



Frédéric Elie on  
ResearchGate

## Vase de Mariotte

Frédéric Elie  
février 2008

CopyrightFrance.com

*La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.*

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »  
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : L'expérience du vase de Mariotte est un classique de la mécanique des fluides. Hormis le moyen qu'il offre pour vérifier, selon les conditions, la formule de Torricelli et la formule de Poiseuille, il présente de nombreuses applications : chaque fois où l'on a besoin d'obtenir des débits ou des niveaux constants.

Dans cet article, après avoir présenté les principes du vase de Mariotte et son emploi pour vérifier les deux formules citées précédemment, je dis quelques mots sur deux applications, parmi tant d'autres : l'une sur les lampes à huile, remontant à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle (dispositif d'Argand-Quinquet), l'autre sur une technique de mesure de la conductivité hydraulique des sols (ou infiltrométrie) dans les applications en sciences et techniques des sols.

### SOMMAIRE

- 1 - Principe du vase de Mariotte
    - 1-1 - Rappels de mécanique des fluides
    - 1-2 - Principe du vase de Mariotte
  - 2 - Application du vase de Mariotte à la vérification expérimentale de la loi de Poiseuille
  - 3 - Premier exemple d'application du vase de Mariotte : lampe à huile ou à pétrole
  - 4 - Deuxième exemple d'application du vase de Mariotte : détermination de la conductivité hydraulique des sols avec l'infiltromètre à membrane
- Bibliographie  
Annexe 1 : démonstration de la loi de Poiseuille dans un tube cylindrique horizontal  
Annexe 2 : démonstration du théorème de Torricelli

## 1 - Principe du vase de Mariotte

### 1-1 - Rappels de mécanique des fluides

Nous verrons plus loin l'importance du nombre de Reynolds sur l'emploi du vase de Mariotte dans les expériences de vérification des formules de Torricelli et de Poiseuille. Pour introduire ce nombre, quelques brefs rappels de mécanique des fluides sont nécessaires.

Un fluide dit réel en mouvement est le siège de forces de frottement qui s'exercent entre ses couches : celle-ci ne glissent pas librement les unes sur les autres. Ces forces de frottement sont qualifiées de visqueuses. Pour un fluide newtonien, les forces de viscosité par unité de volume sont proportionnelles au laplacien du champ des vitesses d'écoulement. Le coefficient

de proportionnalité est la viscosité dynamique notée  $\mu$  et est une caractéristique du fluide. En plus des forces de viscosité, le fluide est soumis aux autres forces extérieures : la pesanteur, la force de pression.

Lorsque l'on décrit l'état du fluide en suivant une particule fluide dans son déplacement, plutôt que d'observer en un même endroit l'évolution du fluide au cours du temps, on dit que l'on est dans la description lagrangienne du fluide. Dans ce cas, à l'accélération de la particule fluide en un lieu fixe s'ajoute un terme d'advection due à l'écoulement qui représente les forces d'inertie.

En définitive, avec les notations suivantes :  $\rho$  masse volumique,  $\mathbf{v}$  champ vectoriel des vitesses,  $\mathbf{g}$  accélération de la pesanteur,  $P$  champ scalaire de pression, les équations du mouvement du fluide newtonien sont celles de **Navier-Stokes** :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} P + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

le terme  $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$  représente les forces d'inertie.

A noter que ce terme est associé aux effets de convection par beaucoup d'auteurs. Il s'interprète comme le transport de la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$  par le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ . Je préfère utiliser le terme d'advection, considérant que la convection est un phénomène de transport des masses et de la quantité de mouvement par des effets de gradient de densité (ou **forces d'Archimède**, ou flottabilité), lequel résulte de gradients de température ou de concentrations chimiques.

L'estimation de l'importance relative des forces d'inertie et des forces de viscosité est fournie par le **nombre de Reynolds** :

$$Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de viscosité}} = \frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}}{\mu \Delta \mathbf{v}}$$

Si l'on se donne des échelles caractéristiques de longueur  $L$  et de vitesse  $U$ , les forces ci-dessus sont, en ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} &\sim \rho U^2/L \\ \mu \Delta \mathbf{v} &\sim \mu U/L^2 \end{aligned}$$

d'où, posant  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique, le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{U L}{\nu} \quad (2)$$

Selon la valeur de  $Re$  le fluide aura des régimes d'écoulement différents parce que certains effets prédomineront sur d'autres. Ainsi :

-  $Re$  petit : les effets des forces d'inertie sont négligeables devant ceux des forces de viscosité. On peut donc négliger dans (1) le terme non linéaire  $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$  et, dans l'hypothèse de solutions stationnaires, l'équation de Navier-Stokes se réduit en l'**équation de Stokes** :

$$\mathbf{grad} P - \rho \mathbf{g} = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (3)$$

On obtient un  $Re$  petit lorsque le fluide est très visqueux, ou lorsque sa vitesse est très faible (donc lorsque la longueur du conduit est grande, par conservation de la masse), ou lorsqu'il présente des petites dimensions transversales caractéristiques (écoulement dans un capillaire par exemple). Le régime est toujours laminaire, parce que les forces de viscosité dissipent l'énergie au niveau des petites échelles du fluide.

- Re grand : les forces de viscosité sont négligeables devant celles d'inertie. Ce cas arrive dans au moins une des trois conditions : vitesse d'écoulement grande, ou grandes échelles d'écoulement, ou viscosité faible.

Ce n'est que dans ce dernier cas (viscosité négligeable) que l'on peut faire dans (1)  $\mu = 0$ , qui devient alors l'**équation d'Euler** :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \text{grad } P \quad (4)$$

En régime stationnaire, et en intégrant (4) sur une ligne de courant, on obtient l'**équation de Bernoulli** qui signifie la conservation de l'énergie totale sur une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = cste \quad (5)$$

Dans les autres cas qui conduisent à Re grand ( $\mu$  non négligeable mais U ou L grandes) on n'écrit pas (4) mais on conserve (1) : le nombre de Reynolds est grand mais reste fini.

A partir d'un nombre de Reynolds critique, noté  $R_c$ , il arrive que les forces d'inertie, moyennant le transfert par advection due à la nature non linéaire des réponses dynamiques aux forces appliquées, permettent la transmission de l'énergie du fluide entre ses diverses échelles, des plus grandes jusqu'aux plus petites, car n'étant pas freinée par la dissipation visqueuse. Lorsque cela se produit, on est en régime turbulent. Ainsi, pour  $Re < R_c$  l'écoulement est encore laminaire, et pour  $Re > R_c$  il est turbulent. Vers  $Re = R_c$ , le régime est instable. Il n'y a pas de valeur unique de  $R_c$ , elle dépend de la géométrie où se développe l'écoulement. Par exemple, dans un tube cylindrique  $R_c = 2400$  environ. Dans le rapport « [stabilité d'un écoulement de Poiseuille](#) », on sait que pour un écoulement entre deux parois planes rapprochées,  $R_c$  est de l'ordre de 5000 à 6000.

