



Frédéric Elie on
ResearchGate

Vidange d'un récipient

Frédéric Elie
27 février 2004

Copyright France.com

La reproduction des articles, images ou graphiques de ce site, pour usage collectif, y compris dans le cadre des études scolaires et supérieures, est INTERDITE. Seuls sont autorisés les extraits, pour exemple ou illustration, à la seule condition de mentionner clairement l'auteur et la référence de l'article.

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Abstract : Une bouteille au fond de laquelle un orifice a été aménagé se videra, ou ne se videra pas ou presque pas selon qu'on ouvre ou ferme son goulot. On va voir que cette situation peut être prévue par le théorème de Bernoulli, et par d'autres considérations qui font appel à la notion de force de tension superficielle.

SOMMAIRE

- 1 - Présentation de l'expérience
 - 1-1 – Préparations
 - 1-2 – Manipulation
 - 1-3 – Résultat
 - 2 - Analyse et modélisation du phénomène
 - 2-1 - Conditions d'écoulement
 - 2-2 - Loi horaire de la vidange
 - 3 - Faites votre calcul vous-même!
- Références

1 - Présentation de l'expérience

1-1 - Préparations

choisir une bouteille en plastique transparente d'eau minérale, par exemple, de 1,5 litres. Mesurer son diamètre, donc sa section S . Prévoir les dispositifs suivants:

- un support évidé en son centre, sur lequel sera posée verticalement la bouteille, de façon qu'il puisse laisser l'eau s'évacuer par le fond dans un récipient situé au-dessous de ce support
- une règle graduée, de hauteur au moins égale à celle de la bouteille, fixée verticalement et tout contre la bouteille (mettre au point un moyen simple pour la tenir): elle permettra de voir la hauteur de l'eau dans le liquide au cours de son écoulement. Attention: le zéro de la règle doit bien être au niveau de l'orifice du fond de la bouteille (altitude zéro)
- aménager sur le fond de la bouteille un orifice de diamètre régulier et suffisamment petit que l'on bouchera avec de la pâte à modeler par exemple. Noter auparavant le diamètre donc la surface S' de ce trou.

- remplir doucement la bouteille d'eau jusqu'à une hauteur que l'on repère au moyen de la règle. Dans tout ce qui suit j'appellerai H cette hauteur d'eau initiale.
- On pourra s'aider d'un caméscope numérique pour enregistrer image par image la progression et l'altitude de l'eau au cours de sa vidange, sachant que le film se fait au rythme de 25 images par seconde.

1-2 - Manipulation

Laisser le goulot ouvert, sans bouchon, et libérer le trou du fond de la bouteille. L'eau s'écoule. Chronométrer (ou s'aider du caméscope) le temps mis par la surface libre de l'eau à diminuer jusqu'à sa vidange complète: on notera l'altitude h de cette surface libre à chaque seconde (donc pour 25 images écoulées. Noter au final la durée totale de la vidange complète, appelé T par la suite. Tracer la courbe de la loi de vidange $h = f(t)$. On la comparera par la suite avec ce que prévoit la modélisation théorique.

Recommencer la manip avec des hauteurs initiales différentes H et noter chaque fois leurs durées de vidange correspondantes T. La courbe $T = g(H)$ montre une loi d'évolution en racine carrée de la hauteur initiale: $T = \text{cste} \times H^{1/2}$, que la théorie permettra de prévoir (cf. ci-dessous).

Enfin, recommencer la manip avec le bouchon fermé. On constate que l'eau ne s'écoule pas. On verra pourquoi plus loin.

J'ai effectué l'expérience avec une bouteille de 1,5 litre en plastique. Pour déterminer sa section je l'ai remplie d'un volume connu d'eau, et après avoir lu la hauteur de l'eau j'ai déterminé sa section par le rapport VOLUME/HAUTEUR. Précaution à prendre: l'eau doit rester dans la partie de la bouteille où la section est constante (éviter le cône supérieur) pour que ce calcul soit valable. Je trouve comme section: $S = 6,19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Le trou de vidange que j'ai réalisé à la base de la bouteille a pour section $S' = 1,963 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Le rapport des sections est $S/S' = 315,3$: on verra que c'est un paramètre qui intervient dans la loi de vidange. Au déclenchement du chronométrage $t = 0\text{s}$, la hauteur initiale de l'eau est $H = 145 \text{ mm}$.

