmission de la puissance acoustique à l'extérieur).
Le mode n=0 correspond à la fondamentale du tube: $f_0 = c/4L$. Ainsi un tube fermé à une extrémité joue à une octave plus bas que le même tube ouvert aux deux bouts.

Remarquer que la condition de débit nul au fond du tube, q(L) = 0, correspond à une impédance acoustique ramenée à l'entrée infinie: $Z_a(L) = \infty$. Tout comme le cas du tube ouvert aux deux

extrémités, le débit et la pression le long de l'abscisse sont en quadrature, et par conséquent les emplacements de leurs maximums (ou de leurs minimums) sont espacés de c/4f. Puisque nous sommes avec un tube quart d'onde, cela implique que pour le mode fondamental le minimum de la pression est à l'entrée ($p(0) = 0$) et son maximum est au fond ($p(L) = p_0$) tandis que pour le débit c'est l'inverse.
Pour les modes supérieurs ($n \geq 1$) les écarts sont tels que $k_n \Delta x_n = \pi/2$, soit $\Delta x_n = c/4f_n$ avec, comme on l'a vu $f_n = (2n+1)c/4L$: les maximums ou minimums sont de plus en plus rapprochés pour les modes supérieurs.
Le principe du ***tube quart d'onde***, avec une extrémité fermée, s'applique à la clarinette. Pour une ***clarinette dite en "si bémol"*** la fondamentale est le ré2 de fréquence 146,83 Hz: c'est la note la plus grave qu'elle peut jouer. Le calcul de la longueur du tube pour cette fréquence, en quart d'onde, donne alors $L = c/4f = 59$ cm, ce qui est proche de la longueur d'une clarinette réelle.

En réalité, le comportement en tube quart d'onde de la clarinette tient à des phénomènes plus complexes liés au mode de production du son dans le tube. Des détails plus techniques sont présentés en Annexe et permettent de comparer les phénomènes dans la flûte à ceux dans la clarinette.

4 - Valeur des notes des gammes musicales

Encore un peu de patience avant de proposer la confection d'une flûte rudimentaire et celle d'une flûte de pan. Mais puisqu'elles sont susceptibles de produire des notes musicales il faut bien auparavant dire deux mots sur la valeur en fréquences de ces notes afin de déterminer l'emplacement des trous pour la flûte, ou bien les longueurs des tubes pour la flûte de pan.

En théorie, le spectre des fréquences acoustiques étant continu, rien n'empêche de produire des sons dont les fréquences sont arbitrairement rapprochées. Mais cela ne donnerait pas une harmonie musicale, notion qui est rattachée à la perception des sons par l'homme et donc qui peut varier d'un individu à l'autre et qui intègre obligatoirement les processus de la cognition humaine et donc des relations psychiques et culturelles. Cependant, quelles que soient les personnes et les cultures, il s'avère comme un fait d'observation que l'harmonie musicale est liée à la production de suites de sons dont les fréquences occupent des valeurs discrètes, plus précisément dont les rapports ne peuvent prendre que des valeurs permises en nombre fini. Les gammes musicales sont alors des listes de sons, appelés désormais notes, correspondant aux fréquences "permises".
Pour les sonorités de la musique en occident, le musicien Jean-Sébastien Bach a estimé que la répartition des notes pouvant participer à l'harmonie musicale devait être composée de 6 intervalles de tons entiers et de 12 intervalles de demi-tons sur une octave. Ainsi deux notes consécutives de fréquences f_n et $_{fn-1}$ appartenant à la même octave (f_0, $2f_0$) doivent être dans les rapports suivants:

$$f_n/f_{n-1} = 2^{1/6} = 1{,}122 \qquad \text{pour des tons entiers}$$

$$f_n/f_{n-1} = 2^{1/12} = 1{,}059 \qquad \text{pour des demi-tons}$$

$$\text{avec } f_0 < f_n, f_{n-1} < 2f_0$$

ces relations définissent la ***gamme chromatique***. Chaque octave est repérée par un numéro 1, 2, 3, 4… et les notes qui les composent conservent leurs noms mais affectés du rang de l'octave concernée: on trouve ainsi, par exemple, ré2 pour l'octave n°2, ré3 pour l'octave n°3, etc.

On utilise 7 noms de notes par gamme: do (ou ut), ré, mi, fa, sol, la, si, et les rapports entre notes consécutives peuvent être un ton ou un demi-ton, soit de façon "naturelle", soit par l'affectation d'altérations diez (#) ou bémol (*b*) qui respectivement augmentent ou abaissent d'un demi-ton la valeur de la note: ceci permet de couvrir les 12 demi-tons de la gamme à partir des 7 figures de notes. Fixant la note de référence aujourd'hui au la3 = 440 Hz, toutes les valeurs de la gamme chromatique peuvent être retrouvées par les relations précédentes, et on obtient le tableau suivant:

ton	Demi-ton	Valeur (Hz)	Rapport avec la précédente
Etc…			
Do3		261,63	Si2 x 1,059
	Do3 # ou ré3 b	277,06	Do3 x 1,059
Ré3		293,66	Do3 x 1,122
	Ré3 # ou mi3 b	310,99	Ré3 x 1,059
Mi3		329,63	Ré3 x 1,122
Fa3		349,23	Mi3 x 1,059
	Fa3 # ou sol3 b	369,83	Fa3 x 1,059
Sol3		392,00	Fa3 x 1,122
	Sol3 # ou la3 b	415,13	Sol3 x 1,059
La3		440,00	Sol3 x 1,122
	La3 # ou si3 b	465,96	La3 x 1,059
Si3		493,88	La3 x 1,122
Do4		523,25	Si3 x 1,059
	Do4 # ou ré4 b	554,12	Do4 x 1,059
Ré4		587,33	Do4 x 1,122
	Ré4 # ou mi4 b	621,98	Ré4 x 1,059
Mi4		659,26	Ré4 x 1,122
Fa4		698,46	Mi4 x 1,059
	Fa4 # ou sol4 b	739,67	Fa4 x 1,059
Sol4		783,99	Fa4 x 1,122
	Sol4 # ou la4 b	830,25	Sol4 x 1,059
La4		880,00	Sol4 x 1,122
	La4 # ou si4 b	931,92	La4 x 1,059
Si4		987,77	La4 x 1,122
Do5		1046,50	Si4 x 1,059
Etc…			

Remarques: dans le tableau ci-dessus on s'est limité aux octaves 3 et 4. Les cases blanches et les cases noires correspondent aux couleurs des touches du piano. On remarque qu'il y a toujours un demi-ton entre ré et mi et entre si et do.