Par la suite, nous verrons que le vase de Mariotte peut servir à vérifier la loi d'écoulement de Poiseuille, ainsi que le théorème de Torricelli. Je vais donc présenter succinctement ces deux résultats :

- Dans un tube cylindrique où circule un fluide visqueux, pour des nombres de Reynolds inférieurs au nombre de Reynolds critique ( $R_c = 2400$ ), on démontre que l'écoulement peut être décrit par la loi de Poiseuille (voir calcul en [annexe 1](#)). Celle-ci énonce que lorsque le fluide est soumis à une charge  $\Delta P$  (différence de pression entre l'amont et l'aval) d'origine quelconque, dans un tube cylindrique de diamètre D et de longueur L, son débit volumique Q est égal à :

$$Q = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} D^4 \quad (6)$$

Si le tube est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et s'il est ouvert aux deux extrémités au contact de la même pression atmosphérique, la charge est due seulement à la force de pesanteur, donc  $\Delta P = \rho \cdot g L \sin \alpha$ , et la relation (6) est remplacée par :

$$Q = \frac{\pi}{128\nu} D^4 g \sin \alpha \quad (7)$$

Lorsque le tube est vertical ( $\sin \alpha = 1$ ), et (7) devient :

$$Q = \frac{\pi g}{128\nu} D^4 \quad (8)$$

- Pour un fluide dont la viscosité est négligeable (grand Re), en régime stationnaire, placé

dans un réservoir suffisamment volumineux pour considérer que le niveau de la surface libre reste pratiquement inchangé, et pouvant s'écouler par un orifice situé plus bas, le théorème de Bernoulli (5) s'applique à chacune de ses lignes de courant. La surface libre et l'orifice sont à la même pression atmosphérique et sont distants de H. Dans ce cas la charge qui est le moteur de l'écoulement est  $\Delta P = \rho g H$ . Si le réservoir est un cylindre vertical de section S et l'orifice est un tube cylindrique de section s et de longueur négligeable, on montre facilement que le débit Q du liquide à la sortie dépend de H, de S et de s selon la relation de Torricelli (voir [annexe 2](#)):

$$Q = s \sqrt{\frac{2 g H}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}} \quad (9)$$

Si  $s \ll S$  (9) donne :  $Q = s \sqrt{2 g H}$ . La hauteur de la surface libre étant supposée constante, le débit de sortie est constant. En réalité le niveau diminue lorsque l'eau s'écoule par l'orifice, et j'ai montré dans l'article « [vidange d'un réservoir](#) » qu'il baisse selon :

$$H(t) = H(0) \left( 1 - \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2 H}} t \right)^2 \quad (10)$$

la hauteur diminuant, la charge  $\Delta P$  diminue aussi, et le débit de sortie diminue jusqu'à s'annuler lorsque  $H = 0$ . Pour travailler avec un niveau constant, et donc un débit de sortie constant, on utilise un vase de Mariotte, comme on le verra.

## 1-2 - Principe du vase de Mariotte

Le principe du vase de Mariotte exploite le théorème de Torricelli.

Sur la figure 1 on représente un récipient dont l'embouchure est fermée par un bouchon et où un orifice est aménagé à la partie inférieure. Le récipient est initialement rempli de liquide sur une hauteur qui peut atteindre la hauteur maximale. Si l'ajutage de l'orifice est suffisamment étroit pour que les forces de tension superficielle interviennent, alors le liquide ne peut pas s'écouler tant que le bouchon ferme le récipient : le poids du liquide ne peut pas vaincre les forces de pression atmosphérique et de tension superficielle qui s'exercent au niveau de l'orifice. J'ai montré dans l'article « [vidange d'un réservoir](#) » que si la section de l'ajutage de l'orifice est plus grande qu'une valeur limite, l'écoulement de l'eau s'effectue même si le bouchon ferme le récipient, cette surface minimale est donnée par

$$s_{min} = \frac{4 \pi A^2}{(\rho g H + P_H - P)^2} \quad (11)$$

où A est la densité d'énergie de surface du liquide (elle vaut  $A = 72,75 \cdot 10^{-3}$  N/m pour l'eau à 20°C) et  $P_H$  est l'éventuelle pression qui règne à la surface libre du liquide dans le récipient fermé si celui-ci n'est pas complètement rempli (s'il est rempli, on a  $P_H = 0$ ). On voit que cette section minimale devient faible pour des hauteurs de liquide, donc de poids, importantes.

Si le bouchon est enlevé, la pression est la même à la surface libre et à l'orifice, donc  $P_H = P$ , et le poids du liquide n'a plus qu'à être plus grand que la force de tension superficielle pour pouvoir s'écouler, et la section minimale requise est plus faible, (11) devient :

$$s_{min} = \left( \frac{2 \sqrt{\pi} A}{\rho g H} \right)^2$$

Exemple : pour une hauteur d'eau de 10 cm, l'orifice doit avoir un diamètre minimal de 0,3 mm pour que l'eau s'écoule lorsque le bouchon est enlevé.

Le vase de Mariotte permet l'écoulement de l'eau même lorsque le bouchon est en place, à condition bien sûr qu'il soit traversé par un tube AB qui plonge dans le liquide jusqu'à une hauteur H de l'ajutage. Le liquide situé à l'extrémité B du tube est à la même pression atmosphérique que l'extrémité extérieure A. Ayant égalité des pressions en B et à l'orifice C, le liquide peut s'écouler et son débit volumique Q à la sortie dépend de la hauteur H comme l'indique la loi de Torricelli (9). Mais, contrairement à un vase ouvert à son sommet, la hauteur de chute H reste constante, puisque au cours de la vidange c'est d'abord le niveau de la masse d'eau située au-dessus de B qui descend. Par conséquent le liquide s'écoule de l'orifice avec un débit Q constant, du moins tant que la surface libre n'atteint pas le niveau de l'extrémité du tube B.

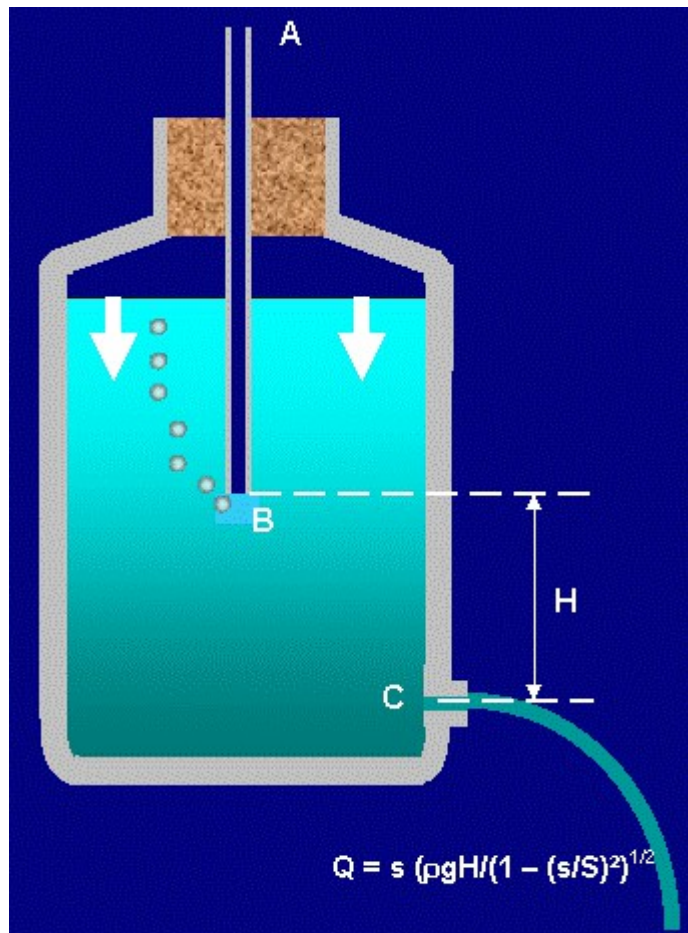


figure 1 – Principe du vase de Mariotte

Tant que le niveau du liquide est au-dessus de celui de B, la vitesse d'écoulement en C est constante. Soit  $H_0$  le niveau de la surface libre à l'instant initial  $t = 0$ . La surface libre se trouve au niveau de B au bout du temps  $t_0 = (H_0 - H)/V(H)$  où  $V(H)$  est la vitesse avec laquelle le niveau diminue. Attention :  $V(H)$  ne se confond pas avec la vitesse d'écoulement en C qui est  $v$  et qui est donnée par  $v = Q/s$  où le débit  $Q$  est donné par (9). Mais  $v$  et  $V(H)$  sont reliées par la conservation du débit :  $V(H)S = vs = Q$ , d'où :

$$V(H) = \frac{s}{S} v = \frac{s}{S} \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}} \quad (12)$$

et le temps  $t_0$  est :

$$t_0 = \frac{S}{s} \frac{H_0 - H}{\sqrt{2gH}} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2} \quad (13)$$

