Vibration d'un élastique

Frédéric Élie
27 février 2004

« Si vous de dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Voici une application simple des cordes vibrantes. On se propose de voir ici quel son fait un élastique si je l'étire progressivement pendant que je le pince? Vous direz peut-être que, puisque le son d'une corde est d'autant plus grave qu'elle est longue, alors si l'élastique s'allonge il devrait produire un son plus grave (basse fréquence), non ?

SOMMAIRE

1 - Une expérience vraiment pas compliquée!…

Prendre un bracelet d'élastique assez fin (éviter les élastiques larges et plats, ils ont le défaut de nécessiter des explications physiques beaucoup plus complexes que ce que je vais dire ci-après!). Le passer par deux clous verticaux, assez espacés, de façon à obtenir deux "cordes" suffisamment tendues. A partir de maintenant, il faut tendre sa bonne oreille (ceux qui ont des écouteurs de baladeurs sur les oreilles, occasionnellement ou bien de jour comme de nuit, sont priés de les retirer pour au moins cette fois s'ils veulent réussir l'expérience!)
Pincer chacune des deux cordes, légèrement, comme pour une guitare. Vous entendez un son, un peu grave et aussi flasque que l'élastique. Maintenant, écarter les clous, deux ou trois centimètres de plus. Rejouer: est-ce plus aigu ou plus grave? Non, même s'il s'agit d'une appréciation plus subjective que celle que donnerait un microphone (dans le doute faites-le en présence de plusieurs témoins). Etirer encore, allez! Deux centimètres de plus (attention de ne pas atteindre la limite de rupture de l'élastique, autrement dit de manière plus basique, qu'il ne vous pète pas au nez!) De nouveau, le pincement ne donne pas un son plus grave ou plus aigu. C'est grave, docteur? Est-ce moi qui suis élastique?

2 - Interprétation de l'expérience

Si, tandis que je change la longueur de l'élastique, la fréquence acoustique qu'il émet lorsque je le pince reste inchangé, c'est qu'il doit bien y avoir quelque chose qui ne varie pas malgré l'évolution des conditions physiques. On sait (mais si, vous savez!) que pour un milieu élastique, c'est-à-dire déformable et compressible, les fréquences de ses modes de résonance sont inversement proportionnelles à ses dimensions caractéristiques (ici la longueur de l'élastique) et directement proportionnelles à la célérité des ondes élastiques associées à ces modes de vibrations, du moins tant qu'on est dans le domaine de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire pour de faibles amplitudes d'excitation. Donc, la fréquence des perturbations générées lors du pincement de l'élastique est de la forme:

$$f = nc/2L$$

avec c célérité de l'onde, L longueur de l'élastique, n un entier dont on ne s'occupera pas par la suite. La fréquence est en Hertz (Hz, nombre d'oscillations par seconde). D'après ce qui précède, il faudrait que lorsque la longueur L augmente, la célérité c augmente tout autant de façon à laisser la fréquence inchangée, autrement dit que c soit proportionnelle à L. Pourtant, par ailleurs, si on utilise des élastiques de diamètres différents et de matériaux de qualité différente, à longueur égale, leurs fréquences sont différentes, mais pour tous on constate la même indifférence de ces fréquences par rapport aux variations de longueur.
Or qui dit allonger un élastique, dit exercer une tension qui croît avec la longueur imposée. Ici la tension est simplement une force (en Newtons N). C'est exactement ce qui se passe, pour des petites élongations, aussi bien pour les élastiques que pour les ressorts, même de façon générale, pour toute structure déformable à l'intérieur de ses limites de déformations permanentes: c'est la ***loi de Young*** qui prévoit que, sous ces conditions, la déformation réversible, l'élongation, est proportionnelle à la force exercée sur le corps:

$$F = ES\,\Delta L/L$$

Expression dans laquelle F désigne la force exercée, S la surface de la section transverse sur laquelle cette force s'applique, L la longueur initiale, Δ L l'élongation de la déformation, et E le module d'Young, caractéristique du matériau, qui a les dimensions d'une force par unité de surface, c'est-à-dire d'une contrainte (N/m^2, ou unités dérivées: kg/cm^2, daN/mm^2, etc). Pour un élastique ou un ressort, cette loi se ramène à une tension T (N) proportionnelle à la variation de longueur:

$$T = - K\,\Delta L$$

(signe "-" car il s'agit d'une force de rappel). La constante K (N/m) s'appelle ***l'élasticité***: tant que l'on est dans le domaine linéaire (où les déformations sont réversibles lorsqu'on supprime la tension), elle reste constante et indépendante de la géométrie du problème.
Il reste alors à espérer que la célérité dépende à la fois de la tension T et des caractéristiques du matériau (sa densité) ainsi que d'un paramètre qui fait intervenir sa section (diamètre), c'est-à-dire sa densité linéique (masse par unité de longueur μ (kg/m)): en effet, comme seule la masse M et le volume V sont conservés quelle que soit la longueur obtenue, la masse linéique diminue lorsque la longueur augmente puisque $\mu = M/L$, donc la section S du fil diminue aussi parce qu'elle liée à la longueur par l'intermédiaire du volume constant :

$$V = LS \text{ donc } S = cste/L$$

En fait, il est exact que la célérité c dépend de la tension T et de la masse linéique μ , donc de la longueur L, comme le montre la théorie et l'expérience:

$$c = (T/\mu)^{1/2} = (TL/M)^{1/2} = cste\,(TL)^{1/2}$$

On est presque content et la joie peut nous pousser à commettre une erreur qui mérite la note de 0/20 dans un devoir de physique!