D'autre part, aucun instrument de musique ne produit un seul son pur lorsqu'il est joué: à une note jouée, de fréquence donnée f, correspond un ensemble de fréquences plus élevées, appelées ***harmoniques***, multiples entiers de la fréquence fondamentale: 2f, 3f, 4f,…, nf,… et leurs amplitudes (en débit ou en pression) sont plus faibles que celle de la fondamentale et

décroissent très rapidement avec le rang n de l'harmonique. Par exemple, pour le violoncelle, le la3 (f = 440 Hz) engendre une vingtaine d'harmoniques auxquelles l'oreille humaine est sensible, et le rapport des amplitudes est de pratiquement 100 entre la fondamentale et l'harmonique de rang n = 20 (environ 4000 Hz). L'ensemble des harmoniques caractérise le timbre de l'instrument, et le rapport de leurs amplitudes désigne la coloration du timbre: ces caractéristiques varient d'un instrument à l'autre, même s'ils appartiennent à la même catégorie, et dépendent de manière complexe d'une multitude de paramètres fixes (nature physique et géométrique de l'instrument) et variables (selon la façon de jouer et les conditions thermiques de l'environnement).
Sous l'aspect de la sensation acoustique que procurent ces sons, on conçoit alors bien que, pour deux fréquences émises simultanément par le même instrument (comme des harmoniques), et a fortiori, par deux instruments différents, le rapport des fréquences, c'est-à-dire la ***coloration du timbre***, donne une sensation de consonance ou de dissonance. Pour deux fréquences dans un rapport donné, l'ensemble des fréquences comprises entre elles s'appelle un intervalle (rappel: pour un rapport 2 l'intervalle est l'octave). Mais par abus de langage, il est d'usage d'appeler intervalle le rapport lui-même. Il a été établi, de manière empirique et pour la musique occidentale, que pour deux fréquences de rang n et m, multiples d'une même fondamentale, de rapport n/m, il y a consonance lorsque les rangs n et m sont tous deux strictement inférieurs à 8, et dissonance dans le cas contraire. Cette "loi" introduit le tableau des intervalles musicaux (gamme diatonique):

Rapport de fréquences n/m	Nom de l'intervalle	Sensation
1/1	prime	Consonant
16/15	Petite seconde	Dissonant
10/9	Grande seconde	Dissonant
9/8	Grande seconde	Dissonant
6/5	Petite tierce	Consonant
5/4	Grande tierce	Consonant
4/3	quarte	Consonant
3/2	quinte	Consonant
8/5	Petite sexte	Consonant
5/3	Grande sexte	Consonant
9/5	Petite septime	Dissonant
16/9	Petite septime	Dissonant
15/8	Grande septime	Dissonant
2/1	octave	Consonant

Remarques:
A) dans cette approche de la gamme diatonique, le demi-ton est défini par la petite seconde et par conséquent l'octave est divisée en 12 demi-tons.
B) Le ton entier correspond à la grande seconde.
C) on aurait pu s'imaginer que la dissonance soit liée au fait que deux signaux sinusoïdaux émis en même temps aient des fréquences dont le rapport ne soit pas un nombre entier ou rationnel: on sait en effet, que deux signaux $x(t) = \sin 2\pi f t$ et $y(t) = \sin 2\pi f' t$ donnent une courbe dans le plan (x,y) (ou courbe de Lissajous) qui se ferme si le rapport des fréquences peut s'écrire comme le rapport de deux nombres entiers n et m: $f / f' = n/m$ (chose que l'on peut aisément vérifier à l'aide d'un oscilloscope à deux entrées x, y ou par une simulation numérique), mais ceci est une autre histoire…

La plus grande étendue des fréquences des sons émis par un même instrument (ou une voix) s'appelle le ***registre*** ou la tessiture. Ci-dessous un tableau des registres de quelques instruments et voix humaines:

Instrument ou voix	Fréquence basse (Hz)	Fréquence haute (Hz)
violon	196 (sol2)	3136 (sol6)
piano	27,5 (la-1)	4186 (ut7)
Saxophone ténor en si bémol	98 (sol1)	880 (la4)
Clarinette basse en si bémol	73,4 (ré1)	880 (la4)
Clarinette en si bémol	146,83 (ré2)	1975,5 (si5)
Trompette en si bémol	164,81 (mi2)	1046,5 (ut5)
Trombone en si bémol	82,4 (mi1)	523,25 (ut4)
Contrebasse à cordes	41,203 (mi0)	246,94 (si2)
soprano	246,94 (si2)	1396,9 (fa5)
Voix de basse	73,41 (ré1)	440 (la3)
Flûte	261,63 (ut3)	2349,3 (ré6)
Tuba	48,99 (sol0)	440 (la3)
Orgue	16,39 (ut-1)	1568 (sol5)
Baryton	146,83 (ré2)	440 (la3)
ténor	146,83 (ré2)	523,25 (ut4)
alto	196 (sol2)	880 (la4)

5 - Construction d'une flûte et d'une flûte de pan

Nous sommes maintenant à peu près armés pour confectionner une flûte (de type traversière) et une flûte de pan.
La différence entre ces deux types de flûte est que la première utilise un tube unique pour générer les notes de la gamme, leurs valeurs étant obtenues par le jeu d'ouverture et de fermeture de trous situés judicieusement le long du tube, tandis que la seconde utilise autant de tubes juxtaposés qu'il y a de notes à produire. Mais les calculs présentés ci-après sont les mêmes pour l'une comme pour l'autre, tout au moins dans le cadre de l'approche très simplifiée que je présente dans cet article…
Pour la flûte de type traversière, les résultats du calcul donneront l'emplacement des trous, et pour la flûte de pan, ils donneront la longueur de chaque tube. Il vous appartient de moduler l'application en introduisant des demi-tons que vous savez maintenant calculer et les longueurs de tube ou emplacements de trous correspondants…

5-1 - Fabrication d'une flûte de pan

C'est le cas le plus simple (encore que !…) parce qu'il suffit de se soucier de la longueur à laquelle il faut couper un tube de faible diamètre pour obtenir la fréquence fondamentale correspondante (en mode demi-onde). Examinons la valeur de la fréquence de chaque note sur les gammes 4 et 5. Si on veut l'ensemble de ces gammes avec les tons et les demi-tons (de do4 à do6) cela fait beaucoup de tubes: il en faut 25 ! Contentons-nous de reproduire la gamme sans altérations sur les deux octaves 3 et 4: cela ne fait plus que 15 tubes qui correspondent à do4, ré4, mi4, fa4, sol4, la4, si4, do5, ré5, mi5, fa5, sol5, la5, si5 et do6. A chacune de ces fréquences correspondent les longueurs de tubes suivants:

Note	Longueur (cm)
Do4	33
Ré4	29,5
Mi4	26
Fa4	25
Sol4	22
La4	19,5
Si4	17,5
Do5	16,5
Ré5	15
Mi5	13
Fa5	12,5
Sol5	11
La5	10
Si5	9
Do6	8

Remarque: la température de référence est ici 23°C (cf la formule donnant l'évolution de la vitesse du son en fonction de la température). A vous de voir pour quelle température calculer les longueurs de tubes (la mesurer), et d'ailleurs cela entraîne-t-il de grosses variations? Reste à assembler la flûte: on peut choisir des tubes de PVC ou de bambous de petits diamètres (1 à 1,5 cm) assemblés par deux tiges qui les prennent en sandwich. Pour jouer, souffler légèrement au-dessus de l'ouverture du haut, sans forcer, comme pour siffler… Si ce n'est pas encore Zamfir, cela y ressemble!…