A partir de cet instant la hauteur du liquide diminue avec une vitesse qui n'est plus constante et qui finit par s'annuler lorsque le niveau arrive à celui de l'ajutage C. Notons désormais par  $h$  cette hauteur après l'instant  $t_0$ , on a lors pour  $t \geq t_0$  :

- toujours la conservation du débit :

$$V(h) = -\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}} \quad (14)$$

- la loi de Torricelli en C à chaque instant  $t$  :

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (15)$$

On obtient la loi horaire du niveau  $h(t)$  en résolvant l'équation différentielle (14) compte tenu de la condition initiale :  $h(0) = H$  pour  $t = t_0$

$$h(t) = H \left( 1 + \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2H}} (t_0 - t) \right)^2 \quad (16)$$

et la vitesse d'écoulement à l'ajutage en remplaçant (16) dans (15) :

$$v(t) = \sqrt{2gH} \left( 1 + \frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2H}} (t_0 - t) \right) \quad (17)$$

A noter que la durée de la vidange complète est obtenue lorsque  $h = 0$ , ou ce qui revient au même lorsque  $v = 0$  :

$$t_{max} = t_0 + \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (18)$$

qui est la somme de la durée de la première phase d'écoulement à vitesse constante  $t_0$  et de celle de la deuxième phase où la vitesse diminue donnée par (17).

La figure 2 donne un exemple d'évolution de  $h(t)$  et de  $v(t)$  pour les données suivantes : hauteur initiale du niveau  $H_0 = 30$  cm, hauteur de l'embouchure du tube B,  $H = 20$  cm, rapport des sections de l'orifice et du récipient  $s/S = 0,0004$  : le changement de vitesse s'effectue à  $t_0 = 126$  s et la vidange totale dure environ 500 s.

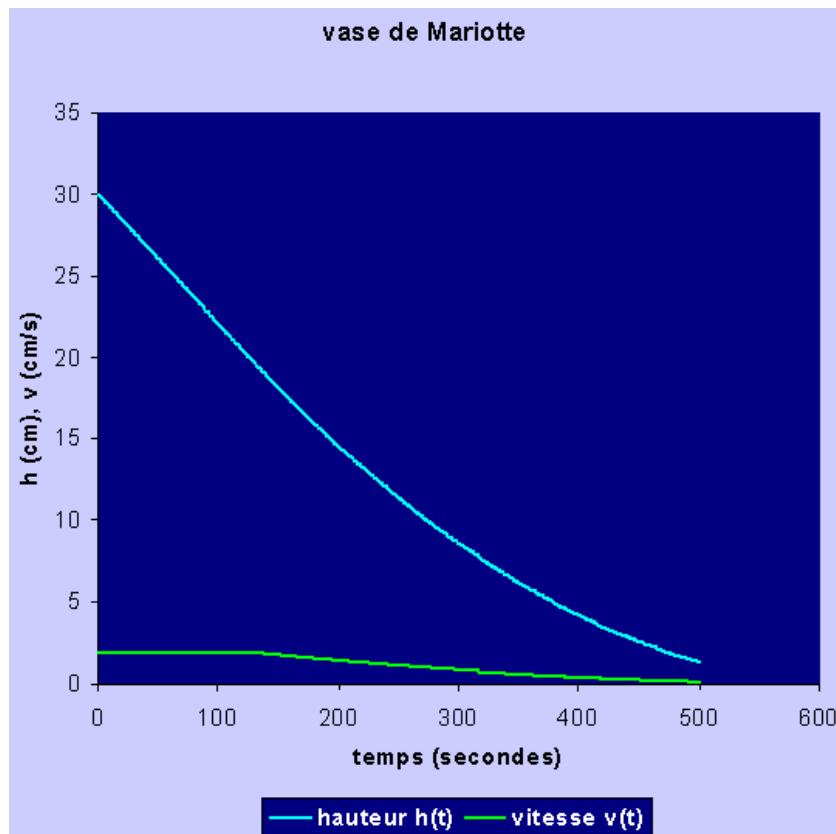


figure 2 – loi de vidange d'un vase de Mariotte

Vous pouvez modifier les paramètres du vase pour obtenir d'autres comportements en cliquant sur ce lien :

faites le calcul vous-mêmes :  
[calcul de vidange d'un vase de Mariotte](#)

## 2 - Application du vase de Mariotte à la vérification expérimentale de la loi de Poiseuille

Pour vérifier la loi de Poiseuille (6) il faut maîtriser la charge  $\Delta P$  qui produit le mouvement du fluide. Cela peut se faire avec un vase de Mariotte dans lequel on fixe la hauteur de chute  $H$  telle que  $\Delta P = \rho g H$ . Pour mettre en oeuvre l'expérience il faut modifier la sortie du récipient de telle sorte que la loi de Poiseuille soit applicable, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds  $Re$  soit inférieur à sa valeur critique  $Rc$ . Aussi, au lieu d'utiliser un ajutage court, on utilisera un tube horizontal de sortie, de section  $s = \pi D^2/4$  ( $D$  : diamètre du tube), et de longueur  $L$  (figure 2), avec une vitesse de sortie  $v$  telles que :

$$Re = vD / \nu < Rc = 2400$$

Le débit dans le tube devant être celui d'un écoulement de Poiseuille donné par (6), quelle doit être alors la longueur minimale du tube pour que le nombre de Reynolds soit plus petit que  $Rc$  ? Réponse :

On a  $Q = sv = v\pi D^2/4$  donné par (6), d'où la vitesse dans le tube :

$$v = \frac{g H D^2}{32 \nu L}$$

Le nombre de Reynolds du tube  $Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{gHD^3}{32\nu^2L}$  doit être inférieur à  $Rc = 2400$ , par conséquent la longueur du tube doit être plus grande que :

$$L_{min} = \frac{gHD^3}{32\nu^2Rc} \quad (19)$$

Exemple : avec une hauteur de chute  $H = 5$  cm et un diamètre du tube  $D = 4$  mm, le tube doit avoir une longueur minimale de 41 cm si l'on veut un écoulement laminaire de Poiseuille à l'intérieur.