En effet, on serait tenté de dire, ensuite, que puisque T = KL alors le remplacer dans l'expression de c donnerait tout de suite c = cste x L, donc ce qu'il fallait démontrer… eh bien non! Car T est liée à une variation de L, c'est-à-dire ΔL, et non à L totale, de sorte qu'on aurait en toute rigueur $c = cste \times (L\,\Delta L)^{1/2}$, et c'est pour ça que vous mériteriez un zéro!
Pour obtenir correctement la conclusion il faut raisonner sur la variation de la fréquence f lorsque L et T varient et vérifier si cette variation de f conduit à un résultat nul. Il faut passer par des calculs de variations relatives…

3 - Mais une analyse minutieuse de l'invariance de la fréquence de l'élastique

L'expression à laquelle il faut appliquer le calcul de variation relative concerne la fréquence, compte tenu des relations précédentes:

$$f = c/nL = cste\,(TL)^{1/2}/L = cste\,(T/L)^{1/2} \text{ soit encore: } f^2 = cste \times (T/L)$$

prenons la dérivée logarithmique de cette relation, on obtient:

$$2\,\Delta f/f = \Delta T/T - \Delta L/L$$

ne nous faisons pas abuser par l'écriture des variations: on a $T = K\Delta L$ avec l'élongation ΔL qui reste une grandeur macroscopique finie, tandis que les autres Δ appliqués à f, T et L désignent des variations aussi petites que l'on veut (on dit infinitésimales et on les note par d), il faut donc écrire rigoureusement:

$$2\,df/f = dT/T - dL/L \text{ avec } dT = -K\,d(\Delta L),\ T = -K\Delta L \text{ et } \Delta L = L - L_0$$

ce qui montre que la variation infinitésimale de la longueur dL est du même ordre que la variation infinitésimale de l'élongation finie ΔL, soit: $dL = d(L - L_0) = d\,\Delta L$ puisque la longueur initiale L_0 est une constante de variation toujours nulle. La variation relative infinitésimale de la fréquence devient donc:

$$2\,df/f = dL/\Delta L - dL/L = (1/(L - L_0) - 1/L)\,dL$$

le facteur de dL entre parenthèses n'est jamais nul, mais dès que la longueur finale L est au moins égale au double de la longueur initiale il devient faible (il suffit de poser que la longueur finale est x fois plus grande que l'initiale: $L = xL_0$ avec $x > 1$ et de constater que la fonction obtenue $1/(x(x - 1))$ tend rapidement vers zéro quand x augmente): l'explication de la quasi invariance de la fréquence n'est pas que df = 0 de manière rigoureuse mais repose sur une approximation valide pour des élongations relativement importantes par rapport à la longueur initiale de l'élastique, tout en ne dépassant pas la limite d'élasticité.

Cet article, malgré son objet apparemment simpliste, comporte une ***double leçon pédagogique***:

- d'abord faire bien attention quand on parle de variations des grandeurs: faire la distinction entre ce qui est une loi mettant en jeu une variation finie, et ce qui est une variation infinitésimale, recourir et maîtriser les calculs de variations ou d'erreur en passant toujours par des variations infinitésimales;
- ensuite, toujours être conscient que ce que l'on constate admet une explication physique au prix de certaines hypothèses simplificatrices dont il faut préciser les limites de validité, et que, avant d'émettre une conclusion qui se fonde sur ces explications il faut s'assurer que l'on n'est pas sorti de ces limites!

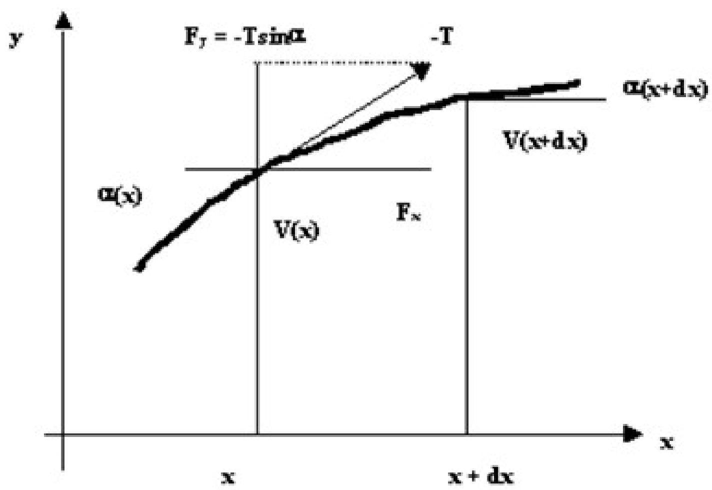
Vous pouvez maintenant aller à la récré et jouer avec les élastiques…