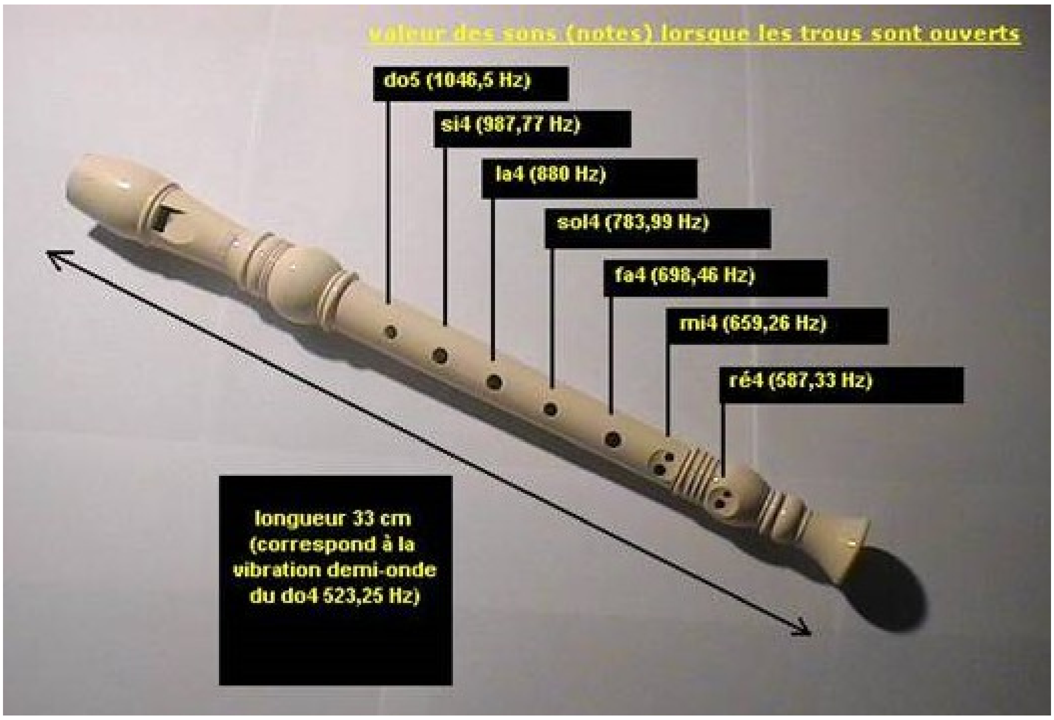
Remarquons qu'avec ce montage rudimentaire on peut quand même essayer de jouer les demi-tons: c'est juste, il suffit d'aménager sur le tube, donc la note correspondante, disons la4, une ouverture située à une distance de l'embouchure égale à la demi-longueur d'onde de la note que l'on veut jouer en demi-ton (ici la4 # = 1,059 x 880 = 932 Hz soit un emplacement du trou à 18,5 cm de l'embouchure); pour jouer la fondamentale du tube (ici la4) il suffit alors de boucher ce trou et de l'ouvrir si l'on veut jouer la fondamentale au demi-ton supérieur (la4 #). On appliquera cette démarche à chaque tube, sauf bien sûr pour mi et si puisque ces notes sont d'un demi-ton inférieures à la suivante.

5-2 - Fabrication d'une flûte type traversière

La démarche précédente s'applique mais sur un seul tube: les longueurs données dans le tableau précédent correspondent à la distance entre l'embouchure (l'ouverture par laquelle on excite l'air du tube) et le premier trou ouvert du tube. Ainsi pour un tube de longueur utile 33 cm, avec tous les trous bouchés, on obtient le do4. Théoriquement, pour jouer les notes supérieures il suffit de déboucher successivement les trous en s'éloignant de l'ouverture opposée du tube. En pratique, étant donné le rapprochement des trous pour l'octave n°5 l'emploi des doigts pour les boucher ou les ouvrir n'est pas commode (on n'a que huit doigts libres!), aussi on se contentera ici de fabriquer une "flûte" selon l'octave n°4.
Prenons donc un tube de PVC, par exemple, et coupons le à une longueur à peine supérieure à 33 cm, disons 36 cm. Afin d'éviter le risque d'un régime d'écoulement en masse dans le tube, on ne va pas jouer par l'une des ouvertures correspondant au diamètre du tube, mais on va jouer par une petite ouverture que l'on va aménager sur le côté et l'on va obturer par un bouchon de liège l'un des diamètres. Ce petit trou joue le rôle de l'ouverture par laquelle on excite la colonne d'air d'un tube ouvert à l'extrémité opposée: c'est l'abscisse x = 0 du modèle du tube demi-onde présenté au début de cet article. Perçons-le à 3 cm du bord du tube, il reste ainsi 33 cm de longueur utile correspondant au do4.

Attention! Son diamètre doit être faible (< 5 mm), on pourra toujours ensuite l'agrandir pour obtenir une qualité désirée.
Enfoncer ensuite le bouchon jusqu'au ras de ce trou, le bout du tube doit être parfaitement étanche (usiner le bouchon si nécessaire).
Aménager les trous correspondant aux autres notes à une distance du premier trou égale à celle donnée par le tableau ci-dessus; par exemple le mi4 est à 26 cm et le do5 à 16,5 cm du premier trou latéral.
Si l'on veut jouer à l'octave supérieure (par exemple le mi5), comme on n'a pas de trou à 13 cm de l'embouchure, il faut exploiter le fait que dans le tube demi-onde des fréquences harmoniques nc/2L sont également excitées avec une intensité moindre (pour l'octave on a ici n=2): il suffirait de souffler plus fort pour les entendre avec le risque d'engendrer des écoulements parasites. Pour éviter cet inconvénient, il faut éliminer l'éventuel excès d'air qui pourrait être responsable d'un entraînement en masse de la colonne d'air du tube. Un trou peut être aménagé à cet effet à l'opposé mais un peu décalé de celui du do5 (16,5 cm): pour le premier octave on le maintient fermé et pour l'octave supérieur on l'ouvre et on souffle un peu plus fort pour chaque note. Là encore, les diamètres des trous doivent au départ être petits afin d'être ensuite ajustés pour régler à l'oreille la sonorité des notes désirée.