1-3 - Résultat

Durée de la vidange: $T = 61 \text{ s}$ environ.

Evolution du niveau d'eau au cours du temps h(t): elle est obtenue en lisant pour chaque arrêt sur image la hauteur de l'eau vis-à-vis de la graduation collée sur la bouteille (voir quelques échantillons de photos ci-après). La courbe obtenue est présentée plus loin et est comparée avec la courbe théorique. Premier constat, la courbe expérimentale comprend quelques irrégularités: les valeurs obtenues sur h sont entachées d'erreurs dues entre autres aux imprécisions de lecture, au fait que la bouteille n'est pas parfaitement lisse (accrochage du liquide aux parois), qu'il peut y avoir des effets dus à la viscosité (d'autant plus que j'ai coloré l'eau avec de l'encre pour mieux voir le niveau), etc...



$t = 5 \text{ s}, h = 125\text{mm}$

$t = 15 \text{ s}, h = 97\text{mm}$

$t = 25 \text{ s}, h = 66\text{mm}$

2 - Analyse et modélisation du phénomène

2-1 - Conditions d'écoulement

Dans tout ce qui va être présenté, nous allons voir à quelles conditions l'écoulement peut avoir lieu et quelle est la loi horaire de la vidange.

Un liquide placé dans un réservoir initialement au repos peut être mis en mouvement si l'énergie potentielle à laquelle il est soumis à ses frontières peut se transformer en énergie cinétique. Comme il s'agit d'un fluide, les quantités physiques qui interviennent sont des énergies par unité de volume (densités d'énergie): on considère le comportement d'une particule fluide de volume arbitrairement petit situé à une altitude h comptée du bas vers le haut. Les densités d'énergies potentielles sont d'une part les pressions, et d'autre part les énergies potentielles volumiques dues à la pesanteur. On sait que, pour un système supposé isolé et sans frottements internes, l'énergie mécanique est la somme des énergies cinétiques et des énergies potentielles, et qu'elle est conservée au cours du temps: par conséquent une variation d'énergie potentielle va engendrer une variation d'énergie cinétique, donc de mouvement. Cette situation très idéalisée s'applique aux fluides pourvu que d'une part ils soient dénués de frottements internes (liquides non visqueux) et que, d'autre part, on ne s'intéresse qu'aux mouvements de particules fluides telles que la vitesse soit parallèle en tous points à la trajectoire (c'est-à-dire les lignes de courant où, par définition, on ne tient pas compte des effets convectifs dus au caractère non-linéaire de la dynamique des fluides). Avec ces restrictions, la conservation de l'énergie prend la forme du **théorème de Bernoulli**: celui-ci énonce que si l'on considère deux points du fluide, *situés sur la même ligne de courant*, aux altitudes h et h' , leurs densités d'énergies restent conservées:

$$\frac{1}{2} \rho v(h')^2 + \rho g h' + p(h') = \frac{1}{2} \rho v(h)^2 + \rho g h + p(h)$$

où ρ masse volumique du fluide (pour l'eau elle vaut 1000 kg/m^3), v vitesse de la particule fluide le long de sa ligne de courant, p pression locale aux points considérés, g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Dans chaque quantité de part et d'autre de l'égalité, on reconnaît la densité d'énergie cinétique, la densité d'énergie potentielle de la pesanteur, et la pression, leur somme étant la densité d'énergie totale de la particule fluide. On remarque qu'en l'absence de mouvement (vitesses $v(h)$ et $v(h')$ nulles) on retrouve la loi fondamentale de l'hydrostatique (ou **théorème de Pascal**):