Une fois cette condition assurée, la vérification de la loi de Poiseuille ne pose pas de difficultés : on mesure le débit volumique  $Q$  en sortie du tube au moyen d'une éprouvette graduée et d'un chronomètre, et on trace la courbe  $Q = f(1/L)$  qui doit être une droite de pente égale à :

$$\frac{\pi D^4 g H}{128\nu}$$

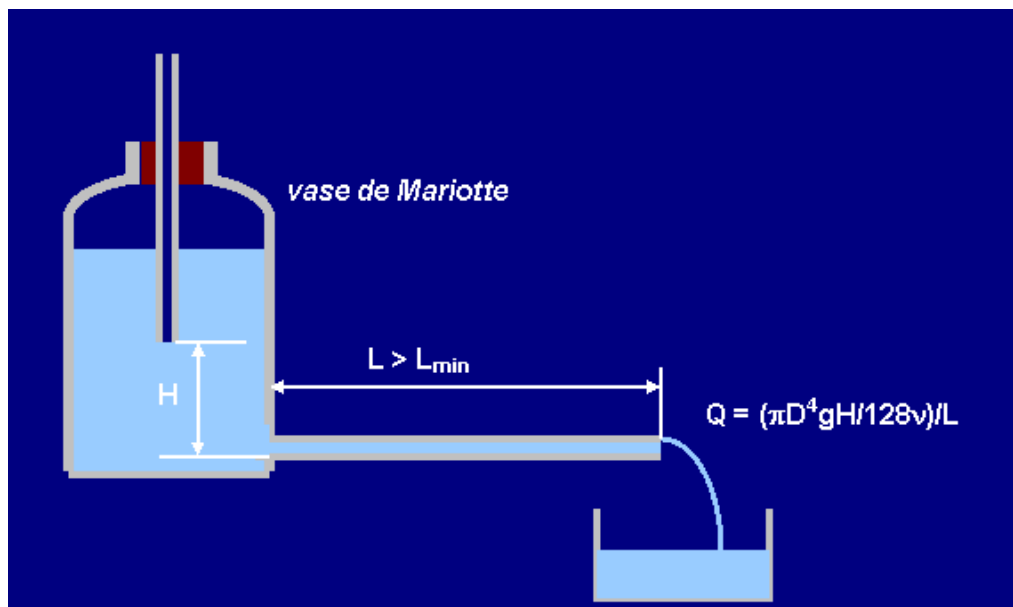


figure 2 – vérification de la loi de Poiseuille avec un vase de Mariotte

### 3 - Premier exemple d'application du vase de Mariotte : lampe à huile ou à pétrole

L'histoire de l'éclairage est riche et passionnante et on consultera des sites très intéressants comme :

- <http://petit-bazar.unige.ch/www/2-objets/sites/lampe/leclai.htm>
- [www.geopedia.fr](http://www.geopedia.fr)

Je me limite donc ici à illustrer le rôle du vase de Mariotte dans l'invention de la lampe du suisse Ami Argand (1750-1803), dit lampe à double courant d'air, en 1783, améliorée et commercialisée en 1784 par le pharmacien Antoine Lavoisier et un autre inventeur Lange.

Il s'agissait de résoudre les problèmes suivants, rencontrés avec les lampes à huile classiques antérieures :

- L'éclairage avec l'huile consistait depuis toujours à se contenter de réaliser la combustion d'une mèche pleine qui s'imbibait de l'huile placée dans un réservoir dans lequel elle trempait. L'huile montait dans la mèche par capillarité. La mèche était



constituée de fils de lin, de coton ou de chanvre torsadés en faisceau.

- Au fur et à mesure que l'huile était consommée, son niveau dans le réservoir diminuait, ce qui allongeait progressivement la durée de diffusion par capillarité dans la mèche, donnant alors une flamme instable et inconstante.
- D'autre part ce procédé donnait une combustion incomplète. Ceci entraînait l'inconvénient de répandre des flocons de suie, une odeur peu agréable et une lumière faible et inégale.

Ces inconvénients firent que l'éclairage par la bougie était alors nettement préféré à celle par lampes à huile (voir mon article « [combustion d'une bougie](#) »). Mais à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, l'intensification de l'éclairage public nécessitait de nouveaux procédés et de remplacer les lampadaires à bougies. Dans un premier temps les lampadaires étaient constitués de lampes à huile classiques placées devant un réflecteur pour réverbérer la lumière vers la rue, dès 1769, prenant alors le nom de réverbères. Les inconvénients listés ci-dessus amenèrent Ami Argand à inventer une lampe où la suie ne se dépose plus sur les vitres et les réflecteurs des réverbères, et donnant une lumière intense et constante. Après le refus de la France, c'est en Angleterre que l'inventeur put expérimenter son dispositif dans l'éclairage des rues. En fait l'origine de l'idée d'Argand remonte à 1780 : à cette époque, Argand venait de créer un grand établissement de distillation près de Montpellier, qui nécessitait un éclairage intense, et c'est là qu'il inventa la lampe à double courant d'air. Son invention devint célèbre à Paris grâce au soutien du trésorier général du Languedoc et des frères Montgolfier. En Angleterre, l'invention d'Argand devint célèbre grâce au manufacturier Hurler, tandis qu'en France Quinquet et Lange s'attribuèrent indûment cette invention en prétextant quelques améliorations qu'ils lui avaient apportées. C'est alors sous la dénomination de « lampe de Quinquet » que la lampe d'Argand fut fabriquée et installée à Paris puis partout en France. Finalement, Argand put faire valoir ses droits et partagea avec Quinquet et Lange le brevet. A partir de là l'invention se répandit dans toute l'Europe, tandis qu'à la révolution française de 1789 l'invention tomba dans le domaine public et les co-inventeurs cessèrent de toucher leurs droits.

Techniquement, la lampe d'Argand-Quinquet-Lange résout les inconvénients signalés plus haut en tenant compte des principes suivants :

- La combustion de l'huile qui imbibe la mèche est aussi régulière que possible lorsque les conditions suivantes sont réunies :

- La mèche est à tout instant saturée d'huile.
- Le volume d'air qui entoure la flamme doit être légèrement en excès pour assurer une bonne combustion sans produire des imbrûlés gazeux ou solides. Une combustion complète est obtenue si l'hydrogène du combustible (huile) se combine avec une partie de l'oxygène de l'air en donnant de la vapeur d'eau, et si le carbone se combine entièrement avec l'autre partie de l'oxygène de l'air pour donner du dioxyde de carbone, ou encore, si le résidu de carbone réagit avec une partie de la vapeur d'eau en donnant de l'acide carbonique, au lieu de rester en suspension et donner de la suie. Pour mémoire : lorsque l'excès d'air augmente, le taux de CO<sub>2</sub> produit diminue tandis que le taux de O<sub>2</sub> augmente.
- La mèche sort suffisamment pour obtenir une flamme assez haute sans toutefois que celle-ci vacille trop.
- La chaleur de la flamme n'altère pas les propriétés de l'huile avant son arrivée au sommet de la mèche.

- L'alimentation en huile doit être aussi régulière que possible pendant la durée du fonctionnement.

Cette dernière condition est satisfaite lorsque, au lieu de disposer le réservoir d'huile au-

dessous du foyer, on le place comme un vase de Mariotte :

Le vase de Mariotte joue le rôle de réservoir principal, et son embouchure de sortie est reliée à un réservoir intermédiaire directement relié à la lampe (figure 3). Lorsqu'un volume donné d'huile est consommé dans la combustion, le volume qu'il libère dans le vase de Mariotte est remplacé par l'air par l'intermédiaire du tube plongeant. L'huile s'écoule dans le réservoir intermédiaire sous l'action de la charge due à la différence de niveau entre le bout du tube et l'orifice de sortie. Ainsi que nous l'avons vu dans la théorie plus haut, tant que la surface libre de l'huile dans le réservoir ne descend pas jusqu'au niveau de l'extrémité du tube, le débit d'huile reste constant et assure une combustion régulière dans la mèche parce que le niveau d'huile dans le réservoir intermédiaire ne change pas.

A noter que le réservoir principal (le vase de Mariotte) est fixé sur une tringle réglable et que cette idée est due à A. Quinquet.