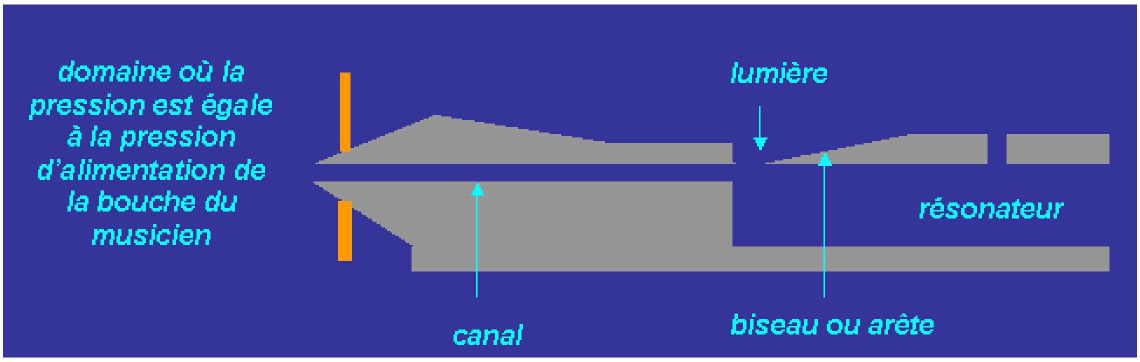
La ***flûte à bec*** est une variante où l'embouchure est à l'extrémité du tube: comme son nom l'indique, cet embouchure a la forme d'un bec pour limiter le débit acoustique à l'entrée, tandis qu'une fente aménagée entre lui et le premier trou (ré5), appelée sifflet, permet d'entretenir une excitation par tourbillon stationnaire, garantissant ainsi sa constance et une quasi régularité. Au final, la flûte à bec réelle est comme sur les figures ci-dessous, mais la façon de jouer, et en particulier de fermer et d'ouvrir les trous, comporte quelque subtilité liée au doigté (baroque ou moderne) ainsi qu'à la façon d'entretenir l'excitation de l'air à l'embouchure (pincement pour le registre grave do4 à sol4, souffle normal dans le registre médium sol4# à ré5, trou opposé partiellement recouvert dans le registre aigu mi5 à si5). Par ailleurs la forme des différentes sections de la flûte est variable: embouchure, forme légèrement tronconique du tube, zone sphérique vers l'ouverture, forme des trous, etc… De sorte que j'ai conscience que les indications reportées sur ces figures sont seulement indicatives, l'objectif étant de se convaincre d'une théorie physique et non d'avoir la prétention d'être des spécialistes d'acoustique musicale et de lutherie… Flûte alors !!!



Annexe : clarinette et flûte

Nous avons assimilé la flûte à un tube ouvert aux deux extrémités où la pression acoustique s'annule, mais où le débit acoustique est imposé à l'un des deux bouts. Nous avons alors montré que la résonance du tube est en L = $\lambda/2$ (demi-onde).
Nous avons assimilé la clarinette, par contre, à un tube ouvert à l'une de ses extrémités où le débit est imposé et la pression nulle, et fermé à l'autre où le débit est évidemment nul. Nous avons alors montré que la résonance correspond à la configuration quart d'onde cette fois : L = $\lambda/4$. Pourtant il ne s'agit là que de modèles très simplifiés : la flûte comme la clarinette sont ouvertes à leurs deux extrémités, le bac et le pavillon. Alors pourquoi une telle différence ?
Sans entrer dans les détails qui sont très compliqués, renvoyant pour cela à la référence [1], il convient ici de dire quelques mots sur les principes des instruments à vent.
Pour exciter une colonne d'air avec du vent il n'existe que deux moyens utilisés par les instruments de musique à vent : souffler sur une arête ou bien utiliser une anche.

Les instruments à arête forment la famille des flûtes, ceux à anche comprennent la clarinette, le hautbois, l'accordéon, le cor… Les arêtes ou les anches forment les excitateurs de la colonne d'air.
L'arête est un biseau placé devant la sortie d'air provenant d'un canal relié à la bouche du musicien, au niveau d'une ouverture appelée lumière (voir figure ci-après).



organe d'excitation de la flûte

A la sortie du canal les perturbations acoustiques du jet d'air s'amplifient entre la lumière et le biseau. Arrivées au biseau, elles entraînent le jet alternativement au-dessus et au-dessous du biseau. Il en résulte, sur le biseau, une force alternative de mêmes caractéristiques ondulatoires

que le jet acoustique d'air. A cette force, le biseau oppose une force de réaction qui a pour effet d'entretenir l'onde acoustique dans le résonateur (le tube).
Les perturbations du jet d'air au niveau de la lumière proviennent du champ acoustique développé dans le tube ; elles sont convectées par le jet d'air à la vitesse d'écoulement. Le jet perturbé interagit avec le biseau, comme on l'a vu, ce qui crée une force de réaction qui excite le tube. Le tube, à son tour, impose, de par ses caractéristiques géométriques et mécaniques, une célérité acoustique qui va de nouveau perturber le jet. On obtient alors un ***système auto-oscillant*** :

- étape 1 : le jet d'air se propage et s'amplifie entre la lumière et le biseau.
- étape 2 : le biseau exerce une force de réaction qui en fait une source acoustique pour le tube.
- étape 3 : le tube entre en résonance avec le champ acoustique et perturbe le jet d'air, et on revient à l'étape 1.

L'oscillation du biseau engendre un léger sifflement très aigu (le « son du biseau ») : il apparaît dans les transitoires d'attaque des tuyaux à bouche et aboutit avec un petit retard au régime résonnant du tube. Ce phénomène existe pour tous types de flûtes. Du fait de ce retard, la vitesse de jet (qui dépend directement de la force avec laquelle l'instrumentiste souffle dans le bec) va agir sur le régime d'oscillation acoustique dans le tube : à basse vitesse, la perturbation du jet est convectée lentement et le retard est d'une demi-période, soit $\tau = T/2 = 1/2f$ (où f fréquence de résonance fondamentale) ; la réaction acoustique du tube a lieu avec un retard supplémentaire τ' égal aussi à la demi-période, $\tau' = 1/2f$, donc $\tau + \tau' = 1/f$ et cette réaction est donc à la fréquence fondamentale f. A plus forte vitesse, la perturbation du jet est convectée plus rapidement et le retard est inférieur à la demi-période : $\tau < 1/2f$, soit une fréquence de jeu f' plus grande que f, f' > f (on favorise les aigus). Il s'ensuit que la réaction acoustique s'effectue avec un déphasage $\tau' > 1/2f$.
Avec une vitesse encore plus importante le retard de la perturbation convectée devient négligeable devant la période de la première résonance fondamentale : $\tau << 1/f$, ce sera donc la première harmonique de la résonance f_1 qui sera sollicitée avec un retard τ' tel que $\tau + \tau' = 1/f_1$.
C'est ainsi que le musicien obtient le registre auquel il joue (à l'octave supérieure, etc.) : par le contrôle du souffle dans le bec.

Avec une flûte à bec, on a donc affaire à un tube ouvert aux deux extrémités, dont l'une reçoit un débit imposé au niveau de la lumière et du biseau. Lorsque l'onde progressive rencontre un obstacle solide (une extrémité fermée), l'onde repart en arrière tout en restant une compression : l'onde est réfléchie sans changement de signe. En revanche, lorsqu'elle rencontre une ouverture, l'onde sort par le trou en produisant une dépression derrière elle. L'onde repart en arrière mais en devenant une dépression : elle est réfléchie avec changement de signe.
Comme en une période l'onde passe successivement d'une compression à une dépression (ou vice versa), il lui faut faire un aller-retour dans un tube ouvert aux deux bouts pour retrouver le même état de compression à l'extrémité (trajet parcouru = longueur d'onde $\lambda = L/2$, L longueur du tube), et 2 aller-retour dans un tube fermé ($\lambda = 4L$) : un tuyau fermé résonne donc à l'octave inférieur d'un tuyau ouvert de même longueur : $L = \lambda'/4 = \lambda/2$ soit $c/4f' = c/2f$: $f' = f/2$).

Pour la clarinette, qui est pourtant comme la flûte un tube ouvert aux deux extrémités, l'onde doit faire deux aller-retour pour retrouver son état, elle se comporte alors comme un tube quart d'onde. Cette situation tient à la manière dont le son est généré et se propage dans le tuyau, donc dépend en grande partie de l'excitateur, lequel repose sur le principe de l'anche et non plus de l'arête.