Annexe: formulation théorique de la célérité du son d'une corde élastique

En première approximation, une corde tendue écartée de sa position de repos, puis lâchée (pincement) vibre de manière transverse (dans le sens perpendiculaire (y) à l'axe de la corde) selon des ondes stationnaires (c'est à dire qui vibrent sur place, sans propagation suivant l'axe longitudinal (x) de la corde). Pour obtenir les fréquences propres des vibrations de la corde, on adopte les hypothèses simplificatrices suivantes:

- la corde est supposée homogène, de diamètre négligeable devant sa longueur, et de masse linéique μ (kg/m) constante,
- la raideur de la corde est supposée nulle
- la déformation se fait suivant l'axe (y) c'est-à-dire transverse et représente une perturbation linéaire (du premier ordre) de la position de repos: on la note v(x,t) car elle dépend du temps t et de la position x du point où elle a lieu sur la corde.

Comme on ne considère que la déformation transverse v (x,t), seule interviendra la composante transverse F_y de la tension T exercée sur la corde. Notant α l'angle que fait la corde avec l'axe (x), cette composante est (voir figure suivante):



$$F_y = - T\sin \alpha \approx - T \alpha \approx - T \partial v(x,t)/\partial x$$

Le mouvement de l'élément de corde dx de masse élémentaire dm = μ dx, est régi par la ***loi de Newton***:

$$\mu \partial^2 v(x,t)/\partial t^2 dx = F_y(x) - F_y(x+dx) = - \partial F_y(x)/\partial x . dx$$

et compte tenu de:

$$F_y (x) = -T \partial v(x,t)/\partial x$$

nous obtenons l'équation dévolution de la déformation transverse:

$$\partial^2 v(x,t)/\partial x^2 - (\mu /T) \partial^2 v(x,t)/\partial t^2 = 0$$

qui est une équation d'onde de célérité c telle que:

$$c^2 = T/\mu$$

annoncée au début de cet article. Cherchant des solutions du type:

$$v(x,t) = (Ae^{-jkx} + Be^{jkx})\, e^{j2\pi f t}$$

avec $k = 2\pi f/c$ (f: fréquence), les conditions aux limites traduisent une déformation nulle aux extrémités de la corde x=0 et x=L, à savoir v(0,t) = v(L,t) = 0, et permettent donc de trouver les fréquences propres de la corde:

$$A = -B \text{ et } A\,(e^{-jkL} - e^{jkL}) = 0, \text{ c'est-à-dire: } \sin kL = 0$$

Autrement dit on a une condition d'ondes stationnaires de fréquences propres définies par la relation: $kL = n\pi$, n entier 1, 2, 3, etc…, soit:

$$f_n = n\, c/2L$$

pour n = 1 on a la fréquence fondamentale de la corde, et pour les rangs supérieurs on parle d'harmoniques qui sont multiples entiers de la fondamentale. La fréquence fondamentale est d'autant plus basse (son grave) que la tension est faible, la longueur grande et sa masse linéique élevée. Ainsi, si l'on prend l'exemple d'une guitare, où les cordes sont de même longueur, on constate que les cordes qui donnent les sons graves sont plus denses et plus épaisses que celles qui donnent les aigus, le réglage de la tension avec les clés permet d'ajuster la fondamentale de chaque corde.

Dans la réalité les conditions idéales supposées auparavant ne sont pas souvent vérifiées: la raideur de la corde dépend de sa longueur, de sa section et de la tension, et dans ce cas les fréquences propres sont plus élevées que celles du cas idéal et ne sont pas toujours harmoniques, c'est-à-dire multiples entiers de la fondamentale (on les appelle des partiels, et la corde réelle est anharmonique). En outre, la corde vibre suivant d'autres modes que le seul transverse: mode longitudinal et mode de torsion autour de l'axe de la corde, ce qui entraîne des conditions aux limites de déformations non nulles (c'est surtout vrai pour les cordes attaquées par un archet qui va et vient en frottant: violon, violoncelle…). Bref la modélisation des cordes réelles vibrantes est fort complexe!

Bibliographie

M. Rossi: Électroacoustique - Presses polytechniques romandes, Dunod, 1986

Ph. Morse, U. Ingard: Theoretical acoustics, - McGraw-Hill, New York, 1968

M. Bruneau**:** Introduction aux théories de l'acoustique - Université du Maine, Le Mans, 1983