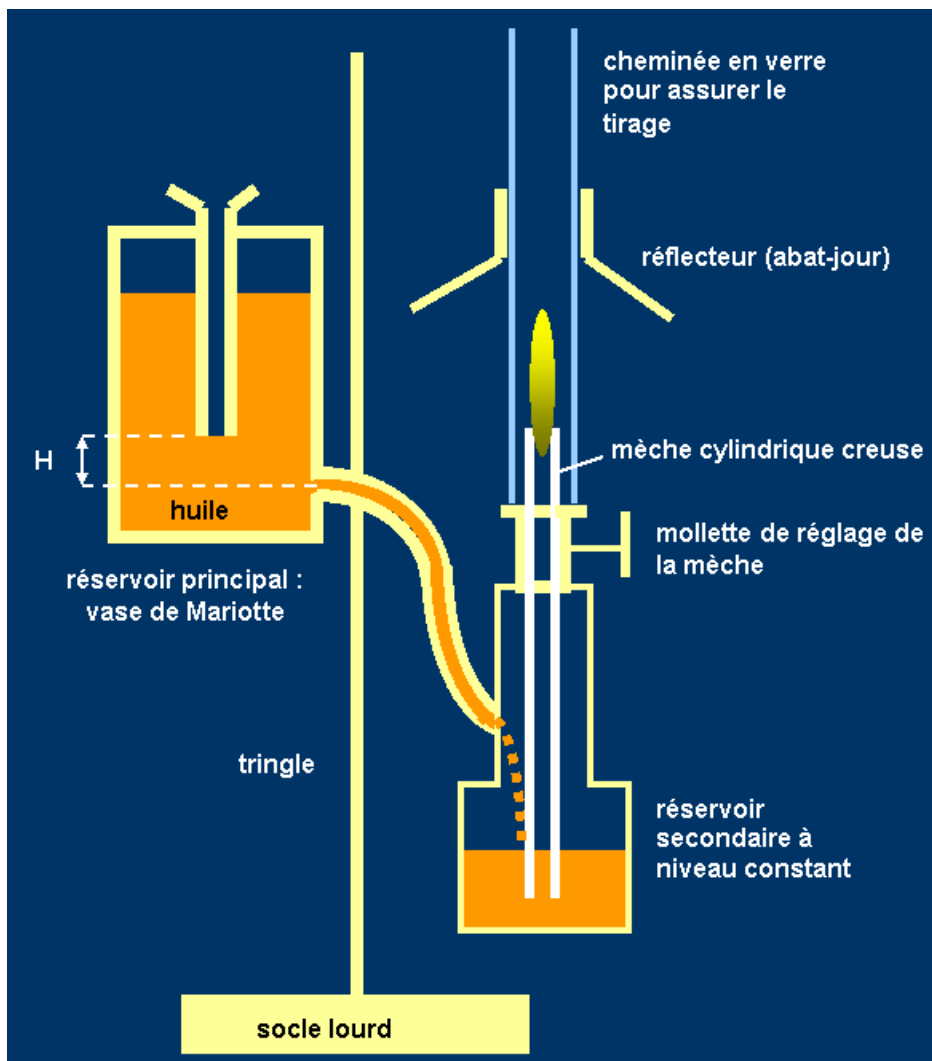


figure 3 – Lampe d'Argand et améliorations de Quinquet-Lange

Les autres principes ci-dessus ont été appliqués de la manière suivante :

- Une cheminée en verre empêche la flamme de vaciller et assure un bon tirage qui favorise la combustion. Lange améliora la cheminée par un rétrécissement juste au-dessus du niveau du bec. En effet, ce rétrécissement introduit une légère incurvation de la paroi de la cheminée au-dessus de la base de la flamme qui a pour effet de rediriger l'air sur la mèche, favorisant ainsi la combustion.
- Le bec est à double courant d'air. Cela veut dire que la mèche, au lieu d'être pleine, est cylindrique et creuse, ce qui favorise la circulation de l'air à l'extérieur et à l'intérieur de la flamme. Des mèches creuses multiples concentriques (deux mèches, ou plus, concentriques)

ont été utilisées également pour obtenir des lumières très intenses, notamment pour les phares à l'usage des navigateurs.

#### 4 - Deuxième exemple d'application du vase de Mariotte : détermination de la conductivité hydraulique des sols avec l'infiltromètre à membrane

La conductivité hydraulique d'un sol mesure la faculté de celui-ci à absorber l'eau à sa surface. Sa détermination est importante pour prédire les risques d'inondation ou la teneur en eau des sols pour les besoins agricoles.

L'infiltration représente la quantité d'eau transférée par les couches superficielles du sol vers les couches plus profondes, lorsque le sol reçoit de l'eau sous forme d'averse ou s'il est recouvert par de l'eau (inondations, etc.). L'eau infiltrée est distribuée d'abord dans les interstices des couches superficielles puis s'enfonce dans le sol sous l'action de la pesanteur et des forces de succion. La mesure du processus d'infiltration permet de déterminer quelle proportion d'eau va s'infiltrer et donc alimenter les nappes souterraines, et quelle autre proportion va rester sur la surface, risquant ainsi d'aggraver les phénomènes d'inondations.

Quelques définitions sont utiles pour comprendre ce problème de mesure :

- le **taux d'infiltration**, noté  $q(t)$ , est le flux d'eau pénétrant dans le sol au niveau de la surface. Unité : mm/h. Si  $S$  est la surface du sol qui reçoit l'eau, le débit volumique est bien sûr :  $Q = qS$ .
- l'**infiltration cumulative**, notée  $I(t)$ , est la quantité d'eau cumulée, en mm, qui s'est infiltrée dans le sol au bout d'une durée  $t$ . On a donc :

$$I(t) = \int_0^t q(t) dt \quad (20)$$

- la **conductivité hydraulique à saturation**  $K_s$  est la valeur limite du taux d'infiltration pour un sol saturé en eau et homogène. Unité : mm/h. De façon générale, au cours du temps la quantité d'eau infiltrée augmente jusqu'à saturer le sol ; par conséquent la vitesse d'infiltration de l'eau arrivant sur le sol diminue car l'eau a de plus en plus de peine à pénétrer dans le sol. Il en résulte que  $I(t)$  et  $q(t)$  ont des évolutions opposées :  $I(t)$  augmente et  $q(t)$  décroît sur la même période jusqu'à tendre vers la valeur limite  $K_s$ .
- la **teneur en eau initiale du sol** mesure son humidité initiale. Elle conditionne les forces de succion et donc le processus d'infiltration. Evidemment, elle évolue avec la quantité d'eau infiltrée donc avec  $I(t)$ . On la note  $T$ . Elle dépend de la charge ou pression, exprimée en hauteur d'eau  $h$  (mm), due à la présence de l'eau sur le sol :  $T = T(h)$ .
- la **capacité d'absorption**, ou infiltrabilité, est le flux d'eau maximal  $q_{\max}$  que le sol peut absorber lorsqu'il est recouvert d'eau. Elle dépend de la teneur en eau initiale du sol. La comparaison de la capacité d'absorption et de la quantité de pluie incidente montre deux régimes de réponse du sol à la pluie :
  - si l'intensité de la pluie est plus faible que la capacité d'absorption, l'eau qui atteint le sol s'infiltré complètement. Mais au cours du temps, comme on l'a déjà signalé, la capacité d'absorption diminue parce que le sol tend vers la saturation. Il arrive donc un seuil où l'intensité de la pluie est égale à la capacité d'absorption du sol.
  - au-delà de ce seuil, l'intensité de la pluie est plus grande que la capacité d'absorption et le surplus d'eau que le sol ne parvient plus à absorber reste en surface : elle donne des flaques, des écoulements et dans certains cas des inondations.
- la **sorptivité**, notée  $\sigma$ , est la capacité du sol à absorber l'eau dans le cas particulier où l'infiltration se produit seulement par gradient de pression. Elle dépend de la teneur en eau

initiale du sol  $T_0$  et de la teneur en eau imposée à la surface  $T$  au cours du temps :  $\sigma = \sigma(T_0, T)$ .