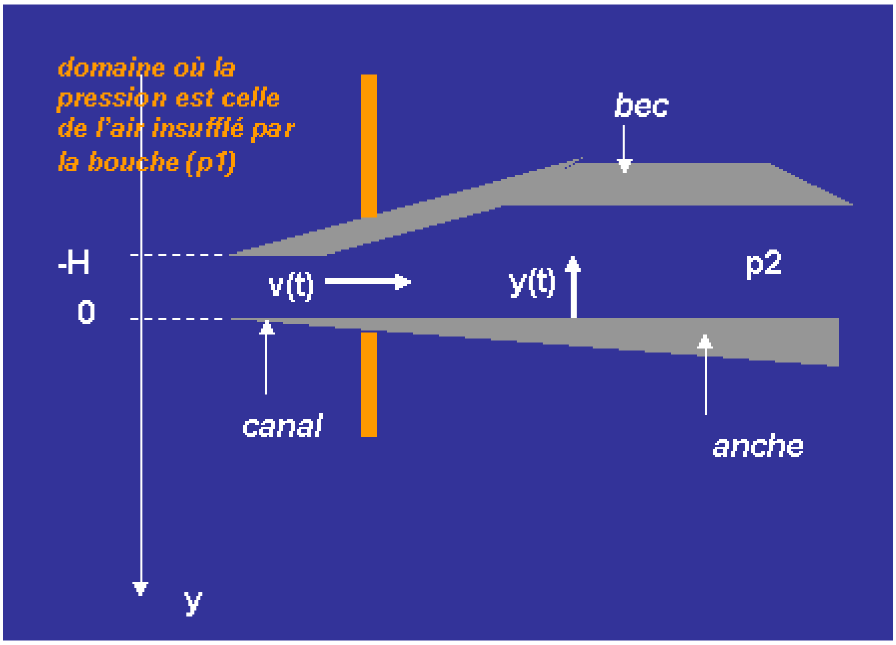
De manière générale, quelle que soit la configuration d'un tube à ses extrémités (ouvert ou fermé), dès lors que sa structure est telle que la résonance est atteinte pour $L = \lambda/2$ ou bien pour $L = \lambda/4$, on peut l'assimiler respectivement à un tube ouvert à ses deux bouts, et fermé à l'un de ses bouts.

Examinons donc pourquoi l'onde se propage en $\lambda/4$ à la résonance pour une clarinette.
L'anche est la partie vibrante de l'instrument. Elle set généralement faite en roseau de canne, mais aussi en bois ou en métal, ou en matériau synthétique, et est placée sur le bec par une ligature en métal, en cuir ou en plastique. Les anches sont classées par dureté. Les musiciens sont souvent amenés à retailler leurs anches pour retrouver les bonnes vibrations qui correspondent à leurs jeux. L'anche est une pièce fragile qui vieillit rapidement : les fibres d'une anche en roseau finissent par se fendre et se briser. Une anche abîmée affecte considérablement la qualité du jeu musical. Il faut savoir que pour une utilisation à raison de 2 heures par jour, il faut changer l'anche au bout de deux semaines !

La clarinette fut inventée à partir d'un instrument à anche simple, le chalumeau, par Johann Christophe Denner (1665-1707) à Nuremberg. La perce (canal axial du tube) de la clarinette est cylindrique. la tessiture (étendue en fréquences) de la clarinette couvre 3 octaves et une sixte mineure (45 notes de musique). La clarinette fut améliorée par Heinrich Bärmann (1784-1847) en 1810 (retournement du bec), Yvan Muller en 1812 (attribution de la gamme chromatique à la clarinette), Louis Auguste Buffet et Hyacinthe Klosé (adaptation du système Boehm des anneaux mobiles). Les bagues ou anneaux mobiles permettent l'accord de l'instrument en agissant sur sa longueur, et donc sur sa résonance.
Voici quelques caractéristiques de clarinettes (référence [2]) :

caractéristiques	valeurs
longueur	660 à 670 mm
masse	700 à 900 g
diamètre de la perce	13 à 16 mm
diamètre extérieur du corps	27 à 31 mm
diamètre des trous	5 à 9 mm
écart des trous	22 à 25 mm
notes entendues (clarinette en Si bémol)	Ré(2) à Si bémol(5)
plage en fréquences	147 à 1867 Hz

Ces définitions données, détaillons les différentes étapes des deux aller-retour de l'onde sonore dans la parce qui font de la clarinette un tuyau sonore en $\lambda/4$.



principe d'un bec à anche de clarinette

- Étape 1 : La colonne d'air contenue dans la perce est à la pression atmosphérique et se déplace vers le pavillon (ou le premier trou ouvert sur le corps). La minuscule fente entre le bec et l'anche (figure ci-dessus) ne permet qu'à une quantité infime d'air d'entrer dans la perce. Il se produit donc une dépression dans la cavité du bec : la différence de pression entre les deux faces de l'anche augmente, ce qui provoque la fermeture de l'anche sous l'action de la pression atmosphérique en excès par rapport à la pression interne. Si ω_0 est la fréquence propre de l'anche, m_0 sa masse modale $m_0 = K/\omega_0^2$ avec K la raideur statique (à fréquence nulle) de l'anche qui dépend de la force exercée sur l'anche f, on montre que l'amplitude de déplacement de l'extrémité de l'anche est solution de l'équation (modèle à une masse, cf. [1]) :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+r\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=-\frac{\Delta p}{m_0} \quad \text{(A1)}$$

où r est le terme d'amortissement (dû à la viscosité par exemple), et $\Delta p = p_1 - p_2$ est la différence entre la pression p_1 de l'air insufflé par la bouche sur la face externe de l'anche, et p_2 pression sur la face interne de l'anche.
L'anche se ferme alors (position y = -H, où H est l'épaisseur de la fente d'entrée) pour une pression dite de claquage statique :

$$p_S = KH$$

Le théorème de Bernoulli donne immédiatement la vitesse d'écoulement du jet à la sortie du canal situé entre la bouche et la cavité du bec :

$$v=\sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}} \quad \text{(A2)}$$

ρ étant la masse volumique de l'air.
Le jet d'air devient instable lorsqu'il pénètre dans la cavité du bec : il évolue vers la turbulence et, après une phase de transition, on peut considérer que la vitesse moyenne du jet est à peu près constante car contrôlée par Δp. Néanmoins, le débit, qui est le