$$p(h') - p(h) = \rho g(h - h')$$

Appliquons la relation de Bernoulli à la colonne d'eau de la bouteille dont la surface libre est à l'altitude $h' = H$ et l'orifice de vidange est à l'altitude $h = 0$. La pression $p(H)$ régnant au niveau de la surface libre dépend du fait que la bouteille soit fermée par le bouchon ou non. La pression $p(0)$ au niveau de l'orifice est la pression atmosphérique P ($P = 1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$). Toute particule fluide située à la surface libre est *localement au repos*, par conséquent $v(H) = 0$ (attention: ceci ne doit pas être confondu avec le fait que le niveau de la surface libre puisse bouger au cours de la vidange: dans ce cas il s'agit d'un déplacement en masse du fluide, conséquence de la conservation du débit, et non plus du mouvement d'une particule considérée localement par rapport à l'ensemble du fluide ! c'est pourquoi j'ai dit "*localement au repos*"). La vitesse de vidange au niveau de l'orifice s'obtient alors immédiatement:

$$v(0) = (2(p(H) - P + \rho gH)/\rho)^{1/2}$$

Une première condition pour que l'écoulement ait lieu est par conséquent que $v(0)$ soit positive et réelle, donc que la pression au-dessus de la surface libre $p(H)$ soit suffisante:

$$p(H) > P - \rho gH$$

il faut donc une pression à la surface libre d'autant plus élevée que la hauteur H de la colonne d'eau est petite: mécaniquement, cela signifie que, pour vaincre la force opposée au fluide par la pression atmosphérique à son orifice, il faut un poids volumique suffisant de cette colonne. A la limite, pour une colonne de 10 mètres de hauteur d'eau, son poids volumique annule la pression atmosphérique qui s'y oppose et une surpression à la surface libre n'est pas nécessaire pour obtenir l'écoulement. Dans le cas de mon expérience, bouchon fermé, la hauteur est bien évidemment très inférieure à 10 mètres et la pression siégeant dans l'air emprisonné au-dessus de la surface libre est très nettement insuffisante pour compenser la pression atmosphérique agissant sur l'orifice: l'écoulement est donc impossible, le liquide est retenu par la poussée de l'air extérieur.

Bien sûr, si le bouchon est enlevé la surface libre est au contact de l'air extérieur et est donc soumise à la même pression atmosphérique P que pour l'orifice: $p(H) = P$, et la vitesse de l'eau qui s'écoule par l'orifice est liée à la seule hauteur initiale H :

$$v(0) = (2gH)^{1/2}$$

Revenons au cas où le bouchon est fermé. On vient de voir que l'écoulement est impossible. Tout au moins en première approximation, car tout le monde se doute bien que si le trou de vidange devient suffisamment important l'écoulement finira par s'effectuer quand même. La section S' de l'orifice doit avoir lui aussi un rôle à jouer dans le cas bouchon fermé. Quelle force la fait entrer en ligne de compte? Il s'agit de la force capillaire ou tension superficielle. Elle est liée au fait que pour faire varier la surface externe d'un liquide d'une quantité dS il faut dépenser une énergie dE qui lui est proportionnelle, par l'intermédiaire d'une quantité A appelée densité d'énergie de surface:

$$dE = A dS$$

la grandeur A s'exprime en J/m^2 ou encore en N/m . Physiquement, l'énergie qu'il faut déployer pour déformer la surface trouve son origine dans les interactions entre les molécules du même liquide et entre celles-ci et les molécules du milieu au externe au contact du liquide. L'explication détaillée fait appel aux **forces de Van der Waals** et aux théories moléculaires des états liquides, qui ne sont pas à l'ordre du jour de cet article (voir références à la fin)! L'énergie de déformation est le travail d'une force, appelée force de tension superficielle (f), le long d'un parcours perpendiculaire au pourtour de la surface (dr), ainsi:

$$dE = f.dr = A dS$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, la surface de l'eau à l'orifice est en équilibre si le bilan des forces auxquelles elle est soumise est nul. Ce bilan comprend: la force de pression atmosphérique exercée vers l'intérieur de la bouteille, la force de tension superficielle également dirigée vers le haut, le poids de la colonne d'eau et la force de pression due à la surface libre, ces deux dernières forces s'exerçant vers le bas:

$$F = PS' + f - (\rho gH + p(H))S'$$

Cette résultante F est négative (force résultante exercée vers le bas, donc mouvement de l'eau vers le bas: écoulement) si la tension superficielle est insuffisante:

$$f < (\rho gH + p(H) - P)S'$$

Or la tension superficielle, d'après ce qui est dit plus haut, est égale à: $f = A dS'/dr$.

Pour une surface de sortie supposée circulaire de rayon (r) un accroissement radial de la surface $dS' = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$, va donc correspondre à une tension superficielle:

$$f = 2\pi Ar = (4\pi A^2 S')^{1/2}$$

l'inégalité ci-dessus fait alors apparaître une surface minimale de l'orifice au-delà de laquelle la tension superficielle ne peut plus empêcher l'écoulement:

$$S' > S'_{\min} = 4\pi A^2 / (\rho gH + p(H) - P)^2$$

Cette condition est conforme au "bon sens" (encore qu'en science celui-ci est souvent mis en défaut !): la surface minimale est faible si la tension superficielle A est faible et si la colonne d'eau est importante (H élevée). Dans le cas où le bouchon est enlevé $p(h) = P$ et par conséquent la surface minimale ne dépend plus que de A et de H:

$$S'_{\min} = (2\pi^{1/2} A / \rho gH)^2$$

Application numérique: avec $H = 145 \text{ mm}$, et $A = 72,75 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ pour l'eau à 20°C , on trouve $S'_{\min} = 3,29 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ soit un trou de diamètre $0,2 \text{ mm}$. Avec un orifice de diamètre 5 mm , notre bouteille permet aisément l'écoulement de l'eau.

2-2 - Loi horaire de la vidange

Le niveau d'eau H diminue au fur et à mesure de l'écoulement donc est variable avec le temps. Il s'obtient par conservation du débit à l'altitude H et au point de vidange $h = 0$. La masse d'eau qui s'écoule en $h = 0$ à travers la section du trou S' à la vitesse $v(0)$ par unité de temps est la même que celle qui se déplace en H à la vitesse $V(H)$ à travers la section S de la bouteille pendant cette même unité de temps, on a donc:

$$v(0)S' = V(H)S$$

je précise qu'ici la vitesse de vidange désigne la variation par unité de temps de l'altitude de la surface libre $V(H) = -dH/dt$. A partir de l'expression donnant $v(0)$ on peut donc établir l'équation différentielle sur $V(H)$ pour le cas général où la pression à la surface libre est différente de la pression atmosphérique:

$$dH/dt = - S'/S (2gH)^{1/2} (1 - (P - p(h))/\rho gH)^{1/2}$$

qui s'intègre immédiatement, compte tenu que pour $t = 0\text{s}$ on a $H = H_0$ hauteur initiale:

$$(H - (P - p(h))/\rho g)^{1/2} = - 1/2 (S'/S)(2g)^{1/2} t + (H_0 - (P - p(h))/\rho g)^{1/2}$$

remarquer que pour la bouteille fermée la hauteur du niveau de surface libre ne peut pas descendre au-dessous d'un minimum:

$$H_{\min} = (P - p(h))/\rho g$$

au bout d'une durée maximale:

$$t_{\max} = (S/S'g) (2gH_0 - (P - p(h)))^{1/2}$$

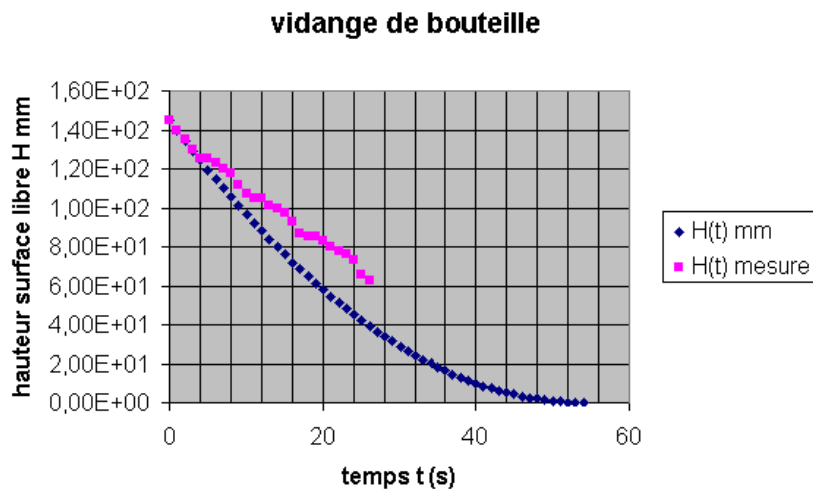
Pour la bouteille ouverte les quantités précédentes deviennent respectivement $H_{\min} = 0$ (vidange complète) et le temps de la vidange:

$$t_{\max} = (S/S')(2H_0/g)^{1/2}$$

la durée de vidange est d'autant plus longue que le trou a une section faible et que la hauteur initiale est grande (ce qui paraît logique!). Toujours pour la bouteille ouverte, la loi horaire ci-dessus devient:

$$H(t) = H_0 (1 - (S'/S)(g/2H_0)^{1/2} t)^2$$

La courbe ci-dessous donne l'évolution théorique comparée à la courbe expérimentale que j'ai obtenue avec les données indiquées au départ. Le temps de vidange réel (61 s) est supérieur à la valeur théorique (54 s) car les frottements et les irrégularités entrent probablement en jeu et de nombreuses erreurs dues au procédé interviennent (lecture, chronométrage, etc): l'erreur relative est de 11,5 %.



Remarque: la loi horaire de vidange n'est pas linéaire en temps. Si l'on veut que le niveau de la surface libre soit proportionnel au temps écoulé, autrement dit si l'on veut que l'écoulement dans le réservoir représente directement un temps, il faut choisir une section du réservoir qui varie en fonction de la hauteur H à laquelle on s'y place $S = S(H)$: c'est le principe du sablier. Vous avez probablement remarqué que la forme du sablier n'est ni un cylindre, ni un cône, mais présente un profil galbé. Voyons cela, en nous plaçant dans la configuration réservoir ouvert. Reprenons l'équation différentielle qui permet de déterminer l'évolution de la surface libre en fonction du temps:

$$dH/dt = - S'/S(H) (2gH)^{1/2}$$

une hauteur d'eau proportionnelle au temps se traduit par le fait que la vitesse de vidange est constante: $dH/dt = \text{cste} = C$; il s'ensuit que la section du réservoir $S(H)$ à une altitude H dépend de celle-ci selon une loi en racine carrée:

$$S(H) = S'/C \cdot (2g)^{1/2} H^{1/2} = \text{cste} \times H^{1/2}$$

Si la section du réservoir est une surface circulaire de rayon R ($S(H) = \pi R^2$), celui-ci décroît avec l'altitude selon une loi:

$$R(H) = \text{cste} \times H^{1/4}$$

C'est un paraboloïde de révolution, forme que l'on trouve généralement pour les sabliers.

3 - Faites votre calcul vous-même!

En cliquant sur le lien suivant vous pourrez tracer la courbe de la loi horaire de vidange en choisissant S/S et H initiale. Vous obtiendrez aussi la durée de vidange. Les calculs sont effectués pour un réservoir en équilibre avec la pression atmosphérique (ouvert).

[Calcul de la loi horaire de vidange](#)

Références

Michel Rieutord: Une introduction à la dynamique des fluides, Masson, Paris, 1997

Pierre-Gilles De Gennes, Françoise Brochard-Wyart, David Quéré : Gouttes, bulles, perles et ondes, Belin 2002