Unité : mm/h comme la capacité du sol.

- le **front d'humidification** (figure 4) est la couche à l'intérieur d'un sol homogène qui délimite la zone située au-dessus d'elle où l'humidité est saturante et la zone, située au-dessous d'elle, où l'humidité diminue fortement (zone profonde sèche). Sa profondeur qui dépend de l'évolution de la quantité d'eau absorbée au cours du temps est notée  $Z_F(t)$ , en mm.

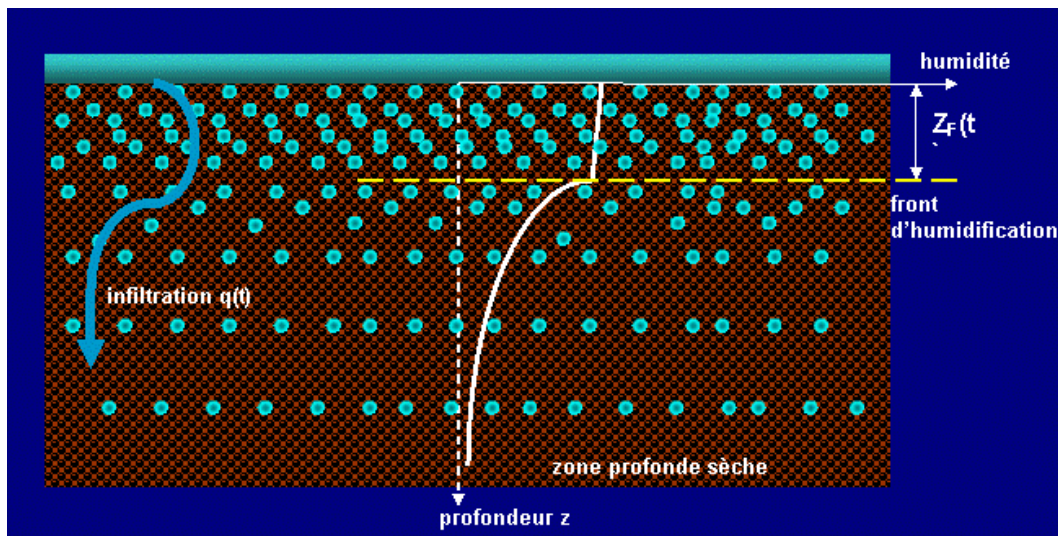


figure 4 – front d'humidification du sol

Plusieurs modèles sont utilisés pour calculer  $q(t)$ ,  $q_{\max}(t)$  ou  $I(t)$ . Citons quelques uns pour mémoire :

- la **formule empirique de Horton**, à trois paramètres  $q_0$  (capacité d'absorption initiale, qui dépend de la nature du sol),  $q_F$  (capacité d'absorption finale) et  $r$  (constante empirique dépendant de la nature du sol) :

$$q(t) = q_F + (q_0 - q_F) \exp(-rt)$$

- la **formule empirique de l'Institut d'Aménagement des Terres et des Eaux** de l'EPFL, à deux paramètres  $q_F$  et  $a$  et  $b$  paramètres d'ajustement empiriques :

$$q(t) = q_F + a \exp(-bt)$$

- la **formule théorique de Philip** :

$$q(t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} + a(h) \quad (21)$$

où  $\sigma(h_0, h)$  est la sorptivité sous une charge  $h(t)$  à l'instant  $t$  et pour une charge initiale imposée  $h_0$ ,  $a(h)$  regroupe les effets d'infiltration par gravité, sous la charge  $h$ , et dépend de la conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ .

- la **formule de Green et Ampt**, basée sur la loi de Darcy :

$$q(t) = K_s \left[ 1 + \frac{h - h_F}{Z_F(t)} \right]$$

où  $h$  charge de pression en surface (potentiel hydrique appliqué),  $h_F$  charge de pression au front d'humidification (en mm),  $Z_F(t)$  profondeur du front d'humidification à l'instant  $t$  (en mm).

La **loi de Darcy** exprime le débit volumique  $Q$  de l'écoulement dans un milieu poreux sous l'effet d'une charge  $\Delta P$  sur une longueur  $L$ , en considérant qu'il suit un régime de Poiseuille dans les interstices :

$$Q = \frac{k}{\mu} S \frac{\Delta P}{L}$$

avec  $\mu$  viscosité dynamique de l'eau infiltrée,  $S$  section de l'échantillon poreux traversé par l'eau, et  $k$  la **perméabilité intrinsèque** du milieu poreux qui, sous l'hypothèse de Poiseuille, est égale à :

$$k = \varphi \frac{D^2}{32}$$

$\varphi$  étant la **porosité**, c'est-à-dire le rapport du volume des pores au volume total de l'échantillon, et  $D$  le diamètre des interstices assimilés à des tubes capillaires.

- une amélioration apportée à la formule de Philip (21) est apportée par Haverkamp et al. en 1994. Avec (20), la formule de Philip donne pour la quantité d'eau cumulée :

$$I(t) = \sigma \sqrt{t} + a(h)t$$

La **formule de Haverkamp** et al. complète celle-ci par :

$$I(t) = \sigma \sqrt{t} + [a(h) + b(h_0, h)]t \quad (22)$$

où l'on a :

$$a(h) = \frac{2-\beta}{3} K(h) \quad (24)$$

avec  $K(h)$  conductivité hydraulique du sol à l'instant  $t$ , sous la hauteur d'eau  $h$  appliquée, et :

$$b(h_0, h) = \frac{\gamma \sigma^2(h_0, h)}{R(T(h) - T(h_0))} \quad (25)$$

avec :

- $\beta$  est une constante valant  $\beta = 0,6$ , et  $\gamma$  est une autre constante qui vaut  $\gamma = 0,75$  ;
- $R$  est le rayon de la surface à travers laquelle s'infiltré l'eau ;
- $h$  est le potentiel hydrique appliqué, c'est-à-dire la pression de succion de l'eau par le sol, exprimée en hauteur d'eau (en m ou mm) et  $h_0$  est le potentiel hydrique initial du sol avant apport de l'eau à sa surface, également en m ou mm. On suppose que le sol est pratiquement sec au départ, donc que la conductivité initiale soit négligeable devant la conductivité au moment de l'apport d'eau :  $K(h_0) \ll K(h)$ .

Le terme  $b$  complète donc le modèle en tenant compte de la présence de l'humidité dans le sol et la géométrie latérale de l'écoulement.

Quel que soit le modèle, la détermination expérimentale de la conductivité hydraulique à saturation  $K_s$  est indispensable. Elle intervient dans  $K(h)$  souvent sous la forme donnée par Gardner :

$$K(h) = K_s \cdot \exp \alpha h \quad (26)$$

où  $\alpha$  est également déterminée expérimentalement.

C'est pour la détermination de  $K_s$  et  $\alpha$  que l'on emploie l'**infiltromètre à disque** qui utilise le principe du vase de Mariotte. En effet ce dispositif consiste à imposer de manière contrôlée le potentiel hydrique  $h$  sur la surface du sol et de mesurer le flux  $q(t)$  (ou le débit  $Q = qS$ ) par l'évolution du niveau d'eau dans l'appareil. Avec un modèle choisi, plusieurs mesures donnent alors les valeurs de  $K_s$  et  $\alpha$ .