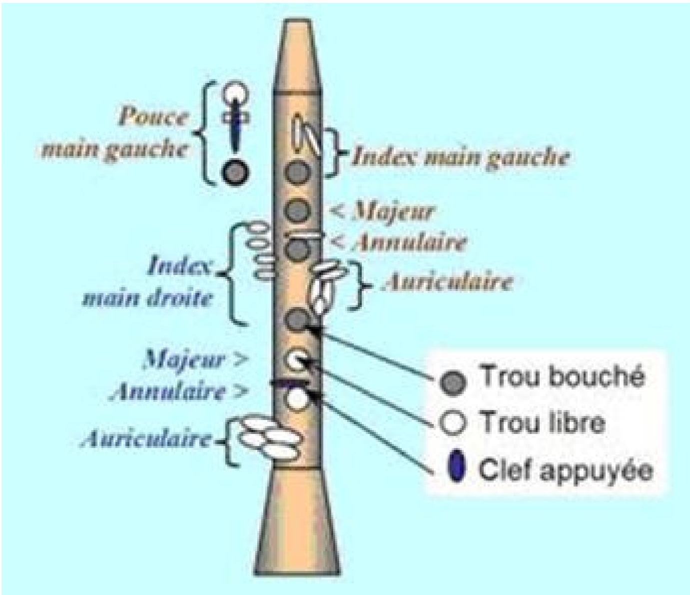
produit entre la vitesse et la section de sortie du canal, $q = vS$, est fluctuant car la section S varie en fonction de la position $y(t)$ de l'anche. L'expérience montre que v est très faible, de l'ordre de 1% de la vitesse du son, de sorte que dans les modèles on peut admettre qu'il s'agit d'un problème d'acoustique sans écoulement perturbé (au premier ordre), sans toutefois exclure que les fluctuations acoustiques soient convectées par l'écoulement moyen.
Ainsi, une anche est une valve qui module le débit d'air produit par une différence de pression entre la bouche du musicien et le bec de l'instrument. Le débit total Q est la somme du débit dû à la variation de la position de l'anche, q_R et de celui à la sortie du canal q :

$$Q = q_R + q \qquad \text{(A3)}$$

avec donc $q_R = -S_R dy/dt$, où S_R est la surface utile de l'anche exposée à l'écoulement. Pour une anche non battante (c'est-à-dire se déformant sans osciller pour un débit constant, ce qui arrive si le débit du jet n'est pas trop fort), on a un débit du canal nul à la pression de plaquage (puisque le canal se ferme) :

$$q = 0 \text{ si } \Delta p \geq p_S$$

- Etape 2 : une onde de dépression se forme alors dans le corps puisque p_1 est devenue nulle, et atteint la première ouverture.

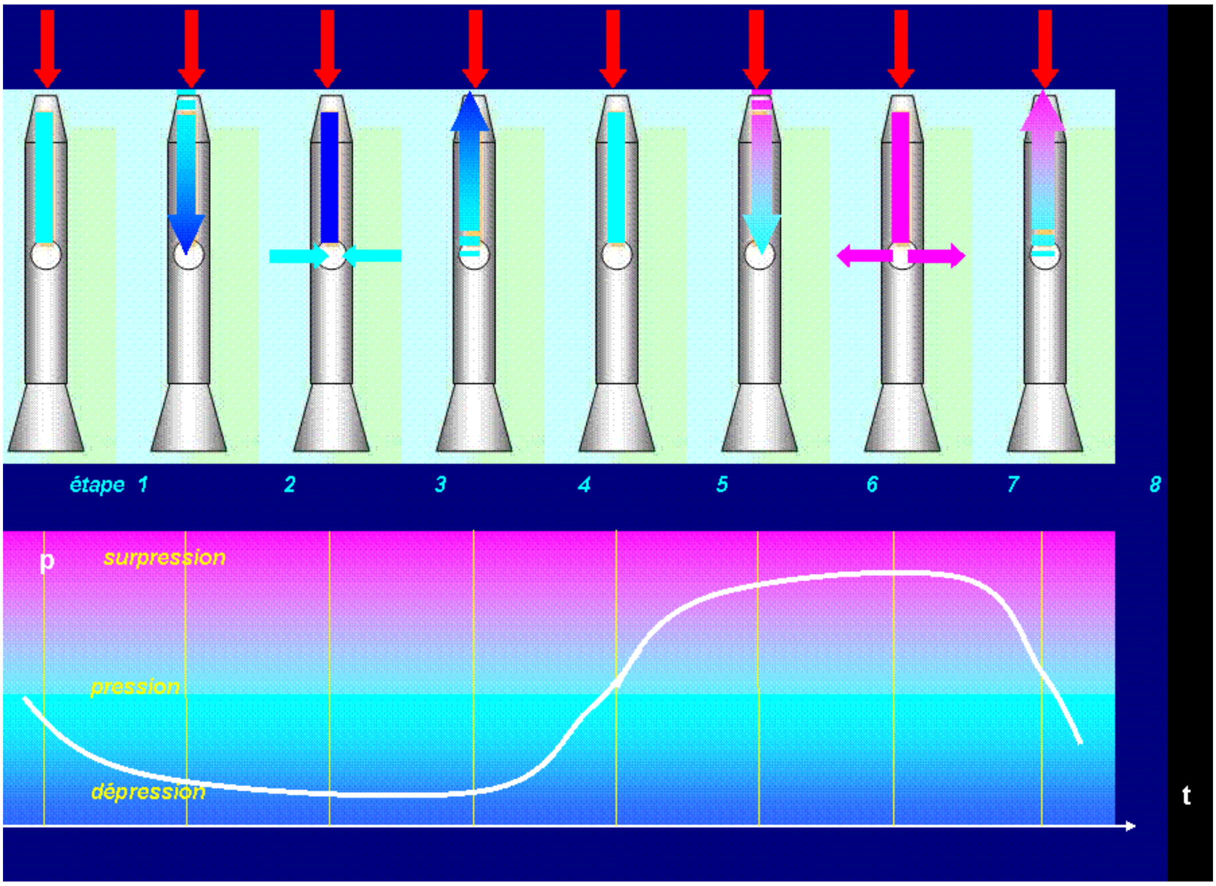


(source : Wikipedia)

- Etape 3 : comme indiqué auparavant, lorsqu'une onde de dépression arrive à un trou au contact de l'atmosphère, l'air extérieur est aspiré par la dépression. L'air qui sortait auparavant par l'ouverture (car en surpression) change alors de direction et entre dans la perce.
- Etape 4 : la dépression s'annule progressivement lorsque l'onde de dépression progresse vers le bec, et la perce finit par être à la même pression que l'air extérieur (pression atmosphérique).
- Etape 5 : lorsque toute la colonne d'air, qui se déplace vers le bec, est ainsi à la pression atmosphérique, la différence de pression Δp diminue, ce qui ouvre l'anche.
- Etape 6 : la colonne d'air dans la perce, à la pression atmosphérique, rencontre l'air à la pression p_1 dans le canal qui lui est supérieure. Il se forme alors une onde de

surpression qui se dirige dans la direction de l'ouverture aménagée dans la perce.

- Etape 7 : l'onde en surpression, au niveau de l'ouverture, oblige l'air extérieur, qui entrait jusqu'à présent dans la perce, à inverser son mouvement et à sortir de l'ouverture.
- Etape 8 : la surpression s'annule progressivement et on se retrouve au début de l'étape 1 lorsque toute la colonne d'air dans la perce est de nouveau à la pression atmosphérique, se propageant vers le pavillon.



Les 8 étapes du mouvement d'air dans une clarinette

Ce cycle 1 à 8 correspond à deux aller-retour de l'onde de pression dans la perce avec une fréquence constante f. La longueur d'onde est donc telle que L = $\lambda/4$ = c/4f. Le processus d'excitation de la colonne d'air au moyen d'une anche entraîne donc bien un comportement de type quart d'onde comme pour un tube fermé à l'une de ses extrémités.