Il est commode de procéder avec un écoulement qui a atteint son régime permanent. Pour cela on peut utiliser, à la place de (21) la **formule de Wooding** (1968) qui énonce qu'en régime permanent, sous un potentiel hydrique  $h$  négatif (suction), l'infiltration est la somme d'un flux unidirectionnel vertical égal à la conductivité  $K(h)$  et d'un terme dépendant de la géométrie de l'écoulement dans la direction radiale :

$$q_{\infty} = K(h) + \frac{4\Phi(h, h_0)}{\pi R} \quad (27)$$

$\Phi(h, h_0)$  est le potentiel de flux d'écoulement (en m), égal à :

$$\Phi(h, h_0) = \int_{h_0}^h K(h) dh \quad (\text{en m}^2/\text{s})$$

avec (26),  $\Phi$  devient :

$$\Phi = \frac{K_s}{\alpha} (\exp \alpha h - \exp \alpha h_0) \approx \frac{K_s}{\alpha} \exp \alpha h$$

dans l'hypothèse d'un sol initialement sec (faible teneur en eau initiale). (27) prend alors la forme définitive :

$$q_{\infty} = K_s \left( 1 + \frac{4}{\pi \alpha R} \right) \exp \alpha h \quad (28)$$

En mesurant  $q$  pour diverses hauteurs hydriques  $h$  et en traçant une droite de régression en coordonnées semi-logarithmiques d'équation :

$$\ln q = \alpha h + \ln \left[ K_s \left( 1 + \frac{4}{\pi \alpha R} \right) \right]$$

on détermine  $\alpha$  par la pente de cette droite et  $K_s$  par l'ordonnée du point où elle passe à l'origine.

Le principe de l'infiltromètre à disque pour mesurer  $q$  est représenté sur la figure 5.

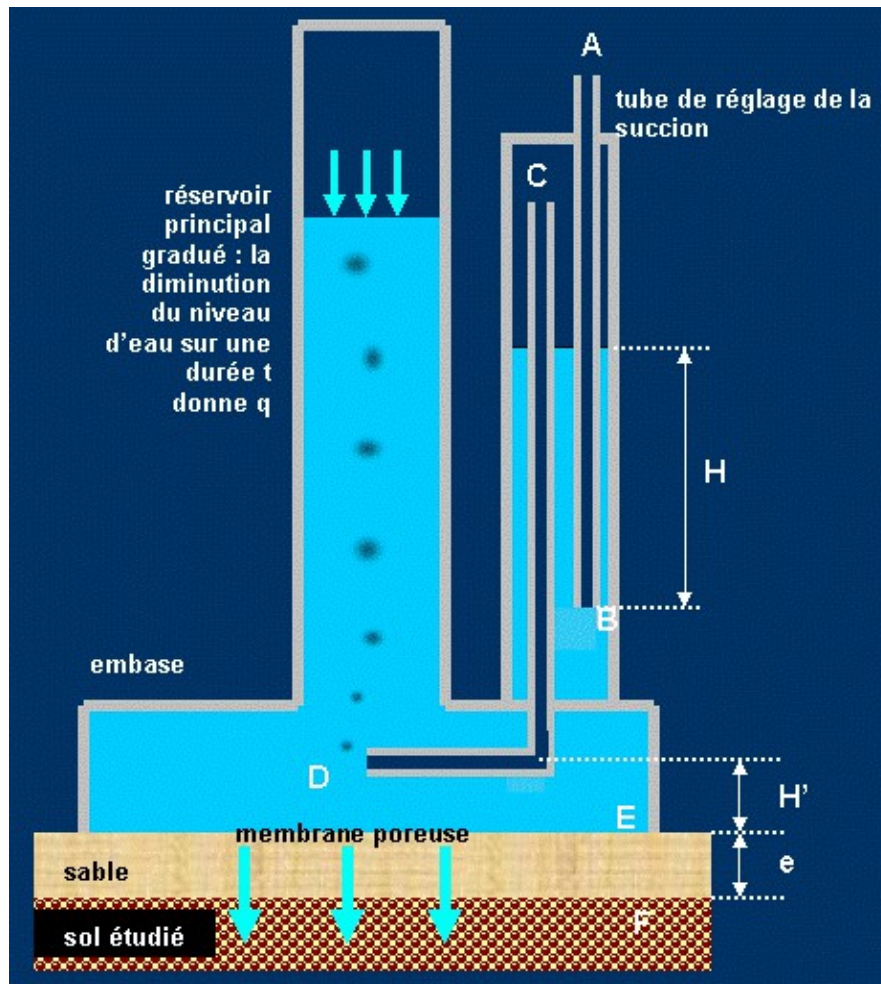


figure 5 – principe de l'infiltromètre à disque poreux

L'eau est apportée à la surface du sol par une pression de succion contrôlée, au niveau du plan F :  $P_F$ , que l'on désigne encore par la hauteur d'eau équivalente  $h$  :  $P_F = \rho gh$  ( $\rho$  masse volumique de l'eau). Si cette pression est négative, on a une force de succion en F, dont l'effet est d'aspirer l'eau contenue dans l'embase qu'alimente un réservoir secondaire jouant le rôle d'un vase de Mariotte, avec une pression imposée correspondant à la hauteur d'eau H. Une condition importante d'emploi du dispositif est qu'il soit posé rigoureusement à l'horizontale de façon que la surface S du disque poreux sur la face inférieure de l'embase soit parfaitement en contact avec le sol. Pour améliorer ce contact et pour assurer un flux directionnel d'eau vers le sol une couche de sable mince est intercalée entre le disque et la surface du sol : son épaisseur est notée « e ».

L'air à l'entrée A du tube AB est à la pression atmosphérique  $P_A = 0$  (la pression atmosphérique est prise comme référence).

La pression en B est la même qu'en A :  $P_B = P_A$ .

Le tube CD, contenu dans le même réservoir secondaire que le tube AB, a son extrémité C à la pression de l'air situé au-dessus de la surface libre, l'autre extrémité D débouche dans le réservoir principal gradué. La pression en D est la même qu'en C :  $P_D = P_C$ .

Comme la surface libre dans le réservoir secondaire, qui est à la pression  $P_C$ , est à la hauteur H par rapport à B, on a aussi :

$$P_B - P_C = \rho gH$$

C'est H qui impose la pression fournie par le vase de Mariotte, mais elle est ajustable en modifiant la position du tube AB.

La sortie D étant à une hauteur fixe H' de la membrane E, la différence de pression entre ces

points est :

$$P_E - P_D = \rho g H'$$

La pression imposée à la surface du sol F est  $P_F$  et on doit tenir compte de l'épaisseur du sable imbibé d'eau pour la calculer :

$$P_F - P_D = (P_F - P_E) + (P_E - P_D) = \rho g e + \rho g H'$$

reste à calculer  $P_D$  : comme  $P_D = P_C$  il vient  $P_B - P_D = \rho g H$  avec  $P_B = P_A = 0$ , d'où :

$$P_F = P_D + \rho g e + \rho g H' = \rho g e + \rho g H' - \rho g H \equiv \rho g h$$

d'où la charge hydrique exprimée en hauteur d'eau :

$$h = e + H' - H \quad (29)$$

Comme l'épaisseur du sable est très faible et que  $H' < H$ , on voit que la charge hydrique est négative : on a bien une pression de succion en F.

Si l'on tien compte de la tension superficielle dans les tubes AB et CD, il est facile de démontrer, en utilisant la relation de Laplace (voir article « vidange d'un réservoir »), que la relation (29) devient :

$$h = e + H' - H - \frac{2A}{\rho g} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \quad (30)$$

où A est la densité d'énergie de surface de l'eau ( $A = 72,75 \cdot 10^{-3}$  N/m), r et r' les rayons des tubes AB et CD.

Lorsqu'une quantité d'eau q par unité de temps s'infiltré dans le sol, l'air situé au-dessus de la surface libre du réservoir secondaire passe par le tube CD et va dans le volume situé au-dessus de la surface libre du réservoir principal. Le niveau d'eau dans celui-ci diminue alors de cette même quantité q que l'on peut repérer par les graduations. Comme B est à la pression atmosphérique, le départ de l'air du réservoir secondaire est immédiatement compensé par de l'air provenant de l'extérieur et passant par AB, de sorte que le niveau de l'eau, et donc la hauteur H, reste constant.

Ordres de grandeurs : h varie de 0 (saturation) à -15 cm (soit -15 mbar).

## Bibliographie

- R. Haverkamp, P. J. Ross, K. R. J. Smettem, J. Y. Parlange: *Three-dimensional analysis of infiltration from the disc-infiltrometer – Physically based infiltration equation*. Water Resources Research (1994), 30, 2931-2935.

- J. P. Vandervaere : *Caractérisation hydrodynamique du sol in situ par infiltrométrie à disques. Analyse critique des régimes pseudo-permanents, méthodes transitoires et cas des sols encroûtés*. Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble – INPG, 1995

- R. Alric : mémoire Master 2 Sciences de l'Univers, Environnement, Ecologie – HydroSciences de Montpellier (HSM), 2006, consultable sur le site

[http://www.master.sduue.upmc.fr/S\\_ech/P\\_hydro/arch/memoires2006](http://www.master.sduue.upmc.fr/S_ech/P_hydro/arch/memoires2006)



## Annexe 1 : démonstration de la loi de Poiseuille dans un tube cylindrique horizontal

Soit un tube cylindrique horizontal de rayon  $R = D/2$ , où l'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux induit par une différence de pression (charge)  $\Delta P$ , d'origine quelconque, le long d'une longueur  $L$  (figure A1). Le gradient horizontal de pression est supposé constant :  $\Delta P/L = \text{cste}$ , ce qui est raisonnable si la paroi intérieure du conduit est lisse.

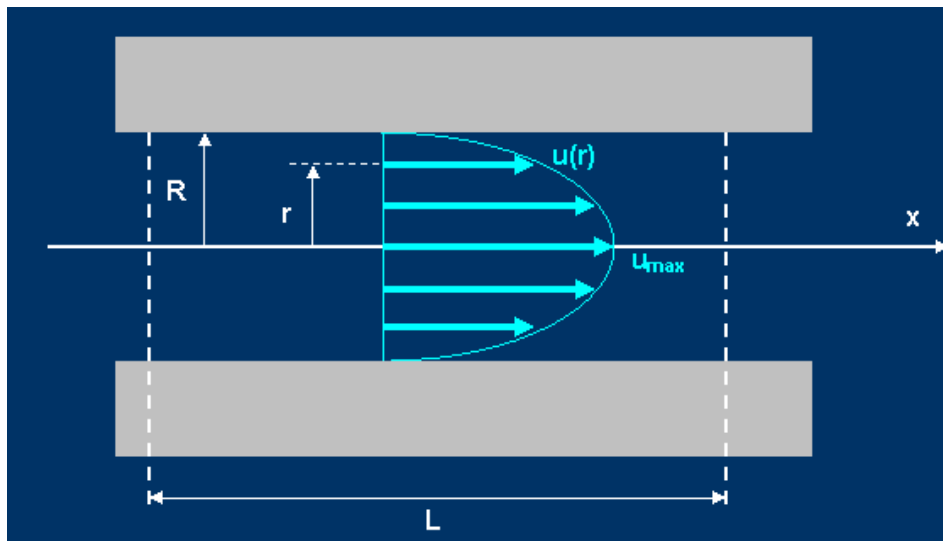


figure A1 – géométrie de l'écoulement de Poiseuille

On admet que le champ de vitesse n'a qu'une seule composante  $u$  suivant l'axe du conduit  $Ox$ , les autres composantes en coordonnées cylindriques  $v$  (vitesse radiale), et  $w$  (vitesse tangentielle) suivant  $r$  et  $\theta$  étant nulles. Les équations de Navier-Stokes en régime stationnaire, qui deviennent les équations de Stokes pour les nombres de Reynolds  $Re = u_{\max} D/\nu$  petits, s'écrivent alors en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho g \cos \theta &= 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Le gradient de pression longitudinal étant constant sur la longueur  $L$ ,  $\partial P/\partial x = -\Delta P/L = \text{cste}$ , la vitesse  $u$  ne dépend que de  $r$ , et présente donc une symétrie cylindrique :  $u = u(r)$ . Les deux dernières équations ne jouent donc aucun rôle dans la détermination de  $u(r)$  et la première devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

La paroi du conduit étant supposée rigide, la vitesse s'annule sur elle :  $u(R) = 0$  pour  $r = R$  ; l'équation précédente s'intègre alors immédiatement en :

$$u(r) = u_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad u_{\max} = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{A1})$$

Le débit volumique est :

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L}$$

soit encore :

$$Q = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} D^4 \quad (\text{A2})$$

qui est la loi de Poiseuille.

## Annexe 2 : démonstration du théorème de Torricelli

C'est une conséquence immédiate de la loi de Bernoulli appliquée à une ligne de courant traversant deux sections de surfaces différentes S et s (figure A2).

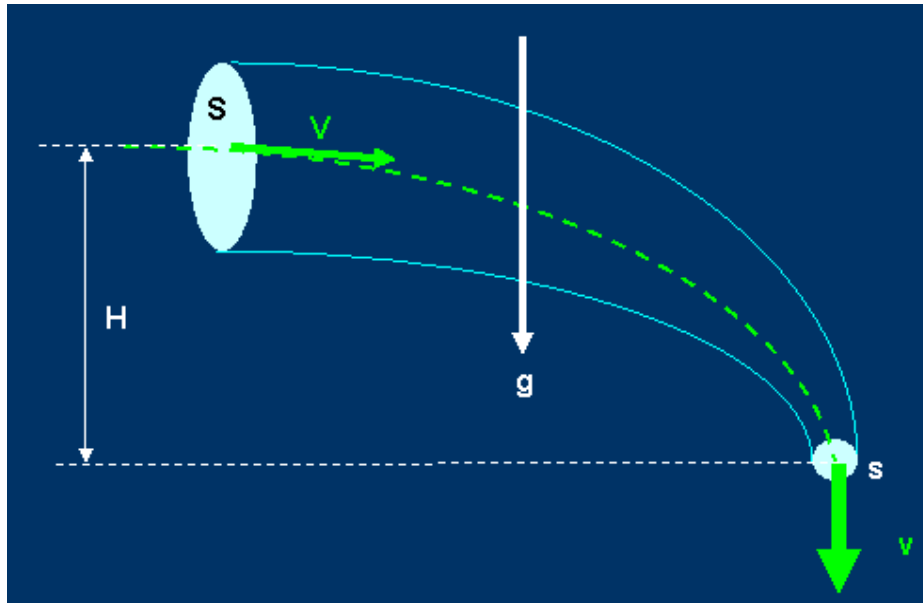


figure A2 – théorème de Bernoulli

On a en effet, entre les sections S et s, pour les pressions P et p, les vitesses V et v :

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g H = p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

La conservation du volume  $Q = SV = sv$  permet d'exprimer V en fonction de v :  $V = (s/S)v$ , et remplaçant dans l'expression ci-dessus on obtient :

$$v = \sqrt{2 \frac{\Delta P + \rho g H}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{s}{S} \right)^2 \right]}} \quad (\text{A2})$$

avec  $\Delta P = P - p$ , différence des pressions régnant en S et en s. Si celle-ci est nulle (ouvertures en équipression) le seul moteur de l'écoulement est la pesanteur et l'expression (A2) se simplifie en la loi de Torricelli :

$$v = \sqrt{\frac{2 g H}{1 - \left( \frac{s}{S} \right)^2}}$$