Pour déterminer le régime du champ de pression dans le bec et la perce, p_2, des modèles plus ou moins complexes permettent d'établir la relation entre cette pression et le débit du jet dans le bec, le débit étant lié à l'aire de l'ouverture de l'anche (références [1], [5] à [25]).
Dans la relation (A3) donnant le débit total, le débit du jet q est directement lié à la section du jet S : q = vS, comme déjà mentionné. Cette section S est liée en première approximation au déplacement y(t) de l'anche et à la hauteur de fermeture H (H est la largeur utile de l'embouchure, c'est-à-dire la distance entre le bec et l'anche au repos) :

$$S = (y + H)w \quad (A4)$$

où w est la largeur utile du canal. On démontre que le débit total Q est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle h(t) de l'instrument par la pression interne d'entrée p_2 :

$$Q(t)=h*p_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,p_2(\tau)\,d\tau$$

(A3) donne alors pour le débit de jet q :

$$q=Q-q_R=h*p_2(t)+S_R\frac{dy}{dt} \qquad \text{(A5)}$$

On montre alors (référence [3]) que (A5) fait intervenir une correction de longueur apparente ΔL due à un effet de compliance acoustique apportée par le débit d'anche q_R :

$$\Delta L=\frac{\rho c^2}{p_S}\frac{S_R}{A}H$$

où A est l'aire de la section du tube (perce). Par suite :

$$q=h*p_2(t)+\frac{A\Delta L}{H}\frac{p_S}{\rho c^2}\frac{dy}{dt} \qquad \text{(A6)}$$

L'équation (A6) et l'équation (A1) constituent les équations du modèle de base pour une clarinette. Sous certaines hypothèses simplificatrices (réf. [1]), les équations (A4) et (A2) donnent pour le débit du jet :

$$q=q^*\left(1+\frac{y}{H}\right)\sqrt{\frac{|\Delta p|}{p_S}}\times\text{signe}(\Delta p) \qquad \text{pour } y > -H \qquad \text{(A7)}$$

avec :

$$q^*=wH^{3/2}\sqrt{\frac{2K}{\rho}}$$

Les inconnues sont q, p_2 et y.

On peut montrer, sous certaines conditions de pression p_2 faible, et d'impédance d'entrée négligeable, que q est lié à p_2 par un développement polynomial :

$$q=a_0+a_1\left(\frac{p_2}{p_S}\right)+a_2\left(\frac{p_2}{p_S}\right)^2+a_3\left(\frac{p_2}{p_S}\right)^3 \qquad \text{(A8)}$$

avec :

$$a_0=\frac{Z_c}{p_S}\zeta(1-\gamma)\sqrt{\gamma}\ ,\quad a_1=\frac{Z_c}{p_S}\zeta\frac{3\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}\ ,\quad a_2=-\frac{Z_c}{p_S}\zeta\frac{3\gamma+1}{8(\sqrt{\gamma})^3}\ ,\quad a_3=-\frac{Z_c}{p_S}\zeta\frac{\gamma+1}{16(\sqrt{\gamma})^5}$$

et où :

$$\zeta=\frac{Z_c q^*}{p_S}=Z_c wH\sqrt{\frac{2}{\rho p_S}} \qquad \gamma=\frac{p_1}{p_S}$$

et :

$$Z_c=\frac{\rho c}{A} \qquad \text{impédance caractéristique du tuyau.}$$

Quant au champ de pression p_2, il est la somme des pressions se propageant vers le pavillon

p_{2+} et des pressions qui reviennent vers le bec p_{2-} :

$$p_2(t) = p_{2+}(t) + p_{2-}(t)$$

Si nous étions en configuration L = $\lambda/2$ (comme pour une flûte), on aurait $p_{2-}(t) = -p_{2+}(t - T)$ avec T = 1/f = 2L/c comme période. Dans ce cas on aurait $p_2(t) = p_{2+}(t) - p_{2+}(t - T) = 0$ comme identité : la pression réfléchie au niveau de la première ouverture avec changement de signe, une fois retournée à l'entrée, ne retrouverait pas la pression qui y règne au début du cycle en un seul aller-retour. Force est donc de constater qu'il faut au moins un aller-retour supplémentaire pour retrouver des états identiques de pression à l'entrée. Avec donc une période τ = 2T on retrouve bien :

$$p_2(t) = -p_2\,(t + T)$$

puisque $p_2(t + T) = p_2\,(t - T)$ pour une période 2T, et $p_{2-}\,(t + T) = -p_{2+}\,(t)$.

Le champ de pression connaît donc deux états opposés au cours d'une période τ = 2T = 4L/c. Il s'ensuit que le débit de jet q est de période T = $\tau/2$:

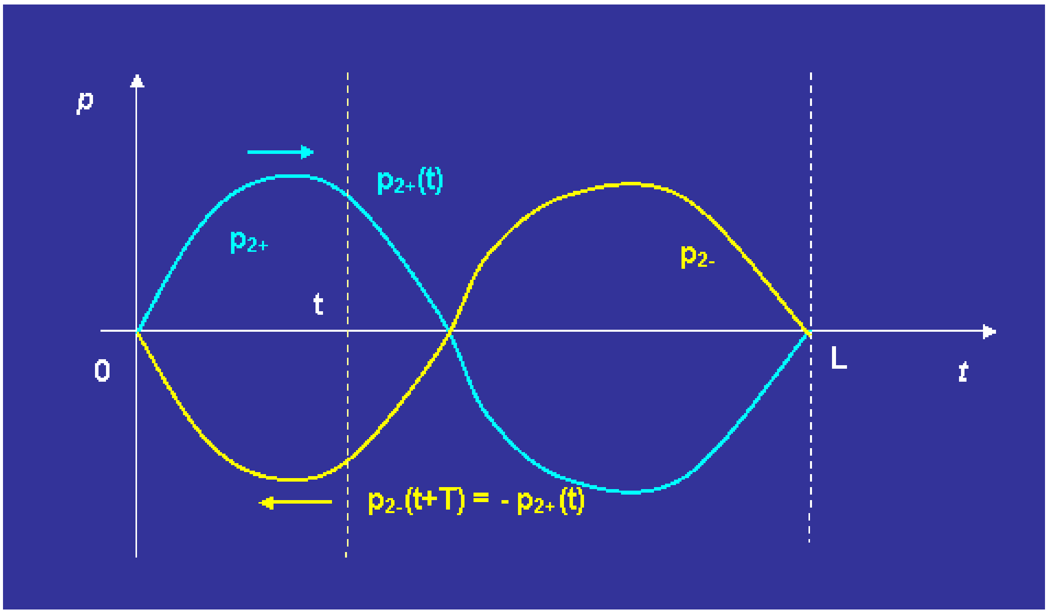
$$q(t+T) \approx a_0 + a_1 \frac{p_2(t+T)}{p_S} = a_0 + \frac{a_1}{p_S}\left(p_{2+}(t+T) + p_{2-}(t+T)\right) = a_0 + \frac{a_1}{p_S} p_2(t) = q(t)$$

Au bout d'un temps infini, la pression p_∞ vérifie $q(p_\infty) = q(-p_\infty)$, soit à partir de (A8) :

$$a_1 p_\infty + a_3 \left(\frac{p_\infty}{p_S}\right)^3 = -a_1 p_\infty - a_3 \left(\frac{p_\infty}{p_S}\right)^3$$

d'où :

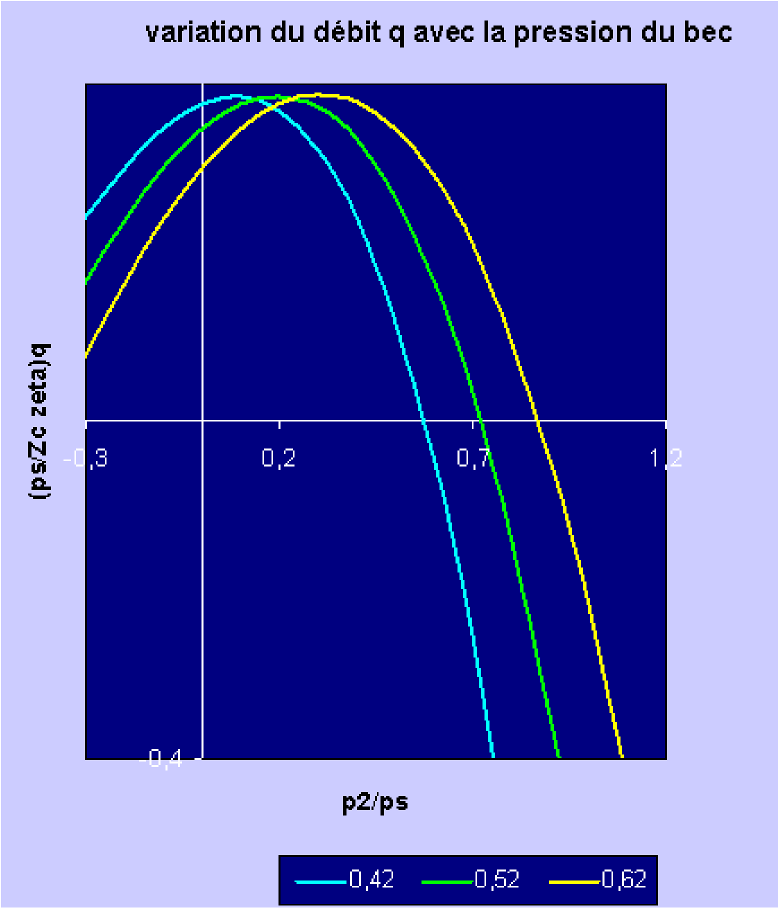
$$p_\infty = \pm\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$$



champ de pression dans le bec direct et réfléchi

La relation (A8) permet de tracer $q(p_2)$ pour différentes valeurs de γ (γ = 0,22 ; 0,42 ; 0,62) :

$$\frac{p_S}{Z_c \zeta} q = f(p_2)$$



variation débit q vs. pression p2 pour différentes valeurs de γ = 0,42 ; 0,52 ; 0,62

Le débit est nul tant que la pression dans le bec est $\leq p_{20}$, il passe par un maximum de p_2 tel que :

$$\frac{dq}{dp_2} = 0 = a_1 + 2a_2 \frac{p_2}{p_S} + 3a_3 \left(\frac{p_2}{p_S}\right)^2$$

soit :

$$p_{2\max} = p_S \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 3a_1 a_3}}{3a_3}$$

Au-delà de la deuxième valeur p'_{20} pour laquelle q s'annule, le débit change de signe, autrement dit le jet d'air insufflé se dirige vers la bouche, ce qui sur le plan pratique n'a jamais lieu : les valeurs négatives de q ne sont donc pas à considérer.

Références bibliographiques

[1] A. Chaigne, J. Kergomard – *Acoustique des instruments de musique* – éd. Belin, 2008
[2] site Wikipedia
[3] C. J. Nederveen – *Acoustical aspects of woodwind instruments* – Northern Illinois University Press, Illinois. New edition , 1998
[4] M. Atig, J. P. Dalmont, J. Gibert – *Saturation mechanism in clarinet-like instruments, the effect of the localised nonlinear losses* – Applied Acoustics, 65: 1133-1154, 2004

[5] J. Backus - *Vibrations of the reed and the air column in the clarinet* – J. Acoust. Soc. Am., 6:806-809, 1961
[6] J. Backus - *Small vibration theory of the clarinet* – J. Acoust. Soc. Am. 35(3): 305-313, 1963
[7] A. Barjau, V. Gibiat - *Study of woodwind-like systems through nonlinear differential equations, Part 2: Real geometry* – JASA 102, 3032-3037, 1997
[8] A. H. Benade, D. J. Gans – *Sound production in wind instruments* – Ann. N. Y. Acad. Sci., 155: 247-263, 1968
[9] A. H. Benade, S. N. Kouzoupis – *The clarinet spectrum : theory and experiment* – JASA 83(1): 292-304, 1988
[10] H. Bouasse – *Instruments à vent, tome 1: anches métalliques et membranes, tuyaux anche et bouche – orgue, instruments embouchure de cor* – Lib. Scientifique et technique, 1986
[11] M. Campbell – *Brass instruments as we know them today* – Acta Acustica, 90: 600-610, 2004
[12] J. P. Dalmont, C. Frappé – *Oscillation and extinction thresholds of the clarinet: comparison of analytical results and experiments* – JASA 122(2): 1173-1179, 2007
[13] J. P. Dalmont, J. Gilbert, J. Kergomard, S. Ollivier – *An analytical prediction of the oscillation and extinction thresholds of a clarinet* – JASA 118(5): 3294-3305, 2005
[14] V. Debut – *Deux etudes d'un instrument de musique de type clarinette: analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par decomposition modale* – Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2004
[15] E. Ducasse – *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles* – Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 2001
[16] M. L. Facchinetti, X. Boutillon, A. Constantinescu – *Numerical and experimental model analysis of the reed and the pipe of the clarinet* – JASA 113(5): 2874-2883, 2003
[17] C. Fritz - *Influence du conduit vocal du musician sur le jeu de la clarinette* – Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 2004
[18] C. Fritz, S. Farner, J. Kergomard – *Some aspects of the harmonic balance method applied to the clarinet* – JASA 65: 1155-1180, 2004
[19] J. Gilbert, J-P. Dalmont, T. Guimezanes – *Nonlinear propagation in woodwinds* – Proc. of Forum Acusticum, Budapest, sept. 2005
[20] N. Grand, J. Gilbert, F. Laloë – *Oscillation threshold of woodwind instruments* – Acustica 83: 137-151, 1997
[21] T. Guimezanes – *Etude expérimentale et numérique de l'anche de clarinette* – Thèse de doctorat, Université du Maine, Le mans, 2008
[22] A. Hirschberg – *Mechanics of musical instruments, aero-acoustics of wind instruments,* 291-369, n° 355 du CISM Courses and Lectures, Springer, Wien-New York, 1995
[23] T. Idogawa, T. Kobata, K. Komuro, I. Masakazu – *Nonlinear vibrations of the air column of a clarinet artificially blown* – JASA 93(1): 540-551, 1993
[24] S. Ollivier – *Contribution à l'étude des oscillations des instruments à vent à anche simple: validation du modèle élémentaire* – Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, 2002
[25] T. A. Wilson, G. S. Beavers – *Operating modes of the clarinet* – JASA 56(2): 653-658, 1974